

Руководство к решению задач
по математическому анализу
часть 1

Ставропольский государственный аграрный университет

Т.А. Гулай

Руководство к решению задач

по математическому анализу

часть 1

г. Ставрополь
2018

УДК 517.1:517.2
ББК 22.161

Настоящее руководство является составной частью комплекса учебных пособий по курсу математического анализа, направленных на развитие и активизацию самостоятельной работы студентов. Пособие написано в соответствии с учебной программой по высшей математике для студентов, обучающихся по направлениям подготовки 35.03.06 «Агроинженерия», 13.03.02 «Электроэнергетика и электротехника».

«Руководство» может быть использовано как для работы под руководством преподавателя, так и для самостоятельного изучения курса математического анализа.

«Руководство» подготовлено автором: Т.А. Гулай

УДК 517.1:517.2
ББК 22.161

Предисловие

Предлагаемое пособие по решению задач охватывает первую часть традиционного курса высшей математики технического ВУЗа. Книга написана в полном соответствии с программой по математическому анализу для студентов, обучающихся по инженерным специальностям, и подготовлена преподавателем, имеющим многолетний опыт работы со студентами. Опираясь на этот опыт, автор попытался создать задачник, пригодный как для самообразования, так и для активной работы с преподавателем на практических занятиях. Этим объясняется структура книги.

Часть 1 включает четыре главы, список литературы и приложения. Каждая глава руководства начинается с необходимого теоретического минимума, включающего важнейшие определения, теоремы и формулы. Затем идёт блок задач на эту тему, рассредоточенный следующим образом. Сначала подробно разбираются несколько типовых задач с полным анализом решения, после чего предлагается для самостоятельного решения блок аналогичных задач и тест для закрепления приобретённого навыка.

Ещё одна особенность этой книги – наличие самостоятельных работ по каждой теме курса в приведённых приложениях. Их могут использовать как студенты при подготовке к контрольным работам или экзаменам, так и преподаватели при проведении практических занятий.

Автор уделил особое внимание стандартным задачам, достаточного количества которых так не хватает как преподавателям, так и студентам для успешного хода учебного процесса. Тем не менее, в пособии довольно много более сложных заданий для наиболее успевающих студентов. К подавляющему большинству задач руководства приведены ответы, а к наиболее трудным из них – подробные указания. Такое построение книги предоставляет студенту широкие возможности для активной самостоятельной работы и экономит его время. Студент, пользующийся этим способом, должен перед каждым практическим занятием выучить относящийся к нему раздел теории, внимательно, с выполнением всех действий на бумаге, разобрать решённые задачи, и только после этого приступить к решению задач, предложенных для самостоятельного решения.

«Руководство к решению задач по математическому анализу» полностью подготовлено к изданию на кафедре «Математика» Ставропольского государственного аграрного университета.

Глава 1 Понятие функции и ее пределы.

Непрерывность функции

1.1 Функция и область ее определения

Переменной называется величина, принимающая различные числовые значения.

Областью изменения переменной величины называется совокупность всех принимаемых ею числовых значений.

Определение Переменная y называется функцией переменной x , если каждому значению x из области ее изменения по определенному правилу или закону ставится в соответствие определенное единственное значение y .

Символически записывают $y = f(x)$.

Переменная x называется независимой переменной или аргументом.

Переменная y называется зависимой переменной или функцией.

Символ $f(x)$ обозначает закон соответствия переменных x и y .

Областью определения функции называется совокупность всех тех значений аргумента x , при которых переменная y имеет определенное действительное значение.

Область определения функции $y = f(x)$ обозначается $D(f)$ или $D(y)$.

Область значений функции $y = f(x)$ обозначается $E(f)$ или $E(y)$.

Если нужно указать значение y_0 , соответствующее значению x_0 , то записывают $y_0 = f(x_0)$. $f(x_0)$ обозначает частное значение функции $y = f(x)$ при $x = x_0$.

Графиком функции $y = f(x)$ называется совокупность точек вида $(x; f(x))$ на плоскости xOy , абсциссы « x » которых являются значениями аргумента и принадлежат $D(f)$, а ординаты « y » равны соответствующим значениям функции $f(x)$: $y = f(x)$, $x \in D(f)$.

Функция $y = f(x)$ называется **четной**, если для любого x ($\forall x$) из области определения функции $D(f)$ выполняется условие $f(-x) = f(x)$.

Записывают $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in D(f)$.

График четной функции симметричен относительно оси Oy .

Функция $y = f(x)$ называется **нечетной**, если для любого x ($\forall x$) из области определения функции $D(f)$ выполняется условие $f(-x) = -f(x)$.

Записывают $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in D(f)$.

График нечетной функции симметричен относительно точки $O(0;0)$.

Функция $y = f(x)$ называется **периодической** с периодом T , если для любого x из области определения функции $D(f)$ выполняется условие $f(x+T) = f(x)$.

Наименьшее число T , обладающее указанным свойством называется **основным периодом функции**.

Пусть $y = f(x)$, $x \in D(f)$, $y \in E(f)$.

Определение Если каждому значению $y \in E(f)$ ставится в соответствие единственное значение $x \in D(f)$ такое, что $f(x) = y$, то переменная x называется обратной функцией по отношению к функции $y = f(x)$ и обозначается $x = \varphi(y)$ или $x = f^{-1}(y)$.

Если y является функцией от u , а u в свою очередь зависит от переменной x , то y также зависит от x . Пусть $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$. Получаем функцию y от x

$$y = f[\varphi(x)],$$

которая называется функцией от функции или сложной функцией.

Область определения сложной функции $f[\varphi(x)]$ состоит из тех значений переменной x , которые принадлежат области определения функции $\varphi(x)$ и для которых значения $\varphi(x)$ принадлежат области определения функции f .

Функция может быть задана аналитическим способом, графическим или табличным.

Задание функции при помощи формулы, указывающей, какие действия и в какой последовательности надо произвести над аргументом x , чтобы получить значение зависимой переменной y , называется **аналитическим заданием**:

$$y = \frac{2\sqrt{x+1}}{x^2}.$$

Графический способ задания функции – это задание функции ее графиком. Преимущество этого способа – его наглядность. Недостаток заключается в ограниченной точности определяемых по значению аргумента x значений функции y .

Табличный способ состоит в том, что значения независимой переменной x и соответствующие значения функции, полученные в результате наблюдений, располагаются в два параллельных ряда, то есть в виде таблицы.

Элементарные функции

Основными элементарными функциями являются:

- 1) степенная функция $y = x^a$;
- 2) показательная функция $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$);
- 3) логарифмическая функция $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$);

4) тригонометрические функции

$$y = \sin x, \quad y = \cos x, \quad y = \operatorname{tg} x, \quad y = \operatorname{ctg} x, \quad y = \operatorname{cosec} x, \quad y = \sec x;$$

5) обратные тригонометрические функции

$$y = \arcsin x, \quad y = \arccos x, \quad y = \operatorname{arctg} x, \quad y = \operatorname{arcctg} x.$$

Функция $y = f(x)$ называется элементарной, если правая часть аналитического выражения $y = f(x)$ составлена из основных элементарных функций с помощью применения конечного числа четырех арифметических действий и взятия функции от функции.

Все остальные функции называются неэлементарными.

Решение типовых задач и примеров

1.1 Найти область определения функции $y = \sqrt{x^2 - 7x + 12} + \frac{2x - 3}{x - 5}$.

Решение

Область определения этой функции состоит из тех значений x , при которых оба слагаемых принимают действительные значения. Поэтому

$$\begin{cases} x^2 - 7x + 12 \geq 0 \\ x - 5 \neq 0. \end{cases}$$

Решая квадратное неравенство $x^2 - 7x + 12 \geq 0$, получим $x \leq 3$ или $x \geq 4$.

Таким образом, область определения данной функции состоит из совокупности трех промежутков: $x \leq 3$; $x \geq 4$; $x \neq 5$ (рисунок 1.1).

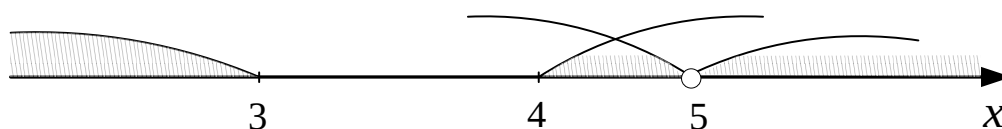


Рисунок 1.1

Следовательно, $D(y) = (-\infty; 3] \cup [4; 5) \cup (5; +\infty)$.

1.2 Установить четность или нечетность функции $y = x^3 \cos 2x$.

Решение

$$D(y) = (-\infty; +\infty),$$

$$f(x) = x^3 \cos 2x, \quad f(-x) = (-x)^3 \cos 2(-x) = -x^3 \cos 2x.$$

Следовательно, $f(-x) = -f(x)$, то есть данная функция нечетная.

1.3 Вычислить частные значения функции $y = \sqrt{x^2 + 4x - 5}$ при $x = 3$ и при $x = a - 2$.

Решение

$$f(3) = \sqrt{3^2 + 4 \cdot 3 - 5} = \sqrt{16} = 4; \quad f(3) = 4.$$

$$f(a-2) = \sqrt{(a-2)^2 + 4(a-2) - 5} = \sqrt{a^2 - 9}; \quad f(a-2) = \sqrt{a^2 - 9}.$$

1.4 Найти область определения функций:

$$1. y = 3x^3 + 5x^2 - 7x + 2.$$

$$2. y = \frac{1}{7x-2}.$$

$$3. y = \frac{x-1}{x^2-7x+12}.$$

$$4. y = \frac{x^2-5x+4}{x^2+x+1}.$$

$$5. y = \frac{5}{\sqrt{x-4}}.$$

$$6. y = \frac{1}{\sqrt[3]{8-x}}.$$

$$7. y = \sqrt{4-x^2}.$$

$$8. y = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}.$$

$$9. y = \lg(x^3-3).$$

$$10. y = \sin(2x+3).$$

$$11. y = \operatorname{tg} 2x.$$

$$12. y = \arcsin(5x-8).$$

$$13. y = \frac{1}{\sqrt{-x^2+x+2}} + \lg(x-1).$$

$$14. y = \log_2(x-1) + x^2.$$

$$15. y = \sqrt{5-x} + \sqrt{x+3}.$$

$$16. y = 2x^2 + \lg(x-1) + \frac{1}{x-3}.$$

$$17. y = \frac{\sin x}{\lg(x^2-4)}.$$

$$18. y = \lg \frac{x^2-5x+6}{x^2+x+1}.$$

$$19. y = \frac{1}{\lg(1-x)} + \sqrt{x+2}.$$

$$20. y = \sqrt{3-x} + \arcsin \frac{3-2x}{5}.$$

$$21. y = \arcsin \frac{x-3}{2} - \lg \sqrt{4-x}.$$

$$22. y = \arccos \frac{x-4}{x}.$$

1.5 Какие из указанных ниже функций чётны, какие нечётны, какие не являются ни чётными, ни нечётными:

а) $y = x^2 - 2x^2;$

б) $y = x - x^2;$

в) $y = \cos x;$

г) $y = x - \frac{x^2}{6} + \frac{x^5}{120};$

д) $y = \sin x - \cos x$;

е) $y = 2^{x-x^4}$;

ж) $y = \frac{x^2}{\sqrt{3x^2 - 2}}$;

з) $y = \frac{\sin x}{|x|}$.

1.6 Построить график и указать интервалы возрастания и убывания функции:

а) $y = x^2 - 1$;

б) $y = |x^2 - 1|$;

в) $y = -3x^2 + 6x - 1$;

г) $y = x^2 - 4|x| - 5$.

1.7 По известному графику функции $y = x^2$ построить графики следующих функций:

а) $y = 3x^2$;

б) $y = -\frac{1}{2}x^2$;

в) $y = (x+1)^2$;

г) $y = \frac{1}{2}(x-1)^2$;

д) $y = x^2 + 2x + 2$;

е) $y = 4x^2 + 8x + 12$.

1.8 Зная график функции $y = x^3$, построить графики следующих функций:

а) $y = -(x+2)^3$;

б) $y = x^3 - 1$;

в) $y = 2(x+1)^3 + 2$.

1.9 Построить графики следующих функций:

а) $y = -2^{-x}$;

б) $y = \begin{cases} 2, & \text{для } x < 0 \\ -2, & \text{для } x > 0 \end{cases}$;

в) $y = \begin{cases} x, & \text{если } x \neq 2 \\ 5, & \text{если } x = 2 \end{cases}$;

г) $y = \begin{cases} -2x-2, & x < -1 \\ -\sqrt{1-x^2}, & -1 \leq x \leq 1 \\ 2x-2, & x > 1 \end{cases}$;

д) $y = \begin{cases} x, & x < -2 \\ 3, & -2 \leq x \leq 2 \\ x^2, & x > 2 \end{cases}$;

е) $y = \begin{cases} x^2 + 2x + 4, & x \neq 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$.

1.10 Построить графики функций:

а) $y = 3\sin(2x-4)$;

б) $y = 2\cos 3x$.

1.2 Множества и операции над ними

Понятие множества является базисным первоначальным понятием математики, которое не определяется формально – логически. Его можно лишь описать с помощью синонимов.

Под множеством понимают совокупность объектов любой природы, объединенных некоторым общим свойством.

Объекты множества называют элементами множества и обозначают малыми буквами латинского алфавита: $a, b, c, \dots, x, y, z$. Множества обозначают большими буквами: $A, B, C, \dots, X, Y, Z$.

Если элемент x принадлежит множеству X , то записывают $x \in X$.

Множество, содержащее конечное число элементов, называется **конечным**, а множество, содержащее бесконечное число элементов называется **бесконечным**.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется **пустым** и обозначается $\emptyset$.

Два множества A и B называются **равными**, если они состоят из одних и тех же элементов.

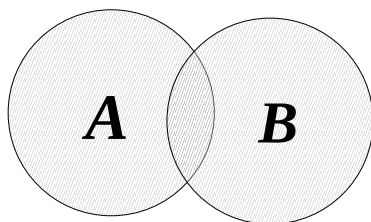
Множество B называется **подмножеством** или частью множества A , если каждый элемент множества B принадлежит и множеству A . Записывают $B \subset A$.

Два множества A и B называются **эквивалентными** ($A \sim B$), если между их элементами можно установить взаимно однозначное соответствие, то есть каждому элементу множества A можно поставить в соответствие один и только один элемент множества B так, что каждый элемент из множества B при этом окажется соответствующим одному и только одному элементу из множества A .

Объединением множества A и B называется множество, состоящее из элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A , B . Обозначение: $A \cup B$. (Рисунок 1.2)

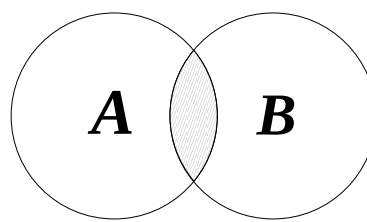
Пересечением двух множеств A и B называется множество, содержащее те и только те элементы, которые принадлежат обоим множествам A и B .

Обозначение: $A \cap B$. (Рисунок 1.3)



$A \cup B$

Рисунок 1.2



$A \cap B$

Рисунок 1.3

Разностью множеств A и B называется множество тех элементов множества A , которые не принадлежат множеству B .

Обозначение: $A \setminus B$. (Рисунок 1.4)

Если $B \subset A$, то $A \setminus B$ называется дополнением множества B в множестве A .

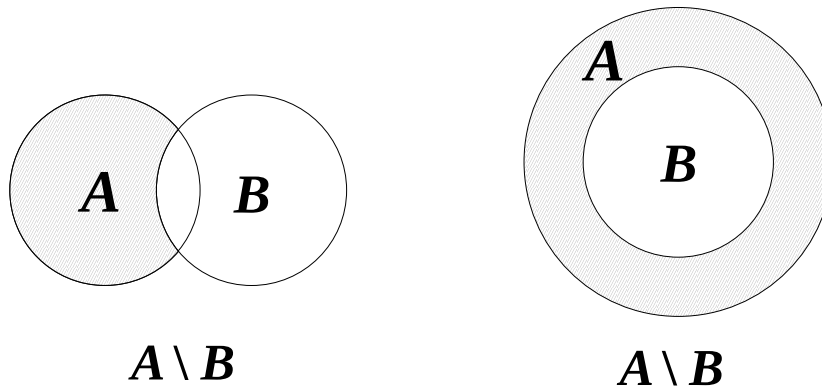


Рисунок 1.4

Решение типовых примеров

1.11 Даны множества:

$$A = \{2; 1; 1; 3; 4; 6\} \quad B = \{1; 2; 3; 5; 7\} \quad C = \{1; 2; 3; 4; 6\} \quad D = \{1; 2; 5\}$$

Найти $A \cup B$; $A \cap B$; $A \cup C$; $A \cap C$; $A \cup D$; $A \cap D$. Указать равные множества и какие из них являются подмножествами.

Решение

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{2; 1; 1; 3; 4; 6\} \cup \{1; 2; 3; 5; 7\} = \{2; 1; 1; 3; 4; 5; 6; 7\}; \\ A \cap B &= \{1; 2; 3\}; \quad A \cup C = \{2; 1; 1; 3; 4; 6\} \cup \{1; 2; 3; 4; 6\} = \{2; 1; 1; 3; 4; 6\}; \\ A \cap C &= \{1; 2; 3; 4; 6\}; \quad A \cup D = \{2; 1; 1; 3; 4; 6\} \cup \{1; 2; 5\} = \{2; 1; 1; 3; 4; 5; 6\}; \\ A \cap D &= \{1; 2\}; \quad A = C; \quad D \subset B. \end{aligned}$$

1.12 С помощью диаграмм показать справедливость следующих утверждений:

$$\begin{aligned} \text{а) } X \cup (Y \cap Z) &= (X \cup Y) \cap (X \cup Z) & \text{б) } (A \cup C) \setminus B &= (A \setminus B) \cup (C \setminus B) \\ \text{в) } (A \setminus B) \cup C &= (A \setminus C) \setminus B & \text{г) } (A \setminus B) \setminus C &= (A \setminus C) \setminus B \end{aligned}$$

1.13 Задать перечислением всех элементов множества, определенные с помощью следующих характеристических свойств:

$$\begin{aligned} \text{а) } A &= \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 5\} & \text{б) } B &= \{x \in \mathbb{N} \mid x < 0\} \\ \text{в) } C &= \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 2\} & \text{г) } D &= \{x \in \mathbb{Z} \mid (x-3)(x^2-1)=0; x \geq 0\} \end{aligned}$$

1.14 Даны множества: $A = \{2; 3; 4; 5\}$, $B = \{3; 4; 5; 6\}$

Найти $A \cup B$; $A \cap B$; $A \setminus B$; $B \setminus A$.

1.15 Пусть $A = \{2n\}$; $B = \{2n-1\}$.

Найти $A \cup B$; $A \cap B$; $A \setminus B$; $B \setminus A$.

1.16 Определить множества $A \cup B$; $A \cap B$; $A \setminus B$; $B \setminus A$, если:

а) $A = \{x \in R \mid 0 < x < 2\}$, $B = \{x \in R \mid 1 \leq x \leq 3\}$;

б) $A = \{x \in R \mid x^2 - 3x < 0\}$, $B = \{x \in R \mid x^2 - 4x + 3 \geq 0\}$;

в) $A = \{x \in R \mid |x-1| < 2\}$, $B = \{x \in R \mid |x-1| + |x-2| < 3\}$.

1.17 Найти $A \cup B$; $A \cap B$; $A \setminus B$; $B \setminus A$,

если $A = \{x \in R \mid x^2 + x - 20 = 0\}$ и $B = \{x \in R \mid x^2 - 7x + 12 = 0\}$.

1.18 Даны множества $A = \{(-1; 2]\}$, $B = \{[1; 4)\}$.

Найти $A \cup B$; $A \cap B$; $A \setminus B$; $B \setminus A$.

1.19 Составить множество В всех подмножеств множества $A = \{1; 2\}$.

1.20 Анкетирование, проведенное среди 57 студентов, показало, что в шахматы могут играть 35 человек, в шашки – 40, причем в обе игры умеют играть 21 человек. Сколько человек не умеют играть ни в шахматы, ни в шашки.

1.3 Элементы математической логики

Математическая логика – разновидность формальной логики, то есть науки, которая изучает умозаключения с точки зрения их формального строения.

Высказыванием называется предложение, к которому возможно применить понятия истинно или ложно.

В математической логике не рассматривается сам смысл высказываний, определяется только его истинность или ложность, что принято обозначать соответственно И или Л.

Понятно, что истинные и ложные высказывания образуют соответствующие множества. С помощью простых высказываний можно составлять более сложные, соединяя простые высказывания союзами «и», «или».

Таким образом, операции с высказываниями можно описывать с помощью некоторого математического аппарата.

Вводятся следующие логические операции (связки) над высказываниями

1) **Отрицание** Отрицанием высказывания Р называется высказывание, которое истинно только тогда, когда высказывание Р ложно.

Обозначается $\neg P$ или $\bar{P}$.

Соответствие между высказываниями определяется таблицами истинности. В нашем случае эта таблица имеет вид:

P	$\neg P$
И	Л
Л	И

2) **Конъюнкция** Конъюнкцией двух высказываний P и Q называется высказывание, истинное тогда и только тогда, когда истинны оба высказывания.

Обозначается $P \& Q$ или $P \wedge Q$.

P	Q	$P \& Q$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	Л
Л	Л	Л

3) **Дизъюнкция** Дизъюнкцией двух высказываний P и Q называется высказывание, ложное тогда и только тогда, когда оба высказывания ложны.

Обозначается $P \vee Q$.

P	Q	$P \vee Q$
И	И	И
И	Л	И
Л	И	И
Л	Л	Л

4) **Импликация** Импликацией двух высказываний P и Q называется высказывание, ложное тогда и только тогда, когда высказывание P истинно, а Q – ложно.

Обозначается $P \supset Q$ (или $P \Rightarrow Q$). Высказывание P называется посылкой импликации, а высказывание Q – следствием.

P	Q	$P \Rightarrow Q$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	И
Л	Л	И

5) **Эквиваленция** Эквиваленцией двух высказываний P и Q называется высказывание, истинное тогда и только тогда, когда истинности высказываний совпадают.

Обозначается $P \sim Q$ или $P \Leftrightarrow Q$.

P	Q	$P \sim Q$
---	---	------------

И	И	И
И	Л	Л
Л	И	Л
Л	Л	И

С помощью этих основных таблиц истинности можно составлять таблицы истинности сложных формул.

Решение типовых примеров

1.21 С помощью таблиц истинности проверить, являются ли эквивалентными формулы φ и ψ .

$$\varphi = \bar{p} \Rightarrow (p \wedge r)$$

$$\psi = \bar{p} \Rightarrow (\bar{p} \vee \bar{r})$$

Составим таблицы истинности для каждой формулы:

p	r	$\bar{p}$	$(p \wedge r)$	$\bar{p} \Rightarrow (p \wedge r)$
И	И	Л	И	И
И	Л	Л	Л	И
Л	И	И	Л	Л
Л	Л	И	Л	Л

p	r	$\bar{p}$	$\bar{r}$	$(\bar{p} \vee \bar{r})$	$\bar{p} \Rightarrow (\bar{p} \vee \bar{r})$
И	И	Л	Л	Л	И
И	Л	Л	И	И	И
Л	И	И	Л	И	И
Л	Л	И	И	И	И

Данные формулы не являются эквивалентными.

1.22 Укажите, какие из следующих предложений являются высказываниями и определите, истины они или ложны:

1. Москва – столица России.
2. Студент физико-математического факультета.
3. $\sqrt{3} + 2\sqrt{7} - 28$.
4. Луна есть спутник Марса.
5. $a > 0$.
6. Всегда $(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$.
7. «А.С. Пушкин родился в 1799 году».

1.23 Даны два высказывания a : (Роберт О. Нир – математик) и b : (Роберт О. Нир имеет собаку). Сформулируйте следующие выражения:

1. $\bar{a} \wedge \bar{b}$.

2. $\bar{a} \vee \bar{b}$.

3. $\bar{a} \wedge b$.

4. $\bar{a} \vee b$.

1.24 Среди следующих сложных высказываний выделите конъюнкции и дизъюнкции и определите, ложны они или истинны:

1. $7^2 = 49$ и $(-7)^2 = 49$.

2. «Чтобы любые углы были смежными, достаточно, чтобы они имели общую сторону».

3. Последовательность чисел $2, 3, \frac{9}{2}, \frac{27}{4}$ является арифметической или геометрической прогрессией.

1.25 Пусть a – высказывание «Студент Иванов изучает английский язык», b – высказывание «Студент Иванов успевает по математической логике». Дать словесную формулировку высказываний:

1. $\bar{a} \wedge \bar{b}$

2. $\bar{a} \Rightarrow b$

3. $\bar{b} \Leftrightarrow b$

1.26 Найдите логические значения x и y , при которых выполняются равенства:

1. $(1 \Rightarrow x) \Rightarrow y = 0$

2. $x \vee y = \bar{x}$

1.27 С помощью таблиц истинности проверить являются ли эквивалентными формулы φ и ψ

$\varphi = (p \Leftrightarrow q) \vee r$

$\psi = (p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow p) \vee r$

1.28 Составить таблицы истинности для составных высказываний

1. $(\bar{X} \Rightarrow \bar{Y}) \wedge (\bar{X} \Leftrightarrow \bar{Y})$

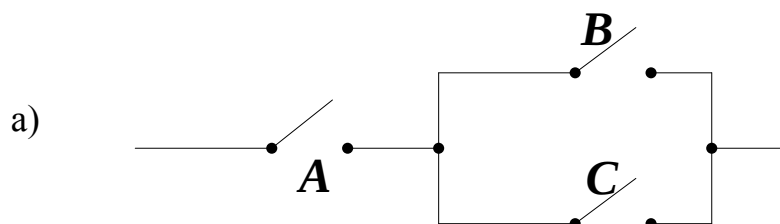
2. $(\bar{p} \Leftrightarrow Q) \wedge (\bar{M} \Rightarrow \bar{P})$

3. $(\bar{X} \vee \bar{Y}) \Leftrightarrow \bar{Z}$

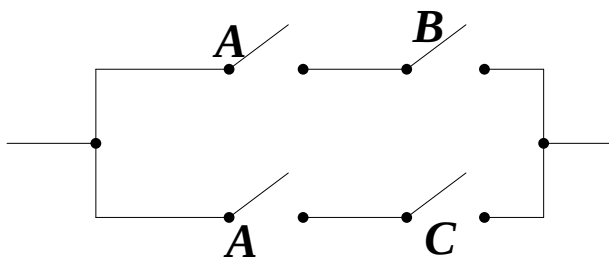
4. $(\bar{X} \wedge \bar{Y}) \Rightarrow Z \wedge X$

5. $(\bar{X} \wedge \bar{Y}) \vee (Z \Rightarrow \bar{Y})$

1.29 Пусть высказывания A , B , C обозначают контакты электрической цепи в смысле замкнутости их (и) или разомкнутости (л). Записать формулу, соответствующую схеме:



б)



1.4 Предел функции

а) Числовая последовательность и ее предел

Определение Если каждому числу n из натурального ряда чисел $1, 2, 3, \dots, n, \dots$ поставлено в соответствие действительное число u_n , то множество действительных чисел $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$ называется числовой последовательностью и обозначается $\{u_n\}$.

Числа $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$ называются элементами последовательности. u_n — общий член последовательности.

Последовательность считается заданной, если указан способ получения ее общего члена.

Последовательность изображается на числовой прямой в виде последовательности точек, координаты которых равны соответствующим элементам.

Последовательность $\{u_n\}$ называется ограниченной сверху (снизу), если существует такое число M , что для любого ее элемента u_n выполняется неравенство

$$u_n \leq M \quad (u_n \geq M).$$

Последовательность $\{u_n\}$ называется **ограниченной**, если она ограничена сверху и снизу.

Определение Число a называется пределом числовой последовательности $\{u_n\}$, если для любого положительного числа ε существует такой номер N , что для $n > N$ выполняется неравенство

$$|u_n - a| < \varepsilon.$$

Символическая запись $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = a$.

Последовательность, имеющую предел, называют сходящейся.

Неравенство $|u_n - a| < \varepsilon$ равносильно неравенству $a - \varepsilon < u_n < a + \varepsilon$, которое означает, что все элементы последовательности $\{u_n\}$, номера которых $n > N$, находятся в ε — окрестности точки a .

Последовательность $\{u_n\}$ называется возрастающей, если $u_n < u_{n+1}$ для всех n ; неубывающей, если $u_n \leq u_{n+1}$ для всех n ; убывающей, если $u_n > u_{n+1}$ для всех n ; невозрастающей, если $u_n \geq u_{n+1}$ для всех n .

Теорема 1 Сходящаяся последовательность имеет только один предел.

Теорема 2 Сходящаяся последовательность ограничена.

Теорема 3 Алгебраическая сумма, произведение двух сходящихся последовательностей есть сходящаяся последовательность, предел которой равен соответственно алгебраической сумме, произведению пределов этих последовательностей:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n \pm v_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} v_n;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \cdot v_n = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} v_n.$$

Теорема 4 Частное двух сходящихся последовательностей $\{u_n\}$ и $\{v_n\}$ при условии, что $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n \neq 0$, есть сходящаяся последовательность, предел которой равен частному пределов этих последовательностей:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} u_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} v_n}.$$

Теорема 5 Монотонная ограниченная последовательность имеет предел.

Решение типовых примеров

1.30 Доказать, что последовательность $\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \dots, \frac{n}{2n+1}, \dots$ при $n \rightarrow \infty$ имеет пределом число $\frac{1}{2}$.

Решение

Пусть ε – произвольное положительное число. Требуется доказать, что существует такое число $N = N(\varepsilon)$, что при $n > N$ выполняется неравенство

$$\left| u_n - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon.$$

Найдем $\left| \frac{n}{2n+1} - \frac{1}{2} \right| = \left| -\frac{1}{2(2n+1)} \right| = \frac{1}{2(2n+1)}.$

Таким образом, неравенство $\left| u_n - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon$ выполняется, если

$$\frac{1}{2(2n+1)} < \varepsilon, \text{ откуда } 2(2n+1)\varepsilon > 1 \text{ или } n > \frac{1}{4\varepsilon} - \frac{1}{2}.$$

В качестве числа N можно взять целую часть числа $\frac{1}{4\varepsilon} - \frac{1}{2}$.

Зададим $\varepsilon = \frac{1}{40}$, тогда $n > \frac{1}{4 \cdot \frac{1}{40}} - \frac{1}{2} = 19\frac{1}{2}$.

Следовательно, начиная с номера $n = 20$, будет выполняться неравенство $\left|u_n - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon$, то есть, $\left|\frac{n}{2n+1} - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{40}$, что означает $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}$.

1.31 Функция u_n принимает значения $u_1 = 1, u_2 = \frac{1}{4}, u_3 = \frac{1}{9}, \dots, u_n = \frac{1}{n^2}, \dots$

Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$. Каково должно быть n для того, чтобы разность между u_n и ее пределом была меньше заданного положительного числа $\varepsilon = 10^{-3}$?

1.32 Доказать, что $u_n = \frac{n-1}{n+1}$ стремится к единице при неограниченном возрастании n . Начиная с какого n абсолютная величина разности между u_n и единицей не превосходит 10^{-4} ?

1.33 Общий член u_n последовательности $u_1 = \frac{1}{2}, u_2 = \frac{5}{4}, u_3 = \frac{7}{8}, u_4 = \frac{17}{16}, \dots$ имеет вид $\frac{2^n - 1}{2^n}$, если n – нечетное, и $\frac{2^n + 1}{2^n}$, если n – четное число. Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$. Каково должно быть n , для того чтобы разность между u_n и ее пределом по абсолютной величине не превосла 10^{-4} , данного положительного числа ε ?

1.34 Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = a$. Указать номер, начиная с которого, все члены последовательности $\{u_n\}$ находятся в ε – окрестности точки a , если:

а) $u_n = \frac{6n+7}{11-2n}$, $a = -3$, $\varepsilon = 0,001$;

б) $u_n = \frac{3n^2+2}{5n^2+4}$, $a = \frac{3}{5}$, $\varepsilon = 10^{-4}$.

1.35 Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$, если:

а) $u_n = \frac{n}{n^2+1}$;

б) $u_n = \frac{2+4+6+\dots+2n}{n+2}$;

$$\text{в) } u_n = \frac{(n+3)!}{2(n+1)! - (n+2)!};$$

$$\text{г) } u_n = \left(n - \sqrt[3]{n^3 - n^2} \right).$$

б) Предел функции

Пусть функция $y = f(x)$ определена на некотором множестве X и пусть $x_0 \in X$ или $x_0 \in X$. Возьмем из множества X последовательность $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$, элементы которой отличны от x_0 ($x_n \neq x_0$), сходящуюся к x_0 . Последовательность функции $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), \dots$ тоже образуют числовую последовательность.

Определение 1 Число A называется пределом функции $y = f(x)$ в точке $x = x_0$ (или при $x \rightarrow x_0$), если для любой сходящейся к x_0 последовательности $\{x_n\}$ значений аргумента x , отличных от x_0 , соответствующая последовательность $\{f(x_n)\}$ значений функции сходится к числу A .

Записывают $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$.

Функция $y = f(x)$ в точке x_0 может иметь только один предел.

Определение 2 Число A называется пределом функции $y = f(x)$ при $x \rightarrow x_0$ (или в точке x_0), если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при $|x - x_0| < \delta$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Записывают $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$.

Если число A_1 есть предел функции $y = f(x)$ при x стремящемся к x_0 так, что x принимает только значения, меньшие x_0 , то число A_1 называется левым пределом функции $f(x)$ в точке x_0 .

