Всероссийская олимпиада школьников по математике,

муниципальный этап, 2016 г,

9 класс

1. Ученик написал на доске рядом два числа. Справа от них он написал третье число, которое равно сумме первого и второго. Затем четвёртое число, равное сумме второго и третьего и т.д., пока на доске не появилось 6 чисел. Сложив эти 6 чисел, он получил число 2016. Каким было пятое число?

Ответ: 504.

Решение. Пусть x – первое число, y – второе. Тогда третье равно $x+y$, четвёртое равно $x+2y$, пятое равно $2x+3y$, шестое равно $3x+5y$. Сумма всех шести чисел равна

$$8x+12y=4(2x+3y),$$

т.е. в 4 раза больше пятого числа. Следовательно, пятое число равно $2016:4=504$.

Критерии.

Обоснованно получен верный ответ – 7 баллов.

Верно получена формула для суммы 6 чисел, не было замечено, что эта сумма в четыре раза больше пятого числа; решение не доведено до конца или получен неверный ответ – 1 балл.

Верно получена формула для суммы 6 чисел, полученное выражение приравнено к 2016 и подобраны значения x и y, удовлетворяющие этому равенству, после чего эти значения подставлены в формулу для нахождения пятого числа и получен верный ответ – 3 балла.

---

2. Назовём целое двузначное число *интересным*, если оно делится без остатка на сумму своих цифр. Найдите все интересные числа и докажите, что других таких чисел нет.

Ответ: 10, 12, 18, 20, 21, 24, 27, 30, 36, 40, 42, 45, 48, 50, 54, 60, 63, 70, 72, 80, 81, 84, 90.

Решение. Пусть искомое интересное число имеет вид $\overline{ab}=10a+b$, где a и b – целые числа, такие, что $1\le a\le 9$, $0\le b\le 9$. Тогда из условия задачи имеем равенство

$$10a+b=k(a+b). \qquad (1)$$

Запишем это равенство в виде $(k-1)b=(10-k)a$. (2)

Из положительности числа a следует, что $10a + b > a + b$, т.е. $k \geq 2$, а из неотрицательности b следует, что $k \leq 10$. Заметим, что если тройка чисел (a, b, k) является решением уравнения (2), то тройка чисел $(b, a, 11 - k)$ также является его решением $(2 \leq k \leq 9)$. Поэтому достаточно проверить значения k, равные 2, 3, 4, 5, 10.

Если $k = 2$, то уравнение (2) принимает вид $b = 8a$, тогда $a = 1$, $b = 8$, $\overline{ab} = 18$.

Если $k = 3$, то уравнение (2) принимает вид $2b = 7a$, тогда $a = 2$, $b = 7$, $\overline{ab} = 27$.

Если $k = 4$, то уравнение (2) принимает вид $3b = 6a$, т.е. $b = 2a$. Тогда возможны 4 случая:

$a = 1,\ b = 2,\ \overline{ab} = 12;\ a = 2,\ b = 4,\ \overline{ab} = 24;\ a = 3,\ b = 6,\ \overline{ab} = 36;\ a = 4,\ b = 8,\ \overline{ab} = 48$.

Если $k = 5$, то уравнение (2) принимает вид $4b = 5a$, тогда $a = 4$, $b = 5$, $\overline{ab} = 45$.

Меняя местами цифры в найденных интересных числах, получаем ещё 7 интересных чисел: 81, 72, 21, 42, 63, 84, 54.

Если $k = 10$, то уравнение (2) принимает вид $9b = 0$, т.е. $b = 0$, a – любое положительное однозначное число. Получаем ещё 9 интересных чисел: 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90. Всего получилось 23 интересных числа.

Критерии.

Обоснованно получен верный ответ – 7 баллов.

Верный ответ получен перебором всех двузначных чисел, что продемонстрировано в решении, – 7 баллов.

Верный ответ без обоснования – 1 балл.

Получено уравнение (1) или (2), при этом решение не завершено либо получен неверный ответ – 1 балл.

Получено уравнение (2) и произведён перебор значений k, при этом был пропущен случай, когда $k = 10$, и в ответе присутствуют все интересные числа, кроме оканчивающихся на 0, и нет лишних чисел, – 3 балла.

В решении говорится о том, что был проведён полный перебор всех двузначных чисел, но этот перебор не продемонстрирован или продемонстрирован не полностью, при этом получен верный ответ – 1 балл.

