Всероссийская олимпиада школьников по математике,

муниципальный этап, 2016 г

7 класс

1. Назовём целое двузначное число n *интересным*, если при сложении суммы его цифр с произведением его цифр получается n. Найдите все интересные числа и докажите, что других таких чисел нет.

Ответ: все двузначные числа, оканчивающиеся на 9: 19, 29, 39, 49, 59, 69, 79, 89, 99.

Решение.

Пусть искомое интересное число имеет вид $\overline{ab} = 10a + b$, где a и b – целые числа, такие, что $1 \leq a \leq 9$, $0 \leq b \leq 9$. Тогда из условия задачи имеем равенство

$$10a + b = a + b + ab. \qquad (1)$$

Отсюда получаем $9a = ab$. Так как a – ненулевое число, то получаем, что $b = 9$. Число a может принимать любое значение от 1 до 9.

Критерии.

Обоснованно получен верный ответ – 7 баллов.

Верный ответ получен перебором всех двузначных чисел, что продемонстрировано в решении – 7 баллов.

Верный ответ без обоснования – 1 балл.

Получено уравнение (1), при этом решение не завершено либо получен неверный ответ – 2–3 балла.

В решении говорится о том, что был проведён полный перебор всех двузначных чисел, но этот перебор не продемонстрирован или продемонстрирован не полностью, при этом получен верный ответ – 1 балл.

В результате перебора всех двухзначных чисел (либо вообще без обоснования) найдены не все интересные числа и/или в ответ включены лишние числа – 0 баллов.

---

2. Среди учеников класса 7 «А» английским языком владеют 15 человек, французским языком – 10 человек, а на двух языках – английском и французском – могут говорить 3 человека. Остальные ученики не владеют иностранными языками. Сколько таких учеников, если всего в классе 26 человек?

Ответ: 4.

Решение. Всего английским языком владеют 15 человек, из них трое знают ещё и французский, следовательно, 12 человек владеют только английским (кроме русского). Тогда количество учеников, знающих хотя бы один иностранный язык, равно сумме

количества учеников, владеющих французским, и количества учеников, знающих только английский, и составляет $12 + 10 = 22$ человека. Остальные ученики не говорят на иностранных языках, и их количество равно $26 - 22 = 4$.

Критерии.

Обоснованно получен верный ответ – 7 баллов.

Верный ответ без обоснования – 1 балл.

---

3. Найдите наименьшее натуральное число, кратное 36, десятичная запись которого содержит только нули и единицы.

Ответ: 11111111100.

Решение. Пусть x – искомое число. Так как оно кратно 36, то оно делится на 9 и на 4. Число кратно 9 тогда и только тогда, когда сумма всех его цифр делится на 9. Поскольку десятичная запись числа x содержит только нули и единицы, то сумма всех его цифр совпадает с количеством единиц, т.е. количество единиц должно быть кратно 9. Так как x кратно 4, то последние две его цифры должны быть нулями. Итак, число x содержит не менее 9 единиц и оканчивается двумя нулями. Наименьшее число с таким свойством – это число 11111111100.

Критерии.

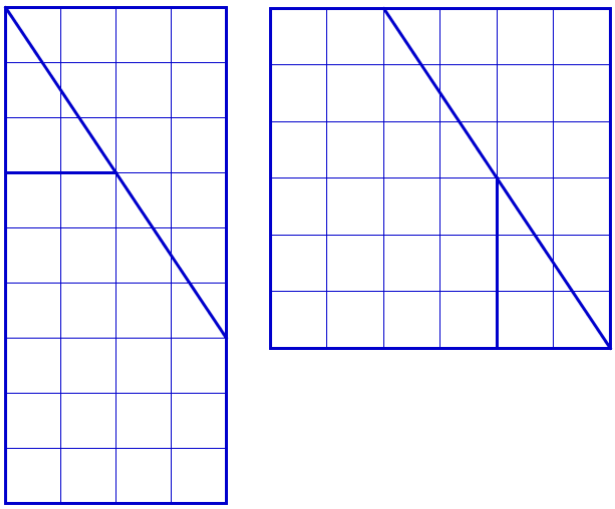
Обоснованно получен верный ответ – 7 баллов.

Верный ответ без обоснования – 1 балл.