Записывают $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = A_1$ или $f(x_0 - 0) = A_1$.

Аналогично определяется правый предел функции $y = f(x)$ при x стремящемся к x_0 , при $x > x_0$:

Записывают $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = A_2$ или $f(x_0 + 0) = A_2$.

Если левый и правый пределы функции $y = f(x)$ существуют и равны, то есть $A_1 = A_2 = A$, то число A есть предел этой функции в точке x_0 , то есть, если

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = A, \text{ то } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A.$$

Определение 3 Число A называется пределом функции $y = f(x)$ при $x \rightarrow \infty$, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое число $M > 0$, что для всех значений x , удовлетворяющих неравенству $|x| > M$, выполняется неравенство

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Основные теоремы о пределах

Теорема 1 Если $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} f(x) = A$ $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} \varphi(x) = B$, то функции $f(x) \pm \varphi(x)$, $f(x) \cdot \varphi(x)$ и $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ имеют в точке x_0 пределы равные соответственно $A \pm B$; $A \cdot B$ и $\frac{A}{B}$ ($B \neq 0$).

Теорема 2 $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} [f(x)]^n = \left[\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} f(x) \right]^n$.

Теорема 3 $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} C = C$.

Теорема 4 $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} C f(x) = C \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} f(x)$.

Теорема 5 Пусть функция $f(x)$ – имеет предел в данной точке x_0 . Тогда она ограничена в некоторой окрестности точки x_0 .

Теорема 6 Если функции $f(x)$, $\varphi(x)$ и $q(x)$ определены в некоторой окрестности точки x_0 , за исключением может быть, самой точки x_0 , и для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) \leq q(x) \leq \varphi(x)$. Пусть, кроме того $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} \varphi(x) = A$. Тогда $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} q(x) = A$.

1.5 Бесконечно малые и бесконечно большие функции

Определение 1 Функции $f(x)$ называется бесконечно малой в точке $x = x_0$ (или при $x \rightarrow x_0$), если $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} f(x) = 0$.

Определение 2 Функции $f(x)$ называется бесконечно малой в точке $x = x_0$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta(\varepsilon) > 0$, что для всех

$x \neq x_0$, удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x)| < \varepsilon$.

Теорема Алгебраическая сумма и произведение конечного числа бесконечно малых функций при $x \rightarrow x_0$, а также произведение бесконечно малой функции на ограниченную функцию, являются бесконечно малыми функциями при $x \rightarrow x_0$.

Теорема о связи между функцией, ее пределом и бесконечно малой.

Для того, чтобы функция $y = f(x)$ при $x \rightarrow x_0$ имела пределом число A , необходимо и достаточно, чтобы функция $\alpha(x) = f(x) - A$ была бесконечно малой при $x \rightarrow x_0$.

Деление одной бесконечно малой функции на другую может привести к различным результатам.

Пусть $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} \alpha(x) = 0, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} \beta(x) = 0.$

1) Если $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, то $\alpha(x)$ – бесконечно малая более высокого порядка, чем $\beta(x)$.

2) Если $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A \neq 0$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – бесконечно малые одного порядка.

3) Если $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – эквивалентные бесконечно малые:
 $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

Важнейшие эквивалентности

1) $\sin x \sim x$;

6) $e^x - 1 \sim x$;

2) $\operatorname{tg} x \sim x$;

7) $a^x - 1 \sim x$;

3) $\arcsin x \sim x$;

8) $\ln(1+x) \sim x$;

4) $\operatorname{arctg} x \sim x$;

9) $\log_a(1+x) \sim x \log_a e$;

5) $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$;

10) $(1+x)^k - 1 \sim kx$;
 (в частности $\sqrt{1+x} - 1 \sim \frac{x}{2}$).

4) Если $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} \frac{\alpha(x)}{\beta^n(x)} = A \neq 0$, то $\alpha(x)$ – бесконечно малая n -го порядка относительно $\beta(x)$.

Определение Функция $y = f(x)$ называется бесконечно большой в точке $x = x_0$ (или при $x \rightarrow x_0$), если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta(\varepsilon) > 0$, что для всех x , удовлетворяющих неравенству, $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x)| > \varepsilon$. В этом случае записывают $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$.

Аналогично определяется бесконечно большая функция при $x \rightarrow \infty$.

Теорема о связи между бесконечно малой и бесконечно большой функциями.

Функция, обратная бесконечно малой, является бесконечно большой. Функция обратная бесконечно большой, является бесконечно малой.

1.6 Замечательные пределы

Первый замечательный предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1.$$

Второй замечательный предел

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e; \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

1.7 Вычисление пределов

При вычислении предела функции $y = f(x)$ приходится сталкиваться с двумя существенно различными типами примеров.

1. Функция $f(x)$ является элементарной и предельное значение аргумента функции принадлежит её области определения, тогда вычисление предела функции сводится к простой подстановке предельного значения аргумента, так как предел элементарной функции $f(x)$ при $x \rightarrow x_0$, где x_0 входит в область её определения, равен частному значению функции при $x = x_0$, то есть $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

2. Функция $f(x)$ в точке $x = x_0$ не определена, или же вычисляется предел функции $f(x)$ при $x \rightarrow \infty$.

Тогда вычисление предела требует в каждом случае индивидуального подхода. В одних случаях вопрос сводится непосредственно к применению теорем о пределах, свойствах бесконечно малых и бесконечно больших функций и связи между ними.

Более сложными случаями нахождения предела являются такие, когда функция $f(x)$ в точке $x = x_0$ или при $x \rightarrow \infty$ представляет собой

неопределённость типа $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$; $0 \cdot \infty$; $\infty - \infty$; 1^∞ ; 0^0 ; ∞^0 .

Решение типовых примеров

Вычислить пределы:

$$1.36 \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 1}.$$

Решение

Так как $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 1) = 5 \neq 0$, то применим теорему о пределе частного

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 1} = \frac{4 + 2 - 2}{4 + 1} = \frac{4}{5}.$$

$$1.37 \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 5x - 3}{\log_2(x^2 + 1)}.$$

Решение

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 5x - 3}{\log_2(x^2 + 1)} = \frac{(-1)^2 + 5 \cdot (-1) - 3}{\log_2[(-1)^2 + 1]} = \frac{-7}{\log_2 2} = -7$$

$$1.38 \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left[\sin\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) \cdot \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \right].$$

Решение

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left[\sin\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) \cdot \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \right] &= \sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = \\ &= -\cos \frac{\pi}{6} \cdot \left(-\sin \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}. \end{aligned}$$

$$1.39 \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 3x + 2}.$$

Решение

Функция $\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 3x + 2}$ в точке $x = 2$ не определена. Так как при $x = 2$

числитель и знаменатель дроби обращаются в нуль, то имеем неопределенность вида « $\frac{0}{0}$ ». Преобразуем дробь так, чтобы ее можно было бы сократить на

$x - 2$. Для этого разложим числитель и знаменатель на множители:

$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$, так как $x^2 - 5x + 6 = 0$ при $x_1 = 2$, $x_2 = 3$.

$x^2 - 3x + 2 = (x - 2)(x - 1)$, так как $x^2 - 3x + 2 = 0$ при $x_1 = 2$, $x_2 = 1$.

Итак, имеем

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x - 3)}{(x - 2)(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 3}{x - 1} = \frac{2 - 3}{2 - 1} = -1.$$

$$1.40 \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3 - \sqrt{x+6}}{x-3}.$$

Решение

При $x=3$ числитель и знаменатель дроби обращаются в нуль, следовательно, имеем неопределенность « $\frac{0}{0}$ ». Преобразуем дробь так, чтобы ее можно было сократить на $x-3$. Для этого числитель и знаменатель умножим на выражение, сопряженное иррациональному выражению $3 - \sqrt{x+6}$, то есть на выражение $3 + \sqrt{x+6}$, получим

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3 - \sqrt{x+6}}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(3 - \sqrt{x+6})(3 + \sqrt{x+6})}{(x-3)(3 + \sqrt{x+6})} = \{\text{перемножив сопряженные}$$

выражения, избавимся от иррациональности в числителе} =

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{9 - (x+6)}{(x-3)(3 + \sqrt{x+6})} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3-x}{(x-3)(3 + \sqrt{x+6})} = \\ &= -\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{(x-3)(3 + \sqrt{x+6})} = -\frac{1}{3 + \sqrt{3+6}} = -\frac{1}{3+3} = -\frac{1}{6}. \end{aligned}$$

$$1.41 \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x+6} - 2}{x^2 - 4}.$$

Решение

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(\sqrt{x+6} - 2)(\sqrt{x+6} + 2)}{(x^2 - 4)(\sqrt{x+6} + 2)} &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+6-4}{(x^2 - 4)(\sqrt{x+6} + 2)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{(x^2 - 4)(\sqrt{x+6} + 2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{(x-2)(x+2)(\sqrt{x+6} + 2)} = \frac{1}{-4(\sqrt{4} + 2)} = -\frac{1}{4(2+2)} = -\frac{1}{16}. \end{aligned}$$

$$1.42 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2}}{\sqrt{x+3} - 2}.$$

Решение

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2}}{\sqrt{x+3} - 2} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{2})(\sqrt{x+1} + \sqrt{2})(\sqrt{x+3} + 2)}{(\sqrt{x+3} - 2)(\sqrt{x+3} + 2)(\sqrt{x+1} + \sqrt{2})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1-2)(\sqrt{x+3} + 2)}{(x+3-4)(\sqrt{x+1} + \sqrt{2})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x+3} + 2)}{(x-1)(\sqrt{x+1} + \sqrt{2})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} + 2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{2}} = \\ &= \frac{\sqrt{1+3} + 2}{\sqrt{1+1} + \sqrt{2}} = \frac{2+2}{\sqrt{2} + \sqrt{2}} = \frac{4}{2\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}. \end{aligned}$$

$$1.43 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 1}{3x^2 + 2x - 1}.$$

Решение

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (2x^3 + 1) = \infty; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (3x^2 + 2x - 1) = \infty$$

Следовательно, имеет место неопределенность вида « $\frac{\infty}{\infty}$ ». Разделим числитель и знаменатель дроби почленно на старшую степень дроби, то есть на x^3 , получим

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 1}{3x^2 + 2x - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{x^3}}{\frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3}} = \infty.$$

Предел знаменателя равен нулю, следовательно, в знаменателе бесконечно малая функция. Далее применили теорему о связи между бесконечно малой и бесконечно большой величинами.

$$1.44 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}).$$

Решение

В заданном примере имеем неопределенность вида « $\infty - \infty$ ». Умножим и разделим выражение, стоящее под знаком предела, на сопряженное ему выражение, то есть на $\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1}$, получим

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1})(\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1})}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1 - (x^2 - 1)}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1}} = 0. \end{aligned}$$

Так как $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1}) = \infty$, значит в знаменателе бесконечно большая функция. Далее применим теорему о связи между бесконечно большой и бесконечно малой величинами.

$$1.45 \quad \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{3-x} - \frac{2}{9-x^2} \right).$$

Решение

Имеем неопределенность вида « $\infty - \infty$ ». Приведем дроби, стоящие под знаком предела, к общему знаменателю, получим:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{3-x} - \frac{2}{9-x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3+x-2}{9-x^2} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1+x}{9-x^2} = \infty.$$

$$1.46 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x}.$$

Решение

Для вычисления этого предела воспользуемся первым замечательным пределом

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \sin 5x}{5x} = 5 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x} = 5 \cdot 1 = 5.$$

$$1.47 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{x^2}.$$

Решение

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 2x}{x^2} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x \cdot \sin 2x}{x \cdot x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = \\ &= 2 \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} \right)^2 = 2 \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 2x}{2x} \right)^2 = 8 \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} \right)^2 = 8 \cdot 1 = 8 \end{aligned}$$

$$1.48 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x} \right)^{2x}.$$

Решение

В данном примере имеем неопределенность вида « 1^∞ ». Для его вычисления используем второй замечательный предел

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x} \right)^{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x} \right)^{\frac{x}{3} \cdot 6} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{3}{x} \right)^{\frac{x}{3}} \right]^6 = \left[\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x} \right)^{\frac{x}{3}} \right]^6 = e^6.$$

$$1.49 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 4x}.$$

Решение

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x \cdot \cos 4x}{\sin 4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 4x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \cos 4x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{4x} \cdot \cos 0 = \frac{3}{4} \cdot 1 = \frac{3}{4}.$$

При вычислении этого предела воспользовались эквивалентностью бесконечно малых $\sin x \sim x$ при $x \rightarrow 0$. Следовательно, $\sin 3x \sim 3x$ и $\sin 4x \sim 4x$ при $x \rightarrow 0$. Затем бесконечно малые функции в числителе и в знаменателе заменили эквивалентными им функциями.

$$1.50 \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1-5x)^{\frac{1}{x}+2}.$$

Решение

Имеем неопределенность вида « 1^∞ ». Для вычисления предела используем второй замечательный предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

$$\begin{aligned} \text{Итак,} \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1-5x)^{\frac{1}{x}+2} &= \lim_{x \rightarrow 0} (1-5x)^{\frac{1}{x}} \cdot (1-5x)^2 = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} (1-5x)^{-\frac{1}{5x} \cdot (-5)} \cdot 1 = \left[\lim_{x \rightarrow 0} (1-5x)^{-\frac{1}{5x}} \right]^{-5} = e^{-5}. \end{aligned}$$

Вычислить односторонние пределы :

$$1.51 \quad \lim_{x \rightarrow 2 \pm 0} \frac{4}{(x-2)^3}.$$

Решение

Пусть $x < 2$, тогда при $x \rightarrow 2-0$ функции $x-2$ и $(x-2)^3$ являются отрицательными бесконечно малыми, поэтому $\frac{4}{(x-2)^3}$ – отрицательная бесконечно большая функция.

Следовательно,

$$\lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{4}{(x-2)^3} = -\infty.$$

При $x > 2$ функции $x-2$ и $(x-2)^3$ – положительные бесконечно малые, поэтому $\frac{4}{(x-2)^3}$ – положительная бесконечно большая функция.

Следовательно,

$$\lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{4}{(x-2)^3} = +\infty.$$

$$1.52 \quad \lim_{x \rightarrow 1 \pm 0} \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}.$$

Решение

При $x \rightarrow 1-0$ функция $x-1$ – отрицательная бесконечно малая, следовательно $\frac{1}{x-1}$ – отрицательная бесконечно большая функция.

Тогда $2^{\frac{1}{x-1}}$ – бесконечно малая функция.

Следовательно,

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x-1}}} = 1.$$

При $x \rightarrow 1+0$ функция $x-1$ – положительная бесконечно малая, следовательно, $\frac{1}{x-1}$ – положительная бесконечно большая функция. Тогда

$2^{\frac{1}{x-1}}$ – бесконечно большая положительная функция. Таким образом

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x-1}}} = 0.$$

Найти пределы:

$$1.53 \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 5}{x^3 - 3}.$$

$$1.54 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^3 - 3x + 1}{x - 4} + 1 \right).$$

$$1.55 \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 2x}.$$

$$1.56 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - x}.$$

$$1.57 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^3 + x^2 - x - 1}.$$

$$1.58 \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 8x + 12}.$$

$$1.59 \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 5x - 3}{3x^2 - 8x - 3}.$$

$$1.60 \quad \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{8x^3 - 1}{6x^2 - 5x + 1}.$$

$$1.61 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x^2}.$$

$$1.62 \quad \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1} - 2}{x-5}.$$

$$1.63 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x^2}.$$

$$1.64 \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{3 - \sqrt{5+x}}.$$

$$1.65 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+1} - 1}{\sqrt{x^2+16} - 4}.$$

$$1.66 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}.$$

$$1.67 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2} - 1}{x^2}.$$

$$1.68 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}.$$

$$1.69 \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt[3]{5+x} - 2}{x-3}.$$

$$1.70 \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{7x+2x-x^2}}{x^2 - 2x}.$$

$$1.71 \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{\cos 2x}.$$

$$1.72 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - x}{x^2 + 10}.$$

$$1.73 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 5x + 2}{x + 10^{10}}.$$

$$1.74 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{x} - 1}{x+1}.$$

$$1.75 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+3}{x+\sqrt[3]{x}}.$$

$$1.77 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3+3x^2+5x-6}{3x^2+7x-x^3-1}.$$

$$1.79 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha x}{\sin \beta x}.$$

$$1.81 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{x^2}.$$

$$1.83 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\sin x} - \sqrt{1-\sin x}}{\operatorname{tg} x}.$$

$$1.85 \quad \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 3x}{\sin 2x}.$$

$$1.87 \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a}.$$

$$1.89 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x},$$

указание: Положить $\operatorname{arctg} x = \alpha$.

$$1.91 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{5}{n}\right)^n.$$

$$1.93 \quad \lim_{n \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{4}{n}\right)^{n+3}.$$

$$1.95 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (1+kx)^{mx}.$$

$$1.97 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x.$$

$$1.99 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-3}{2x+4}\right)^{4x+2}.$$

$$1.101 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-4}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{3}}.$$

$$1.103 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+a} - \sqrt{x}).$$

$$1.76 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{x^3+2x+1} + 2x}{\sqrt[3]{x^6+3x-2}}.$$

$$1.78 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x}.$$

$$1.80 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} kx}{x}.$$

$$1.82 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos^3 x}{x \sin 2x}.$$

$$1.84 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{\sin 5x}.$$

$$1.86 \quad \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos \frac{x}{2}}{x - \pi}.$$

$$1.88 \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2} - \cos x}.$$

$$1.90 \quad \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\arcsin(1-2x)}{4x^2-1},$$

указание: Положить $\arcsin(1-2x) = \alpha$.

$$1.92 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{3n}\right)^n.$$

$$1.94 \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1+\operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x}.$$

$$1.96 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{x+1}{x}}.$$

$$1.98 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1}.$$

$$1.100 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+2}{x^2-5}\right)^{x^2+1}.$$

$$1.102 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-2}{3x+1}\right)^{2x+3}.$$

$$1.104 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt{x^2+1} - x).$$

$$1.105 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2} \right).$$

$$1.106 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x - \sqrt{x^2 - a^2} \right).$$

$$1.107 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} \right).$$

$$1.108 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{2}{\operatorname{tg} x} \right).$$

$$1.109 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} [x(\ln(x+a) - \ln x)].$$

$$1.110 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{x^2+1} - x \right).$$

Применение бесконечно малых для вычисления пределов

Найти пределы:

$$1.111 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 2x}.$$

$$1.112 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x + \sin^2 x}{\sin 2x - x^3}.$$

$$1.113 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x)}{\sin 4x}.$$

$$1.114 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x^4 + x^2 + x}.$$

$$1.115 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos mx}{x^2}.$$

$$1.116 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x - \cos 2x}{\arcsin^2 3x}.$$

$$1.117 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} \frac{7}{4} x}{e^{-2x} - 1}.$$

$$1.118 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax + x^2}{\operatorname{tg} x}.$$

1.119 Найти левый и правый пределы функций

а) $f(x) = \left(\frac{1}{3} \right)^{\frac{1}{x-1}}$ при $x \rightarrow 1$.

б) $f(x) = \frac{1}{x + 2^{\frac{1}{x-3}}}$ при $x \rightarrow 3$.

в) $f(x) = e^{\frac{1}{x-a}}$ при $x \rightarrow a$.

г) $f(x) = \frac{1}{x} \operatorname{arctg} \frac{1}{1-x}$

1) $\tilde{x} \rightarrow 0$;

2) $\tilde{x} \rightarrow 1$.

д) $f(x) = \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$

е) $f(x) = \frac{1}{1 - 2^{\frac{x}{1-x}}}$

1) $\tilde{x} \rightarrow 0$;

2) $\tilde{x} \rightarrow 1$;

3) $\tilde{x} \rightarrow -1$.

1) $\tilde{x} \rightarrow 0$;

2) $\tilde{x} \rightarrow 1$.

ж) $f(x) = \frac{\ln(1+e^x)}{x}$

$\tilde{x} \rightarrow 0$.

1.8 Непрерывность функции

а) Определение непрерывности функции в точке

Определение 1 Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0 , если предел функции и ее значение в этой точке равны, то есть

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

или $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f\left(\lim_{x \rightarrow x_0} x\right)$, так как $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$.

Таким образом, для непрерывной функции можно менять знак функции и знак предела.

Из определения непрерывности функции $f(x)$ в точке x_0 следует

$$\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = f(x_0)$$

или

$$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0)$$

Определение 2 (на языке « $\varepsilon - \delta$ »). Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0 , если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех x , удовлетворяющих неравенству

$$|x - x_0| < \delta$$

выполняется неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Разность $x - x_0$ называется приращением аргумента x в точке x_0 и обозначается $\Delta x = x - x_0$.

Разность $f(x) - f(x_0)$ называется приращением функции в точке x_0 и обозначается

$$\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0) \text{ или } \Delta y = f(x) - f(x_0).$$

Определение 3 Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0 , если бесконечно малому приращению аргумента Δx соответствует бесконечно малое приращение функции в этой точке, то есть $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$.

Теорема 1 Все основные элементарные функции непрерывны в каждой точке своей области определения.

Теорема 2 Если $f(x)$ и $\varphi(x)$ – непрерывные функции в точке x_0 , то функции $f(x) \pm \varphi(x)$; $f(x) \cdot \varphi(x)$; $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ также непрерывны в точке x_0 (последняя при условии, что $\varphi(x_0) \neq 0$).

Теорема 3 Если функция $u = \varphi(x)$ непрерывна в точке x_0 , а функция $f(u)$ непрерывна в точке $u_0 = \varphi(x_0)$, то сложная функция $y = f[\varphi(x)]$ непрерывна в точке x_0 .

Функция $f(x)$ называется непрерывной на $[a, b]$, если она непрерывна в каждой его точке.

б) Точки разрыва функции

Определение Точка x_0 называется точкой разрыва функции $f(x)$, если эта функция не является непрерывной в точке x_0 .

Определение Точка разрыва x_0 называется точкой разрыва первого рода функции $f(x)$, если в этой точке существуют односторонние пределы. Разрывы первого рода делятся на два вида: скачки и устранимые разрывы.

Если односторонние пределы функции $f(x)$ в точке x_0 существуют, но не равны, то в точке x_0 функция имеет скачок

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x)$$

или

$$f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0).$$

Если односторонние пределы функции $f(x)$ в точке x_0 существуют и равны между собой, но не равны значению функции в этой точке, то функция $f(x)$ в точке x_0 имеет устранимый разрыв

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) \neq f(x_0)$$

или

$$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) \neq f(x_0).$$

1.120 Пользуясь определением непрерывности функции, доказать, что функция $f(x) = 5x^2 - 6x + 2$ непрерывна в произвольной точке x (то есть $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$).

1.121 Доказать, что функция непрерывна для любого значения аргумента x :

а) $y = \sin x$

б) $y = \operatorname{tg} x$.

1.122 Показать, что функция $y = \frac{4}{x+2}$ непрерывна в точке $x_0 = 1$. Найти значение функции в точке $x_0 = 1$.

1.123 Показать, что при $x \rightarrow 7$ функция $y = \frac{x}{x-7}$ имеет разрыв.

1.124 Показать, что при $x \rightarrow 2$ функция $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x-2}$ имеет разрыв.

1.125 Показать, что при $x \rightarrow 4$ функция $y = \frac{x^2 - 16}{x - 4}$ имеет разрыв.

1.126 Исследовать функцию на непрерывность и найти точки разрыва. Построить схематично график этой функции в окрестностях точек разрыва:

$$\text{a)} \quad y = \frac{1}{x-3}.$$

$$\text{в)} \quad y = e^{\frac{1}{x+1}}.$$

$$\text{д)} \quad y = \frac{\sin x}{x}.$$

$$\text{ж)} \quad y = \frac{2^{\frac{1}{x}} - 1}{2^{\frac{1}{x}} + 1}.$$

$$\text{и)} \quad y = \frac{x-2}{|x-2|} x - 1.$$

$$\text{л)} \quad y = \frac{1}{1-e^{1-x}}.$$

$$\text{н)} \quad y = \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{x^2 - 3x + 2}.$$

$$\text{б)} \quad y = \frac{2}{(x+1)^2}.$$

$$\text{г)} \quad y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}.$$

$$\text{е)} \quad y = \frac{x^3 - 8}{x-2}.$$

$$\text{з)} \quad y = \frac{x^2 - 25}{x-5}.$$

$$\text{к)} \quad y = \frac{1}{(x-1)(x-6)}.$$

$$\text{м)} \quad y = \frac{\operatorname{arctg} \frac{1}{x-3}}{x(x-5)}.$$

$$\text{о)} \quad y = \frac{1}{x + 3^{\frac{1}{3-x}}}.$$

Тест 1

1. Указать множество чисел по возрастанию количества элементов:

- 1: множество натуральных чисел;
- 2: множество целых чисел;
- 3: множество иррациональных чисел;
- 4: множество рациональных чисел;
- 5: множество действительных чисел.

2. Выяснить, какие из функций заданы неявно:

- 1: $y = \sin^3 \ln x$;
- 2: $y = \operatorname{tg}(x+y) \cdot 3^x$;
- 3: $x - y = xy$.

3. Выяснить, какие из функций являются ограниченными:

- 1: $y = e^{x^2}$;
- 2: $y = e^{-x^2}$;
- 3: $y = \frac{\cos x}{x^2}$;
- 4: $y = \sin x + \cos x$.

4. Выяснить, какие из функций являются нечётными:

- 1: $y = \frac{x}{\cos x} + \sin x$;
- 2: $y = \frac{x(x+1)}{\sin x}$;
- 3: $y = x^3 + \operatorname{tg} x$;
- 4: $y = x^3 \operatorname{tg} x$.

5. Отметить правильный ответ

Функция $y = f(x)$ непрерывна в каждой точке некоторого интервала $(a;b)$ называется:

- 1: непрерывной в точке;
- 2: непрерывной на концах интервала;
- 3: непрерывной на всем интервале.

6. Отметить правильный ответ

Функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, достигает на этом отрезке

- 1: наибольшего значения;
- 2: наибольшего и наименьшего значения;
- 3: наименьшего значения.

7. Установить соответствие между изображенным промежутком и его названием.

- | | |
|-------------------------|-------------------------|
| 1. бесконечный интервал | а) $(3; +\infty)$ |
| 2. интервал | б) $[2; 4)$ |
| 3. полуинтервал | в) $(-\infty; +\infty)$ |
| 4. отрезок | г) $[-4; 0]$ |

8. Функция $y = e^x + 1$ отображает множество $(-\infty; 0]$ на множество...

- 1: $(-\infty; 2]$;
- 2: $[1; 2]$;
- 3: $(0; 2]$;
- 4: $(1; 2]$.

9. Образом множества (отрезка) $[-1;3]$ при отображении $f(x)=x^4+1$ будет множество (отрезок) ...

- 1: $[1;82]$; 2: $[0;81]$; 3: $[1;81]$; 4: $[2;82]$; 5: $[0;82]$.

10. Вопросы 7-8 основаны на следующей информации: G_1, G_2, G_3 - линии, заданные на плоскости XOY уравнениями

$$xy=4, \text{ для } G_1; \quad \frac{x}{2} - \frac{y}{2} = 1, \text{ для } G_2; \quad x^2+2=y, \text{ для } G_3.$$

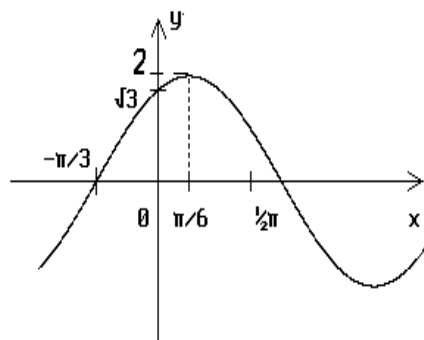
Какие из этих линий пересекают ось OX?

- 1: только G_1 и G_2 ; 2: только G_3 ; 3: только G_1 ;
4: только G_1 и G_3 ; 5: только G_2 .

11. Где G_1 пересекает G_3 ?

- 1: в I четверти ; 2: нет точек пересечения ; 3: во II четверти;
4: в III четверти; 5: в IV четверти.

12. Выбрать функцию, наиболее точно соответствующую графику.



- 1: $y=2\sin(x-\pi/3)$;
2: $y=2\sin(x+\pi/3)$;
3: $y=2\cos(x+\pi/3)$;
4: $y=2\sin(x+\pi/6)$;
5: $y=2\sin(x-\pi/6)$.

13. Функция $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \leq -1 \\ ax + 2, & x > -1 \end{cases}$ непрерывна на всей числовой оси, если a равно

- 1: 2; 2: -2; 3: 3; 4: -3.

14. Выражение $(A \vee B) \& C \vee A \& B \vee B \& C$ при $B=1$ равно...

- 1: 1; 2: C ; 3: A ; 4: $A \vee C$; 5: $A \& C$.

15. Отметить номер предела, равного нулю.

1: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x-1}{\sqrt{x^2+x}}$; 2: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3-3x+1}{x^2+2x^2-2}$; 3: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x-1}{5x^2+x+3}$; 4: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x-3)(4x-1)}{x^2+3}$.

16. Отметить номер предела, равного бесконечности.

1: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x-1}{\sqrt{x^2+x}}$; 2: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3-3x+1}{x^2+2x^2-2}$; 3: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x-1}{5x^2+x+3}$; 4: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x-3)(4x-1)}{x^2+3}$.

17. Отметить правильный ответ:

Найти $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{x-3}$

1: 5; 2: 6; 3: 0; 4: 2.

18. Отметить правильный ответ:

Найти $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2+x-1}{5-x^2}$

1: -2; 2: ∞ ; 3: 2; 4: 1.

19. Отметить правильный ответ:

Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$

1: 0; 2: 2; 3: -1; 4: 1.

20. Отметить правильный ответ:

Найти $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$

1: $-1/56$; 2: $1/56$; 3: 7; 4: 0.

21. Отметить правильный ответ:

Найти $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{x-3} - \frac{6}{x^2-9} \right)$

1: $1/3$; 2: $1/6$; 3: 0; 4: ∞ .

22. Отметить правильный ответ:

Мы говорим о точке разрыва I рода, если выполняются условия:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = a$$

1: $f(a) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$;

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \infty$$

3: $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = 0$;
 $f(a+0) \neq f(a-0)$

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = f(a-0)$$

2: $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(a+0)$;
 $f(a) \neq f(a-0) \neq f(a+0)$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

4: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(a)$.
 $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = -\infty$

23. Переменная величина α_n называется бесконечно малой, если её предел равен

- 1: бесконечности; 2: постоянному числу; 3: нулю;
 4: единице.

24. Отметить правильный ответ:

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ - бесконечно малые при $x \rightarrow a$. Тогда если

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\beta} = m (\neq 0), \text{ то говорят:}$$

- 1: $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ эквивалентные бесконечно малые;
 2: $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ равные бесконечно малые;
 3: $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ бесконечно малые одного и того же порядка;
 4: бесконечно малая $\alpha(x)$ более высокого порядка по сравнению с $\beta(x)$.

25. Отметить правильный ответ:

Какие из функций являются эквивалентными бесконечно малыми при $x \rightarrow 0$

- 1: $\sin x \sim \frac{1}{x^2}$; 2: $\operatorname{tg} x \sim x$; 3: $\ln(1+x) \sim 1$; 4: $\cos x \sim \frac{1}{2}$.

