Всероссийское СМИ
«Академия педагогических идей «НОВАЦИЯ»
Свидетельство о регистрации ЭЛ №ФС 77-62011 от 05.06.2015 г.
(выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций)
Сайт: akademnova.ru
e-mail: akademnova@mail.ru

Акманова С.В. Вычисление ляпуновских величин в задаче о бифуркации вынужденных колебаний неавтономных периодических динамических систем // Материалы по итогам II-ой Всероссийской научно-практической конференции «Вопросы современных научных исследований: технические науки и физико-математические науки», 20 – 30 мая 2020 г. – 0,2 п. л. – URL: http://akademnova.ru/publications_on_the_results_of_the_conferences

СЕКЦИЯ: ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

Акманова Светлана Владимировна,
к.п.н., доцент
преподаватель кафедры прикладной математики и информатики
ФГБОУ ВО «Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова»,
г. Магнитогорск, Челябинская область,
Российская Федерация

ВЫЧИСЛЕНИЕ ЛЯПУНОВСКИХ ВЕЛИЧИН В ЗАДАЧЕ О БИФУРКАЦИИ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ НЕАВТОНОМНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Ляпуновские величины играют ключевую роль в изучении свойств бифуркаций динамических систем, причём их вычисление является важным и с точки зрения приложений, например, при изучении поведения динамической системы при значениях параметров, близких к границе области устойчивости [1], [2]. Однако многие результаты, связанные с получением таких величин относятся, как правило, к системам, описываемым автономными дифференциальными уравнениями или дискретными уравнениями. В настоящей статье предлагаются новые формулы вычисления ляпуновских величин для исследования локальных бифуркаций динамических систем, описываемых неавтономными периодическими дифференциальными уравнениями.

Всероссийское СМИ
«Академия педагогических идей «НОВАЦИЯ»
Свидетельство о регистрации ЭЛ №ФС 77-62011 от 05.06.2015 г.
(выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций)
Сайт: akademnova.ru
e-mail: akademnova@mail.ru

Итак, пусть имеется динамическая система вида

$$x' = f(x,t,\mu),\ \ x \in R^N \qquad (1)$$

где $f(x,t,\mu)$ - Т-периодическая, непрерывная по t и непрерывно дифференцируемая по x и μ функция, при этом $f(0,t,\mu_0) \equiv 0$, т.е. $x = 0$ - точка равновесия системы (1) при $\mu = \mu_0$.

Полагается, что функцию $f(x,t,\mu)$ можно представить в виде

$$f(x,t,\mu) = A(t,\mu)x + a(x,t,\mu) + g(t,\mu), \qquad (2)$$

где $A(t,\mu) = f_x{}'(0,t,\mu)$ - матрица Якоби вектор - функции $f(x,t,\mu)$, вычисленная в точке $x = 0$, $g(t,\mu) = f(0,t,\mu)$, а нелинейность функции $a(x,t,\mu)$ начинается с квадратичных по x слагаемых, т.е.

$$a(x,t,\mu) = a_2(x,t,\mu) + a_3(x,t,\mu) + \tilde{a}_4(x,t,\mu), \quad (3)$$

где $a_2(x,t,\mu)$, $a_3(x,t,\mu)$ содержат соответственно квадратичные и кубические по x слагаемые, а нелинейность $\tilde{a}_4(x,t,\mu)$ такова, что $\|\tilde{a}_4(x,t,\mu)\| = O(\|x\|^4)$, $x \to 0$, равномерно по t и μ. Таким образом, функции $A(t,\mu)$, $a(x,t,\mu)$ и $g(t,\mu)$ являются Т-периодическими, непрерывными по t и непрерывно дифференцируемая по x и μ функциями, и система (1) представима в виде

$$x' = A(t,\mu)x + a(x,t,\mu) + g(t,\mu),\ \ x \in R^N. \qquad (4)$$

Системе (4) можно сопоставить линейную Т-периодическую систему

$$x' = A(t,\mu)x. \qquad (5)$$

Предполагается, что точка равновесия $x = 0$ системы (1) при $\mu = \mu_0$ является негиперболической, т.е. система (5) при $\mu = \mu_0$ имеет один или несколько мультипликаторов, равных по модулю 1. Тогда μ_0 является точкой бифуркации системы (1), т.е. при переходе μ через μ_0 поведение решений системы (1) в окрестности точки x=0, как правило, качественно меняется.

Всероссийское СМИ
«Академия педагогических идей «НОВАЦИЯ»
Свидетельство о регистрации ЭЛ №ФС 77-62011 от 05.06.2015 г.
(выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций)
Сайт: akademnova.ru
e-mail: akademnova@mail.ru

Рассмотрим один из основных случаев негиперболичности, когда при $\mu = \mu_0$ система (5) имеет простой мультипликатор 1, что предполагает сценарий бифуркаций системы (1), характеризующийся возникновением у неё в окрестности точки $x = 0$ при переходе μ через значение μ_0 ненулевых T-периодических решений малой амплитуды. Такой сценарий принято называть *бифуркацией вынужденных колебаний*.