В результате перебора всех двухзначных чисел (либо вообще без обоснования) найдены не все интересные числа и/или в ответ включены лишние числа – 0 баллов.

---

3. Из деревни в сторону паромной переправы выехал велосипедист с такой скоростью, чтобы успеть приехать на переправу точно к отправлению парома. Проехав 4 минуты, он остановился, чтобы помочь вытащить застрявший автомобиль. Потратив на это 10 минут, он поехал на 5 км/ч быстрее, чем до остановки, и успел приехать точно к отправлению парома. С какой скоростью ехал велосипедист после остановки, если расстояние до паромной переправы равно 15 км?

Ответ: 23 км/ч.

Решение.

Пусть x км/ч – скорость велосипедиста после остановки, тогда $x-5$ км/ч – первоначальная скорость велосипедиста. Время, которое велосипедист планировал потратить на путь до переправы, равно $\frac{15}{x-5}$ ч. Переведя минуты в часы, получим, что 4 минуты равны $\frac{1}{15}$ часа, а 10 минут равны $\frac{1}{6}$ часа. Всего же с момента выезда из деревни до продолжения движения после остановки прошло $\frac{7}{30}$ часа, а так как на весь путь было потрачено запланированное время, то остаток пути после остановки велосипедист проехал за $\left(\frac{15}{x-5}-\frac{7}{30}\right)$ ч. Поскольку путь равен произведению времени и скорости, то до и после остановки велосипедист проехал расстояния, равные $\frac{1}{15}(x-5)$ км и $\left(\frac{15}{x-5}-\frac{7}{30}\right)x$ км соответственно. Так как сумма этих расстояний равна расстоянию от деревни до переправы, то получаем уравнение

$$\frac{1}{15}(x-5)+\left(\frac{15}{x-5}-\frac{7}{30}\right)x=15. \qquad (1)$$

Заметим, что $x-5$ не равно нулю. Домножив обе части равенства на общий знаменатель, после приведения подобных слагаемых придём к квадратному уравнению $x^2-3x-460=0$.

Решив его, найдём корни:

$x=-20<0$ – не удовлетворяет условию задачи;

$x=23>0$ – удовлетворяет условию задачи.

Таким образом, скорость велосипедиста равна 23 км/ч.

Критерии.

Обоснованно получен верный ответ – 7 баллов.

Правильный ответ без обоснования – 0 баллов.

Верно получено уравнение (1), но не решено или решено неверно – 2 балла.

Верно получено квадратное уравнение, но не решено либо решено неверно из-за неверно найденного дискриминанта – 3 балла.

Верно получено квадратное уравнение и правильно вычислен его дискриминант, но не извлечён корень, при этом не записаны корни квадратного уравнения или записаны неверно – 4 балла.

Верно получено квадратное уравнение и правильно вычислен его дискриминант, но не извлечён корень, при этом верно записаны корни квадратного уравнения с использованием радикала, но не произведён отбор корня – 5 баллов.

Верно получено квадратное уравнение и правильно вычислен его дискриминант, но не извлечён корень, при этом верно записаны корни квадратного уравнения с использованием радикала и произведён отбор корня – 7 баллов.

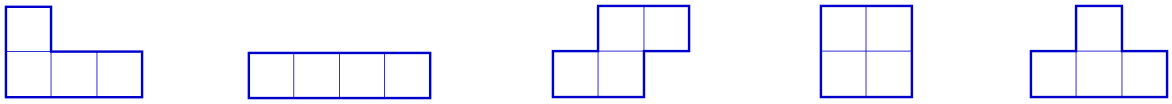
---

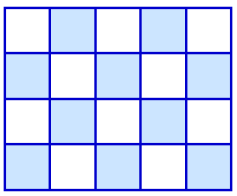
4. Петя утверждает, что сможет разрезать клетчатый прямоугольник 5×4 на 5 различных фигур, состоящих из четырёх клеток. Сможет ли он это сделать? Фигуры считаются различными, если их нельзя совместить наложением, используя поворот и переворачивание. Фигуры должны быть цельными, т.е. не должны распадаться на части.

Ответ: нет.

Решение.

Всего существует 5 фигур из четырёх клеток (тетрамино), изображённых на рисунке.