Ответы к главе 1

- 1.4** 1 $D(y) = (-\infty; +\infty)$ 2 $D(y) = \left(-\infty; \frac{7}{2}\right) \cup \left(\frac{7}{2}; +\infty\right)$
- 3 $D(y) = (-\infty; 3) \cup (3; 4) \cup (4; +\infty)$ 4 $D(y) = R$ 5 $D(y) = (4; +\infty)$
- 6 $D(y) = (-\infty; 8) \cup (8; +\infty)$ 7 $D(y) = [-2; 2]$ 8 $D(y) = (-\infty; -1] \cup (1; +\infty)$
- 9 $D(y) = (-\infty; -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; +\infty)$ 10 $D(y) = (-\infty; +\infty)$
- 11 $D(y): x \neq \frac{\pi}{4}(2n+1), n \in Z$ 12 $D(y) = \left[\frac{7}{5}; \frac{9}{5}\right]$ 13 $D(y) = (1; 2)$
- 14 $x \in (1; +\infty)$ 15 $x \in [-3; 5]$ 16 $x \in (1; 3) \cup (3; +\infty)$
- 17 $x \in (-\infty; -\sqrt{5}) \cup (-\sqrt{5}; -2) \cup (2; \sqrt{5}) \cup (\sqrt{5}; +\infty)$ 18 $x \in (-\infty; 2) \cup (3; +\infty)$
- 19 $x \in [-2; 0) \cup (0; 1)$ 20 $x \in [-1; 3]$ 21 $x \in [1; 4)$ 22 $x \in [2; +\infty)$
- 1.5** а) четная б) общего вида в) четная г) нечетная д) общего вида
е) общего вида ж) четная з) нечетная
- 1.13** $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}; B = \emptyset; C = \{-2, -1, 0, 1, 2\}; D = \{1, 3\}$
- 1.14** $A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6\}; A \cap B = \{3, 4, 5\}; A \setminus B = \{2\}; B \setminus A = \{6\}$
- 1.15** $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, \dots\}; A \cap B = \emptyset; A \setminus B = \{2n\}; B \setminus A = \{2n-1\}$
- 1.16** а) $A \cup B = \{x: 0 < x \leq 3\}; A \cap B = \{x: 1 \leq x < 2\}; A \setminus B = \{x: 0 < x < 1\}; B \setminus A = \{x: 2 \leq x \leq 3\}$
- б) $A \cup B = \{x: -\infty < x < +\infty\}; A \cap B = \{x: 0 < x \leq 1\}; A \setminus B = \{x: 1 < x < 3\}; B \setminus A = \{x \in (-\infty; 0) \cup [3; +\infty)\}$
- в) $A \cup B = \{x: -1 < x < 3\}; A \cap B = \{x: 0 < x < 3\}; A \setminus B = \{x: -1 < x \leq 0\}; B \setminus A = \emptyset$
- 1.17** $A \cup B = \{-5, 3, 4\}; A \cap B = \{4\}; A \setminus B = \{-5\}; B \setminus A = \{3\}$
- 1.18** $A \cup B = \{(-1, 4)\}; A \cap B = \{[1, 2]\}; A \setminus B = \{(-1, 1)\}; B \setminus A = \{(2, 4)\}$
- 1.19** $B = \{\emptyset; \{1\}; \{2\}; \{1, 2\}\}$ **1.20** 3 **1.27** не равносильны **1.29** а) $A \wedge (B \vee C)$
- б) $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ **1.31** $n \geq 32$ **1.32** $n \geq 19999$ **1.33** $n \geq 14$
- 1.34** а) $n = 20006$; б) $n = 29$ **1.35** а) 0; б) -1; в) $-\infty$; г) $\frac{1}{3}$ **1.53** $\frac{9}{5}$
- 1.54** $\frac{3}{4}$ **1.55** $-\frac{1}{2}$ **1.56** 0 **1.57** 0 **1.58** $\frac{3}{4}$ **1.59** $\frac{7}{10}$ **1.60** 6
- 1.61** $\frac{1}{2}$ **1.62** $\frac{1}{4}$ **1.63** ∞ **1.64** -6 **1.65** 4 **1.66** 3 **1.67** $\frac{1}{3}$ **1.68** $\frac{3}{2}$
- 1.69** $\frac{1}{10}$ **1.70** $\frac{\sqrt{7}}{4}$ **1.71** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **1.72** 2 **1.73** ∞ **1.74** 0 **1.75** 2 **1.76** 0 **1.77** -2
- 1.78** 2 **1.79** $\frac{\alpha}{\beta}$ **1.80** k **1.81** $\frac{1}{2}$ **1.82** $\frac{3}{4}$ **1.83** 1 **1.84** $\frac{1}{20}$ **1.85** $-\frac{3}{2}$

$$1.86 -\frac{1}{2} \quad 1.87 \cos \alpha \quad 1.88 2 \quad 1.89 1 \quad 1.90 -\frac{1}{2} \quad 1.91 \frac{1}{e^5} \quad 1.92 e^{-\frac{1}{3}} \quad 1.93 e^4$$

$$1.94 e \quad 1.95 e^m \quad 1.96 1 \quad 1.97 e \quad 1.98 e^6 \quad 1.99 e^{-14} \quad 1.100 e^7 \quad 1.101 e^{-\frac{2}{3}}$$

$$1.102 e^{-2} \quad 1.103 0 \quad 1.104 \frac{1}{2} \quad 1.105 0 \quad 1.106 0 \quad 1.107 \frac{1}{2} \quad 1.108 0$$

$$1.109 a \quad 1.110 0 \quad 1.111 2,5 \quad 1.112 1,5 \quad 1.113 \frac{3}{4} \quad 1.114 3 \quad 1.115 \frac{m^2}{2}$$

$$1.116 -\frac{2}{3} \quad 1.117 -\frac{7}{8} \quad 1.118 \frac{a}{e} \quad 1.119 \text{ а) } f(1-0)=\infty \quad f(1+0)=0$$

$$\text{б) } f(3-0)=\frac{1}{3} \quad f(3+0)=0$$

1.123 $x=7$ – точка разрыва второго рода

1.124 $x=2$ – точка разрыва первого рода

1.125 $x=4$ – точка «устранимого» разрыва

1.126 а) $x=3$ – точка разрыва второго рода б) $x=-1$ – точка разрыва второго рода в) $x=-1$ – точка разрыва второго рода г) $x=0$ – точка разрыва первого рода д) $x=0$ – точка «устранимого» разрыва е) $x=2$ – точка «устранимого» разрыва ж) $x=0$ – точка разрыва первого рода

з) $x=5$ – точка «устранимого» разрыва и) $x=2$ – точка разрыва первого рода к) $x=1, x=6$ – точки разрыва второго рода л) $x=1$ – точка разрыва второго рода м) $x=3$ – точка разрыва первого рода, $x=0$ – точка «устранимого» разрыва, $x=5$ – точка разрыва второго рода,

$x=\frac{\pi}{2} + \pi n (n \in \mathbb{Z})$ – точка разрыва второго рода н) $x=1, x=2$ – устранимого разрыва о) $x=3$ – точка разрыва первого рода

Глава 2 Производная и дифференциал

2.1 Производная функции

Определение Производной функции $f(x)$ в точке x называется предел отношения приращения функции $\Delta f(x)$ в этой точке к приращению аргумента Δx , при условии, что $\Delta x \rightarrow 0$.

Обозначение производной функции $y = f(x)$

$$f'(x), \quad y', \quad \frac{df(x)}{dx}, \quad \frac{dy}{dx}.$$

По определению:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

или

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Механический смысл производной

Пусть $S = f(t)$ описывает закон движения материальной точки $M(x, y)$ по прямой.

Тогда $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$ определяет мгновенную

скорость точки M в момент времени t .

Таким образом, производная от пути по времени есть мгновенная скорость материальной точки в момент времени t

$$v_{\text{мгн}} = v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S(t)}{\Delta t}.$$

Геометрический смысл производной

Производная функции $y = f(x)$ в точке x есть угловой коэффициент касательной к графику этой функции в точке с абсциссой x (рисунок 2.1).

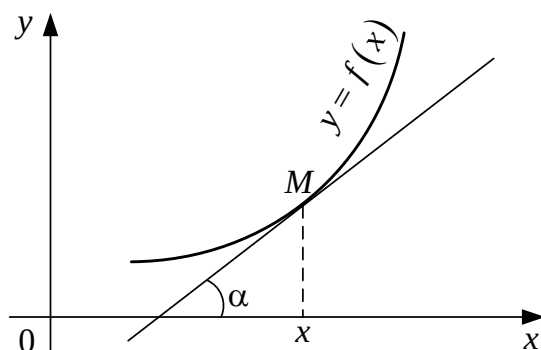


Рисунок 2.1

$$f'(x) = \operatorname{tg} \alpha$$

Уравнение касательной к графику $y = f(x)$ в точке x_0 имеет вид

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

Уравнение нормали к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0 имеет

$$\text{вид } y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

Операцию нахождения производной называют дифференцированием.

Основные правила и формулы дифференцирования

1. $(u + v - w)' = u' + v' - w'.$
2. $(uv)' = u'v + v'u.$
3. $(cu)' = cu'.$
4. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}.$
5. $\left(\frac{c}{v}\right)' = -\frac{cv'}{v^2}.$
6. Если $y = f(u)$, где $u = u(x)$, то $y'_x = y'_u \cdot u'_x$ или $y'_x = f'_u(u) \cdot u'_x(x).$
7. $c' = 0, \quad c = \text{const}.$
8. $x' = 1.$
9. $(u^a)' = au^{a-1} \cdot u'; \quad (x^a)' = ax^{a-1}.$
10. $(\sqrt[n]{u})' = \frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}; \quad (\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}; \quad (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$
11. $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'; \quad (a^x)' = a^x \cdot \ln a.$
12. $(e^u)' = e^u \cdot u'; \quad (e^x)' = e^x.$
13. $(\ln u)' = \frac{u'}{u}; \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}.$
14. $(\log_a u)' = \frac{u'}{u} \log_a e; \quad (\log_a x)' = \frac{1}{x} \log_a e.$
15. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'; \quad (\sin x)' = \cos x.$

$$16. (\cos u)' = -\sin u \cdot u'; \quad (\cos x)' = -\sin x.$$

$$17. (\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}; \quad (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

$$18. (\operatorname{ctg} u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}; \quad (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

$$19. (\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}; \quad (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$20. (\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}; \quad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$21. (\operatorname{arctg} u)' = \frac{u'}{1+u^2}; \quad (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

$$22. (\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{u'}{1+u^2}; \quad (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Решение типовых примеров

2.1 Найти производную функции $y = \frac{1}{x}$ по определению.

Решение

1. Дадим аргументу x приращение Δx и вычислим значение функции в этой точке

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x) = \frac{1}{x + \Delta x}.$$

2. Найдём приращение функции в точке x :

$$\Delta y = \Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) = \frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x} = \frac{-\Delta x}{x(x + \Delta x)}.$$

3. Найдём отношение приращения функции $\Delta f(x)$ к приращению аргумента Δx в этой точке

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = -\frac{1}{x(x + \Delta x)}.$$

4. Вычислим предел отношения приращения функции в точке x к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{x(x + \Delta x)} \right) = -\frac{1}{x^2}.$$

Таким образом, $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$.

2.2 Производные высших порядков

Производной второго порядка (второй производной) от функции $y = f(x)$ называется производная от её производной $y' = f'(x)$, то есть

$$y'' = [f'(x)]'$$

Производной n -го порядка от функции $y = f(x)$ называется производная от её $(n-1)$ -ой производной

$$y^{(n)} = [f^{(n-1)}(x)]'.$$

Обозначения y'' , $\frac{d^2 y}{dx^2}$; $y^{(n)}$; $\frac{d^n y}{dx^n}$

Механический смысл второй производной

Вторая производная функции $S = f(t)$ есть скорость изменения мгновенной скорости $v(t) = f'(t)$ материальной точки в момент времени t , то есть ускорение в этот момент времени

$$a(t) = S'' = f''(t) \text{ или } a(t) = \frac{d^2 S}{dt^2}.$$

Решение типовых примеров

2.2 Найти производную третьего порядка функции $y = x \ln 2x$.

Решение

Продифференцируем эту функцию трижды

$$y' = \ln 2x + x \cdot \frac{2}{2x} = \ln 2x + 1;$$

$$y'' = (\ln 2x + 1)' = \frac{2}{2x} = \frac{1}{x};$$

$$y''' = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}.$$

Итак, $(x \ln 2x)''' = -\frac{1}{x^2}$.

Найти y' :

2.3 $y = 5x^3 - 2x^2 + 3x - 4.$

2.4 $y = 2\sqrt[3]{x} + \frac{3}{x^2}.$

$$2.5 \quad y = x^3 \cos x .$$

$$2.6 \quad y = \frac{\operatorname{arctg} x}{x^3} .$$

$$2.7 \quad y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x - 5 .$$

$$2.8 \quad y = \frac{8}{\sqrt[4]{x}} - \frac{6}{\sqrt[3]{x}} .$$

$$2.9 \quad y = x^2 \operatorname{ctg} x .$$

$$2.10 \quad y = \frac{x^2}{x^2 + 1} .$$

$$2.11 \quad y = \frac{\cos x}{1 - \sin x} .$$

$$2.12 \quad y = x^3 - \frac{1}{5}x^2 + 2x + 4 .$$

$$2.13 \quad y = \sqrt[5]{x} - \sqrt[5]{3} .$$

$$2.14 \quad y = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{2}{x^3} + \sqrt{7} \cdot x .$$

$$2.15 \quad y = x^3 \log_2 x .$$

$$2.16 \quad y = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) .$$

$$2.17 \quad y = -10 \operatorname{arctg} x + 7 \cdot e^x .$$

$$2.18 \quad y = x\sqrt[4]{x} + 3\sin 1 .$$

$$2.19 \quad y = \sqrt{x^2 + 3x + 1} .$$

$$2.20 \quad y = (x^2 + 5x + 7)^8 .$$

$$2.21 \quad y = \ln(x^3 + 7x + 2) .$$

$$2.22 \quad y = \ln(\operatorname{arctg} x) .$$

$$2.23 \quad y = e^{\arcsin x} .$$

$$2.24 \quad y = \sin^3 x .$$

$$2.25 \quad y = \sqrt{1 - x^2} \arcsin x .$$

$$2.26 \quad y = \sin 6x .$$

$$2.27 \quad y = \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} .$$

$$2.28 \quad y = (1 - 5x)^4 .$$

$$2.29 \quad y = \sqrt[3]{(4 + 3x)^2} .$$

$$2.30 \quad y = \frac{1}{(1 - x^2)^5} .$$

$$2.31 \quad y = \sqrt{2x - \sin 2x} .$$

$$2.32 \quad y = \sin^3 x + \cos^3 x .$$

$$2.33 \quad y = \sqrt[4]{1 + \cos^2 x}.$$

$$2.34 \quad y = \frac{\sin^2 x}{\cos x}.$$

$$2.35 \quad y = \ln(x^2 + 2x).$$

$$2.36 \quad y = \ln(1 + \cos x).$$

$$2.37 \quad y = \ln \frac{a^2 + x^2}{a^2 - x^2}.$$

$$2.38 \quad y = \ln \sqrt{\frac{1+2x}{1-2x}}.$$

$$2.39 \quad y = \frac{\cos x}{\sin^2 x} + \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2}.$$

$$2.40 \quad y = \ln \frac{e^x}{x^2 + 1}.$$

$$2.41 \quad y = e^x \sqrt{1 - e^{2x}} + \arcsin e^x.$$

$$2.42 \quad y = \operatorname{arc} \operatorname{tg} e^{2x} + \ln \sqrt{\frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}}.$$

$$2.43 \quad y = \arccos \sqrt{1 - 2x} + \sqrt{2x - 4x^2}.$$

$$2.44 \quad y = (x+1)^3 \cdot (x-2)^2 \cdot (x+3).$$

$$2.45 \quad y = \sqrt[5]{\frac{2x-3}{x+1}}.$$

$$2.46 \quad y = x^2 e^{x^2} \sin 2x.$$

$$2.47 \quad y = x^5 (1+3x)^3 \cdot (1-2x)^2.$$

$$2.48 \quad y = \sqrt[3]{\frac{x(x-1)}{x-2}}.$$

$$2.49 \quad y = \frac{(x+2) \cdot \sqrt{x+2}}{\sqrt{x-2}}.$$

$$2.50 \quad y = \sqrt{\frac{1 + \arcsin x}{1 - \arcsin x}}.$$

$$2.51 \quad y = x^{\sin x}.$$

$$2.52 \quad y = \frac{(x-1)^3 \cdot \sqrt{x+2}}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}.$$

$$2.53 \quad y = x^x.$$

$$2.54 \quad y = x^{\ln x}.$$

$$2.55 \quad y = (\operatorname{tg} x)^{\cos x}.$$

$$2.56 \quad y = \frac{(1-x^2) \cdot \cos^6 x}{\sqrt[7]{x^5}}.$$

Найти производную 2-го порядка от функции

$$2.57 \quad y = \sin^2 x.$$

$$2.58 \quad y = e^{\frac{-x}{a}}, a - \text{const}.$$

$$2.59 \quad y = \frac{1}{1+2x}.$$

$$2.60 \quad y = e^{x^2}.$$

$$2.61 \quad y = \frac{x^2 + 1}{x - 1}.$$

$$2.62 \quad y = \sqrt{x^2 + 1}.$$

Найти производные n -го порядка от функции

$$2.63 \quad S = t \cdot e^{-t}.$$

$$2.64 \quad y = a^x.$$

2.3 Производная неявно заданной функции

Функция $y = f(x)$ задана неявно уравнением $F(x, y) = 0$, если при подстановке её в это уравнение, она обращает его в тождество

$$F(x, f(x)) \equiv 0.$$

Если функция $y = f(x)$ задана неявно уравнением $F(x, y) = 0$, то для нахождения производной y' нужно продифференцировать по x обе части этого уравнения, учитывая, что y есть функция от x , а затем разрешить полученное уравнение относительно y' .

Чтобы найти y'' неявно заданной функции, надо уравнение $F(x, y) = 0$ дважды продифференцировать по x и т.д.

Решение типовых примеров

Найти производную неявно заданной функции

$$2.65 \quad xy^2 = \operatorname{ctg} y.$$

Решение

$$x'y^2 + 2xyy' = -\frac{y'}{\sin^2 y};$$

$$y^2 + 2xyy' = -\frac{y'}{\sin^2 y};$$

$$y^2 \sin^2 y = -y'(2xy \sin^2 y + 1);$$

$$y' = -\frac{y^2 \sin^2 y}{2xy \sin^2 y + 1}.$$

$$2.66 \quad x^2 - y^2 - 2y = 0.$$

$$2.67 \quad \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

$$2.68 \quad y = \cos(x + y).$$

$$2.69 \quad x = \operatorname{arctg}(x + y).$$

$$2.70 \quad x^3 - y^3 = x^2 y^2.$$

$$2.71 \quad \ln y + \frac{y}{x} = 0.$$

$$2.72 \quad e^x + e^y = e^{x+y}.$$

$$2.73 \quad x^2 + xy + y^2 = 6.$$

$$2.74 \quad e^y - e^{-x} + xy = 0.$$

$$2.75 \quad e^x \sin y - e^{-y} \cos x = 0.$$

$$2.76 \quad e^{xy} - x^2 + y^2 = 0 \quad \text{Найти } y'(0). \quad 2.77 \quad x^3 \cdot y^2 + 5xy + 4 = 0.$$

$$2.78 \quad \arctg y - y + x = 0.$$

$$2.79 \quad x^2 + y^2 - xy = 0.$$

$$2.80 \quad x^3 y^2 + 5xy + 4 = 0.$$

$$2.81 \quad x^3 y - 3x^2 y^2 + 5y^3 - 3x + 4 = 0.$$

$$2.82 \quad x^2 y + \arctg \frac{y}{x} = 0.$$

$$2.83 \quad x^3 + y^3 = \sin(x - 2y).$$

$$2.84 \quad e^{xy} - \cos(x^2 + y^2) = 0.$$

$$2.85 \quad x^2 + y^2 = \ln \frac{y}{x} + 7.$$

$$2.86 \quad e^y = e - xy.$$

2.4 Производная параметрически заданной функции

Если зависимость функции y от независимой переменной x задана с помощью вспомогательной переменной (параметра) t :

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in [\alpha; \beta],$$

то

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}, \quad y''_{x^2} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}$$

или

$$y''_{x^2} = \frac{y''_t x'_t - y'_t x''_t}{x'^2_t}.$$

Решение типовых примеров

Найти y' и y''_{x^2} :

$$2.87 \quad \begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t. \end{cases}$$

Решение

Найдём

$$x'_t = (a \cos^3 t)'_t = -3a \cos^2 t \sin t;$$

$$y'_t = (a \sin^3 t)'_t = 3a \sin^2 t \cos t.$$

Тогда

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{3a \sin^2 t \cos t}{-3a \cos^2 t \sin t} = -\operatorname{tg} t.$$

$$y'_x = -\operatorname{tg} t.$$

Найдём $(y'_x)'_t = (-\operatorname{tg} t)'_t = -\frac{1}{\cos^2 t}.$

Тогда $y''_{x^2} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = -\frac{\frac{1}{\cos^2 t}}{-3a \cos^2 t \sin t} = \frac{1}{3a \sin t \cos^4 t}, \quad y''_{x^2} = \frac{1}{3a \sin t \cos^4 t}.$

Найти y' :

$$2.88 \quad \begin{cases} x = \ln t \\ y = \sin 2t \end{cases}.$$

$$2.89 \quad \begin{cases} x = \sqrt{t} \\ y = \sqrt[3]{t} \end{cases}.$$

$$2.90 \quad \begin{cases} x = \frac{1}{t+1} \\ y = \frac{t}{t+1} \end{cases}.$$

$$2.91 \quad \begin{cases} x = a(\sin t - t \cos t) \\ y = a(\cos t + t \sin t) \end{cases}.$$

$$2.92 \quad \begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t \end{cases}.$$

$$2.93 \quad \begin{cases} x = t^2 \\ y = \frac{1}{3}t^3 - t \end{cases}.$$

$$2.94 \quad \begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}.$$

$$2.95 \quad \begin{cases} x = e^{2t} \\ y = e^{3t} \end{cases}.$$

$$2.96 \quad \begin{cases} x = 2 \cos t \\ y = \sin t \end{cases}.$$

$$2.97 \quad \begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases}.$$

$$2.98 \quad \begin{cases} x = t^2 \\ y = \frac{t^3}{3} - t \end{cases}.$$

$$2.99 \quad \begin{cases} x = e^{2t} \\ y = e^{3t} \end{cases}.$$

$$2.100 \quad \begin{cases} x = \ln t \\ y = \sin 2t \end{cases}.$$

$$2.101 \quad \begin{cases} x = t^3 + t \\ y = t^2 + t + 1 \end{cases}.$$

$$2.102 \quad \begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}.$$

$$2.103 \quad \begin{cases} x = \sin^2 t \\ y = \cos^2 t \end{cases}.$$

$$2.104 \quad \begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = 1 - 4t^2 \end{cases}.$$

2.5 Дифференциал функции

Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x , т.е. имеет в этой точке конечную производную $y' = f'(x)$, то

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha \cdot \Delta x,$$

где $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha = 0$.

Главная часть $f'(x)\Delta x$ приращения функции Δy , линейная относительно приращения аргумента Δx , называется дифференциалом функции и обозначается

$$df(x) = f'(x)\Delta x \quad \text{или} \quad dy = y'\Delta x.$$

Положив $y = x$, получим $dx = \Delta x$ и поэтому $dy \approx y'dx$ или $df(x) = f'(x)dx$, откуда $y' = \frac{dy}{dx}$.

Из определения следует, что при достаточно малом приращении аргумента $\Delta x = dx$

$$\Delta f(x) \approx df(x) \quad \text{или} \quad \Delta y \approx dy.$$

Так как

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x),$$

то

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta f(x) \approx f(x) + df(x).$$

Итак,

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x.$$

Последняя формула применяется в приближенных вычислениях для вычисления значения функции, близкого к значению $f(x)$.

Дифференциал сложной функции $y = f[u(x)]$ имеет вид

$$dy = df(u)du = df(u)u'(x)dx.$$

Дифференциалом второго порядка называется дифференциал от дифференциала первого порядка, т.е.

$$d^2y = d(dy) = y''dx^2$$

или

$$d^2f(x) = f''(x)dx^2,$$

отсюда

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Дифференциал n -го порядка имеет вид

$$d^ny = f^{(n)}(x)dx^n$$

или

$$d^ny = y^{(n)}dx^n,$$

отсюда

$$y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n}.$$

Решение типовых примеров

Найти дифференциал функции

2.105 $y = (1 + \operatorname{tg} x)^3$.

Решение

$$dy = y' dx$$

$$y' = \left[(1 + \operatorname{tg} x)^3 \right]' = 3(1 + \operatorname{tg} x)^2 \cdot (1 + \operatorname{tg} x)' = 3(1 + \operatorname{tg} x)^2 \cdot \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Таким образом,

$$dy = \frac{3(1 + \operatorname{tg} x)^2 dx}{\cos^2 x}.$$

2.106 $y = \operatorname{arctg} x$ при $x=1$ и $\Delta x=0,01$.

Решение

$$y' = \frac{1}{1+x^2} \quad dy = \frac{1}{1+x^2} \Delta x; \quad dy \Big|_{\substack{x=1 \\ \Delta x=0,01}} = \frac{1}{2} \cdot 0,01 = 0,005.$$

Итак, $dy = 0,005$.

2.107 Найти приращение Δy и дифференциал dy функции $y = x^2 - x + 1$ при $x=3$, $\Delta x=0,01$. Какова абсолютная и относительная погрешности, которые получаются при замене приращения функции её дифференциалом.

Решение

$$\begin{aligned} \Delta y &= f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^2 - (x + \Delta x) + 1 - (x^2 - x + 1) = \\ &= x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 + 1 - x - \Delta x - x^2 + x - 1 = 2x\Delta x - \Delta x + \Delta x^2 \end{aligned}$$

$$\Delta y \Big|_{\substack{x=3 \\ \Delta x=0,01}} = 2 \cdot 3 \cdot 0,01 - 0,01 + 0,0001 = 0,0501.$$

Вычислим dy этой функции при $x=3$, $\Delta x=0,01$.

$$dy = f'(x) \cdot \Delta x = (x^2 - x + 1)' \cdot \Delta x = (2x - 1) \Delta x;$$

$$dy \Big|_{\substack{x=3 \\ \Delta x=0,01}} = (2 \cdot 3 - 1) \cdot 0,01 = 0,05.$$

Абсолютная погрешность

$$|\Delta y - dy| = |0,0501 - 0,05| = 0,0001.$$

Относительная погрешность

$$\left| \frac{\Delta y - dy}{\Delta y} \right| = \frac{0,0001}{0,0501} \approx 0,002 = 0,2\%.$$

2.108 Найти приближенное значение $\sqrt[3]{26,19}$.

Решение

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x.$$

В данном случае $f(x) = \sqrt[3]{x}$; $x = 27$; $\Delta x = -0,81$.

Найдём $f'(x)$:

$$f'(x) = (\sqrt[3]{x})' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

Вычислим

$$f'(27) = \frac{1}{3\sqrt[3]{27^2}} = \frac{1}{27}.$$

Таким образом,

$$\sqrt[3]{26,19} \approx \sqrt[3]{27} + f'(27)(-0,81) = 3 - \frac{0,81}{27} = 2,97.$$

Итак, $\sqrt[3]{27} \approx 2,97$.

2.109 Вычислить $\cos 61^\circ$.

Решение

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x.$$

Имеем $f(x) = \cos x$; $x = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$; $\Delta x = 1^\circ \approx 0,0174$

$$f'(x) = -\sin x; \quad f'(60^\circ) = -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 61^\circ \approx \cos 60^\circ - \sin 60^\circ \cdot 0,0174 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0,0174 = 0,4849.$$

Итак, $\cos 61^\circ \approx 0,485$.

2.110 Определить приращение и дифференциал функции $y = x^3$ при переходе значения x от $x = 2$ к значению $x = 2,01$.

2.111 Доказать, что если Δx – бесконечно малая величина, то с точностью до бесконечно малой высшего порядка имеет место приближенное равенство $\sin \Delta x \approx \Delta x$. (Δx выражается в радианах).

2.112 При вытекании жидкости из малого отверстия в сосуде, скорость частиц жидкости определяется по закону Торричелли $V = \sqrt{2gH}$, где H – высота поверхности жидкости над отверстием. На какую величину изменится скорость, если H изменится на dH .

2.113 Период колебания маятника $T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{980}}$ с, где l – длина маятника в см. Как нужно изменить длину маятника $l = 20$ см, чтобы период колебания уменьшился на 0,1 сек.

- 2.114** Вычислить приращение площади квадрата ΔS со стороной $a = 10$ см при увеличении длины стороны квадрата на $\Delta a = 0,01$ см
 а) точно б) приближенно. Результаты сравнить.

Найти дифференциал функций:

2.115 $y = \sqrt{1+x^2}$.

2.116 $y = \sin^2 t$.

2.117 $y = 1 - \cos u$.

2.118 $y = (1+x-x^2)^3$.

2.119 $y = \operatorname{tg}^2 x$.

2.120 $y = \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{4} \right)$.

2.121 $y = \sqrt{\arcsin x} + (\operatorname{arc} \operatorname{tg} x)^2$.

2.122 $y = x^2 e^x$.

2.123 $y = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{x}$.

2.124 $y = e^{x^3}$.

2.125 $y = (x^3 - x) \operatorname{tg} x$.

2.126 $y = \frac{x-2}{x^2+1}$.

2.127 $y = x^3 \cdot \ln x$.

Вычислить приближенно с помощью дифференциала:

2.128 $f(x) = e^{0,1x(1-x)}$ для $x = 1,05$.

2.129 $\sqrt{(2,037)^2 - 3}$.

2.130 $\sin 31^\circ$.

2.131 $\sqrt[3]{28}$.

2.132 $\operatorname{tg} 44^\circ$.

2.133 $\sqrt{62}$.

2.134 $\ln 1,02$.

2.135 $\sqrt{24}$.

2.136 $\sqrt[3]{26}$.

2.137 $(1,02)^5$.

2.138 $\sin 29^\circ$.

2.139 $(0,99)^4$.

2.140 $\operatorname{arc} \operatorname{tg} 1,05$.

Тест 2

1. Производной функции $y=f(x)$ в точке x_0 называется

1: $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta(x+x_0)} = y'$; 2: $\lim_{\Delta x \rightarrow x_0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'$;

3: $\lim_{\Delta x \rightarrow x_0} \frac{y-y_0}{\Delta x} = y'$; 4: $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'$.

2. Дифференцированием функции называется процесс нахождения:

1: первообразной; 2: производной; 3: предела; 4: непрерывности.

3. С физической точки зрения первая производная - это:

1: сила; 2: энергия; 3: мощность; 4: скорость.

4. Дифференциал функции в данной точке это:

1: $dy = cy'dx$; 2: $dy = f'(x)dx$; 3: $dy = f(x)dx$; 4: $dy = dx$.

5. Тангенс угла наклона касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке с абсциссой x_0 равен

1: Пределу функции в точке x_0 ; 2: первообразной функции $f(x)$;

3: производной функции $f'(x)$ в точке x_0 .

6. Если $y(x) = \frac{\arctg x}{1+x^2}$, то $y'(x)$ равно

1: $\frac{1-2x\arctg x}{(1+x^2)^2}$; 2: $\frac{1-x\arctg x}{(1+x^2)^2}$; 3: $\frac{1+2x\arctg x}{(1+x^2)^2}$; 4: $\frac{1-\arctg x}{(1+x^2)^2}$.

7. Если $y(x) = (\arcsin 3x)^2$, то $y'(x)$ равно

1: $\frac{6\arcsin 3x}{\sqrt{1-9x^2}}$; 2: $\frac{3\arcsin 3x}{\sqrt{1-9x^2}}$; 3: $\frac{6\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$; 4: $\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-9x^2}}$.

8. Угол, под которым кривая $y = \frac{x-2}{x^2+1}$ пересекает ось абсцисс равен

1: $\arctg \frac{1}{25}$; 2: $\arctg \left(-\frac{1}{25}\right)$; 3: $\arctg \frac{1}{24}$; 4: $\arctg \left(-\frac{1}{23}\right)$.

9. Если $y(x) = (x^2+x+1)(x^2-x+1)$, то $y'(1)$ равно

1: 6; 2: -6; 3: 5; 4: -3.

10. . Если $x = 1 - t^2$, $y = t - t^3$, то y'_x равно

1: $\frac{3t^2 - 1}{2t}$; 2: $\frac{3t^2 - 1}{t}$; 3: $\frac{t^2 - 1}{t}$; 4: $\frac{3t^2 + 1}{t}$.

11. Вторая производная функции $y = \sin^2 x$ равна

1: $\cos 2x$; 2: $2 \cos 2x$; 3: $-2 \sin 2x$; 4: $\sin 2x$.

12. Производная неявной функции $xe^y - x^2 = 1$ равна

1: $y' = \frac{2x - e^y}{xe^y}$; 2: $y' = \frac{2 - e^y}{xe^y}$; 3: $y' = \frac{2 - e^y}{e^y}$; 4: $y' = \frac{2}{xe^y}$.

13. Дифференциал функции $y = \cos^4 x^2$ равен

1: $dy = -8x \cos^3 x^2 \sin x^2 dx$; 2: $dy = -4 \sin 2x^2 dx$; 3: $dy = -8x \cos^3 x^2 dx$

14. Второй дифференциал функции $y = \frac{1}{x}$ равен

1: $\frac{dx^2}{x^2}$; 2: $\frac{2dx^2}{x^3}$; 3: $\frac{dx}{x^2}$; 4: $-\frac{dx^2}{x^2}$.

15. Угловой коэффициент касательной к кривой $y = x^3 - 3$ в точке $x_0 = 1$ равен

1: 2; 2: 0; 3: -2; 4: 3.

16. Угол, образованный касательной к графику функции $y = x^2 - x$ в точках ее пересечения с осью Ox , равен :

1: $\frac{\pi}{4}$; 2: $\frac{\pi}{6}$; 3: $\frac{\pi}{2}$; 4: 0.

17. Уравнение касательной к графику функции $y = \frac{1}{x} + x$ в точке $(1; 2)$ имеет вид

1: $x - y + 1 = 0$; 2: $x - y - 1 = 0$; 3: $y - 1 = 0$; 4: $y - 2 = 0$.

18. Найти угловой коэффициент касательной, проведенной к параболе $y = x^2$ в начале координат?

1: 1; 2: 0; 3: -1; 4: 0,5 .

19. Если $S(t) = t^3 - t^2 + 1$, то $S'(2)$ равно

1: 7; 2: 8; 3: 6; 4: 9.

20. Тело массой 3кг движется прямолинейно по закону $s = 1 + t + t^2$;
s выражено в сантиметрах, t – в секундах. Какова кинетическая

энергия $\frac{mv^2}{2}$ тела через 5с после начала движения

1: 0,02915Дж; 2: 0,01815Дж; 3: 0,0195Дж; 4: 0,0815Дж.