Поскольку правая часть равенства (4) является T-периодической функцией по t, то траектории точек (x, t, μ) и $(x, t + Tk, \mu)$ $(k \in Z)$ одинаковы. Значит, систему (4), или то же самое, (1) можно ассоциировать с гладкой дискретной динамической системой

$$x_{n+1} = U(x_n, \mu), \;\; n = 0,1,2,3, \dots, \;\; x_n \in R^N, \qquad (6)$$

где $U(*, \mu): R^N \to R^N$ - оператор сдвига по траекториям системы (1) за время от 0 до T [3]. Оператор $U(*, \mu)$ (называемый также *оператором Пуанкаре*) представим в виде:

$$U(x, \mu) = V(\mu)x + v(x, \mu) + u(\mu), \qquad (7)$$

где $V(\mu)$ - матрица монодромии линейной системы (5), функция $u(\mu)$ удовлетворяет условию $u(\mu_0) = 0$, $v(x, \mu)$ - нелинейный оператор вида

$$v(x, \mu) = v_2(x, \mu) + v_3(x, \mu) + \tilde{v}_4(x, \mu), \quad (8)$$

где $v_2(x, \mu)$ и $v_3(x, \mu)$ содержат соответственно квадратичные и кубические по x слагаемые, а нелинейность $\tilde{v}_4(x, \mu)$ удовлетворяет соотношению: $\|\tilde{v}_4(x, \mu)\| = O(\|x\|^4)$, $x \to 0$, равномерно по μ.

Заметим, что точки равновесия системы (6) определяют начальные значения T-периодических решений системы (1).

Явный вид входящих в (7) функций можно определить, если известна фундаментальная матрица $X(t, \mu)$ решений линейной системы (5), удовлетворяющая начальному условию $X(0, \mu) = I$, тогда $V(\mu) = X(T, \mu)$ и

Всероссийское СМИ
«Академия педагогических идей «НОВАЦИЯ»
Свидетельство о регистрации ЭЛ №ФС 77-62011 от 05.06.2015 г.
(выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций)
Сайт: akademnova.ru
e-mail: akademnova@mail.ru

$$v_2(x,\mu) = V(\mu)\int_0^T X^{-1}(\tau,\mu)a_2(X(\tau,\mu)x,\tau,\mu)d\tau, \quad (9)$$

$$v_3(x,\mu) = V(\mu)\int_0^T X^{-1}(\tau,\mu)a_3(X(\tau,\mu)x,\tau,\mu)d\tau. \quad (10)$$

В частности, если $A(t,\mu)$ является постоянной по t матрицей, т.е. $A(t,\mu) \equiv A_0(\mu)$, то $X(t,\mu) = e^{TA_0(\mu)}$.

Собственные значения матрицы $V(\mu)$ – это мультипликаторы линейной системы (5). Поэтому задача о ляпуновских величинах для системы (1) может быть сведена к аналогичной задаче для дискретной системы (6), при этом ляпуновские величины системы (1) будут определяться как ляпуновские величины системы (6).

Обозначим через e и g собственные векторы матрицы $V_0 = V(\mu_0)$ и транспонированной матрицы V_0^* соответственно, отвечающие простому собственному значению 1. Выберем эти векторы в соответствии с равенством $(e,g) = 1$. Тогда можно доказать истинность следующего утверждения.

Теорема. *Если линейная система (5), соответствующая системе (1) при* $\mu = \mu_0$ *имеет простой мультипликатор 1, то первая ляпуновская величина системы (1) в задаче о бифуркации вынужденных колебаний равна*

$$l_1 = \int_0^T (X^{-1}(\tau,\mu_0)a_2(X(\tau,\mu_0)e,\tau,\mu_0)\,,g)d\tau. \quad (11)$$

В важном частном случае, когда $A(t,\mu_0) \equiv A_0$ формула (11) упрощается и принимает вид

$$l_1 = \int_0^T (a_2(e,\tau,\mu_0),g)d\tau. \quad (12)$$

Всероссийское СМИ
«Академия педагогических идей «НОВАЦИЯ»
Свидетельство о регистрации ЭЛ №ФС 77-62011 от 05.06.2015 г.
(выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций)
Сайт: akademnova.ru
e-mail: akademnova@mail.ru

В формуле (12) e и g - собственные векторы матриц A_0 и A_0^* соответственно, отвечающие простому собственному значению 0 и удовлетворяющие равенству $(e, g) = 1$.

Для доказательства данной теоремы можно применить тот факт, что первая ляпуновская величина для системы (6) равна $l_1 = (v_2(e, \mu_0), g)$ [4]. Отсюда и из равенства (9) получим формулу (11) и, как следствие, формулу (12).

Тогда, учитывая равенство (10) нетрудно получить аналогичные формулы и для второй ляпуновской величины l_2.

Список использованной литературы:

1. Баутин Н.Н. Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости. – М.: Наука, 1984. – 176 с.
2. Kuznetsov Yu.A. Elements of Applied Bifurcation Theory. – N.Y.: Springer, 1998. – 593p.
3. Красносельский М.А. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. – М.: Наука. 1966. – 332 с.
4. Юмагулов М.Г., Гусарова Н.И., Муртазина С.А., Фалытдинов М.Ф. Операторные методы вычисления ляпуновских величин в задачах о локальных бифуркациях динамических систем. // Уфимский математический журнал. Том 10. №1. 2018. – С.25-49.

Опубликовано: 20.05.2020 г.