

Всероссийская олимпиада школьников по математике,

муниципальный этап, 2018 г

11 класс

1. Для некоторого острого угла  $x$  выполнено равенство  $\sin 2x = \frac{7}{9}$ . Вычислите значение выражения  $\sin x + \cos x$ . Ответ не должен содержать корней и степеней с дробным показателем.
2. Из городов Алексеевск и Борисовск навстречу друг другу одновременно выехали два автомобиля и проехали весь путь между городами не останавливаясь с постоянными скоростями. Известно, что встретились они через 40 минут после отправления, а автомобиль, выехавший из Алексеевска, проехал весь путь между городами на 39 минут быстрее, чем второй автомобиль. Найдите время, затраченное на весь путь каждым автомобилем.
3. Парабола с уравнением  $y = ax^2 + bx + c$  пересекает ось абсцисс в точках  $A$  и  $B$ , ось ординат в точке  $C$ , а её вершина находится в точке  $F$ . Пусть  $K$  и  $M$  – точки пересечения прямых  $AC$  и  $BC$  с осью симметрии параболы. Докажите, что  $F$  – середина отрезка  $KM$ .
4. Два простых (возможно, совпадающих) числа  $p$  и  $q$  обладают следующим свойством:  $3p + 1$  делится на  $q - 2$ , а  $3q + 1$  делится на  $p - 2$ . Найдите все такие пары  $p$  и  $q$  и докажите, что других нет.
5. Окружности  $S_1$  и  $S_2$  касаются внутренним образом в точке  $A$  ( $S_2$  лежит внутри  $S_1$ ). Хорда  $BC$  окружности  $S_1$  пересекает окружность  $S_2$  в точках  $D$  и  $E$  ( $D$  лежит на отрезке  $BE$ ). Докажите, что углы  $\angle BAD$  и  $\angle CAE$  равны.

***Все ответы необходимо обосновать!***