Ответы к главе 2

$$2.3 \quad y' = 15x^2 - 4x + 3$$

$$2.4 \quad y' = \frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{6}{x^3}$$

$$2.5 \quad y' = 3x^2 \cos x - x^3 \sin x$$

$$2.6 \quad y' = \frac{x - 3(1 + x^2) \operatorname{arctg} x}{x^4(1 + x^2)}$$

$$2.7 \quad y' = x^2 - 4x + 4$$

$$2.8 \quad y' = \frac{2}{x} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{\sqrt[4]{x}} \right)$$

$$2.9 \quad y' = 2x \operatorname{ctg} x - \frac{x^2}{\sin^2 x}$$

$$2.10 \quad y' = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$$

$$2.11 \quad y' = \frac{1}{1 - \sin x}$$

$$2.12 \quad y' = 3x^2 - 0,4x + 2 \quad 2.13 \quad y' = \frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}} \quad 2.14 \quad y' = -\frac{2}{3x\sqrt[3]{x^2}} + \frac{6}{x^4} + \sqrt{7}$$

$$2.15 \quad y' = x^2 \left(3\log_2 x + \frac{1}{\ln 2} \right) \quad 2.16 \quad y' = 4x^3 + 2x \quad 2.17 \quad y' = -\frac{10}{1 + x^2} + 7e^x$$

$$2.18 \quad y' = 1,25\sqrt[4]{x} \quad 2.19 \quad y' = \frac{2x + 3}{2\sqrt{x^2 + 3x + 1}} \quad 2.20 \quad y' = 8(x^2 + 5x + 7)^7(2x + 5)$$

$$2.21 \quad y' = \frac{3x^2 + 7}{x^3 + 7x + 2}$$

$$2.22 \quad y' = \frac{1}{(1 + x^2) \operatorname{arctg} x}$$

$$2.23 \quad y' = e^{\operatorname{arcsin} x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$2.24 \quad y' = 3\sin^2 x \cos x$$

$$2.25 \quad y' = 1 - \frac{x \operatorname{arcsin} x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$2.26 \quad y' = 6\cos 6x$$

$$2.27 \quad y' = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2} \right)$$

$$2.28 \quad y' = -20 \cdot (1 - 5x)^3$$

$$2.29 \quad y' = \frac{2}{\sqrt[3]{4 + 3x}}$$

$$2.30 \quad y' = \frac{10x}{(1 - x^2)^6}$$

$$2.31 \quad y' = \frac{2\sin^2 x}{\sqrt{2x - \sin 2x}}$$

$$2.32 \quad y' = \frac{3}{\sqrt{2}} \sin 2x \cdot \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$2.33 \quad y' = \frac{-\sin 2x}{4 \cdot \sqrt[4]{(1 + \cos^2 x)^3}}$$

$$2.34 \quad y' = \sin x \cdot (1 + \sec^2 x)$$

$$2.35 \quad y' = \frac{2 \cdot (x + 1)}{x \cdot (x + 2)}$$

$$2.36 \quad y' = -\operatorname{tg} \frac{x}{2}$$

$$2.37 \quad y' = \frac{4 \cdot a^2 \cdot x}{a^4 - x^4}$$

$$2.38 \quad y' = \frac{2}{1 - 4x^2}$$

$$2.39 \quad y' = -\frac{2 \operatorname{ctg}^2 x}{\sin x}$$

$$2.40 \quad y' = \frac{(x - 1)^2}{x^2 + 1}$$

$$2.41 \quad y' = 2 \cdot e^x \cdot \sqrt{1 - 2x}$$

$$2.42 \quad y' = \frac{4 \cdot e^{2x}}{1 - e^{8x}}$$

$$2.43 \quad y' = \sqrt{\frac{2}{x} - 4}$$

$$2.44 \quad y' = 2 \cdot (3x^2 + 5x - 7) \cdot (x + 1)^2 \cdot (x - 2) \quad 2.45 \quad y' = \sqrt[5]{\frac{2x - 3}{x + 1}} \cdot \frac{1}{(2x - 3) \cdot (x + 1)} \quad 2.46$$

$$y' = 2xe^{x^2} \sin 2x(1 + x^2 + x \operatorname{ctg} 2x) \quad 2.47 \quad y' = 5x^4(1 + 3x)^2 \cdot (1 + 2x - 12x^2) \cdot (1 - 2x) \quad 2.48$$

$$y' = \frac{(x^2 - 4x + 2) \cdot \sqrt[3]{x(x - 1)(x - 2)^2}}{3x(x - 1)(x - 2)^2} \quad 2.49 \quad y' = \frac{(x - 4)\sqrt{x + 2}}{(x - 2)\sqrt{x - 2}}$$

$$2.50 \quad y' = \frac{1}{(1 - \operatorname{arcsin}^2 x)\sqrt{1 - x^2}} \sqrt{\frac{1 + \operatorname{arcsin} x}{1 - \operatorname{arcsin} x}} \quad 2.51 \quad x^{\sin x} \left(\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x} \right)$$

$$\begin{array}{ll}
2.52 \ y' = \frac{(x-1)^3 \sqrt{x+2}}{\sqrt[3]{(x+1)^2}} \left(\frac{3}{x-1} + \frac{1}{2(x+2)} - \frac{2}{3(x+1)} \right) & 2.53 \ y' = x^x (1 + \ln x) \\
2.54 \ y' = 2x^{\ln x - 1} & 2.55 \ y' = (\operatorname{tg} x)^{\cos} \cdot \left(\frac{1}{\sin x} - \sin x \cdot \ln \operatorname{tg} x \right) \\
2.56 \ y' = \frac{(x^2 - 1) \cdot \cos^6 x}{\sqrt[7]{x^5}} \cdot \left(\frac{2x}{1-x^2} + 6 \operatorname{tg} x + \frac{5}{7x} \right) & 2.57 \ y'' = \sin 2x \quad 2.58 \ y'' = \frac{1}{a^2} e^{-\frac{x}{a}} \\
2.59 \ y'' = \frac{4 \cdot 2}{(1+2x)^3} & 2.60 \ y'' = 2e^{x^2} (1+2x^2) \quad 2.61 \ y'' = \frac{4}{(x-1)^3} \\
2.62 \ y'' = \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} & 2.63 \ S^{(n)} = (-1)^{n+1} e^{-t} (n-t) \quad 2.64 \ y^{(n)} = a^x (\ln a)^n \\
2.66 \ y' = \frac{x}{y+1} & 2.67 \ y' = \frac{9x}{4y} \quad 2.68 \ y' = -\frac{\sin(x+y)}{1+\sin(x+y)} \quad 2.69 \ y' = (x+y)^2 \\
2.70 \ y' = \frac{3x^2 - 2xy^2}{2x^2y + 3y^2} & 2.71 \ y' = \frac{y^2}{x^2 + xy} \quad 2.72 \ y' = \frac{e^{x-y}(e^y - 1)}{1 - e^x} \quad 2.73 \ y' = -\frac{2x+y}{x+2y} \\
2.74 \ y' = \frac{e^{-x} + y}{e^y + x} & 2.75 \ y' = \frac{e^x \sin y + e^{-y} \sin x}{e^x \cos y + e^{-y} \cos x} \quad 2.76 \ y'(0) = \frac{1}{3} \\
2.77 \ y' = -\frac{3x^2y^2 + 5y}{2x^3y + 5x} & 2.78 \ y' = \frac{1+y^2}{y^2} = \frac{1}{y^2} + 1 \quad 2.79 \ y' = \frac{2x-y}{x-2y} \\
2.80 \ y' = -\frac{3x^2y^2 + 5y}{2x^3y + 5x} & 2.81 \ y' = \frac{-3x^2y^2 + 6xy^2 + 3}{x^3 - 6x^2y + 15y^2} \quad 2.82 \ y' = \frac{-2x^3y - 2xy^3 + y}{x^4 + x^2y^2 + x} \\
2.83 \ y' = \frac{\cos(x-2y) - 3x^2}{3y^2 + 2\cos(x-2y)} & 2.84 \ y' = -\frac{2x\sin(x^2+y^2) + ye^{xy}}{2y + \sin(x^2+y^2) + xe^{xy}} \\
2.85 \ y' = \frac{(2x^2+1)y}{x(1-2y^2)} & 2.86 \ y' = -\frac{y}{x+e^y} \quad 2.88 \ y'_x = 2t \cos 2t, \ y''_{x^2} = 2t(\cos 2t - 2t \sin t) \\
2.89 \ y'_x = \frac{2}{3\sqrt[6]{t}}, \ y''_{x^2} = -\frac{1}{18t\sqrt[3]{t^2}} & 2.90 \ y'_x = -1, \ y''_{x^2} = 0 \quad 2.91 \ y'_x = \operatorname{ctg} t, \\
y''_{x^2} = -\frac{1}{at \sin^3 t} & 2.92 \ y'_x = \frac{\sin t + \cos t}{\cos t - \sin t}, \ y''_{x^2} = \frac{2}{e^t (\cos t - \sin t)^3} \quad 2.93 \ y''_{x^2} = \frac{t^2+1}{4t^3}, \\
y'_x = \frac{t^2-1}{2t} & 2.94 \ y'_x = \operatorname{ctg} \frac{t}{2}, \ y''_{x^2} = -\frac{1}{4a \sin^4 \frac{t}{2}} \quad 2.95 \ y''_{x^2} = \frac{3}{4} e^{-t}, \ y'_x = \frac{3}{2} e^t \\
2.96 \ y''_{x^2} = -\frac{1}{4 \sin^3 t}, \ y'_x = -\frac{1}{2} \operatorname{ctg} t & 2.97 \ y' = -\frac{b}{a} \operatorname{ctg} t, \ y'' = -\frac{b}{a^2 \sin^3 t}
\end{array}$$

2.98 $y' = \frac{t^2 - 1}{2t}$ $y'' = \frac{t^2 + 1}{4t^3}$ **2.99** $y' = \frac{3}{2}e^t$, $y'' = \frac{3}{4e^t}$
2.100 $y' = 2t \cos 2t$ $y'' = 2t(\cos 2t - 2t \sin 2t)$ **2.101** $y' = \frac{2t + 1}{3t^2 + 1}$ **2.102** $y' = \frac{\sin t}{1 - \cos t}$
2.103 $y' = -1$ **2.104** $y' = -4t$ **2.110** $\Delta y = 0,120601$ $dy = 0,12$
2.112 $dV = \frac{gdH}{\sqrt{2gH}}$ **2.113** $dl = -\frac{14}{\pi}$ **2.114** а) $\Delta S = 0,2001 \text{ cm}^2$, б) $dS = 0,2 \text{ cm}^2$
2.115 $dy = \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}$ **2.116** $dy = \sin 2tdt$ **2.117** $dy = \sin u du$
2.118 $dy = 3(1+x-x^2)^2(1-2x)dx$ **2.119** $dy = \frac{2 \operatorname{tg} x}{\cos^2 x} dx$ **2.120** $dy = -\frac{dx}{2 \cdot \sin \frac{x}{2}}$
2.121 $dy = \left(\frac{1}{2\sqrt{\arcsin x} \cdot \sqrt{1-x^2}} + \frac{2 \operatorname{arctg} x}{1+x^2} \right) \cdot dx$ **2.122** $dy = (x \cdot e^x (x+2)) \cdot dx$ **2.123**
 $y = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$ **2.124** $dy = 3x^2 \cdot e^{x^3} \cdot dx$ **2.125** $dy = \left[(3x^2 - 1) \cdot \operatorname{tg} x + \frac{x^3 - x}{\cos^2 x} \right] dx$
2.126 $dy = \frac{-x^2 + 4x + 1}{(x^2 + 1)^2} dx$ **2.127** $dy = x^2(3 \ln x + 1) dx$ **2.128** $f(1,05) = 0,995$
2.129 1,074 **2.130** 0,5147 **2.131** 3,037 **2.132** 0,966 **2.133** 7,875 **2.134** 0,02
2.135 4,9 **2.136** 2,96 **2.137** 1,1 **2.138** 0,485 **2.139** 0,96 **2.140** 0,811.

Глава 3 Аналитические приложения дифференциального исчисления

3.1 Правило Лопиталья

Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ дифференцируемы в некоторой окрестности точки x_0 (за исключением, быть может, её самой), причём $\varphi'(x) \neq 0$. Тогда если

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = 0$$

или

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \infty,$$

то

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Это правило применимо и в том случае, когда $x \rightarrow \infty$.

Правило Лопиталья раскрывает неопределённости вида « $\frac{0}{0}$ » и « $\frac{\infty}{\infty}$ ».

Неопределённости вида « $0 \cdot \infty$ », « $\infty - \infty$ », « 1^∞ », « ∞^0 », « 0^0 » с помощью алгебраических преобразований сводятся к неопределённостям вида « $\frac{0}{0}$ » или « $\frac{\infty}{\infty}$ ».

Правило Лопиталья сводит вычисление предела отношения двух функций к вычислению предела отношения их производных.

Если производные $f'(x)$ и $\varphi'(x)$ удовлетворяют тем же условиям, что и функции $f(x)$ и $\varphi(x)$, то

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} \frac{f''(x)}{\varphi''(x)}.$$

Правило Лопиталья можно применять при вычислении и односторонних пределов.

Решение типовых примеров

Вычислить пределы

$$3.1 \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 2x - 1}{x^2 - x - 2}.$$

Решение

Если в данное отношение подставить $x = -1$, то получим неопределённость « $\frac{0}{0}$ ». Применим правило Лопиталя, то есть заменим отношение функций отношением их производных:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 2x - 1}{x^2 - x - 2} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{6x + 2}{2x - 1} = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}.$$

Таким образом, $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 2x - 1}{x^2 - x - 2} = \frac{4}{3}$.

$$3.2 \quad \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}.$$

Решение

В данном случае имеем неопределённость вида « $\frac{\infty}{\infty}$ ». Вычислим предел по правилу Лопиталя

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}} = -\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin^2 x}{x}.$$

Получили неопределённость вида « $\frac{0}{0}$ », для её раскрытия опять применяем правило Лопиталя

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin^2 x}{x} = -\lim_{x \rightarrow +0} \frac{2 \sin x \cos x}{1} = -\lim_{x \rightarrow +0} \sin 2x = 0.$$

Таким образом, $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x} = 0$.

$$3.3 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^{x^2}}.$$

Решение

В данном случае имеем неопределённость вида « $\frac{\infty}{\infty}$ ». Применяем правило Лопиталя

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{2xe^{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{x^2}} = 0.$$

Таким образом, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^{x^2}} = 0$.

$$3.4 \quad \lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{ctg} 2x.$$

Решение

Имеем неопределённость вида « $0 \cdot \infty$ ». Преобразуем данное выражение

$$x \operatorname{ctg} 2x = \frac{x}{\operatorname{tg} 2x}.$$

Получим неопределённость вида « $\frac{0}{0}$ », которую раскроем по правилу Лопиталя

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{tg} 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2/\cos^2 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 2x}{2} = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, $\lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{ctg} 2x = \frac{1}{2}$.

$$3.5 \quad \lim_{x \rightarrow -3} \left(\frac{6}{9-x^2} - \frac{1}{x+3} \right).$$

Решение

Имеем неопределённость вида « $\infty - \infty$ ». Приведём выражение $\frac{6}{9-x^2} - \frac{1}{x+3}$ к общему знаменателю

$$\lim_{x \rightarrow -3} \left(\frac{6}{9-x^2} - \frac{1}{x+3} \right) = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{6-(3-x)}{9-x^2} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{3+x}{9-x^2} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{1}{3-x} = \frac{1}{6}.$$

Таким образом, $\lim_{x \rightarrow -3} \left(\frac{6}{9-x^2} - \frac{1}{x+3} \right) = \frac{1}{6}$.

$$3.6 \text{ а) } \lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}}.$$

Решение

Имеем неопределённость вида « 1^∞ ». Обозначим $y = x^{\frac{1}{1-x}}$ и прологарифмируем эту функцию

$$\ln y = \frac{1}{1-x} \ln x = \frac{\ln x}{1-x}; \quad y = e^{\frac{\ln x}{1-x}}.$$

$$\text{Вычислим } \lim_{x \rightarrow 1} \ln y = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{1-x} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1/x}{-1} = -\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x} = -1.$$

$$\text{Тогда } \lim_{x \rightarrow 1} y = \lim_{x \rightarrow 1} e^{\frac{\ln x}{1-x}} = e^{-1}.$$

$$\text{Таким образом, } \lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}} = e^{-1}.$$

$$б) \quad \lim_{x \rightarrow +0} x^{\frac{2}{1-\ln x}}.$$

Решение

Имеем неопределённость вида « 0^0 ». Обозначим $y = x^{\frac{2}{1-\ln x}}$.
Прологарифмировав, получим

$$\ln y = \frac{2}{1-\ln x} \ln x = \frac{2 \ln x}{1-\ln x}; \quad y = e^{\frac{2 \ln x}{1-\ln x}}.$$

$$\text{Тогда } \lim_{x \rightarrow +0} \ln y = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{2 \ln x}{1-\ln x} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = 2 \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1/x}{-1/x} = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} \ln y = -2.$$

$$\text{Следовательно, } \lim_{x \rightarrow +0} y = e^{-2}.$$

$$\text{Таким образом, } \lim_{x \rightarrow +0} x^{\frac{2}{1-\ln x}} = e^{-2}.$$

Вычислить пределы

$$3.7 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^3 - 7x + 6}.$$

$$3.8 \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 5x^2 + 2x + 8}{x^4 - 2x^3 - 16x^2 + 2x + 15}.$$

$$3.9 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x+\ln x}{1-\sqrt{2x-x^2}}.$$

$$3.10 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}.$$

$$3.11 \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{2+x}+x}{\ln(2+x)}.$$

$$3.12 \quad \lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}.$$

$$3.13 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}.$$

$$\text{Указание: } \sqrt{x}-\sqrt{x-1} = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x}-\sqrt{x-1}) = 0.$$

$$3.14 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln^2(1+x)}{x}.$$

$$3.15 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{x^2}.$$

$$3.16 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x} + \ln(1+x)}{x}.$$

$$3.17 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - e^{2x} - x}{x^2}.$$

$$3.18 \quad \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\sin x + \cos x}{x + \frac{\pi}{4}}.$$

$$3.19 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{\operatorname{tg} x}.$$

$$3.20 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(1+x) - \ln 2}{\sqrt{1+2x} - 3^{x-\frac{1}{2}}}.$$

$$3.21 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin x)}{\sqrt{1+x}-1}.$$

$$3.22 \quad \lim_{x \rightarrow \sqrt{\pi}} \frac{\ln \frac{x^2}{\pi}}{\sin x^2}.$$

$$3.24 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^3}.$$

$$3.26 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x - \sin x}.$$

$$3.28 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin 2x}.$$

$$3.30 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x^2}.$$

$$3.32 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{x^2 + 2 \cos x - 2}.$$

$$3.34 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^3}.$$

$$3.36 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x}.$$

$$3.38 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{\ln(e^{x^2} + 1)}.$$

$$3.40 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}.$$

$$3.42 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin mx)}{\ln \sin x}.$$

$$3.23 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{\sin x}.$$

$$3.25 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x}{1 - \sin \frac{\pi x}{2}}.$$

$$3.27 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}.$$

$$3.29 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \sin 2x}{x^3}.$$

$$3.31 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{x^2}{2}} - \cos x}{x^3 \sin x}.$$

$$3.33 \quad \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} 5x}.$$

$$3.35 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x^3}.$$

$$3.37 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4^x - 3^x}{x^2}.$$

$$3.39 \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln \ln(x^2 - 3)}{\ln(x - 2)}.$$

$$3.41 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\pi}{x}}{\operatorname{ctg} \frac{\pi x}{2}}.$$

$$3.43 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x^2}.$$

$$3.44 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^{3x}}{x}.$$

$$3.45 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - 3 \ln x}{x + 2}.$$

$$3.46 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3^x}{x^3}.$$

$$3.47 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\ln(1+x)}.$$

$$3.48 \quad \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\operatorname{tg} x}{5^{\operatorname{tg} x}}.$$

$$3.49 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right).$$

$$3.50 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2}{x^2 - 1} - \frac{1}{x-1} \right).$$

$$3.51 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \ln x - \sqrt{1+x^2} \right).$$

$$3.52 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x} \right).$$

$$3.53 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{e^x - e} \right).$$

$$3.54 \quad \lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{1}{\sin(x+1)} + \ln(1+x) \right).$$

$$3.55 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right).$$

$$3.56 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right).$$

$$3.57 \quad \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{x-3} - \frac{5}{x^2 - x - 6} \right).$$

$$3.58 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{1}{2(1-\sqrt{x})} - \frac{1}{3(1-\sqrt[3]{x})} \right].$$

$$3.59 \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{x}{\operatorname{ctg} x} - \frac{\pi}{2 \cos x} \right).$$

$$3.60 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{5}{x^5 - 1} - \frac{7}{x^7 - 1} \right).$$

$$3.61 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{1 - \cos x} \right).$$

$$3.62 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \ln^2 x - \sqrt{1+x+x^2} \right)$$

Указание: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \ln^2 x - \sqrt{1+x+x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln^2 x \left(1 - \frac{\sqrt{1+x+x^2}}{x \ln^2 x} \right).$

Найти отдельно $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+x+x^2}}{x \ln^2 x}.$

$$3.63 \quad \lim_{x \rightarrow +0} x \ln x.$$

$$3.64 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x}.$$

$$3.65 \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) \operatorname{ctg} x.$$

$$3.66 \quad \lim_{x \rightarrow 1} (1 - x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}.$$

$$3.67 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \arcsin x \cdot \operatorname{ctg} x.$$

$$3.68 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^{-x}, \quad n > 0.$$

$$3.69 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{a}{x}.$$

$$3.70 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x^n \sin \frac{a}{x}, \quad n > 0.$$

$$3.71 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \ln x \cdot \ln(x - 1).$$

$$3.72 \quad \lim_{x \rightarrow 0} x \ln^3 x.$$

$$3.73 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(1 - e^{\frac{1}{x}} \right).$$

$$3.74 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \left[(x - \sqrt{x}) \ln \ln x \right].$$

$$3.75 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{x} \cdot \ln x.$$

$$3.76 \quad \lim_{x \rightarrow 1/2} \sin(2x - 1) \operatorname{tg} \pi x.$$

$$3.77 \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \cos x \cdot \operatorname{tg} 5x.$$

$$3.78 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{ctg} x \cdot \ln(x + e^x).$$

$$3.79 \quad \lim_{x \rightarrow +0} x^x.$$

$$3.80 \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1 + mx)^{\frac{1}{x}}.$$

$$3.81 \quad \lim_{x \rightarrow +0} \left(\frac{1}{x} \right)^{\operatorname{tg} x}.$$

$$3.82 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (x + \sqrt{x})^{\frac{1}{x}}.$$

$$3.83 \quad \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x - 3}{x - 2} \right)^{\sqrt{2x} - 2}.$$

$$3.84 \quad \lim_{x \rightarrow 0} (\sin x - \sqrt{x})^x.$$

$$3.85 \quad \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}.$$

$$3.86 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}}.$$

$$3.87 \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^{\frac{3}{4 + \ln x}}.$$

$$3.88 \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^{\sin x}.$$

$$3.89 \quad \lim_{x \rightarrow 1} (1 - x)^{\cos \frac{\pi x}{2}}.$$

$$3.90 \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x^2)^{\frac{1}{x}}.$$

$$3.91 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \left(\operatorname{tg} \frac{\pi x}{4} \right)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}}.$$

$$3.92 \quad \lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{\ln x}}.$$

$$3.93 \quad \lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{ctg} x)^{\sin x}.$$

$$3.94 \quad \lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{3}{x^2-1}}.$$

$$3.95 \quad \lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{tg} x)^{\sin x}.$$

$$3.96 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\ln x)^{\frac{1}{x}}.$$

$$3.97 \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\ln x}.$$

$$3.98 \quad \lim_{x \rightarrow \pi/4} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}.$$

$$3.99 \quad \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}.$$

$$3.100 \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1+x^2)^{\frac{1}{e^x-x-1}}.$$

$$3.101 \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^{\frac{1}{\ln \sin x}}.$$

3.2 Формула Тейлора

Если функция $f(x)$ имеет в точке $x=a$ и некоторой её окрестности производные порядка $n+1$ и x - любое значение аргумента из этой окрестности, причем $x \neq a$, то между точками a и x найдется такая точка c , что будет справедлива формула Тейлора

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \\ + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

где $c = a + \theta(x-a)$, $0 < \theta < 1$

$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ - остаточный член в форме Лагранжа.

При $a=0$ имеем формулу Маклорена:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x),$$

где $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$,

где $0 < \theta < 1$.

Формула Тейлора позволяет представить приближенно функцию $f(x)$ в виде многочлена и оценить полученную при этом погрешность

$$f(x) \approx f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,$$

$\Delta = |R_n(x)|$ - абсолютная ошибка.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1},$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_n(x),$$

$$R_n(x) = \sin \left[\theta x + (2n+1) \frac{\pi}{2} \right] \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_n(x),$$

$$R_n(x) = \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cos \left[\theta x + (2n+2) \frac{\pi}{2} \right],$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + R_n(x),$$

α - действительное число.

Если $\alpha = n$ - натуральное число, то

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!} x^2 + \dots + x^n.$$

Формула Тейлора применяется при вычислении пределов и значений функций с заданной степенью точности.

Решение типовых примеров

3.102 Вычислить $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + x}{x}$.

Решение

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + R_n(x) + x \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(2 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots \right) = 2 + 0 = 2.$$

3.103 Вычислить $\sin 18^\circ$ с точностью до 0,0001.

Решение

$$\sin 18^\circ = \sin \frac{\pi}{10} = \frac{\pi}{10} - \frac{\pi^3}{3!10^3} + \frac{\pi^5}{5!10^5} - \dots + R_n(x),$$

$$R_n(x) = \sin \left[\theta x + (2n+1) \frac{\pi}{2} \right] \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$\Delta = |R_n(x)| \leq \left| \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right|.$$

При $n = 2$ имеем $\frac{\pi^5}{5!10^5} < 0,0001$, следовательно,

$$\sin 18^\circ \approx \frac{\pi}{10} - \frac{\pi^3}{3!10^3} = \frac{3,14159}{10} - \frac{(3,14159)^3}{6 \cdot 1000} = 0,31159 - 0,00517 = 0,30899 \approx 0,3090,$$

$$\sin 18^\circ \approx 0,3090 \quad \Delta \leq 0,0001.$$

Используя формулу Тейлора, найти пределы функций

$$3.104 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}.$$

$$3.105 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{x^3}.$$

$$3.106 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}.$$

$$3.107 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}.$$

$$3.108 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - 2 \operatorname{tg} x}{\ln(1 + x^3)}.$$

$$3.109 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{e^x} (\sqrt{e^x + 1} - \sqrt{e^x - 1}).$$

$$3.110 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{3}{2}} (\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x}).$$

$$3.111 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{2x^2}.$$

$$3.112 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right).$$

$$3.113 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \operatorname{ctg} x \right) \frac{1}{x}.$$

$$3.114 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \sin x - x \sqrt[3]{1 - x^2}}{x^5}.$$

Вычислить по формуле Маклорена приближенные значения

$$3.115 \quad \cos 15^\circ.$$

$$3.116 \quad \sqrt{e}.$$

$$3.117 \quad \sqrt[3]{29}.$$

$$3.118 \quad \cos 45^\circ.$$

$$3.119 \quad \ln 1,5.$$

$$3.120 \quad \sqrt[3]{9} \text{ с точностью до } 10^{-3}.$$

$$3.121 \quad \sqrt[4]{90} \text{ с точностью до } 10^{-4}.$$

$$3.122 \quad \sin 1^\circ \text{ с точностью до } 10^{-8}.$$

$$3.123 \quad \ln 1,1 \text{ с точностью до } 10^{-3}.$$

$$3.124 \quad e^{0,2} \text{ с точностью до } 10^{-5}.$$

$$3.125 \quad \cos 6^\circ \text{ с точностью до } 10^{-5}.$$

3.3 Исследование функции на экстремум

Функция $y = f(x)$ называется возрастающей (убывающей) на промежутке (a, b) , если большему значению аргумента соответствует большее (меньшее) значение функции, т.е. для любых x_1 и x_2 из (a, b) неравенству $x_1 < x_2$ соответствует неравенство

$$f(x_1) < f(x_2) \quad (f_1(x) > f_2(x)).$$

Если неравенству $x_1 < x_2$ соответствует нестрогое неравенство

$$f(x_1) \leq f(x_2) \quad (f(x_1) \geq f(x_2)),$$

то функция $f(x)$ называется неубывающей (невозрастающей) на $[a, b]$.

Необходимый признак возрастания (убывания) функции

Если дифференцируемая функция $y = f(x)$ возрастает (убывает) на промежутке (a, b) , то при всех значениях $x \in (a, b)$ её производная положительная (отрицательная), т.е. $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$).

Если дифференцируемая функция $y = f(x)$ не убывает (не возрастает) на промежутке (a, b) , то $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) при всех значениях $x \in (a, b)$.

На рисунке 3.1 изображена возрастающая функция, а на рисунке 3.2 – убывающая.

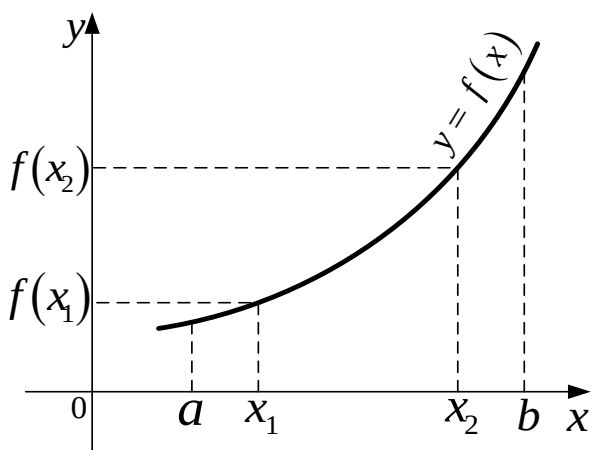


Рисунок 3.1

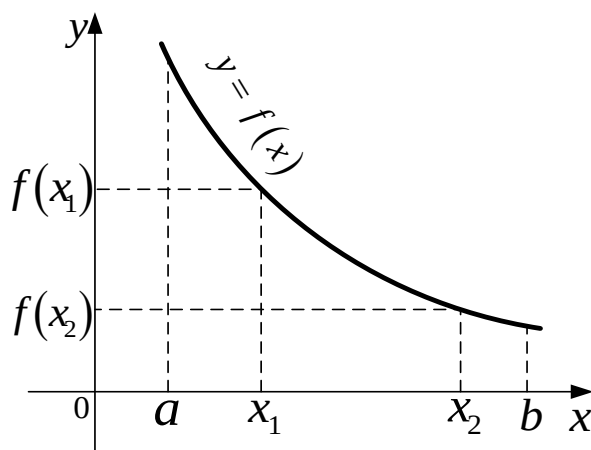


Рисунок 3.2

Достаточный признак возрастания (убывания) функции

Если дифференцируемая на промежутке (a, b) функция $y = f(x)$ имеет при любом значении $x \in (a, b)$ положительную (отрицательную) производную, то эта функция возрастает (убывает) на данном промежутке.

Пример 3.126 Определить интервалы возрастания и убывания функций

a) $y = x^3 + 1,5x^2 - 18x + 1$.

Решение

1. $D(y) = (-\infty; +\infty)$.

2. Найдём y' :

$$y' = 3x^2 + 3x - 18 = 3(x^2 + x - 6).$$

3. Найдём корни производной

$$\begin{aligned} x^2 + x - 6 &= 0, \\ x_1 &= -3 \quad x_2 = 2. \end{aligned}$$

4. Найдём интервалы знакопостоянства производной

$$y' = 3(x + 3)(x - 2).$$

Итак, $y' > 0$ при $x \in (-\infty; -3)$ и при $x \in (2; +\infty)$, следовательно, на этих промежутках функция $y = x^3 + 1,5x^2 - 18x + 1$ возрастает; при $x \in (-3; 2)$ $y' < 0$, следовательно, на этом промежутке функция убывает.

б) $y = \sqrt[3]{x}$.

1. $D(y) = (-\infty; +\infty)$.

2. Найдём y' :

$$y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

3. Так как $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} > 0$ при всех $x \neq 0$, то функция возрастает на $(-\infty; +\infty)$.

Функция $y = f(x)$ имеет максимум (рисунок 3.3) (минимум (рисунок 3.4)) при $x = x_0$, если при всех значениях $x \neq x_0$ и достаточно близких к x_0 выполняется неравенство:

$$f(x) < f(x_0) \quad (f(x) > f(x_0))$$

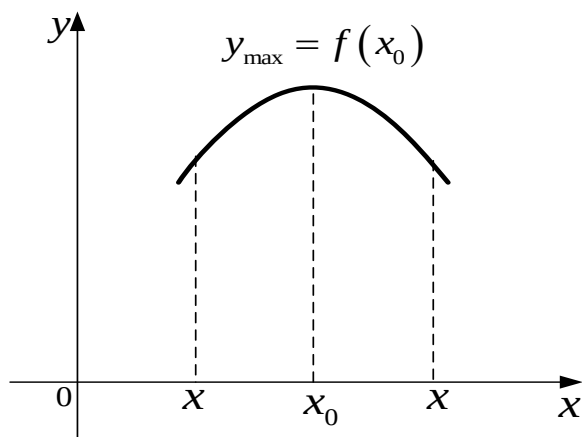


Рисунок 3.3

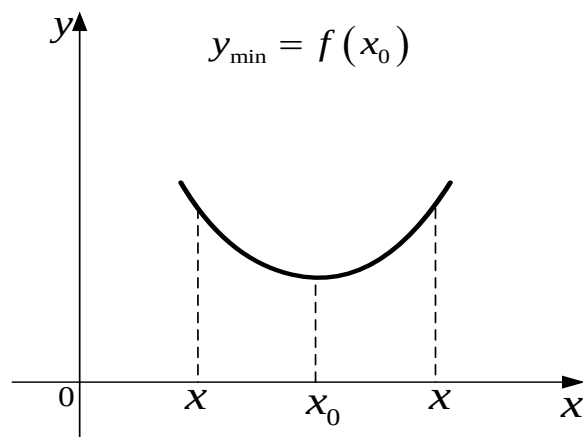


Рисунок 3.4

Максимум и минимум функции называются экстремумами, а точка x_0 - точкой экстремума.