---

4. На клетчатой бумаге нарисован прямоугольник размера 4×9 клеток. Разрежьте его на 3 части, ровно две из которых – треугольники, так, чтобы из этих трёх частей можно было бы сложить квадрат без зазоров и наложений. Части можно поворачивать и переворачивать.

Решение. Схема разрезания прямоугольника и составления квадрата приведена на рисунке.



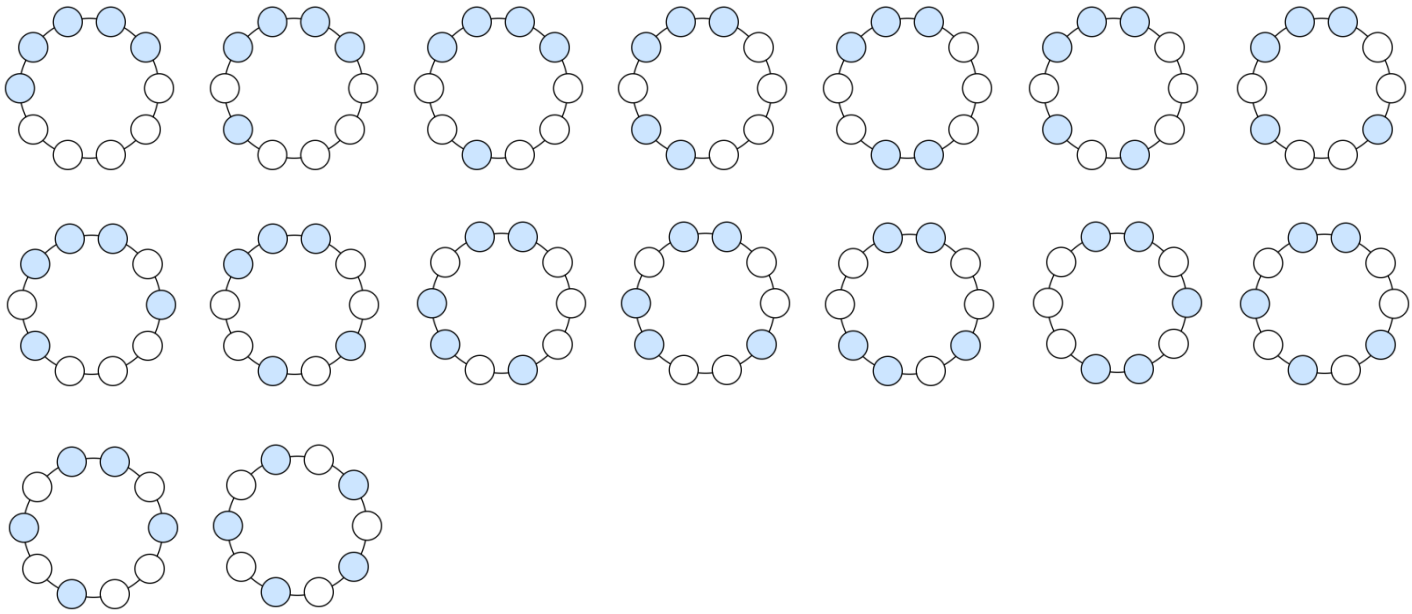
Критерии.

Верно найден способ разрезания – 7 баллов.

5. Сколько различных бус, содержащих 10 бусин, можно составить, используя 5 одинаковых чёрных и 5 одинаковых белых бусин? Бусами мы называем **замкнутую** нить с нанизанными на ней бусинами. Двое бус считаются одинаковыми, если при помощи поворота и/или переворачивания можно из одних бус получить другие.

Ответ: 16.

Решение. Все чёрные бусины можно разбить на группы подряд идущих бусин, разделённые белыми бусинами. Записав количества бусин в этих группах в скобках в порядке убывания, получим так называемый тип бус. Например, тип бус (2,2,1) означает, что в этих бусах есть две группы из двух чёрных бусин и одна группа из одной бусины, разделённые белыми бусинами. Перечислить все различные бусы можно, рассмотрев количество различных бус каждого типа. Как видно из рисунка, есть одни бусы типа (5), двое бус типа (4,1), двое типа (3,2), четверо типа (3,1,1), четверо типа (2,2,1), двое типа (2,1,1,1) и одни типа (1,1,1,1,1).



Критерии.

Обоснованно получен верный ответ (в качестве обоснования достаточно рисунка с шестнадцатью ***различными*** вариантами бус) – 7 баллов.

Верный ответ без обоснования – 0 баллов.