Предположим, что такое разрезание возможно. Раскрасим клетки исходного прямоугольника в два цвета в шахматном порядке, как показано на рисунке. Тогда после разрезания в первых четырёх фигурах будет по две тёмные и две белые клетки, а в правой фигуре либо три тёмные клетки, либо одна тёмная. Тогда во всех пяти фигурах количество тёмных клеток будет нечётным, а в исходном прямоугольнике это количество чётно (по 10 тёмных и белых клеток). Получили противоречие. Следовательно, разрезание невозможно.

Критерии.

Приведено полное доказательство – 7 баллов.

Рассмотрены различные случаи расположения четырёхклеточных фигур в прямоугольнике, после чего сделан вывод о невозможности разрезания – 0 баллов.

---

5. На окружности ω с центром в точке O выбрана точка A. Окружность ω_1 с центром в точке A пересекает окружность ω в точках B и C (радиус окружности ω_1 меньше радиуса окружности ω). Прямая CO вторично пересекает окружность ω_1 в точке D, а прямая AD вторично пересекает окружность ω_1 в точке E. Докажите, что $BC = CE$.

Решение. Проведём отрезки OA и BC. Пусть P – точка их пересечения. Обозначим угол $\angle ACB$ за α. Так как треугольник ABC – равнобедренный, то $\angle ABC = \angle ACB = \alpha$. Так как центральный угол $\angle AOB$ опирается на дугу AB и на эту же дугу опирается вписанный угол $\angle ACB$, то $\angle AOB = 2\angle ACB = 2\alpha$. Аналогично $\angle AOC = 2\alpha$. Треугольник BOC равнобедренный и $\angle COP = \angle BOP = 2\alpha$, т.е. OP – его биссектриса, следовательно, она также является высотой и $\angle OPC = 90°$. Тогда $\angle OCP = 90° - \angle COP = 90° - 2\alpha$. Так как ED – диаметр окружности ω_1, то $\angle DCE = 90°$. Тогда

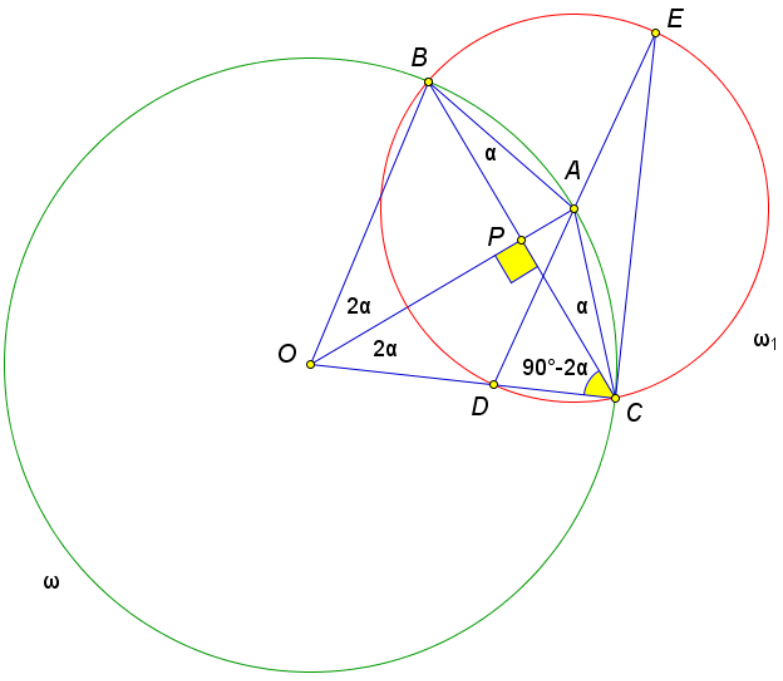
$$\angle ACE = \angle OCE - \angle OCP - \angle ACP = 90° - (90° - 2\alpha) - \alpha = \alpha.$$

Треугольник ACE равнобедренный, следовательно, $\angle AEC = \angle ACE = \alpha$. Таким образом, $\angle BAC = \angle EAC = 180° - 2\alpha$ и треугольники BAC и EAC равны по двум сторонам и углу между ними, следовательно, $BC = CE$.

Критерии.

Получено полное обоснованное решение – 7 баллов.

Доказано, что $\angle AOB = 2\alpha$ или $\angle AOC = 2\alpha$, – 2 балла.

Доказано, что $\angle OCB = 90° - 2\alpha$, – 3 балла.

Доказано, что $\angle OCA = 90° - \alpha$, – 4 балла.