Необходимое условие экстремума

Если непрерывная функция $y = f(x)$ имеет в точке $x_0 \in (a, b)$ экстремум, то производная функции обращается в этой точке в нуль (рисунок 3.5) или не существует (рисунок 3.6, рисунок 3.7).

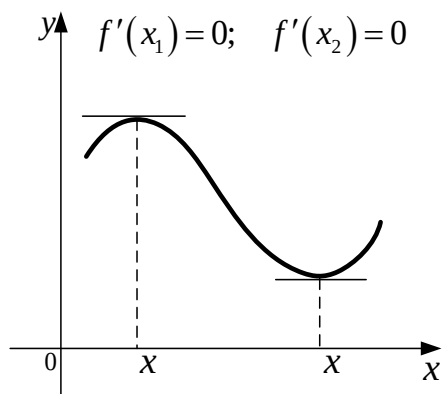


Рисунок 3.5

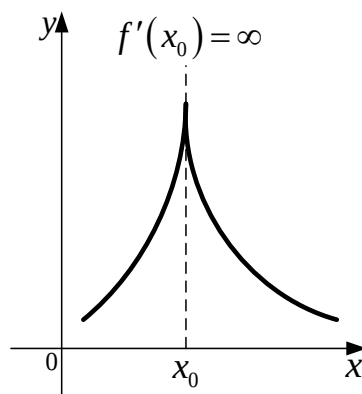


Рисунок 3.6

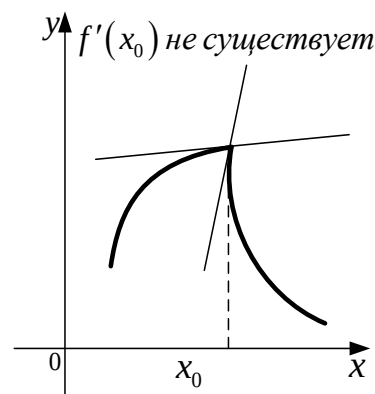


Рисунок 3.7

Точки, в которых производная функции равна нулю или не существует, называются критическими точками первого рода.

Функция $y = f(x)$ может иметь экстремум только в критических точках.

Достаточные признаки экстремума

Признак 1 Если функция $y = f(x)$ непрерывна в интервале, содержащем критическую точку x_0 , и при переходе аргумента слева направо через критическую точку производная $f'(x)$ меняет знак с плюса на минус, то функция в этой точке имеет максимум (рисунок 3.8), если знак производной

меняется с минуса на плюс, то функция в критической точке имеет минимум (рисунок 3.9).

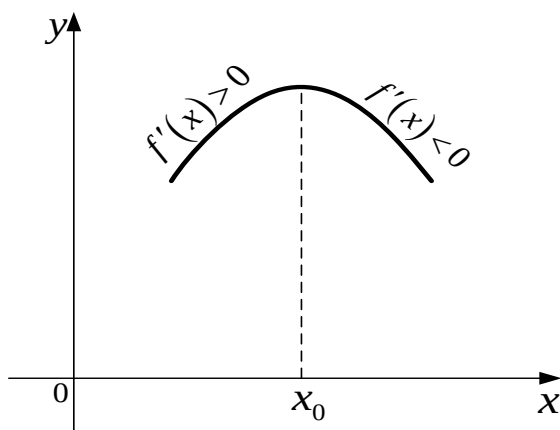


Рисунок 3.8

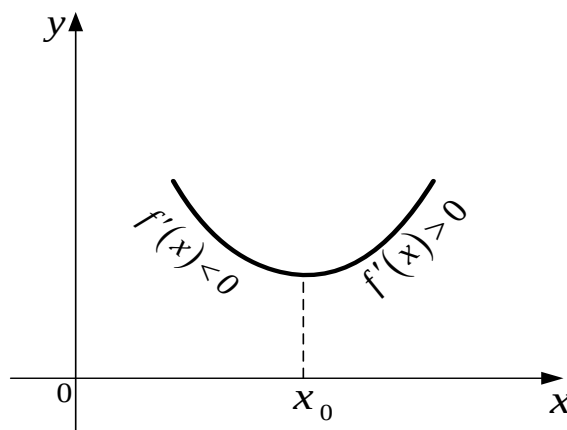


Рисунок 3.9

Правило 1 исследования функции на экстремум

1. Найти область определения функции.
2. Найти производную функции.
3. Найти критические точки.
4. Разбить область определения функции критическими точками на интервалы.
5. Определить знак производной на каждом интервале.
6. Установить вид экстремума.
7. Вычислить значения функции в точках экстремума.

Решение типовых примеров

Исследовать функцию на экстремум

3.127

$$y = x^3 - 6x^2 + 9x + 1.$$

Решение

1. Найдём область определения функции

$$D(y) = (-\infty; +\infty).$$

2. Найдём производную

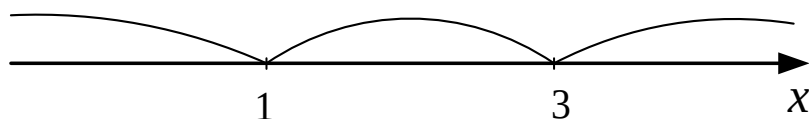
$$y' = 3x^2 - 12x + 9.$$

3. Найдём критические точки

$$y' = 0 \quad 3x^2 - 12x + 9 = 0 \quad \text{или} \quad x^2 - 4x + 3 = 0$$

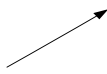
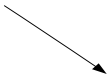
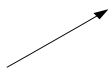
$$\left. \begin{array}{l} x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 \cdot x_2 = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = 3 \end{array} \right\} - \text{критические точки}$$

4. Разобьём область определения функции критическими точками на интервалы



5. Исследуем знак производной и установим вид экстремума с помощью таблицы

$$y = 3(x-1)(x-3)$$

x	$(-\infty; 1)$	1	$(1; 3)$	3	$(3; +\infty)$
y'	+	0	-	0	+
y		max		min	
		5		1	

6. Вычислим значения функции в точках экстремума

$$y_{\max} = f(1) = 5; \quad y_{\min} = f(3) = 1$$

7. Построим график функции в окрестности точек экстремума (рисунок 3.10)

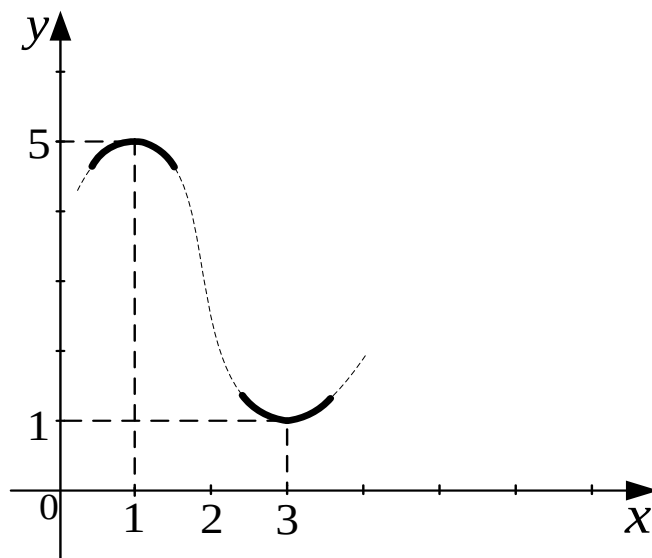


Рисунок 3.10

3.128 $y = 1 - \sqrt[3]{(x+2)^2}$.

Решение

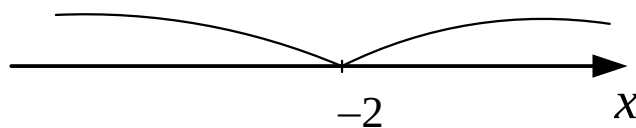
1. $D(y) = (-\infty; +\infty)$.

2. $y' = -\frac{1}{3\sqrt[3]{x+2}}$.

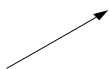
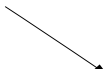
3. $y' \neq 0$,

y' не существует, если $\sqrt[3]{x+2}=0$, откуда $x+2=0$ и $x=-2$ - критическая точка.

4.



5.

x	$(-\infty; -2)$	-2	$(-2; +\infty)$
y'	$+$	Не существует	$-$
y		max	
		1	

6. $y_{\max} = f(-2) = 1$.

7. Построим график функции в окрестности точек экстремума (рисунок 3.11)

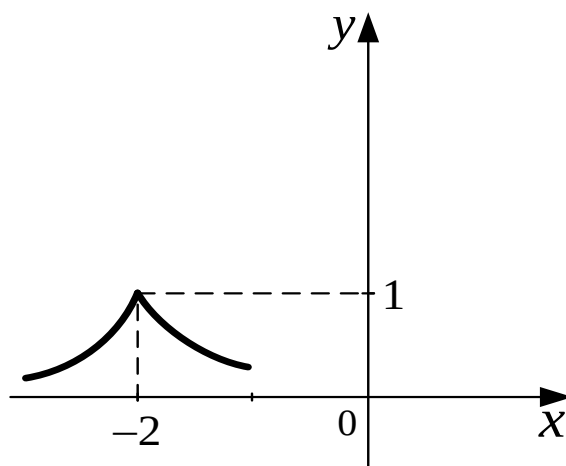


Рисунок 3.11

Признак 2 Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в критической точке x_0 , а вторая производная в этой точке существует и отлична от нуля, то если $f''(x_0) > 0$, то функция в критической точке имеет минимум, а если $f''(x_0) < 0$, то – максимум.

Правило 2 исследования на экстремум

1. Найти область определения функции
2. Найти производную
3. Найти критические точки
4. Найти вторую производную

5. Определить знак второй производной в критических точках
6. Определить вид экстремума
7. Вычислить значения функции в точках экстремума.

Решение типовых примеров

Исследовать функцию на экстремум

3.129

$$y = x - 2\sin x, \quad x \in [0; 2\pi].$$

Решение

1. $D(y) = [0; 2\pi]$.

2. $y' = 1 - 2\cos x$.

3. $y' = 0, \quad 1 - 2\cos x = 0, \quad \cos x = \frac{1}{2},$

$$x_1 = \frac{\pi}{3}; \quad x_2 = \frac{5\pi}{3}.$$

4. $y'' = 2\sin x$.

5. $f''\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\sin\frac{\pi}{3} = 2\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} > 0,$

$$f''\left(\frac{5\pi}{3}\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\sqrt{3} < 0.$$

6. Так как $f''\left(\frac{\pi}{3}\right) > 0$, то функция $y = x - 2\sin x$ имеет в точке $x = \frac{\pi}{3}$

минимум, так как $f''\left(\frac{5\pi}{3}\right) < 0$, то функция в точке $x = \frac{5\pi}{3}$ имеет максимум.

7. $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3} - 2\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} - \sqrt{3} \approx -0,68.$

$$f\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{5\pi}{3} - 2\sin\frac{5\pi}{3} = \frac{5\pi}{3} + \sqrt{3} \approx 6,96.$$

Ответ

$$y_{\max} = f\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{5\pi}{3} + \sqrt{3} \approx 6,96,$$

$$y_{\min} = f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3} - \sqrt{3} \approx -0,68.$$

В тех случаях, когда в критической точке вторая производная обращается в нуль или не существует, второе правило исследования функции на экстремум не применимо.

Отыскание наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, тогда эта функция достигает на этом отрезке своего наибольшего или наименьшего значений либо на границе отрезка, либо внутри него. Если наибольшее или наименьшее значения функция достигает внутри отрезка, то это значение является максимумом или минимумом функции.

Правило нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке

1. Найти производную функции
2. Найти все критические точки функции на $[a, b]$
3. Вычислить значения функции в критических точках и на концах отрезка.
4. Из всех найденных значений функции выбрать наибольшее и наименьшее.

Решение типовых примеров

3.130 Найти наибольшее и наименьшее значение функции $y = x^3 - 3x$ на $[-1,5; 2,5]$.

Решение

1. $y' = 3x^2 - 3$.
2. $y' = 0, \quad 3x^2 - 3 = 0, \quad x^2 - 1 = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = -1$.
3. $f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) = 2,$
 $f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 = -2,$
 $f(-1,5) = (-1,5)^3 - 3(-1,5) = 1,125,$
 $f(2,5) = 2,5^3 - 3 \cdot 2,5 = 8,125.$
4. $y_{\text{наиб}} = f(2,5) = 8,125,$
 $y_{\text{наим}} = f(1) = -2.$

Исследовать функции на экстремум

3.131 $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x.$

3.132 $y = \frac{x^4}{4} - x^3.$

3.133 $y = \sqrt[3]{x^2} - 1.$

3.134 $y = x^2(x - 12)^2.$

$$3.135 \quad y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}.$$

$$3.136 \quad y = \frac{4}{\sqrt{x^2 + 8}}.$$

$$3.137 \quad y = 2\sin 2x + \sin 4x.$$

$$3.138 \quad y = x - \ln(1 + x).$$

$$3.139 \quad y = x \ln x.$$

$$3.140 \quad y = x^2 e^{-x}.$$

$$3.141 \quad y = \frac{e^x}{x}.$$

$$3.142 \quad y = x - \operatorname{arctg} x.$$

Найти наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке

$$3.143 \quad y = x^3 - 3x^2, \quad [-1; 4].$$

$$3.144 \quad y = x \ln x, \quad [0, 1; 1].$$

$$3.145 \quad y = \frac{x}{2 + x^3}, \quad [0; 3].$$

$$3.146 \quad y = x^3 - 9x^2 + 15x, \quad [-2; 3].$$

$$3.147 \quad y = 2x^2 + \frac{32}{x} - 17, \quad [-1; 4].$$

$$3.148 \quad y = \frac{x+1}{e^x}, \quad [-1; 1].$$

$$3.149 \quad y = \frac{2x-1}{2+x^2}, \quad [-2; 0].$$

$$3.150 \quad y = \frac{2x}{1+x^4}, \quad [-2; 0, 5].$$

$$3.151 \quad y = 2\sin 2x + 3\cos 2x, \quad \left[0; \frac{\pi}{4}\right].$$

Исследовать функцию на экстремум и определить её наименьшее и наибольшее значения на отрезке

$$3.152 \quad y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2, \quad [-2; 4].$$

$$3.153 \quad y = x^3 - 3x^2 + 3x + 2, \quad [2; 5].$$

$$3.154 \quad y = x^4 + 8x^3 + 16x^2, \quad [-3; 1].$$

3.155 Доказать, что из всех прямоугольников, имеющих данный периметр $2p$, наибольшую площадь имеет квадрат.

3.4 Исследование функций на выпуклость и вогнутость, точки перегиба

График функции $y = f(x)$ на (a, b) имеет выпуклость, направленную вниз (рисунок 3.12) (вверх (рисунок 3.13)), если он расположен не ниже (не выше) любой касательной к графику функции на (a, b) .

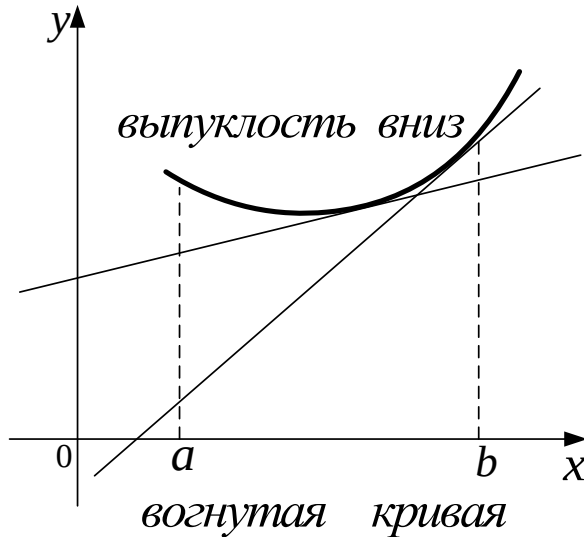


Рисунок 3.12

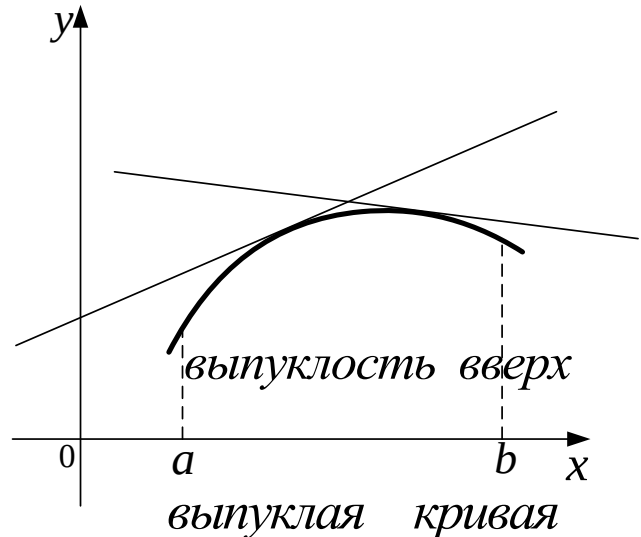


Рисунок 3.13

Необходимое условие выпуклости (вогнутости) графика функции

Если график дважды дифференцируемой функции выпуклая (вогнутая) кривая на (a, b) , то вторая производная на этом интервале отрицательная (положительная).

Достаточный признак выпуклости (вогнутости) графика функции

Если функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема на (a, b) и $f''(x) < 0$ ($f''(x) > 0$) во всех точках этого интервала, то график функции $y = f(x)$ на этом интервале выпуклая (вогнутая) кривая.

Точка $M_0(x_0, f(x_0))$, отделяющая выпуклую часть графика функции $y = f(x)$ от вогнутой, называется точкой перегиба кривой $y = f(x)$.

В точке перегиба касательная пересекает график функции (рисунок 3.14), так как с одной стороны от этой точки график функции расположен над касательной, а с другой стороны – под касательной.

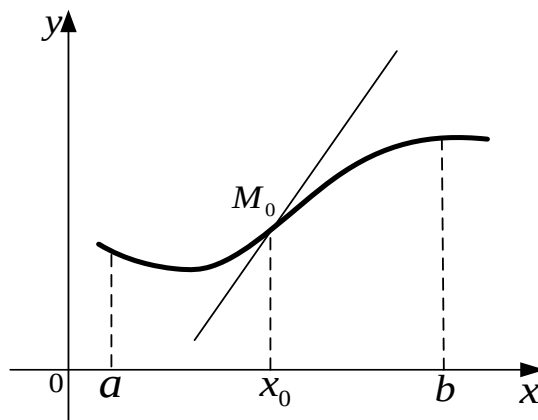


Рисунок 3.14

Необходимое условие точки перегиба

Если график функции $y = f(x)$ имеет перегиб в точке $M_0(x_0, f(x_0))$, то вторая производная функции в этой точке либо равна нулю, либо не существует.

Точки, в которых вторая производная функции $y = f(x)$ равна нулю или не существует, называются возможными точками перегиба графика функции или критическими точками второго рода.

Достаточный признак точки перегиба

Если при переходе через критическую точку второго рода слева направо вторая производная функции меняет знак, то в этой точке график функции имеет перегиб.

Правило исследования функции на выпуклость и вогнутость, точки перегиба

1. Найти область определения функции
2. Найти первую и вторую производные
3. Найти критические точки 2-го рода
4. Разбить область определения функции найденными точками на интервалы
5. Определить знак второй производной на каждом интервале и определить направление выпуклости графика функции на каждом интервале.
6. Вычислить значения функции в точках перегиба.

Решение типовых примеров

Исследовать график функции на выпуклость и вогнутость, точки перегиба

3.156 $y = x^4 - 10x^3 + 36x^2 - 31x - 37.$

Решение

1. Найдём $D(y)$

$D(y) = (-\infty; +\infty).$

2. Найдём y' и y''

$$y' = 4x^3 - 30x^2 + 72x - 31,$$

$$y'' = 12x^2 - 60x + 72 = 12(x^2 - 5x + 6).$$

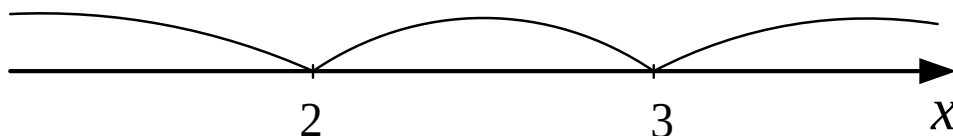
3. $y'' = 0 \Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x_1 = 2; \quad x_2 = 3,$

$$y'' = 12(x - 2)(x - 3),$$

$x_1 = 2; \quad x_2 = 3$ - критические точки.

4. Разобьём $D(y)$ критическими точками на интервалы

5.



6. Исследуем знак y'' в каждом интервале с помощью таблицы

x	$(-\infty; 2)$	2	$(2; 3)$	3	$(3; +\infty)$
y''	+	0	-	0	+
y		т.п.		т.п.	
		-19		5	

7. $y_{т.п.} = f(2) = 2^4 - 10 \cdot 2^3 + 36 \cdot 2^2 - 31 \cdot 2 - 37 = -19,$

$$y_{т.п.} = f(3) = 3^4 - 10 \cdot 3^3 + 36 \cdot 3^2 - 31 \cdot 3 - 37 = 5.$$

Изобразим график функции вблизи точек перегиба (рисунок 3.15)

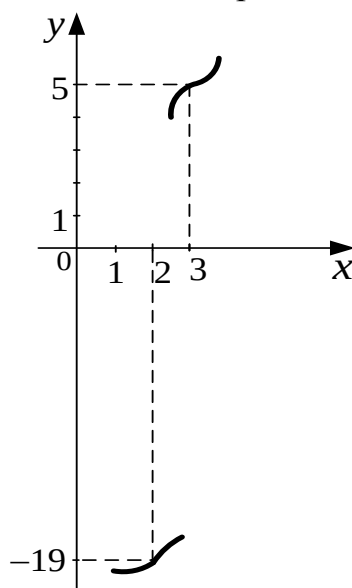


Рисунок 3.15

3.157 $y = (x^2 + 7x)\sqrt[3]{x} - 5x - 8.$

Решение

1. $D(y) = (-\infty; +\infty).$

2. $y' = \frac{7}{3}x^{\frac{4}{3}} + \frac{28}{3}x^{\frac{1}{3}} - 5,$

$$y'' = \frac{28}{9}x^{\frac{1}{3}} + \frac{28}{9}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{28}{9} \cdot \frac{x+1}{\sqrt[3]{x^2}}.$$

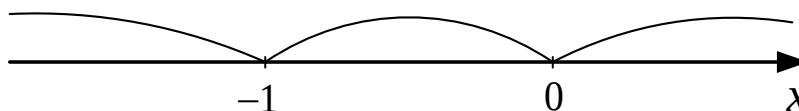
3. Находим критические точки 2-го рода

$$y'' = 0 \quad \frac{28}{9} \cdot \frac{x+1}{\sqrt[3]{x^2}} = 0 \Rightarrow \frac{x+1}{\sqrt[3]{x^2}} = 0 \Rightarrow x+1=0, \quad x=-1,$$

$$y'' \text{ не существует, если } \sqrt[3]{x^2} = 0 \Rightarrow x=0,$$

$x_1 = -1, \quad x_2 = 0$ - критические точки второго рода.

4.



5.

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 0)$	0	$(0; +\infty)$
y''	$-$	0	$+$	не существует	$+$
y		т.п.		нет т.п.	
		3			

6. $y_{т.п.} = f(-1) = [(-1)^2 + 7(-1)]\sqrt[3]{-1} - 5 \cdot (-1) - 8 = 3.$

Изобразим график функции вблизи точек перегиба (рисунок 3.16)

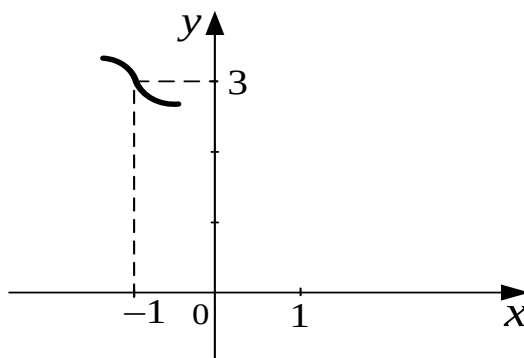


Рисунок 3.16

Определить интервалы выпуклости и вогнутости и точки перегиба графика функции

$$3.158 \quad y = 5x^2 + 20x + 9.$$

$$3.159 \quad y = -6x^2 + 8x - 11.$$

$$3.160 \quad y = x^4 - 12x^3 + 48x^2 - 50.$$

$$3.161 \quad y = \ln(1 + x^2).$$

$$3.162 \quad y = \frac{x^2}{x-2}.$$

$$3.163 \quad y = \frac{1}{6}x^3(x^2 - 5).$$

$$3.164 \quad y = \sqrt[3]{x^2 - 2x}.$$

$$3.165 \quad y = (1+x) \operatorname{arctg} x.$$

$$3.166 \quad y = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

$$3.167 \quad y = \sqrt[3]{1 - x^3}.$$

$$3.168 \quad y = x^3 e^{\frac{x^2}{2}}.$$

$$3.169 \quad y = x^2 e^{\frac{2}{x}}.$$

$$3.170 \quad y = \frac{\ln x}{x^2}.$$

$$3.171 \quad y = x^3 \ln x + 1.$$

3.5 Асимптоты графика функции

Прямая l называется **асимптотой** кривой $y = f(x)$, если расстояние от переменной точки кривой до этой прямой стремится к нулю при удалении точки по кривой в бесконечность.

Асимптоты делятся на три вида: наклонные (рисунок 3.16), вертикальные (рисунок 3.17), горизонтальные (рисунок 3.18).

Прямая $x = a$ называется **вертикальной асимптотой** графика функции $y = f(x)$, если хотя бы один из односторонних пределов в этой точке бесконечный, то есть

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \pm\infty, \quad \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \pm\infty.$$

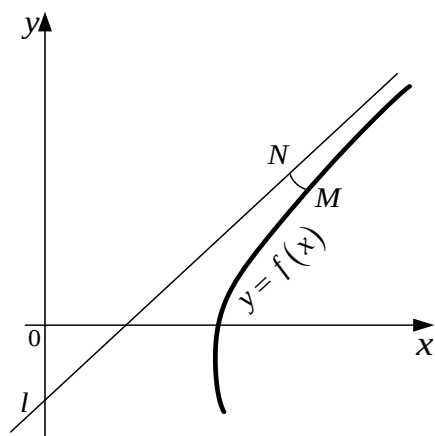


Рисунок 3.16

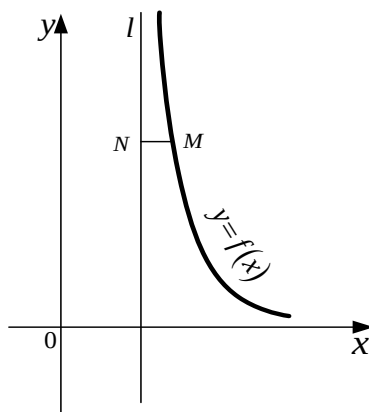


Рисунок 3.17

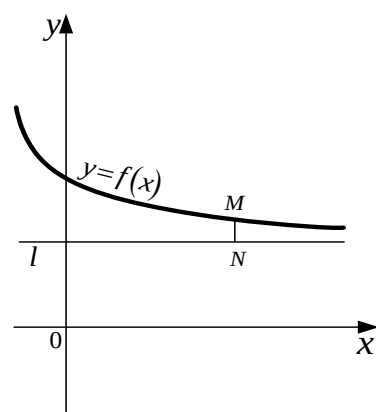


Рисунок 3.18

Прямая $y = b$ называется горизонтальной асимптотой графика функции $y = f(x)$, если

$$\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ x \rightarrow -\infty}} f(x) = b.$$

Прямая $y = kx + b$ ($k \neq 0$) называется наклонной асимптотой графика функции $y = f(x)$, если

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}; \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx].$$

Если хотя бы один из пределов не существует, то кривая наклонных асимптот не имеет.

Если область определения функции $y = f(x)$ $D(y) = R$, то следует искать эти пределы отдельно при $x \rightarrow +\infty$ и $x \rightarrow -\infty$.

Решение типовых примеров

Найти асимптоты графика функции

3.172 $y = \frac{x^2 + 4}{x - 2}.$

Решение

1. Найдём область определения функции

$D(y) = (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$; $x \neq 2$ - точка разрыва графика функции.

2. Вычислим $\lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{x^2 + 4}{x - 2} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{x^2 + 4}{x - 2} = +\infty$.

Так как $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 4}{x - 2} = \infty$, то прямая $x = 2$ - вертикальная асимптота (рисунок 3.19).

3. Вычислим

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 4}{x(x - 2)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 4}{x^2 - 2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{4}{x^2}}{1 - \frac{2}{x}} = 1; \quad k = 1,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 4}{x - 2} - x \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 4 - x^2 + 2x}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{4}{x}}{1 - \frac{2}{x}} = 2; \quad b = 2.$$

Следовательно, прямая $y = kx + b$, то есть $y = x + 2$ - наклонная асимптота.

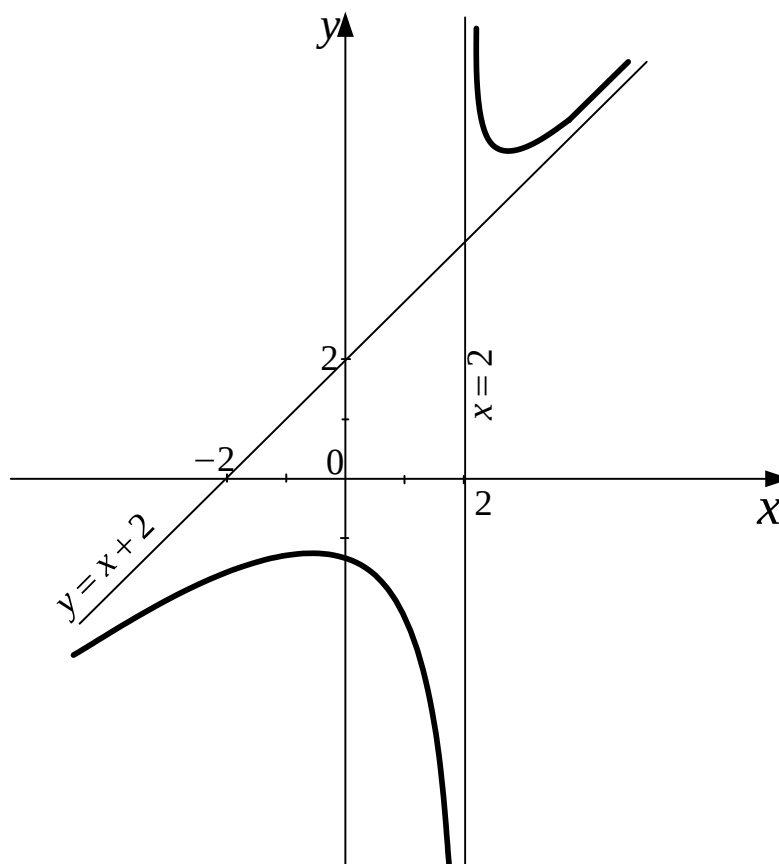


Рисунок 3.19

Составить уравнения асимптот для графика функции заданной уравнением:

3.173 $y = \frac{3x^2 - 2x + 1}{x - 1}.$

3.174 $y = \frac{x^2 + 1}{2x + 3}.$

3.175 $y = x + \frac{4}{x + 2}.$

3.176 $y = 2x + \frac{1}{x}.$

3.177 $y = \frac{2x}{1 - x^2}.$

3.178 $y = (x - 1)e^x.$

3.179 $y = \frac{1 - x^3}{(2 - x)(1 + 3x^2)}.$

3.180 $y = \frac{2 + xe^x}{3 + e^x}.$

3.181 $y = \frac{2x^2 - 1}{x} e^{-x}.$

3.182 $y = \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}.$

$$3.183 \quad y = \sqrt{3x^3 - x^2}.$$

$$3.184 \quad y = \frac{\sqrt{1 - \cos x}}{x}.$$

$$3.185 \quad y = \frac{\arccos x}{x^2 - \frac{\pi}{4}}.$$

$$3.186 \quad y = \frac{\ln^2 x}{x}.$$

3.6 Полное исследование функции и построение графика

Схема полного исследования функции

1. Найти область определения функции.
2. Исследовать функцию на четность и нечетность.
3. Исследовать функцию на непрерывность.
4. Найти асимптоты.
5. Найти критические точки 1-го рода.
6. Найти критические точки 2-го рода.
7. Разбить область определения функции найденными точками на интервалы, составить таблицу и определить интервалы возрастания, убывания, выпуклости, вогнутости, экстремумы и точки перегиба графика функции.
8. Найти точки пересечения графика функции с осями координат.
9. Учитывая проведенное исследование, построить график функции.

Решение типовых примеров

3.187 Исследовать функцию и построить её график

$$y = \frac{3 \ln x}{\sqrt{x}}.$$

Решение

1. Найдём область определения функции $D(y) = (0; +\infty)$.
2. Функция не обладает свойствами четности или нечетности, т.к. $D(y) = (0; +\infty)$.
3. Область непрерывности функции совпадает с её областью определения. Точек разрыва нет.
4. Найдём асимптоты графика функции
 - а) вертикальные асимптоты

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{3 \ln x}{\sqrt{x}} = 3 \lim_{x \rightarrow +0} \ln x \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{\sqrt{x}} = 3 \cdot (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty.$$

Следовательно, ось Oy - вертикальная асимптота.

- б) наклонные асимптоты

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}; \quad k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 \ln x}{x\sqrt{x}} = 3 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}} = 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}} = 0, \quad k = 0$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx]; \quad b = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 \ln x}{\sqrt{x}} = 3 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = 6 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0; \quad b = 0$$

$y = 0$ - горизонтальная асимптота.

5. Найдём критические точки 1-го рода

$$y' = \left(\frac{3 \ln x}{\sqrt{x}} \right)' = 3 \frac{\frac{1}{x}\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln x}{x} = 3 \frac{1 - \frac{1}{2} \ln x}{x^{\frac{3}{2}}},$$

$y' = 0$, если $1 - \frac{1}{2} \ln x = 0$ или $x = e^2$,

$y' = \infty$ при $x = 0$, но эта точка не может быть критической, так как она не входит в область определения функции.

Итак, критическая точка 1-го рода $x = e^2$.

6. Найдём критические точки 2-го рода

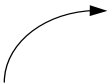
$$y'' = 3 \left(\frac{1 - \frac{1}{2} \ln x}{x^{\frac{3}{2}}} \right)' = 3 \frac{-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} x^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{1}{2} \ln x \right)}{x^3} = \frac{3}{4} \cdot \frac{8 - 3 \ln x}{x^{\frac{5}{2}}};$$

$y'' = 0$, если $8 - 3 \ln x = 0$ или $x = e^{\frac{8}{3}}$

$y'' = \infty$ при $x = 0$, но $x = 0$ не входит в область определения функции.

7. Разобьём область определения функции найденными точками на интервалы

Составим таблицу и определим интервалы возрастания, убывания, выпуклости, вогнутости, экстремума и точки перегиба графика функции

x	$(0; e^2)$	e^2	$\left(e^2; e^{\frac{8}{3}} \right)$	$e^{\frac{8}{3}}$	$\left(e^{\frac{8}{3}}; +\infty \right)$
y'	+	0	—	—	—
y''	—	—	—	0	+
y		max		т.п.	

$\frac{6}{e}$	$\frac{8}{\sqrt[3]{e^4}}$
---------------	---------------------------

$$y_{\max} = f(e^2) = \frac{6}{e}$$

$$y_{т.п.} = f\left(e^{\frac{8}{3}}\right) = \frac{8}{\sqrt[3]{e^4}}$$

8. Найдём точки пересечения графика с осями координат

а) с осью Ox

Положим $y = 0$, тогда $\frac{3 \ln x}{\sqrt{x}} = 0$ или $\ln x = 0$, т.е. $x = 1$.

б) с осью Oy точек пересечения нет, ось Oy - вертикальная асимптота.

9. Построим график функции (рисунок 3.20)

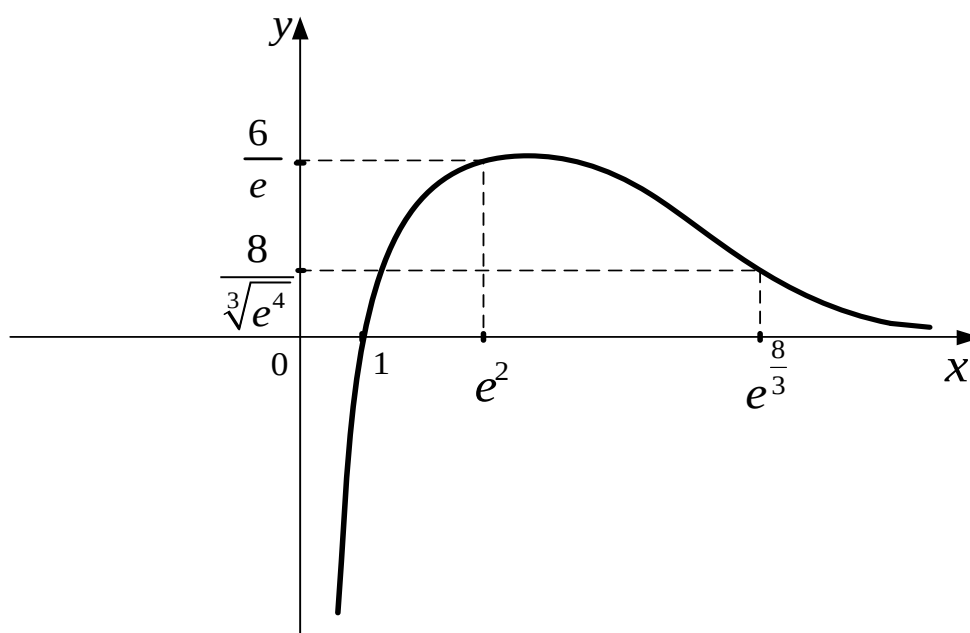


Рисунок 3.20

Исследовать функцию и построить её график

3.188 $y = \frac{2x}{1+x^2}.$

3.189 $y = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}.$

3.190 $y = \frac{x^3}{2(x+1)^2}.$

3.191 $y = (3x+1)e^{-2(x+1)}.$

3.192 $y = \sqrt[3]{1+x^3}.$

3.193 $y = (x+1)(x-2)^2.$

3.194 $y = \frac{1}{1-x^2}.$

3.195 $y = (x+2)e^{\frac{1}{x}}.$

3.196 $y = \frac{2x}{2+x^3}.$

3.197 $y = xe^{-\frac{x^2}{2}}.$

3.198 $y = x^2(x-4)^2.$

3.199 $y = \frac{\ln x}{x}.$

3.200 $y = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2+1}}.$

Тест 3

1. Значение предела $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{2x^2}$, вычисленное с помощью правила Лопиталя, равно:

1: -1/4; 2: 9/4; 3: 3/2; 4: 3/4; 5: 9/2.

2. Если $y = kx + b$ - наклонная асимптота функции $y = \frac{3 - 4x^3}{x^2 + 1}$, то сумма $k + b$ равна:

1: 0; 2: -1; 3: -8; 4: -4.

3. Значение предела $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln^2 2x}{x}$, вычисленное с помощью правила Лопиталя, равно:

1: 2; 2: ∞ ; 3: 0; 4: 1; 5: 0,5.

4. Если m и M наименьшее и наибольшее значения функции $y = x^2 - 2x + 2$ на отрезке $[2, 3]$, то значение выражения $m + M$ равно:

1: 3; 2: 6; 3: 1; 4: 7; 5: 5.

5. Найти абсциссу точки перегиба функции $y = 2x^3 - 3x^2 + 12x$

1: 0,5; 2: -0,5; 3: 3; 4: 1.

6. Найти горизонтальную асимптоту функции $y = \frac{4x + 1}{x}$

1: 4; 2: -1; 3: 1; 4: 0.

7. Функция f определена на всей числовой прямой. Если для любых a и b , удовлетворяющих условию $a > b$, выполняется неравенство $f(a) < f(b)$, то функция ...

1: Возрастает; 2: убывает; 3: чётная; 4: нечётная.

8. Точка x_0 называется точкой минимума функции $y = f(x)$, если существует окрестность точки x_0 , для всех точек которой отличных от точки x_0 , выполняется неравенство

1: $f(x_0) = f(x)$; 2: $f(x_0) > f(x)$; 3: $f(x_0) \geq f(x)$; 4: $f(x_0) < f(x)$.

9. Точка x_0 является точкой максимума функции $y = f(x)$, если

- 1: При переходе через эту точку производная не меняет знак;
- 2: При переходе через эту точку производная меняет знак с «+» на «-»;
- 3: При переходе через эту точку производная меняет знак с «-» на «+»;
- 4: $f'(x_0) = 0$.

10. Функция возрастает, если

- 1: $y' = 0$; 2: y' не существует; 3: $y' > 0$; 4: $y' < 0$.

11. Достаточный признак точки перегиба:

- 1: $f''(x_0) = 0$; 2: $f''(x_0) \geq 0$;
- 3: При переходе через эту точку вторая производная меняет знак;

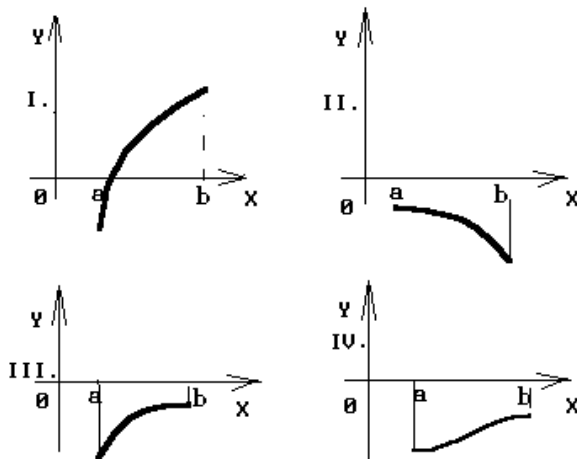
12. Значение предела $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x^2}$ вычисленное с помощью правила

Лопиталя, равно:

- 1: 0; 2: 0.5; 3: -0.5; 4: 1.

13. Указать вид графика функции, для которой на всем отрезке $[a; b]$

одновременно выполняются 3 условия: $y < 0$; $y' > 0$; $y'' < 0$



- 1: только IV; 2: только I; 3: только I и II; 4: только III.

14. Точка перегиба кривой $y(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$

- 1: (0, 0); 2: (1, -1); 3: (1, 0); 4: (-1, -1).

15. Минимума функция $y = x^3 - 12x^2 + 36x - 10$ достигает в точке

- 1: (-1, 59); 2: (1, 15); 3: (2, 22); 4: (6, -10).

Ответы к главе 3

- 3.7** $\frac{1}{2}$ **3.8** $\frac{5}{8}$ **3.9** -1 **3.10** $\frac{1}{6}$ **3.11** $\frac{3}{2}$ **3.12** $\frac{1}{4}$ **3.13** 0 **3.14** 0 **3.15** 1
3.16 ∞ **3.17** 2,5 **3.18** 3 **3.19** 1 **3.20** $\frac{3}{2-6\ln 3}$ **3.21** 2 **3.22** -1 **3.23**
1 **3.24** $-\frac{1}{3}$ **3.25** ∞ **3.26** 3 **3.27** 3 **3.28** $\frac{1}{2}$ **3.29** $\frac{4}{3}$ **3.30** ∞ **3.31** $\frac{1}{12}$
3.32 12 **3.33** $\frac{5}{3}$ **3.34** ∞ **3.35** 0 **3.36** 0 **3.37** ∞ **3.38** 1 **3.39** 1 **3.40** 0
3.41 $\frac{\pi^2}{2}$ **3.42** 1 **3.43** 0 **3.44** ∞ **3.45** 0 **3.46** ∞ **3.47** ∞ **3.48** 0
3.49 $\frac{1}{2}$ **3.50** $-\frac{1}{2}$ **3.51** ∞ **3.52** 0 **3.53** ∞ **3.54** ∞ **3.55** $\frac{1}{3}$ **3.56** $\frac{1}{2}$
3.57 $\frac{1}{5}$ **3.58** $\frac{1}{12}$ **3.59** -1 **3.60** 1 **3.61** ∞ **3.62** ∞ **3.63** 0 **3.64** 0 **3.65**
0 **3.66** $\frac{2}{\pi}$ **3.67** 1 **3.68** 0 **3.69** a
3.70 ∞ для $n > 1$; a для $n = 1$; 0 для $n < 1$ **3.71** 0 **3.72** 0
3.73 $-\frac{1}{2}$ **3.74** 0 **3.75** 0 **3.76** $-\frac{2}{\pi}$ **3.77** $\frac{1}{5}$ **3.78** ∞ **3.79** 1 **3.80** e^m
3.81 1 **3.82** 1 **3.83** 1 **3.84** 1 **3.85** e^{-6} **3.86** 1 **3.87** e^3 **3.88** 1 **3.89** 1
3.90 1 **3.91** $\frac{1}{e}$ **3.92** $\frac{1}{e}$ **3.93** 1 **3.94** $e^{\frac{1}{2}}$ **3.95** 1 **3.96** 1 **3.97** 1
3.98 $\frac{1}{e}$ **3.99** $e^{\frac{2}{3}}$ **3.100** e^2 **3.101** e **3.104** 3 **3.105** ∞ **3.106** $\frac{1}{2}$
3.107 $-\frac{1}{12}$ **3.108** -2 **3.109** 1 **3.110** $-\frac{1}{4}$ **3.111** $\frac{1}{2}$ **3.112** 0 **3.113** 0
3.114 $\frac{19}{90}$ **3.115** 0,9662 **3.116** 1,649 **3.117** 3,072 **3.118** 0,7071 **3.119**
0,4055 **3.120** 2,080 **3.121** 3,08 **3.122** 0,01745241 **3.123** 0,095 **3.124**
1,22140 **3.125** 0,99452
3.131 $y_{\max} = \frac{5}{3}$, при $x = -1$ $y_{\min} = -9$, при $x = 3$
3.132 $y_{\min} = -\frac{27}{4}$, при $x = 3$
3.133 $y_{\min} = -1$, при $x = 0$
3.134 $y_{\min} = 0$, при $x = 0$; $y_{\min} = 0$, при $x = 12$; $y_{\max} = 1296$, при $x = 6$
3.135 $y_{\max} = -2$, при $x = 0$; $y_{\min} = 2$, при $x = 2$
3.136 $y_{\max} = \sqrt{2}$, при $x = 0$

$$3.137 \quad y_{\min} = -\frac{3\sqrt{3}}{2}, \quad \text{при } x = \left(k - \frac{1}{6}\right)\pi, \quad y_{\max} = \frac{3\sqrt{3}}{2}, \quad \text{при } x = \left(k + \frac{1}{6}\right)\pi, \quad \text{где } k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$3.138 \quad y_{\min} = 0, \quad \text{при } x = 0 \quad 3.139 \quad y_{\min} = -\frac{1}{e}, \quad \text{при } x = \frac{1}{e}$$

$$3.140 \quad y_{\min} = 0, \quad \text{при } x = 0; \quad y_{\max} = \frac{4}{e^2}, \quad \text{при } x = 2$$

$$3.141 \quad y_{\min} = e, \quad \text{при } x = 1 \quad 3.142 \quad \text{экстр. нет}$$

$$3.143 \quad y_{\text{наим}} = 4, \quad \text{при } x = -1 \text{ и } x = 2; \quad y_{\text{наиб}} = 16, \quad \text{при } x = 4$$

$$3.144 \quad y_{\text{наим}} = -\frac{1}{e}, \quad \text{при } x = \frac{1}{e}; \quad y_{\text{наиб}} = 0, \quad \text{при } x = 1$$

$$3.145 \quad y_{\text{наим}} = 0, \quad \text{при } x = 0; \quad y_{\text{наиб}} = \frac{1}{3}, \quad \text{при } x = 1$$

$$3.146 \quad y_{\text{наим}} = -74, \quad \text{при } x = -2; \quad y_{\text{наиб}} = 45, \quad \text{при } x = 3$$

$$3.147 \quad y_{\text{наим}} = 7, \quad \text{при } x = 2; \quad y_{\text{наиб}} = 23, \quad \text{при } x = 4$$

$$3.148 \quad y_{\text{наим}} = 0, \quad \text{при } x = -1; \quad y_{\text{наиб}} = 1, \quad \text{при } x = 0$$

$$3.149 \quad y_{\text{наим}} = -1, \quad \text{при } x = -1; \quad y_{\text{наиб}} = -\frac{1}{2}, \quad \text{при } x = 0$$

$$3.150 \quad y_{\text{наим}} = -\frac{\sqrt[4]{27}}{2}, \quad \text{при } x = -\sqrt[4]{\frac{1}{3}}; \quad y_{\text{наиб}} = \frac{16}{17}, \quad \text{при } x = \frac{1}{2}$$

$$3.151 \quad y_{\text{наим}} = 2, \quad \text{при } x = \frac{\pi}{4}; \quad y_{\text{наиб}} = \sqrt{13}, \quad \text{при } x = 0,5 \arctg \frac{2}{3}$$

$$3.152 \quad y_{\min} = \frac{17}{22}, \quad \text{при } x = -1; \quad y_{\min} = -\frac{37}{4}, \quad \text{при } x = 3; \quad y_{\max} = 2, \quad \text{при } x = 0$$

$$y_{\text{наиб}} = \frac{16}{3}, \quad \text{при } x = -2; \quad y_{\text{наим}} = -\frac{37}{4}, \quad \text{при } x = 3$$

$$3.153 \quad \text{экстр. нет}; \quad y_{\text{наим}} = 4, \quad \text{при } x = 2; \quad y_{\text{наиб}} = 67, \quad \text{при } x = 5$$

$$3.154 \quad y_{\min} = 0, \quad \text{при } x = -4; \quad y_{\min} = 0, \quad \text{при } x = 0; \quad y_{\max} = 16, \quad \text{при } x = -2$$

$$y_{\text{наим}} = 0, \quad \text{при } x = 0; \quad y_{\text{наиб}} = 25, \quad \text{при } x = 1$$

$$3.158 \quad \text{вогнута при } x \in (-\infty; +\infty) \quad 3.159 \quad \text{выпуклая при } x \in (-\infty; +\infty)$$

$$3.160 \quad \text{вогнута при } x \in (-\infty; 2) \text{ и } x \in (4; +\infty), \text{ выпуклая при } x \in (2; 4), \quad (2; 62)$$

- точка перегиба, (4; 206) - точка перегиба

$$3.161 \quad \text{вогнута при } x \in (-1; 1), \text{ выпуклая при } x \in (-\infty; 1) \text{ и } x \in (1; +\infty), \text{ точки}$$

перегиба $(-1; \ln 2); (1; \ln 2)$

$$3.162 \quad \text{вогнута при } x \in (2; +\infty), \text{ выпуклая при } x \in (-\infty; 2), \text{ точек перегиба нет}$$

$$3.163 \quad \text{вогнутая при } x \in (-\infty; 0) \text{ и } x \in \left(\frac{3}{2}; +\infty\right), \text{ выпуклая при } x \in \left(0; \frac{3}{2}\right), \text{ точки}$$

$$\text{перегиба } (0; 0); \left(\frac{3}{2}; -\frac{99}{64}\right)$$

3.164 вогнутая при $x \in (0; 2)$, выпуклая при $x \in (-\infty; 0)$ и $x \in (2; +\infty)$, точки перегиба $(0; 0)$; $(2; 0)$

3.165 вогнутая при $x \in (-\infty; 1)$, выпуклая при $x \in (1; +\infty)$, точка перегиба $\left(1; \frac{\pi}{2}\right)$

3.166 вогнутая при $x \in (-\infty; 0)$, выпуклая при $x \in (0; +\infty)$, точка перегиба $(0; 0)$

3.167 вогнутая при $x \in (-\infty; -1)$ и $x \in (1; +\infty)$, выпуклая при $x \in (-1; 1)$, точки перегиба $(-1; 2)$; $(1; 0)$

3.168 вогнутая при $x \in (-3; 0)$ и $x \in (0; 3)$, выпуклая при $x \in (-\infty; -3)$ и $x \in (3; +\infty)$, точки перегиба $\left(-3; -3\sqrt{3}e^{-\frac{3}{2}}\right)$; $\left(3; 3\sqrt{3}e^{-\frac{3}{2}}\right)$

3.169 выпуклая при $x \in (-\infty; 0)$ и $x \in (0; +\infty)$, точек перегиба нет

3.170 вогнутая при $x \in \left(e^{\frac{7}{2}}; +\infty\right)$, выпуклая при $x \in \left(0; e^{\frac{7}{2}}\right)$, точка перегиба $\left(e^{\frac{7}{2}}; \frac{7}{2e^7}\right)$

3.171 вогнутая при $x \in \left(e^{\frac{5}{6}}; +\infty\right)$, выпуклая при $x \in \left(0; e^{\frac{5}{6}}\right)$, точка перегиба $\left(e^{\frac{5}{6}}; -\frac{5}{6}e^{-\frac{5}{2}} + 1\right)$

3.173 $x=1$, $y=3x+1$ **3.174** $x=-\frac{3}{2}$, $y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}$ **3.175** $x=-2$, $y=x$

3.176 $x=0$, $y=2x$ **3.177** $x=-1$, $y=0$ **3.178** $y=0$ **3.179** $x=2$, $y=\frac{1}{3}$

3.180 $y=x$, $y=\frac{2}{3}$ **3.181** $x=0$, $y=0$ **3.182** $y=0$ **3.183** нет **3.184** $y=0$

3.185 $x=\pm\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ **3.186** $x=0$, $y=0$.

Глава 4 Комплексные числа и многочлены

Элементы высшей алгебры

4.1 Комплексные числа

Комплексным числом z называется выражение

$$z = a + ib,$$

где a и b - **действительные** числа,

i - **мнимая единица**, определяемая равенством $i = \sqrt{-1}$ или $i^2 = -1$;

a называется **действительной** или **вещественной** частью, b - **мнимой** частью числа z . Их обозначают так:

$$a = \operatorname{Re} z, \quad b = \operatorname{Im} z.$$

При $a = 0$, $z = 0 + ib = ib$ - чисто мнимое число;

$b = 0$, $z = a + i0 = a$ - действительное число.

Числа $z = a + ib$ и $\bar{z} = a - ib$ называются **сопряжёнными**. Два комплексных числа $z_1 = a_1 + ib_1$ и $z_2 = a_2 + ib_2$ считаются **равными** $z_1 = z_2$, если $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$.

Комплексное число z **равно нулю**:

$$z = a + ib = 0$$

тогда и только тогда, когда $a = 0$, $b = 0$.

Всякое комплексное число $z = a + ib$ можно изобразить на плоскости Oxy в

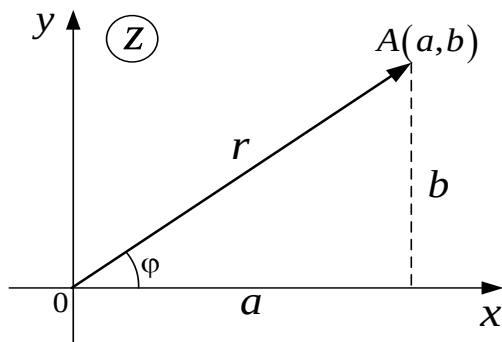


Рисунок 4.1

виде точки $A(a, b)$ (рисунок 4.1) с координатами a и b . Плоскость на которой изображаются комплексные числа, называется **плоскостью комплексного переменного z** (на плоскости ставить символ (z)). Ось Oy называют мнимой осью, а ось Ox действительной осью.

Соединив точку $A(a, b)$ с началом координат, получим вектор $\overline{OA}$. В некоторых случаях удобно считать геометрическим изображением комплексного числа $z = a + ib$ вектор $\overline{OA}$.

Модулем комплексного числа $|z|$ называется длина радиус-вектора, соответствующего этому числу. Модуль обозначают буквой r .

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (\text{рисунок 4.1}).$$

Аргументом комплексного числа называется величина угла между положительным направлением действительной оси и вектором $\vec{r}$, причем величина угла считается положительной, если отсчет ведётся против часовой стрелки, и отрицательной, если отсчет ведётся по часовой стрелке.

Обозначают: $\varphi = \operatorname{Arg} z$, $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$ (рисунок 4.1).

Аргумент, в отличие от модуля определяется неоднозначно, а с точностью до слагаемого $2\pi k$, где k - любое целое число. $Argz = argz + 2\pi k$, где $arg z$ - главное значение аргумента, заключённое в промежутке $(-\pi; \pi]$ (иногда в качестве главного значения аргумента берут величину, принадлежащую промежутку $[0; 2\pi)$)

Запись комплексного числа в виде $z = a + ib$ называется **алгебраической** формой записи. Помимо алгебраической формы используются и другие формы записи комплексного числа:

$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ - **тригонометрическая форма** записи комплексного числа;

$z = re^{i\varphi}$ - **показательная форма** записи комплексного числа

Основные действия над комплексными числами

$$z_1 = a_1 + ib_1 \quad z_2 = a_2 + ib_2$$

$$z_1 + z_2 = (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2),$$

$$z_1 - z_2 = (a_1 + ib_1) - (a_2 + ib_2) = (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2),$$

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = a_1a_2 + ia_1b_2 + ib_1a_2 + i^2b_1b_2 = a_1a_2 + ia_1b_2 + ib_1a_2 - b_1b_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + a_2b_1).$$

Замечание: при умножении комплексных чисел необходимо учитывать, что $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = (-i) \cdot i = -i^2 = 1$, $i^5 = i$ и так далее и вообще при любом целом k

$$i^{4k} = 1, \quad i^{4k+1} = i, \quad i^{4k+2} = -1, \quad i^{4k+3} = -i.$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} = \frac{(a_1 + ib_1)(a_2 - ib_2)}{(a_2 + ib_2)(a_2 - ib_2)} = \frac{a_1a_2 - ia_1b_2 + ia_2b_1 - i^2b_1b_2}{a_2^2 - i^2b_2^2} = \frac{(a_1a_2 + b_1b_2) + i(a_2b_1 - a_1b_2)}{a_2^2 + b_2^2}, \quad \text{при } |z_2| = \sqrt{a_2^2 + b_2^2} \neq 0.$$

Если комплексные числа даны в тригонометрической форме $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$, то

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)],$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)].$$

$$z^n = [r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi), \quad n \in \mathbb{Z}$$

Эта формула называется **формулой Муавра**.

$$\sqrt[n]{z^n} = \sqrt[n]{r^n (\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \sqrt[n]{r^n} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right),$$

где $n \in \mathbb{Z}$, $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

Если комплексные числа даны в показательной форме $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ и $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$, то

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} \cdot r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)},$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)},$$

$$z^n = (r e^{i\varphi})^n = r^n e^{in\varphi},$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r e^{i\varphi}} = \sqrt[n]{r} e^{i \frac{\varphi + 2k\pi}{n}} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1).$$

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y \quad - \text{ формула Эйлера}$$

$$\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2},$$

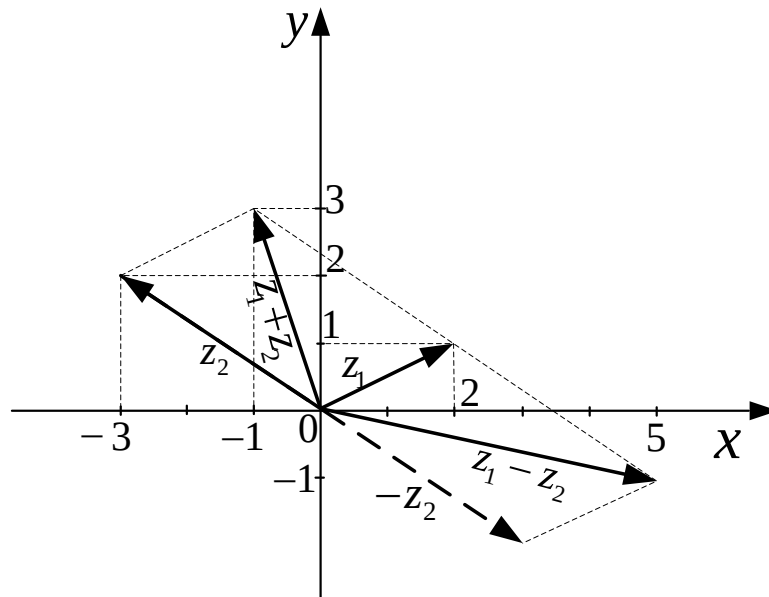
$$\sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}.$$

Решение типовых примеров

4.1 $z_1 = 2 + i$ $z_2 = -3 + 2i$

Найти: $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$ (геометрически и алгебраически), $z_1 \cdot z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$, z_1^2 .

Решение



$$z_1 + z_2 = (2 + i) + (-3 + 2i) = -1 + 3i,$$

$$z_1 - z_2 = (2 + i) - (-3 + 2i) = 5 - i,$$

$$z_1 \cdot z_2 = (2 + i)(-3 + 2i) = -6 + 4i - 3i + 2i^2 = -6 + i - 2 = -8 + i,$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2+i}{-3+2i} = \frac{(2+i)(-3-2i)}{(-3-2i)(-3-2i)} = \frac{-6-4i-3i-2i^2}{(-3)^2+(2)^2} = \frac{-4-7i}{13} = -\frac{4}{13} - \frac{7}{13}i,$$

$$z_1^2 = (2+i)^2 = 4+4i+i^2 = 4+4i-1 = 3+4i.$$

4.2 Решить уравнение $x^2 + 2x + 9 = 0$.

Решение

$$D = b^2 - 4ac = 4 - 36 = -32 = 32i^2,$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a},$$

$$x_1 = \frac{-2 + \sqrt{32i^2}}{2} = \frac{-2 + 4\sqrt{2}i}{2} = -1 + 2\sqrt{2}i,$$

$$x_2 = \frac{-2 - \sqrt{32i^2}}{2} = \frac{-2 - 4\sqrt{2}i}{2} = -1 - 2\sqrt{2}i.$$

Ответ: $x_1 = -1 + 2\sqrt{2}i$, $x_2 = -1 - 2\sqrt{2}i$.

4.3 $z = 1 + i$, найти z^8 и $\sqrt[3]{z}$

Решение

Перейдём к тригонометрической форме. Для этого найдём модуль и аргумент комплексного числа

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2},$$

$$\varphi = \operatorname{Arg} z = \operatorname{arctg} \frac{b}{a} = \operatorname{arctg} \frac{1}{1} = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4},$$

$$z = 1 + i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right), \text{ тогда по формуле Муавра}$$

$$z^8 = \left[\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \right]^8 = (\sqrt{2})^8 \left(\cos 8 \cdot \frac{\pi}{4} + i \sin 8 \cdot \frac{\pi}{4} \right) =$$

$$= 2^4 (\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = 16(1 + i \cdot 0) = 16.$$

$$\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)} = \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{\frac{\pi}{4} + 2\pi k}{3} + i \sin \frac{\frac{\pi}{4} + 2\pi k}{3} \right).$$

$$\text{при } k = 0 \quad \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right),$$

$$\text{при } k = 1 \quad \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{\frac{\pi}{4} + 2\pi k}{3} + i \sin \frac{\frac{\pi}{4} + 2\pi k}{3} \right) =$$

$$= \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) = \sqrt[6]{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}} + i \frac{1}{\sqrt[3]{2}},$$

при $k = 2$

$$\sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{\frac{\pi}{4} + 4\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{\pi}{4} + 4\pi}{3} \right) = \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{17\pi}{12} + i \sin \frac{17\pi}{12} \right).$$

4.4 Изобразить на комплексной плоскости комплексные числа.

Найти их модуль и аргумент.

а) $z = 2$; б) $z = 3 + 2i$; в) $z = i$; г) $z = -2i$; д) $z = -3 - 2i$.

4.5 Построить и вычислить сумму и разность чисел:

$z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 5 + 4i$.

4.6 Найти произведение чисел.

а) $(5+i)(5-i)$; б) $(1+2i)(5-i)$; в) $(1-i)(1-i)$; г) $(2-i)^2$.

4.7 Найти частное:

а) $\frac{5-i\sqrt{2}}{1+i\sqrt{2}}$; б) $\frac{2i}{1-i}$; в) $\frac{1+i}{i}$.

4.8 Вычислить

а) $\frac{(1+i)(1-2i)}{3+i}$; б) $(1+2i)i - \frac{3+2i}{1-i}$; в) $i + \frac{6i+7}{1-7i}$; г) $\frac{(1+2i)^2 - (1-i)^3}{(3+2i)^3 - (2+i)^2}$.

4.9 Найти мнимую часть комплексного числа

а) $z = (8-i^3)(2+11i)$; б) $z = \frac{2-3i}{1+4i} + i^6$.

4.10 Найти действительную часть комплексного числа

а) $z = i^4 + \frac{2+i}{3i}$; б) $z = \left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2i} \right)^2$.

4.11 Выразить числа в тригонометрической форме:

а) $z = 1$; б) $z = -1$;
 в) $z = 1 + i$; г) $z = -\sqrt{3} - i$;
 д) $z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$; е) $z = i$;

$$\text{ж)} \quad z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i;$$

$$\text{з)} \quad z = -2 - 2i\sqrt{3};$$

$$\text{и)} \quad z = 2i;$$

$$\text{к)} \quad z = -5.$$

4.12 Решить уравнения и проверить подстановкой корней в уравнение

$$\text{а)} \quad x^2 + 25 = 0; \quad \text{б)} \quad x^2 - 2x + 5 = 0; \quad \text{в)} \quad x^2 - 4x + 8 = 0; \quad \text{г)} \quad 3x^2 - x + 2 = 0.$$

4.13 Выразить в показательной форме комплексные числа:

$$\text{а)} \quad z = -2;$$

$$\text{б)} \quad z = -\sqrt{3} - i;$$

$$\text{в)} \quad z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

4.14 Найти произведение:

$$\text{а)} \quad z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) \quad \text{и} \quad z_2 = 3\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right);$$

$$\text{б)} \quad z_1 = 5\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) \quad \text{и} \quad z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right);$$

$$\text{в)} \quad z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) \quad \text{и} \quad z_2 = i.$$

4.15 Найти частное:

$$\text{а)} \quad (\cos 75^\circ + i\sin 75^\circ) \quad \text{и} \quad (\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ);$$

$$\text{б)} \quad z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) \quad \text{и} \quad z_2 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right);$$

$$\text{в)} \quad z_1 = 5\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) \quad \text{и} \quad z_2 = -5;$$

$$\text{г)} \quad z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \quad \text{и} \quad z_2 = 2e^{i\frac{5\pi}{3}}.$$

4.16 Вычислить, пользуясь формулой Муавра:

$$\text{а)} \quad \left[2(\cos 12^\circ + i\sin 12^\circ)\right]^5;$$

$$\text{б)} \quad (1+i)^{30};$$

$$\text{в)} \quad \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{12};$$

$$\text{г)} \quad (-\sqrt{3} - i)^5;$$

$$\text{д)} \quad (1+i\sqrt{3})^3;$$

$$\text{е)} \quad (\sqrt{3} + i\sqrt{3})^8;$$

$$\text{ж)} \quad (-2 + 2i)^6.$$

4.17 Вычислить:

- а) $\sqrt[4]{-1}$; б) $\sqrt[3]{i}$; в) $\sqrt[3]{8}$; г) $\sqrt[3]{1}$; д) $\sqrt[3]{27i}$; е) $\sqrt[5]{-2+2i}$; ж) $\sqrt[6]{-8}$.

4.2 Разложение многочлена на множители

Определение Функция вида $f(x) = A_0x^n + A_1x^{n-1} + \dots + A_n$ называется *целой рациональной функцией* от x .

Теорема Безу (Этьенн Безу (1730-1783) – французский математик)

При делении многочлена $f(x)$ на разность $x - a$ получается остаток, равный $f(a)$.

Следствие Если a – корень многочлена, то есть $f(a) = 0$, то многочлен $f(x)$ делится на $(x - a)$ без остатка.

Определение Если уравнение имеет вид $P(x) = 0$, где $P(x)$ – многочлен степени $n \in \mathbb{Z}$, то это уравнение называется *алгебраическим уравнением* степени n .

Теорема (Основная теорема алгебры) Всякая целая рациональная функция $f(x)$ имеет, по крайней мере, один корень, действительный или комплексный.

Теорема Всякий многочлен n -ой, где n – целое число, степени разлагается на n линейных множителей вида $(x - a)$ и множитель, равный коэффициенту при x^n .

Теорема Если два многочлена тождественно равны друг другу, то коэффициенты одного многочлена равны соответствующим коэффициентам другого.

Если среди корней многочлена встречаются кратные корни, то разложение на множители имеет вид:

$$f(x) = A_0(x - a_1)^{k_1}(x - a_2)^{k_2} \dots (x - a_m)^{k_m},$$
$$k_1 + k_2 + \dots + k_m = n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

k_i – кратность соответствующего корня.

Отсюда следует, что любой многочлен n -ой степени имеет ровно n корней (действительных или комплексных).

Это свойство имеет большое значение для решения алгебраических уравнений, дифференциальных уравнений и играет важную роль в анализе функций.

Разложение правильной рациональной дроби на элементарные дроби

Теорема Если $R(x) = \frac{Q(x)}{P(x)}$ - правильная рациональная дробь,

знаменатель $P(x)$ которой представлен в виде произведения линейных и квадратичных множителей (отметим, что любой многочлен с действительными коэффициентами может быть представлен в таком виде:

$P(x) = (x-a)^\alpha (x-b)^\beta \dots (x^2+px+q)^\lambda (x^2+rx+s)^\mu$, то эта дробь может быть разложена на элементарные по следующей схеме:

$$\begin{aligned} \frac{Q(x)}{P(x)} = & \frac{A_1}{(x-a)} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} + \frac{B_1}{(x-b)} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \dots + \frac{B_\beta}{(x-b)^\beta} + \\ & + \frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2} + \dots + \frac{M_\lambda x+N_\lambda}{(x^2+px+q)^\lambda} + \\ & + \frac{R_1x+S_1}{x^2+rx+s} + \frac{R_2x+S_2}{(x^2+rx+s)^2} + \dots + \frac{R_\mu x+S_\mu}{(x^2+rx+s)^\mu}, \end{aligned}$$

где $A_i, B_i, M_i, N_i, R_i, S_i$ - некоторые постоянные величины.

Для нахождения величин $A_i, B_i, M_i, N_i, R_i, S_i$ применяют так называемый **метод неопределённых коэффициентов**, суть которого состоит в том, что для того, чтобы два многочлена были тождественно равны, необходимо и достаточно, чтобы были равны коэффициенты при одинаковых степенях x .

Применение этого метода рассмотрим на конкретных примерах.

Решение типовых примеров

Разложить рациональную дробь на элементарные дроби

4.18 $\frac{9x^3 - 30x^2 + 28x - 88}{(x^2 - 6x + 8)(x^2 + 4)}$

Решение

Так как $(x^2 - 6x + 8)(x^2 + 4) = (x-2)(x-4)(x^2 + 4)$, то

$$\frac{9x^3 - 30x^2 + 28x - 88}{(x-2)(x-4)(x^2 + 4)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-4} + \frac{Cx+D}{x^2 + 4}.$$

Приводя к общему знаменателю и приравнивая соответствующие числители, получаем:

$$A(x-4)(x^2 + 4) + B(x-2)(x^2 + 4) + (Cx+D)(x^2 - 6x + 8) = 9x^3 - 30x^2 + 28x - 88$$

$$(A+B+C)x^3 + (-4A-2B-6C+D)x^2 + (4A+4B+8C-6D)x + (-16A-8B+8D) = 9x^3 - 30x^2 + 28x - 88$$

$$\begin{cases} A+B+C=9 \\ -4A-2B-6C+D=-30 \\ 4A+4B+8C-6D=28 \\ -16A-8B+8D=-88 \end{cases} \quad \begin{cases} C=9-A-B \\ D=-30+4A+2B+54-6A-6B \\ 2A+2B+4C-3D=14 \\ 2A+B-D=11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C=9-A-B \\ D=24-2A-4B \\ 2A+2B+36-4A-4B-72+6A+12B=14 \\ 2A+B-24+2A+4B=11 \end{cases} \quad \begin{cases} C=9-A-B \\ D=24-2A-4B \\ 4A+10B=50 \\ 4A+5B=35 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C=9-A-B \\ D=24-2A-4B \\ 4A+10B=50 \\ 50-10B+5B=35 \end{cases} \quad \begin{cases} C=9-A-B \\ D=24-2A-4B \\ 4A+10B=50 \\ B=3 \end{cases} \quad \begin{cases} A=5 \\ B=3 \\ C=1 \\ D=2 \end{cases}$$

Итого: $\frac{9x^3 - 30x^2 + 28x - 88}{(x-2)(x-4)(x^2+4)} = \frac{5}{x-2} + \frac{3}{x-4} + \frac{x+2}{x^2+4}.$

4.19 $\frac{6x^5 - 8x^4 - 25x^3 + 20x^2 - 76x - 7}{3x^3 - 4x^2 - 17x + 6}$

Решение

Так как дробь неправильная, то предварительно следует выделить у неё целую часть:

$$\begin{array}{r|l} 6x^5 - 8x^4 - 25x^3 + 20x^2 - 76x - 7 & 3x^3 - 4x^2 - 17x + 6 \\ - 6x^5 - 8x^4 - 34x^3 + 12x^2 & \\ \hline & 9x^3 + 8x^2 - 76x - 7 \\ - & 9x^3 - 12x^2 - 51x + 18 \\ \hline & 20x^2 - 25x - 25 \end{array}$$

$$\frac{6x^5 - 8x^4 - 25x^3 + 20x^2 - 76x - 7}{3x^3 - 4x^2 - 17x + 6} = 2x^2 + 3 + \frac{20x^2 - 25x - 25}{3x^3 - 4x^2 - 17x + 6}.$$

Разложим знаменатель полученной дроби на множители. Видно, что при $x=3$ знаменатель превращается в ноль. Тогда:

$$\begin{array}{r|l}
 3x^3 - 4x^2 - 17x + 6 & \\
 \underline{3x^3 - 9x^2} & x - 3 \\
 5x^2 - 17x & \underline{3x^2 + 5x - 2} \\
 \underline{5x^2 - 15x} & \\
 -2x + 6 & \\
 \underline{-2x + 6} & \\
 0 &
 \end{array}$$

Таким образом, $3x^3 - 4x^2 - 17x + 6 = (x - 3)(3x^2 + 5x - 2) = (x - 3)(x + 2)(3x - 1)$.

Тогда:
$$\frac{4x^2 - 5x - 5}{(x - 3)(x + 2)(3x - 1)} = \frac{A}{x - 3} + \frac{B}{x + 2} + \frac{C}{3x - 1},$$

$$A(x + 2)(3x - 1) + B(x - 3)(3x - 1) + C(x - 3)(x + 2) = 4x^2 - 5x - 5.$$

Для того, чтобы избежать при нахождении неопределённых коэффициентов раскрытия скобок, группировки и решения системы уравнений, (которая в некоторых случаях может оказаться достаточно большой) применяют так называемый **метод произвольных значений**. Суть метода состоит в том, что в полученное выше выражение подставляются поочерёдно несколько (по числу неопределённых коэффициентов) произвольных значений x . Для упрощения вычислений принято в качестве произвольных значений принимать точки, при которых знаменатель дроби равен нулю, т.е. в нашем случае $-3, -2, 1/3$. Получаем:

$$\begin{cases} 40A = 16 \\ 35B = 21 \\ C = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} A = 2/5 \\ B = 3/5 \\ C = 1 \end{cases}$$

Окончательно получаем:

$$\begin{aligned}
 \frac{6x^5 - 8x^4 - 25x^3 + 20x^2 - 76x - 7}{3x^3 - 4x^2 - 17x + 6} &= 2x^2 + 3 + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{x - 3} + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{x + 2} + \frac{1}{3x - 1} = \\
 &= 2x^2 + 3 + \frac{1}{5} \left(\frac{2}{x - 3} + \frac{3}{x + 2} \right) + \frac{1}{3x - 1}.
 \end{aligned}$$

$$\text{4.20} \quad \frac{3x^4 + 14x^2 + 7x + 15}{(x + 3)(x^2 + 2)^2} = \frac{A}{x + 3} + \frac{Bx + C}{(x^2 + 2)^2} + \frac{Dx + E}{x^2 + 2}$$

Решение

Найдём неопределённые коэффициенты:

$$A(x^2 + 2)^2 + (Bx + C)(x + 3) + (Dx + E)(x + 3)(x^2 + 2) = 3x^4 + 14x^2 + 7x + 15$$

$$Ax^4 + 4Ax^2 + 4A + Bx^2 + 3Bx + Cx + 3C + Dx^4 + 2Dx^2 + 3Dx^3 + 6Dx + Ex^3 + 2Ex + 3Ex^2 + 6E = (D + A)x^4 + (3D + E)x^3 + (A + B + 2D + 3E + 4A)x^2 + (3B + C + 6D + 2E)x + (2A + 3C + 6E + 4A).$$

$$\begin{cases} D + A = 3 \\ 3D + E = 0 \\ B + 2D + 3E + 4A = 14 \\ 3B + C + 6D + 2E = 7 \\ 3C + 6E + 4A = 15 \end{cases} \quad \begin{cases} D = 3 - A \\ E = -9 + 3A \\ B + 6 - 2A - 27 + 9A + 4A = 14 \\ 3B + C + 18 - 6A - 18 + 6A = 7 \\ 3C - 54 + 18A + 4A = 15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} D = 3 - A \\ E = -9 + 3A \\ B + 11A = 35 \\ 3B + C = 7 \\ 3C + 22A = 69 \end{cases} \quad \begin{cases} D = 3 - A \\ E = -9 + 3A \\ 11A = 35 - B \\ C = 7 - 3B \\ 21 - 9B + 70 - 2B = 69 \end{cases} \quad \begin{cases} A = 3 \\ B = 2 \\ C = 1 \\ D = 0 \\ E = 0 \end{cases}$$

Тогда $\frac{3x^4 + 14x^2 + 7x + 15}{(x + 3)(x^2 + 2)^2} = \frac{3}{x + 3} + \frac{2x + 1}{(x^2 + 2)^2}.$

4.21 Разложить многочлены на множители

а) $P(x) = x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 5x + 6;$

б) $P(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 2x - 4;$

в) $P(x) = x^4 - 15x^2 + 10x + 24.$

4.22 Найти корни многочлена

а) $P(x) = 2x^4 - 3x^2 - 7x - 6;$

б) $P(x) = x^3 - 7x^2 + 16x - 2.$

Разложить дроби на сумму простейших

4.23 $\frac{x - 3}{x^3 + 3x^2 + 2x}.$

4.24 $\frac{x^2 - 1}{x^3 - 4x}.$

4.25 $\frac{32x}{(2x - 1)(4x^2 - 16x + 15)}.$

4.26 $\frac{x^2 + 2x + 2}{(x - 2)^2(x + 3)}.$

4.27 $\frac{3x^3 + 5x^2 - 25x - 1}{(x + 2)(x - 1)^2}.$

4.28 $\frac{x^3 - 2x^2 + 4}{x^3(x - 2)^2}.$

$$\mathbf{4.20} \quad \frac{x}{x^3+1}.$$

$$\mathbf{4.31} \quad \frac{1}{(x^2+2)(x-1)^2}.$$

$$\mathbf{4.33} \quad \frac{31x-x^3-7x^2-14}{x^4+3x^3-7x^2}.$$

$$\mathbf{4.35} \quad \frac{x^4-6x^3-x^2+33x-39}{x^3+x^2-5x+3}.$$

$$\mathbf{4.30} \quad \frac{x^2+2x+7}{(x-2)(x^2+1)^2}.$$

$$\mathbf{4.32} \quad \frac{2x}{(1+x)(1+x^2)^2}.$$

$$\mathbf{4.34} \quad \frac{42x^3+135x^2+160x-37}{(x+4)(x-1)(3x^2+10x-1)}.$$

$$\mathbf{4.36} \quad \frac{x^6-2x^5-x^3+2x^2+1}{x^5-x^2}.$$

Тест 4

1. Найти $|z|$, если $z = -\sqrt{3} + i$.

- 1: 3; 2: 4; 3: 2; 4: $\sqrt{3}$.

2. Найти (в градусах) $\varphi = \arg z$, если $z = -\sqrt{3} + i$, $-180^\circ < \varphi \leq 180^\circ$.

- 1: $\frac{5\pi}{6}$; 2: $\frac{\pi}{6}$; 3: $-\frac{5\pi}{6}$; 4: $-\frac{\pi}{6}$.

3. Найти $|z|$, если $z = z_1 - z_2$, $z_1 = 13 - 5i$, $z_2 = 1 - 21i$.

- 1: 400; 2: 12; 3: 20; 4: $\sqrt{20}$.

4. Найти действительную часть $\operatorname{Re}(z)$, если $z = z_1 + z_2$,
 $z_1 = 2(\cos 60^\circ - i \sin 60^\circ)$, $z_2 = 3(\cos 120^\circ - i \sin 120^\circ)$.

- 1: $\frac{1}{2}$; 2: $-\frac{1}{2}$; 3: $\frac{5\sqrt{3}}{2}$; 4: $-\frac{5\sqrt{3}}{2}$.

5. Найти $|z|$, если $z = z_1 z_2$, $z_1 = 8 - 15i$, $z_2 = -6 + 8i$.

- 1: 28900; 2: 154; 3: 72; 4: 170.

6. Найти (в градусах) $\varphi = \arg z$, если $z = (1 - i\sqrt{3})^{20}$, $-180^\circ < \varphi \leq 180^\circ$.

- 1: $\frac{2\pi}{3}$; 2: $-\frac{2\pi}{3}$; 3: $\frac{20\pi}{3}$; 4: $\frac{\pi}{3}$.

7. Решить уравнение $x^2 - 2x + 2 = 0$.

- 1: нет решений; 2: $1 \pm i$; 3: $-1 \pm i$; 4: $2 \pm 2i$.

8. Построить на плоскости множество точек $|z - 3| < 5$.

9. Для комплексного числа $(-1 - i)^3$ найти ему сопряженное.

- 1: $2 - 2i$; 2: $2 + 2i$; 3: $-2 + 2i$; 4: $-2 - 2i$; 5: $-4 - 4i$.

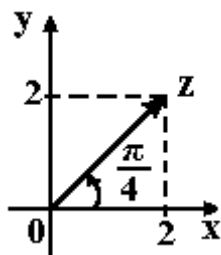
10. Если $i^2 = -1$, то $(1 + i)^3 = \dots$

- 1: $2 + 2i$; 2: $2i - 2$; 3: $-2 - 2i$; 4: $2 - 2i$; 5: $2i$.

11. Главное значение аргумента комплексного числа $(-1 + i)^3$ равно ...

- 1: $2 - 2i$; 2: $-2 + 2i$; 3: $2 + 2i$; 4: $-2 - 2i$; 5: $-4 + 4i$.

12. На рисунке представлена геометрическая иллюстрация комплексного числа $z = x + iy$.



Тогда тригонометрическая форма записи этого числа имеет вид...

1: $2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right);$

2: $4\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right);$

3: $2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right);$

4: $4\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right).$

13. Решить уравнение $x^2 + 64 = 0$:

1: $\pm 8i$; 2: 8; 3: -8; 4: $8i$.

14. Рациональную дробь $\frac{(2x-3)}{(x-1)(x^2+4)}$ можно разложить на сумму простейших дробей:

1: $\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+2};$ 2: $\frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+4};$ 3: $\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x^2+4};$

4: $\frac{A}{x-1} + \frac{Bx}{x^2+4};$ 5: $\frac{A}{x-1} + \frac{Bx+\tilde{N}}{(x+2)^2}.$

15. Рациональную дробь $\frac{(2x-3)}{(x-1)(x^2-1)}$ можно разложить на сумму простейших дробей

1: $\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1};$ 2: $\frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1};$ 3: $\frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2-1};$

4: $\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1};$ 5: $\frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x-1)^2}.$

ОТВЕТЫ К ГЛАВЕ 4

4.4 а) $|z|=2$, $\arg z=0$; б) $|z|=\sqrt{13}$, $\arg z=\arctg \frac{2}{3}$; в) $|z|=1$, $\arg z=\frac{\pi}{2}$;

г) $|z|=2$, $\arg z=-\frac{\pi}{2}$; д) $|z|=\sqrt{13}$, $\arg z=\arctg \frac{2}{3}-\pi$. **4.5** $z_1+z_2=7+7i$; $z_1-z_2=-3-i$.

4.6 а) 26; б) $7+9i$; в) $-2i$; г) $3-4i$. **4.7** а) $1-2i\sqrt{2}$; б) $-1+i$; в) $1-i$.

4.8 а) $\frac{4}{5}-\frac{3}{5}i$; б) $-\frac{5}{2}-\frac{3}{2}i$; в) $-\frac{7}{10}+\frac{21}{10}i$; г) $\frac{271}{2018}-\frac{35}{2018}i$. **4.9** а) 90; б) $-\frac{11}{17}$.

4.10 а) $\frac{4}{3}$; б) $\frac{1}{2}$. **4.11** а) $1(\cos 0^0 + \sin 0^0)$; б) $-1(\cos \pi + i \sin \pi)$;

в) $\sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)$; д) $2\left(\cos \frac{-5\pi}{6} + i \sin \frac{-5\pi}{6}\right)$; е) $\left(\cos \frac{-\pi}{3} + i \sin \frac{-\pi}{3}\right)$;

ж) $\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right)$; з) $\left(\cos \frac{-2\pi}{3} + i \sin \frac{-2\pi}{3}\right)$; и) $4\left(\cos \frac{-2\pi}{3} + i \sin \frac{-2\pi}{3}\right)$;

к) $2\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right)$; л) $5 \cdot (\cos \pi + i \sin \pi)$ **4.12** а) $\pm 5i$; б) $1 \pm 2i$;

в) $2 \pm 2i$; г) $\frac{1 \pm \sqrt{23}i}{6}$. **4.13** а) $2e^{i\pi}$; б) $2e^{\frac{-5\pi}{6}i}$; в) $e^{\frac{2\pi i}{3}}$.

4.14 а) $6\left(\cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12}\right)$; б) $10\left(\cos \frac{5\pi}{12} + i \sin \frac{5\pi}{12}\right)$; в) $2\left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6}\right)$.

4.15 а) $\cos 45^0 + i \sin 45^0$; б) $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos \left(\frac{-17\pi}{12}\right) + i \sin \left(\frac{-17\pi}{12}\right)\right)$;

в) $\cos \left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6}\right)$; г) $\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\left(\frac{-17\pi}{12}\right)}$. **4.16** а) $16+16i\sqrt{3}$;

б) $2^{15}(0+i(-1))=-2^{15}i$. в) $\cos 16\pi + i \sin 16\pi=1$; г) $16\sqrt{3}-16i$; д) $8i$; е) 1296;

ж) $512i$. **4.17** а) $\sqrt[4]{1}\left(\cos \frac{\pi+2\pi k}{4} + i \sin \frac{\pi+2\pi k}{4}\right)$, где $k=0,1,2,3$;

б) $\cos \frac{\pi+4\pi k}{6} + i \sin \frac{\pi+4\pi k}{6}$, $k=0,1,2$; в) $2\left(\cos \frac{2\pi k}{3} + i \sin \frac{2\pi k}{3}\right)$, $k=0,1,2$;

г) $\left(\cos \frac{2\pi k}{3} + i \sin \frac{2\pi k}{3}\right)$, $k=0,1,2$; д) $\sqrt{3}\left(\cos \pi \frac{4k+1}{6} + i \sin \pi \frac{4k+1}{6}\right)$, $k=0,1,2$;

е) $\sqrt[10]{8}\left(\cos \pi \frac{8k+3}{20} + i \sin \pi \frac{8k+3}{20}\right)$, $k=0,1,2,3,4$;

ж) $\sqrt{2}\left(\cos \pi \frac{2k+1}{6} + i \sin \pi \frac{2k+1}{6}\right)$, $k=0,1,2,3,4,5$.

4.21 а) $P(x) = (x-2)(x-3)(x^2+1)$; б) $P(x) = (x+2)(x-1)(x^2-2x+2)$;
 в) $P(x) = (x-3)(x+4)(x-2)(x+1)$. 4.22 а) $x=2, x=-1$; б) $x=2, x=3$.

$$4.23 \quad -\frac{3}{2x} + \frac{4}{x+1} - \frac{5}{2(x+2)}. \quad 4.24 \quad -\frac{1}{4x} + \frac{3}{8(x-2)} + \frac{3}{8(x+2)}.$$

$$4.25 \quad \frac{2}{2x-1} - \frac{12}{2x-3} + \frac{10}{2x-5}. \quad 4.26 \quad \frac{4}{5(x-2)} + \frac{2}{(x-2)^2} + \frac{1}{5(x+3)}.$$

$$4.27 \quad \frac{5}{x+2} - \frac{3}{x-1} - \frac{6}{(x-1)^2}. \quad 4.28 \quad \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{4x} + \frac{1}{2(x-2)^2} - \frac{1}{4(x-2)}.$$

$$4.29 \quad \frac{x+1}{3(x^2-x+1)} - \frac{1}{3(x+1)}. \quad 4.30 \quad \frac{3}{5(x-2)} - \frac{3(x+1)}{5(x^2+1)} - \frac{2(x+2)}{(x^2+1)^2}.$$

$$4.31 \quad \frac{-x+1}{3(x^2+2)} + \frac{1}{3(x-1)^2}. \quad 4.32 \quad \frac{-1}{2(x+1)} + \frac{x+1}{(1+x^2)} + \frac{x-1}{2(x^2+1)}.$$

$$4.33 \quad \frac{2}{x^2} - \frac{5}{x} + \frac{4x+6}{x^2+3x-7}. \quad 4.34 \quad \frac{7}{x+4} + \frac{6}{x-1} + \frac{3x+5}{3x^2+10x-1}.$$

$$4.35 \quad x-7 - \frac{3}{(x-1)^2} + \frac{5}{x-1} + \frac{6}{x+3}. \quad 4.36 \quad x-2 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{3(x-1)} - \frac{x-1}{3(x^2+x+1)}.$$

Итоговый тест МА-1

1. Дополнить формулировку:

Множество, не содержащее ни одного элемента, называют ...

1: пустым; 2: ограниченным; 3: несчётным.

2. Дополнить формулировку:

Два множества называют ..., если они состоят из одних и тех же элементов

1: элементарными; 2: равными; 3: счётными.

3. Дополнить формулировку:

... действительного числа x называется само число x , если x неотрицательно, и противоположное число $-x$, если x отрицательно.

1: аргументом 2: модулем; 3: квадратом.

4. Функция $y = \sqrt{x - x^2}$ отображает множество $(0,1)$ на множество...

1: $\{0\}$; 2: $\emptyset$; 3: $\left(0, \frac{1}{2}\right)$; 4: $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

5. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{4x + 8}{x^3 + 8}$

1: 0; 2: 3; 3: $1/3$; 4: 4.

6. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - x)$

1: 1; 2: 2; 3: ∞ ; 4: 0.

7. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - 4x + 1}{8x - 7x^3 + 1}$

1: $-1/2$; 2: $-5/7$; 3: 1; 4: $5/8$.

8. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{\operatorname{tg} 2x}$

1: 6; 2: 3; 3: 2; 4: 0.

9. Вычислить предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-3}{n} \right)^{n/2}$

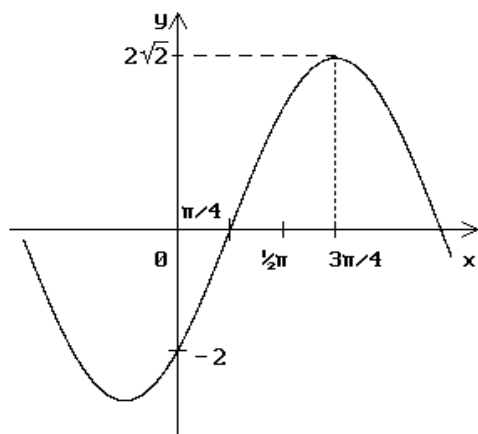
1: $e^{3/2}$; 2: $e^{1/2}$; 3: $\frac{1}{e\sqrt{e}}$; 4: ∞ .

10. Отметить номер предела, равного бесконечности

1: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x-3)(4x-1)}{x^2+3}$; 2: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2-3x+1}{x^3+2x^2-2}$; 3: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^2-4x-1}{5x^2+x+3}$; 4: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x-1}{\sqrt{x^2+x}}$;

5: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3-4}{x^2-x+8}$.

11. Выбрать функцию, наиболее точно соответствующую графику.



1: $y = 2\sqrt{2} \cos(x - \pi / 4)$;

2: $y = 2\sqrt{2} \cos(x + \pi / 4)$;

3: $y = 2\sqrt{2} \sin(x - \pi / 4)$;

4: $y = 2\sqrt{2} \sin(x + \pi / 4)$;

5: $y = 2\sqrt{2} \sin(x + 3\pi / 4)$.

12. Выражение $(A \& B) \vee C \vee A \& C \& B \vee A$ при $C=0$ равно ...

1: A; 2: B; 3: $A \vee B$; 4: $A \& B$; 5: 0.

13. Отметить номер предела, равного нулю

1: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2+x-2}{7x^2+9}$; 2: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2-4x}{\sqrt[3]{x^4+3}}$; 3: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3+2x-3}{x^2+x+3}$; 4: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2-4}{x^4+x^2+3}$;

5: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x-1)(x+3)}{5x^2+x+2}$.

14. Функция $f(x) = \begin{cases} x^2 - a, & x \leq 1 \\ -3x + 1, & x > 1 \end{cases}$ непрерывна на всей числовой оси, если a равно

1: 1; 2: 0; 3: -3; 4: -1; 5: 3;

15. Функция f определена на всей числовой прямой. Если для любых a и b , удовлетворяющих условию $a > b$, выполняется неравенство $f(b) - f(a) < 0$, то f обязательно:

1: возрастает; 2: ограничена; 3: убывает; 4: не ограничена; 5: отрицательна.

16. Функция f определена на всей числовой прямой. Если для любых a и b , удовлетворяющих условию $a < b$, выполняется неравенство $f(b) - f(a) \geq 0$, то f обязательно:

1: монотонно возрастает; 2: строго возрастает; 3: монотонно убывает;
4: строго убывает; 5: положительная функция.

17. Максимум функции $y = x^3 - 12x^2 + 36x - 10$ достигает в точке

1: (2, 22); 2: (-1, 59); 3: (1, 15); 4: (0, -10).

18. Если $S(t) = 3t^2 + t$, то $S'(5)$ равно

1: 29; 2: 30; 3: 31; 4: 28.

19. Найти угловой коэффициент касательной, проведенной к параболе $y = x^2$ в начале координат

1: 1; 2: 0; 3: -1; 4: 0,5.

20. Найти угловой коэффициент касательной, проведенной к параболе $y = x^2$ в точке (3, 9)

1: 6; 2: 0; 3: -1; 4: -6 .

21. Найти угловой коэффициент касательной, проведенной к параболе $y = x^2$ в точке (-2, 4)

1: 1; 2: 0; 3: -4; 4: 4.

22. В каких точках угловой коэффициент касательной к кубической параболе $y = x^3$ равен 3?

1: (1, 1); 2: (-1, -1); 3: (1, 1); 4: (1, -1) .

23. Уравнение касательной, проведенной к кривой $y = x^3$ в точке с абсциссой 2, имеет вид:

1: $y = 12x$; 2: $y = 16 - 12x$; 3: $y = 12x + 16$; 4: $y = 12x - 16$.

24. При каком значении независимой переменной касательные к кривым $y = x^2$ и $y = x^3$ параллельны?

- 1: $x = 0, x = -\frac{2}{3}$; 2: $x = 0$; 3: $x = 0, x = \frac{2}{3}$; 4: $x = \frac{2}{3}$.

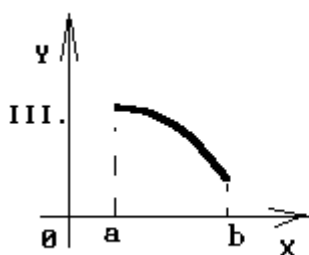
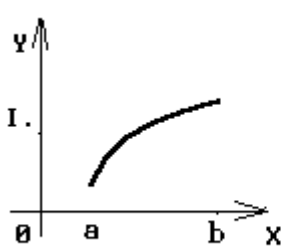
25. В какой точке касательная к параболе $y = x^2$ параллельна прямой $y = 4x - 5$?

- 1: (2, 4); 2: (-2, -4); 3: (1, 4); 4: (2, 3).

26. Угол поворота шкива в зависимости от времени t задан функцией $\alpha = t^2 + 3t - 5$, тогда угловая скорость при $t = 5$ с равна

- 1: $\omega = 10$ рад/с; 2: $\omega = 11$ рад/с; 3: $\omega = 13$ рад/с; 4: $\omega = 6$ рад/с.

27. Укажите вид графика функции, для которой на всем отрезке $[a, b]$ одновременно выполняются три условия: $y > 0$, $y' < 0$, $y'' < 0$.



- 1: только I; 2: только II; 3: только I и IV;
4: только III; 5: только II и IV.

28. Найти второй дифференциал функции $y = \ln x$

- 1: $\frac{dx}{x^2}$; 2: $\frac{-2dx^2}{x^3}$; 3: $\frac{dx^2}{x^2}$; 4: $-\frac{dx^2}{x^2}$.

29. Угловой коэффициент касательной к кривой $y = x^2 - 3$ в точке $x_0 = 1$ равен:

1: 2; 2: 0; 3: 1; 4: -1.

30. Функция f определена на всей числовой прямой. Если для любых a и b , удовлетворяющих условию $a > b$, выполняется неравенство $f(a) > f(b)$, то функция ...

1: возрастает; 2: убывает; 3: чётная; 4: нечётная.

31. Функция убывает, если

1: $y' = 0$; 2: y' не существует; 3: $y' > 0$; 4: $y' < 0$.

32. Точка x_0 является точкой минимума функции $y = f(x)$, если

1: При переходе через эту точку производная не меняет знак;
2: При переходе через эту точку производная меняет знак с «+» на «-»;
3: При переходе через эту точку производная меняет знак с «-» на «+»;
4: $f'(x_0) = 0$.

33. Точка x_0 называется точкой максимума функции $y = f(x)$, если существует окрестность точки x_0 , для всех точек которой отличных от точки x_0 , выполняется неравенство

1: $f(x_0) = f(x)$; 2: $f(x_0) > f(x)$; 3: $f(x_0) \geq f(x)$; 4: $f(x_0) < f(x)$.

34. Для комплексного числа $(-1-i)^3$ найти ему сопряженное.

1: $2-2i$; 2: $2+2i$; 3: $-2+2i$; 4: $-2-2i$; 5: $-4-4i$.

35. Главное значение аргумента комплексного числа $(-1+i)^3$ равно ...

1: $2-2i$; 2: $-2+2i$; 3: $2+2i$; 4: $-2-2i$; 5: $-4+4i$.

36. Дано комплексное число $z = 2+2i$, тригонометрическая форма записи этого числа имеет вид...

1) $2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

2) $4\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

3) $2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

4) $4\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

37. Число, сопряженное комплексному числу $(2-3i)^2$ равно...

1: $-5+12i$; 2: $-5+2i$; 3: $2-3i$; 4: $4+4i$; 5: $6-i$.

38. Значение $(3-2i)^2$ при $i^2 = -1$, равно...

1: $4-8i$; 2: $-3-12i$; 3: $5-12i$; 4: $6i$; 5: 5 .

39. Рациональную дробь $\frac{(x-3)}{(x-1)^2(x^2+4)}$ можно разложить на сумму простейших дробей:

1: $\frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{Cx+D}{x^2+4}$; 2: $\frac{A}{(x-1)^2} + \frac{Bx+C}{x^2+4}$; 3: $\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x^2+4}$;
4: $\frac{A}{x-1} + \frac{Bx}{x^2+4}$; 5: $\frac{A}{x-1} + \frac{Bx+\tilde{N}}{(x+2)^2}$.

40. Рациональную дробь $\frac{(x+3)}{(x-1)(x^2-4)}$ можно разложить на сумму простейших дробей

1: $\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+2}$; 2: $\frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+2}$; 3: $\frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2-4}$;
4: $\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}$; 5: $\frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x-2)^2}$.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Вариант № 1

Найти пределы:

1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 5x^2 + 2}{2x^3 + 5x^2 - x};$

2) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2x^2 + 3x + 1}{2x^2 + 5x + 3}; \quad x_0 = -1, \quad x_0 = 2.$

3) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1 - \cos x}{5x^2}; \quad x_0 = \frac{\pi}{3}, \quad x_0 = 0.$

4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-2} \right)^x;$

5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{3x};$

6) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x-2}{5x^3 + 2x^2 - 3};$

7) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + x}{x-3};$

8) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 4x^2 + 4x}{x^3 - 12x + 16};$

9) $\lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{ctg} 2x;$

10) $\lim_{x \rightarrow -1} (2+x)^{\frac{1}{x^3+1}};$

11) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{\ln(1+4x)};$

12) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \operatorname{tg} \frac{3}{x};$

13) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\arcsin(x+2)}{x^2 + 2x};$

14) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 5x}{\sin 6x};$

15) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^x - 2^x}{e^{-x} - 1};$

16) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(e^{x-1} - 1)}{\ln x};$

17) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x - \cos 2x}{\operatorname{arc} \operatorname{tg}^2 3x};$

18) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[4]{x+16} - 2}{\sin 5x}.$

Вариант № 2

Найти пределы:

1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + 1}{2x^3 - 4x + 2};$

2) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{3x^2 - 14x - 5}{x^2 - 2x - 15}; \quad x_0 = 5, \quad x_0 = -2.$

3) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\arcsin 2x}{5x}; \quad x_0 = 0, \quad x_0 = \frac{1}{2}.$

4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{2x+1} \right)^x;$

5) $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{2+x} - 3}{x-7};$

6) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 5x - 2}{3x - 5};$

7) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 3x - 1}{5x^3 - 2x + 1};$

8) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x^2 - 9x + 4}{\sqrt{5-x} - \sqrt{x-3}};$

9) $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{x} \ln x;$

10) $\lim_{x \rightarrow 2} (3-x)^{\frac{5}{x^3-8}};$

11) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\ln(1+2x)};$

12) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \sin \frac{2}{x};$

13) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg}(x+2)}{x^2 + 2x};$

14) $\lim_{x \rightarrow \pi} \operatorname{tg} 5x \cdot \operatorname{ctg} 6x;$

15) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-2x} - 1}{5^{-x} - 3^{-x}};$

16) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin 2x - 2 \sin x}{x \ln \cos 5x};$

17) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x}{\sqrt[5]{x+3} - \sqrt[5]{3}};$

18) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{\sin(x^2 - 1)}.$

Вариант № 3

Найти пределы:

- 1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^5 + x^2 - 8}{6x^3 - x + 2};$
- 2) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 + x - 2}{2x^2 - x - 1}; \quad x_0 = 1, \quad x_0 = 2.$
- 3) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{6x}{\arctg x}; \quad x_0 = 0, \quad x_0 = 1.$
- 4) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{\frac{1}{x}};$
- 5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1 + 3x} - 1};$
- 6) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x}{x^2 + 2x - 1};$
- 7) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 5x - 3}{2x^2 + 3};$
- 8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg 2x}{5x};$
- 9) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{x}{x - 1} \right);$
- 10) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x + 7}{2x - 3} \right)^{4x};$
- 11) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\ln(1 + 5x)};$
- 12) $\lim_{x \rightarrow \infty} 2^x \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2^x};$
- 13) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\arcsin(1 - 2x)}{4x^2 - 1};$
- 14) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{(x^2 - \pi^3) \sin 5x}{e^{\sin^2 x} - 1};$
- 15) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^{3x} - 4^{3x}}{x};$
- 16) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{\sqrt[4]{1 + x^2} - 1};$
- 17) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg^2 2x}{\cos 3x - \cos x};$
- 18) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{\sin(x - 1)}.$

Вариант № 4

Найти пределы:

1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 5x + 1}{2x^3 + 4x - 5};$

2) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 + 7x + 10}{2x^2 + 9x + 10}; \quad x_0 = -2, \quad x_0 = 1.$

3) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\cos x - \cos^3 x}{x^2}; \quad x_0 = 0, \quad x_0 = \frac{\pi}{6}.$

4) $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + 2x)(\ln(x + 1) - \ln x);$

5) $\lim_{n \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 - n^2}}{n^2};$

6) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 + 2x^2 - 3}{-5x^4 - 3x^3 + 2x};$

7) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x + 1}{2x - 2};$

8) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{2x + 1} - \sqrt{x + 6}}{2x^2 - 7x - 15};$

9) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \cos x \cdot \operatorname{tg} 5x;$

10) $\lim_{x \rightarrow -1} (3 + 2x)^{\frac{1}{1-x^2}};$

11) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{7^x - 7^{-2x}}{3x};$

12) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right);$

13) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\arcsin(1 - 2x)}{1 - 4x^2};$

14) $\lim_{x \rightarrow \pi} \operatorname{tg} 3x \cdot \operatorname{ctg} 4x;$

15) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 3x}{\ln(1 + 8x)};$

16) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(e^{x-2} - 1)}{\operatorname{tg}(x - 2)};$

17) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 5x - \cos 3x}{\operatorname{tg}^2 2x};$

18) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(1 - x)}{\sqrt[7]{x} - 1}.$

Вариант № 5

Найти пределы:

1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 + 5x^2 - 3}{5x^4 - 2x^3 - 4x};$

2) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2x^2 - 7x + 3}{x^2 - 4x + 3}; \quad x_0 = 3, \quad x_0 = -2.$

3) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\arctg 2x}{4x}; \quad x_0 = 0, \quad x_0 = \frac{1}{2}.$

4) $\lim_{x \rightarrow \infty} (3x + 2)(\ln(x + 1) - \ln x);$

5) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3x - 2} - 2}{x^2 - 4};$

6) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 5x^2 + 3}{x^2};$

7) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x - 2}{3x^3 + 2x^2 - 3};$

8) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3 + 2x} - \sqrt{x + 4}}{3x^2 - 4x + 1};$

9) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right);$

10) $\lim_{x \rightarrow 2} (5 - 2x)^{\frac{1}{4 - x^2}};$

11) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\arcsin(x - 2)}{x^2 - 4};$

12) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{ctg} 2x}{\operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2} - x \right)};$

13) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 10x}{\ln(1 + 15x)};$

14) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 2x}{x(\sqrt[5]{1 + x} - 1)};$

15) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{2x} - 3^{2x}}{e^{-2x} - 1};$

16) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{\ln(1 + x^2)};$

17) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg^2 2x}{\cos 7x - \cos 3x};$

18) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2}{\sin \pi x}.$

Вариант № 6

Найти пределы:

1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + x - 5x^4}{x^4 + 12x - 3};$

2) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2x^2 - 7x - 4}{x^2 - 3x - 4}; \quad x_0 = 4, \quad x_0 = 0.$

3) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 \operatorname{ctg} 3x}{\sin 2x}; \quad x_0 = 0, \quad x_0 = \frac{\pi}{4}.$

4) $\lim_{x \rightarrow \infty} (2x + 1)(\ln(x + 3) - \ln x);$

5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - 3x} - \sqrt{1 - 2x}}{x + x^2};$

6) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 5x + 1}{6x^3 + 2x^2 + 3};$

7) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 2x^2 - 3}{x};$

8) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{x^3 + 1};$

9) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\sin x}{x^3} \right);$

10) $\lim_{x \rightarrow -2} (3 + x)^{\frac{3}{x^2 - 4}};$

11) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\operatorname{arctg}(x - 2)}{x^3 - 8};$

12) $\lim_{x \rightarrow 1} (1 - x) \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2};$

13) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin^2 3x}{\ln^2(1 + 3x)};$

14) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} 4x \cdot \operatorname{ctg} 6x;$

15) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^x - 5^{-3x}}{e^{2x} - 1};$

16) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\operatorname{tg} \ln(3x - 5)}{e^{x+3} - e^{x^2+1}};$

17) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 6x}{1 - \cos 3x};$

18) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sqrt{x+3} - \sqrt{3}}.$

Вариант № 7

Найти пределы:

1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 2x^2 + 5x^4}{2 + 2x^2 - x^4};$

2) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2x^2 - 13x + 20}{x^2 - 6x + 8}; \quad x_0 = 4, \quad x_0 = -2.$

3) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1 - \cos 6x}{1 - \cos 2x}; \quad x_0 = 0, \quad x_0 = \frac{\pi}{6}.$

4) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x-1)(\ln(x-3) - \ln x);$

5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+3x^2} - 1}{x^2 + x^3};$

6) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x + 1}{3x^3 + 2x - 1};$

7) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^5 - 4x^4 + 3x^3}{2x^2 - 3};$

8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x};$

9) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \operatorname{tg} x}{\cos 2x};$

10) $\lim_{x \rightarrow -2} (7 + 3x)^{\frac{x}{x^2 + 3x + 2}};$

11) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 2x^2}{\arcsin^2 x};$

12) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(2^{\frac{1}{x}} - 1 \right);$

13) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 6\sqrt{x}}{\ln(1+6x)};$

14) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin^3 x}{\cos^2 x};$

15) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{2x} - 3^{4x}}{e^{3x} - 1};$

16) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x \cdot \operatorname{tg} x)}{\sqrt[5]{1+x^2} - 1};$

17) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} 4x^2}{1 - \cos 2x};$

18) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln^2 x}{1 + \cos \pi x}.$

Вариант № 8

Найти пределы:

1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 - 3x + 1}{x - 5 + 3x^3};$

2) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{3x^2 - 14x - 5}{x^2 - 6x + 5}; \quad x_0 = 5, \quad x_0 = 2.$

3) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\operatorname{tg}^3 \frac{x}{2}}{x^3}; \quad x_0 = 0, \quad x_0 = 2.$

4) $\lim_{x \rightarrow 1} (7 - 6x)^{\frac{1}{3x-3}};$

5) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{2x-1} - \sqrt{5}}{x-3};$

6) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x + 5}{4x^4 + 3x^3 + 2x^2};$

7) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^3 + 3x - 2}{-3x^3 + 2x};$

8) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{5x+1} - 4}{x-3};$

9) $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x \ln \sqrt{x};$

10) $\lim_{x \rightarrow \infty} (5x + 8) [\ln(2x - 3) - \ln(2x + 5)];$

11) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 3x^2}{\arcsin^2 x};$

12) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \operatorname{tg} 3x;$

13) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 3x}{\ln(1 + x^2)};$

14) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{\sin \pi x} - 1}{x - 1};$

15) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - e^{-x}}{3^{4x} - 1};$

16) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\ln(2x - 5)}{\sqrt[4]{1+x} - \sqrt[4]{4}}.$

17) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin^2 2x}{1 - \cos 4x};$

18) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{\sqrt{x+9} - 3}.$

Вариант № 9

Найти пределы:

1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^4 - 2x^3 + 2x}{x^4 + 3x};$

2) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2x^3 + 3x + 1}{x^2 - 2x - 3}; \quad x_0 = -1, \quad x_0 = 2.$

3) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1 - \cos 4x}{2x \operatorname{tg} 2x}; \quad x_0 = 0, \quad x_0 = \frac{\pi}{4}.$

4) $\lim_{x \rightarrow 2} (3x - 5)^{\frac{2}{x-2}};$

5) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{1+3x} - \sqrt{2x+6}}{x^2 - 5x};$

6) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^3 + 2x - 3}{3x^2 - x};$

7) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + 2x + 1}{2x^5 - 2x + 3};$

8) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 7x + 10}{2x^2 + 9x + 10};$

9) $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x \sin x} - \frac{1}{x^2} \right];$

10) $\lim_{x \rightarrow \infty} (5x - 3) [\ln(4 - 3x) - \ln(5 - 3x)];$

11) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin 2x)}{\operatorname{tg} 5x};$

12) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\sin [\pi(x+2)]}.$

13) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 - 5x}{\arcsin 3x};$

14) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{x^2 - \pi^2}{\sin x};$

15) $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1 - \cos 7x}{x \sin 7x} \right];$

16) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(e^{2x} - 1)}{\ln(e - x) - 1};$

17) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x-1} - 1}{2^{x+2} - 2^{3x}};$

18) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \sin \frac{3}{x}.$

Вариант № 10

Найти пределы:

1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^5 - 3x^2 + 9}{2x^5 + 2x^2 - 5};$

2) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2x^2 + 5x + 3}{x^2 - x - 2}; \quad x_0 = -1, \quad x_0 = 3.$

3) $\lim_{x \rightarrow x_0} 5x \cdot \operatorname{ctg} 3x; \quad x_0 = 0, \quad x_0 = \frac{\pi}{4}.$

4) $\lim_{x \rightarrow 3} (3x - 8)^{\frac{2}{x-3}};$

5) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\sqrt{2x-2}};$

6) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2}{x^3 + x - 1};$

7) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^4 + 2x - 3}{3x^2 - 2};$

8) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{5 - \sqrt{22 - x}}{1 - \sqrt{4 + x}};$

9) $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x^2} - \frac{\operatorname{arctg} x}{x^3} \right];$

10) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (7 - 10x) [\ln(1 - 2x) - \ln(5 - 2x)];$

11) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 4x^2)}{1 - \sqrt{x^2 + 1}};$

12) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \operatorname{tg} \frac{4}{x};$

13) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\arcsin(x-5)}{x^2 - 6x + 5};$

14) $\lim_{x \rightarrow 1} (1 + \cos \pi x) \operatorname{ctg}^2 \pi x;$

15) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{3x \cdot \arcsin x};$

16) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(9 - 2x^2)}{\sin^2 \pi x};$

17) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-4x} - 1}{\operatorname{tg} \left[2\pi \left(x + \frac{1}{2} \right) \right]};$

18) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2^x - 16}{\sqrt[5]{5 - x} - 1}.$

Вариант № 11

Найти пределы:

1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-4x}{5x-2};$

2) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2x^2+x-10}{x^2-5x+6}; \quad x_0 = 2, \quad x_0 = -2.$

3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{13x^2};$

4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+4}{x-2} \right)^x;$

5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{5x};$

6) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2+2x-3}{4x^3-2x^2+1};$

7) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^5+2x^3-x}{3x^3-2};$

8) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-\sqrt{x}}{x^2-x};$

9) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{4x};$

10) $\lim_{x \rightarrow 2} (3x-5)^{\frac{1}{x^2-2x}};$

11) $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(1-4x) \cdot \operatorname{ctg}[\pi(x+3)];$

12) $\lim_{x \rightarrow \infty} 3^x \cdot \operatorname{tg} \frac{2}{3^x};$

13) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\arcsin(x+2)}{3\sqrt{2+x+x^2}-9};$

14) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1-\sin 2x}{(\pi-4x)^2};$

15) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\operatorname{arctg}(x-4)}{x^2-3x-4};$

16) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{\sqrt[4]{1+x^2-x}-1};$

17) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{x^2}-1}{\cos 9x - \cos x};$

18) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right) \cdot \operatorname{tg} x}{\arcsin 2x^2}.$

Вариант № 12

Найти пределы:

1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{12x^3 + 4}{3x^3 - 2x + 6};$

2) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2x^2 - 13x + 20}{x^2 - 2x - 8}; \quad x_0 = 4, \quad x_0 = 1.$

3) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\arccos 3x}{6x}; \quad x_0 = 0, \quad x_0 = \frac{\sqrt{3}}{6}.$

4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x-1}{4x+1} \right)^x;$

5) $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{\sqrt[3]{2+x} - 2}{x-6};$

6) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 5x + 1}{3x^4 + 2x - 3};$

7) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^5 + 3}{2x^2 + x - 3};$

8) $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{2+x} - 3}{x^2 - 49};$

9) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - e^{2x}) \operatorname{ctg} x;$

10) $\lim_{x \rightarrow -2} (9 + 4x)^{\frac{1}{x^3+8}};$

11) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x}{\cos \frac{\pi}{2}(x+3)};$

12) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(1 - 2^{\frac{1}{x}} \right);$

13) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 3^{7x}}{\sin 3x};$

14) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+2) - \ln 2}{x};$

15) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^{4-x^2} - 1}{x^2 - 5x + 6};$

16) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2^{\cos^2 x} - 1}{\ln \sin x};$

17) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^3 2x}{x(\cos 3x - \cos x)};$

18) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x}{\sqrt[4]{x^3 - x + 1} - 1}.$

Вариант № 13

Найти пределы:

1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 + x^2 - 6}{4x + 3};$

2) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2x^2 - 7x + 3}{x^2 + 4x - 21}; \quad x_0 = 3, \quad x_0 = -2.$

3) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sqrt{1 - \cos 3x}}{3x}; \quad x_0 = 0, \quad x_0 = \frac{\pi}{3}.$

4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{2x} \right)^{2x};$

5) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{2x^2 - 2x};$

6) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 2x + 3}{5x - 6x^3};$

7) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x + 5}{4x^2 + x};$

8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{\ln(1 + 2x)};$

9) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{1 - 2\sin x}{\cos 3x};$

10) $\lim_{x \rightarrow 4} (2x - 7)^{\frac{4}{x^2 - 3x - 4}};$

11) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x}{2^{-3x} - 1};$

12) $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \operatorname{tg} 2x;$

13) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{a^x - a^{-x}};$

14) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg}(x^2 - 2x)}{\sin 3\pi x};$

15) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos x}{(e^{2x} - 1)^2};$

16) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\ln \cos 2x}{\left(1 - \frac{\pi}{x}\right)^2};$

17) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - x^2)}{\operatorname{tg}^2 10x};$

18) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[4]{x} - 1}.$

Вариант № 14

Найти пределы:

1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^6 - 2x^4 + x}{x - 2x^6};$

2) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 + 10x + 21}{2x^2 + 5x - 3}; \quad x_0 = -3, \quad x_0 = 2.$

3) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{14x}{\arctg 2x}; \quad x_0 = 0, \quad x_0 = \frac{1}{2}.$

4) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{\frac{1}{x}};$

5) $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{4x}{\sqrt{1 + 4x} - 1};$

6) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 2x + 3}{4x^5 + 5x - 2};$

7) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 2x - 3}{x - 5};$

8) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4 - 4x^3}{\ln x};$

9) $\lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{ctg} 5x;$

10) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 + 3}{2x^2 - x + 1} \right)^{x-1};$

11) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{(e^{3x} - 1)^2};$

12) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{5x} \operatorname{ctg} \frac{1}{3x};$

13) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \arcsin^2 x}{\sin^3 2x};$

14) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{5x + 1}}{\cos \left[\frac{\pi(x + 3)}{2} \right]};$

15) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x(1 - \cos 2x)};$

16) $\lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln x - 1}{x - e};$

17) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3^x - 9}{\arctg(x - 2)};$

18) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - x^4)}{\sqrt[5]{1 - 3x^4} - 1}.$

Вариант № 15

Найти пределы:

1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - 2x^3 - x}{x - 8x^2 - 5x^4};$

2) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2x^2 + x - 10}{x^2 - 5x + 6}; \quad x_0 = 2, \quad x_0 = 3.$

3) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\cos x - \cos^3 x}{x^2}; \quad x_0 = 0, \quad x_0 = \frac{\pi}{4}.$

4) $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + 4x)(\ln(x + 1) - \ln x);$

5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x^2};$

6) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 2x - 1}{x^3 - 5x};$

7) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + 2}{2x^3 - 5x + 3};$

8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin 2x};$

9) $\lim_{x \rightarrow \pi} (\pi - x) \operatorname{tg} \frac{x}{2};$

10) $\lim_{x \rightarrow -4} (13 + 3x)^{\frac{x}{x^2 - 16}};$

11) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 4x^2}{\operatorname{tg}^2 5x};$

12) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{8x} \operatorname{ctg}^2 \frac{1}{x};$

13) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \ln(1 - 7x)}{3 \operatorname{arc} \operatorname{tg} 4x};$

14) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[7]{1 + x^4 - x^2} - 1}{\arcsin(x^3 - 4x)}.$

15) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + 5} - \sqrt{5}}{\sin 3x}$

16) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\ln \cos 2x}{\ln \cos 4x};$

17) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^x}{\sin 2x - \sin x};$

18) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3^{5x-3} - 3^{2x^2}}{\sin \pi x}.$

Вариант 1Найти y' :

1. $y = \ln \sqrt[3]{1-x+x^2}.$

2. $y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}.$

3. $y = \arcsin(\ln 2x).$

4. $y = e^{\cos x} \cdot \sqrt{\sin x}.$

5. $y = \cos^2 \sqrt{x}.$

6.
$$\begin{cases} x = \ln t \\ y = \frac{1}{1-t} \end{cases}.$$

7.
$$\begin{cases} x = \sin t \\ y = \operatorname{tg} t \end{cases}.$$

8. $y = 1 + te^y.$

9. Записать уравнение касательной плоскости к $y(x)$ в точке x_0 :
 $y = \operatorname{tg} 2x, \quad x_0 = 0.$

10. Найти приближенное значение: $\ln 1,02.$

11. Тело движется по закону $S = \ln(1+t^2).$

Найти V и a при $t_0 = 4.$

Вариант 2Найти y' :

1. $y = \frac{3-x}{2} \sqrt{1-2x-x^2}.$

2. $y = \ln \sqrt[6]{x^2 - x + 1}.$

3. $y = \ln \arcsin 5x.$

4. $y = 4(\sqrt{5x} - \operatorname{tg} \sqrt{5x}).$

5. $y = \sqrt{1 + \sin^2 x}.$

6. $\begin{cases} x = t^4 \\ y = e^{2t} \end{cases}.$

7. $\begin{cases} x = \sin^2 t \\ y = \cos^3 t \end{cases}.$

8. $y = \operatorname{arctg} y - x.$

9. Записать уравнение касательной плоскости к $y(x)$ в точке x_0 :

$$y = e^{1-x^2}, \quad x_0 = -1.$$

10. Найти приближенное значение: $\sqrt[4]{17}.$ 11. Тело движется по закону $S = 1 + t^3 - \frac{t^4}{4}.$ Найти V и a при $t_0 = 3.$

Вариант 3

Найти y' :

1. $y = \frac{\sqrt{2}}{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{1}{6} \ln \frac{x-1}{x+1}.$

2. $y = \ln(1 + 2 \sin x).$

3. $y = x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x.$

4. $y = \sqrt{x}e^{\frac{x}{2}}.$

5. $y = (x^2 - 1) \cos^3 2x.$

6. $\begin{cases} x = \sin t \\ y = \operatorname{tg} t \end{cases}.$

7. $\begin{cases} x = t^2 + 3 \\ y = t^5 - 7 \end{cases}.$

8. $x^2 - y^2 - 2xy = 2$

9. Записать уравнение касательной плоскости к $y(x)$ в точке x_0 :

$$y = \sqrt{x}, \quad x_0 = 4.$$

10. Найти приближенное значение: $\cos 32^\circ.$

11. Тело движется по закону $S = 1 + 2t + 5t^2.$

Найти V и a при $t_0 = 3.$

Вариант 4

Найти y' :

$$1. \quad y = \ln \frac{1 + \sqrt{\sin x}}{1 - \sqrt{\sin x}}.$$

$$2. \quad y = 3 \ln^4(2x + \sin^2 3x).$$

$$3. \quad y = \operatorname{arctg}(\ln 3x).$$

$$4. \quad y = \frac{\arcsin x^2}{2 - 3x}.$$

$$5. \quad y = x^3 \ln(x - 1).$$

$$6. \quad \begin{cases} x = \sin 2t \\ y = \operatorname{tg} 2t \end{cases}.$$

$$7. \quad \begin{cases} x = \sin^3 t \\ y = 1 - \cos^2 t \end{cases}.$$

$$8. \quad e^{x-2} + xy - 3y - 2 = 0.$$

$$9. \quad \text{Записать уравнение касательной плоскости к } y(x) \text{ в точке } x_0: \\ y = \ln x, \quad x_0 = 1.$$

$$10. \text{Найти приближенное значение: } \operatorname{tg} 43^\circ.$$

$$11. \text{Точка движется по оси } OX \text{ по закону } x = \frac{1}{4}(t^4 - 4t^3 + 2t^2 - 12t).$$

В какой момент времени точка остановится?

Вариант 5

Найти y' :

$$1. \quad y = \frac{1}{2}(\operatorname{arctg} x)^2 - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2).$$

$$2. \quad y = x \operatorname{arctg} \sqrt{x}.$$

$$3. \quad y = \ln \cos x - \frac{1}{2} \cos^2 x.$$

$$4. \quad y = \frac{e^{-x^2}}{2x}.$$

$$5. \quad y = \arccos^2 \frac{1}{x}.$$

$$6. \quad \begin{cases} x = e^{-t} \\ y = t^3 \end{cases}.$$

$$7. \quad \begin{cases} x = \frac{3t}{1+t^3} \\ y = \frac{3t^2}{1+t^3} \end{cases}.$$

$$8. \quad x^2 \sin y + y^3 \cos x - 3x = 0$$

9. Записать уравнение касательной плоскости к $y(x)$ в точке x_0 :

$$y = x^3 + 2x^2 - 4x - 3, \quad x_0 = -2.$$

10. Найти приближенное значение: $y = \sqrt[3]{8,04}$.

11. Точка движется по закону $x = \frac{1}{4}t^4 - 4t^3 + 16t^2$.

Найти V и a при $t_0 = 2$.

Вариант 6

Найти y' :

1. $y = 2\ln(x + \sqrt{x^2 - 4})$.

2. $y = \operatorname{arctg}(\sin x)$.

3. $y = \cos^2(\sin 3x)$.

4. $y = \frac{\arccos 2x}{\sqrt{x}}$.

5. $y = x \ln(1 - x^2)$.

6. $\begin{cases} x = e^{-t} \cos t \\ y = e^t \sin t \end{cases}$.

7. $\begin{cases} x = 5 \sin t \\ y = 5 \cos t \end{cases}$.

8. $x^3 \cdot y^5 = 1$.

9. Записать уравнение касательной плоскости к $y(x)$ в точке x_0 :

$$y = x^2 - 5x + 4, \quad x_0 = -1.$$

10. Найти приближенное значение: $\ln 0,9$.

11. Тело движется по закону $S = 3t^2 - 5t + \frac{1}{t^2}$.

Найти V и a при $t_0 = 2$.

Вариант 7Найти y' :

1. $y = \frac{\cos x}{\cos^2 x - 1}.$

2. $y = \frac{3}{4} \ln \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}.$

3. $y = \frac{1}{2 \sin^2 x} \ln \operatorname{tg} x.$

4. $y = \frac{\ln \cos x}{x^2 + 1}.$

5. $y = e^{-x} (2 - 2t - t^2).$

6. $\begin{cases} x = e^{-t} \cos t \\ y = e^{-t} \sin t \end{cases}.$

7. $\begin{cases} x = 3t - 2 \\ y = t^3 + t \end{cases}.$

8. $x^2 - y^2 + 4x - 10y + 4 = 0$

9. Записать уравнение касательной плоскости к $y(x)$ в точке x_0 :
 $y = x^2 - 6x + 5, \quad x_0 = 1.$

10. Найти приближенное значение: $(0,96)^3.$

11. Тело движется по закону $x = t^3 - 3t^2 + \ln t^3.$
Найти V и a при $t_0 = 2.$

Вариант 8Найти y' :

1. $y = \ln(2 - \cos^2 x)$.

2. $y = \ln \frac{(1 + \sin x)^2}{1 - \sin x}$.

3. $y = \sin(\cos^2 x)$.

4. $y = \arcsin^2 x + \ln \frac{1}{x}$.

5. $y = (\operatorname{arctg} x)^2$.

6. $\begin{cases} x = \ln(1 + t^2) \\ y = t^2 \end{cases}$.

7. $\begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t \end{cases}$.

8. $x^2 - 3y^2 - 4xy = 0$.

9. Записать уравнение касательной плоскости к $y(x)$ в точке x_0 :

$$y = 1 + \frac{1}{x}, \quad x_0 = 2.$$

10. Найти приближенное значение: $\sin 29^\circ$.11. Тело движется по закону $S = x^2 - \sin 2x$.Найти V и a при $t_0 = \frac{\pi}{4}$.

Вариант 9

Найти y' :

$$1. \quad y = \ln \frac{\sqrt{1+4x^2}}{x}.$$

$$2. \quad y = \frac{2x-1}{2} \arcsin \sqrt{x}.$$

$$3. \quad y = \ln \operatorname{arctg} e^x.$$

$$4. \quad y = \ln \frac{\cos x}{x^2 + 4}.$$

$$5. \quad y = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{4}.$$

$$6. \quad \begin{cases} x = \operatorname{arctg} t \\ y = \ln(1+t^2) \end{cases}.$$

$$7. \quad \begin{cases} x = t^2 + 1 \\ y = 2t^3 - t^2 \end{cases}.$$

$$8. \quad 3x^2 - 4y^2 - 5xy = 2.$$

9. Записать уравнение касательной плоскости к $y(x)$ в точке x_0 :

$$y = \frac{x}{1+x}, \quad x_0 = 1.$$

10. Найти приближенное значение: $e^{0,01}$.

11. Тело движется по закону $S = \frac{1}{2}t^2 + \operatorname{tg} t - 1$.

Найти V и a при $t_0 = \frac{\pi}{4}$.

Вариант 10

Найти y' :

1. $y = \frac{1}{2}(\operatorname{arctg} 2x)^2.$

2. $y = 3\ln(x + \sqrt{x^2 + 3}).$

3. $y = x\sin(\ln x - x).$

4. $y = \ln(1 - \sqrt{x}) + 2\sqrt{\operatorname{tg} x}.$

5. $y = \frac{x^3 + 1}{x^3 - 1}.$

6. $\begin{cases} x = \ln t \\ y = t^3 \end{cases}.$

7. $\begin{cases} x = \frac{1}{t+1} \\ y = \frac{t}{t+1} \end{cases}.$

8. $y = x + \ln y$

9. Записать уравнение касательной плоскости к $y(x)$ в точке x_0 :

$$y = x^3 - 8x + 2, \quad x_0 = 1.$$

10. Найти приближенное значение: $y = \sqrt[3]{27,2}.$

11. Тело движется по закону $S = t^3 - 2t^2 + 4t.$

В какой момент времени его ускорение будет равно нулю?

Вариант 11Найти y' :

1. $y = 2x \operatorname{arctg} 2x.$

2. $y = \frac{3}{2} x \sqrt{x^2 - 3}.$

3. $y = \ln \operatorname{tg}(\sin 5x).$

4. $y = \arcsin^2 x + \ln 2x.$

5. $y = (1 + x) \operatorname{arctg} x.$

6. $\begin{cases} x = \sin t - \cos t \\ y = \cos t + \sin t \end{cases}.$

7. $\begin{cases} x = t^2 - 1 \\ y = t^3 + 5 \end{cases}.$

8. $3x^2 - y^2 - 3xy = 2.$

9. Записать уравнение касательной плоскости к $y(x)$ в точке x_0 :

$$y = \frac{x-1}{x^2+1}, \quad x_0 = 0.$$

10. Найти приближенное значение: $\operatorname{ctg} 43^\circ.$ 11. Найти V и a в момент $t_0 = 3$, если тело движется по закону $S = e^{2t} - t^2 + 5.$

Вариант 12Найти y' :

1. $y = \frac{4 \sin 3x}{e^{2x}}.$

2. $y = \ln \sqrt[4]{\frac{x-1}{x^2+1}}.$

3. $y = \operatorname{arctg} \frac{x \sin x}{\cos x}.$

4. $y = \frac{1}{2} (tg 2x + \ln \cos^2 2x).$

5. $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}.$

6. $\begin{cases} x = \ln(4+t^2) \\ y = t^3 \end{cases}.$

7. $\begin{cases} x = \frac{1}{3}t^3 + t \\ y = \ln t \end{cases}.$

8. $x^y = y^x.$

9. Записать уравнение касательной плоскости к $y(x)$ в точке x_0 :
 $y = e^{2x} + x, \quad x_0 = 1.$

10. Найти приближенное значение: $(1,02)^3.$

11. Тело движется по закону $S = t^3 - 2t + 3.$
Найти V и a при $t_0 = 2.$

Вариант 13

Найти y' :

1. $y = \frac{e^{3x-5} - 2}{\ln 2x}$.

2. $y = \frac{\sin^3 2x}{\cos^2 3x}$.

3. $y = \ln(x + x + \sqrt{x^2 + 2x})$.

4. $y = \sin 8x \cdot \ln \frac{x}{8}$.

5. $y = \sqrt{1 + \operatorname{arctg} x}$.

6. $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} t \\ y = \frac{1}{2}t^2 \end{cases}$.

7. $\begin{cases} x = e^{-t} \\ y = e^{3t} \end{cases}$.

8. $x^3 \cdot y^5 = 1$.

9. Записать уравнение касательной плоскости к $y(x)$ в точке x_0 :
 $y = x^3 + 2, \quad x_0 = 1$.

10. Найти приближенное значение: $e^{0,03}$.

11. Тело движется по закону $S = t^2 - 2t + \cos 2t$.

Найти V и a в момент $t_0 = \frac{\pi}{2}$.

Вариант 14Найти y' :

1. $y = e^x \arcsin x.$

2. $y = \ln \sqrt[3]{\frac{x^3 - 1}{x^2 + 1}}.$

3. $y = 2^{\arctg \ln x}.$

4. $y = \operatorname{tg}^2(x^2 + 1).$

5. $y = x \operatorname{tg}^2 x.$

6.
$$\begin{cases} x = \frac{t}{t^2 - 1} \\ y = \frac{t^2}{t - 1} \end{cases}.$$

7.
$$\begin{cases} x = 2t^2 \\ y = 3t^3 \end{cases}.$$

8. $x^2 + y^2 - 4x - 10y + 4 = 0.$

9. Записать уравнение касательной плоскости к $y(x)$ в точке x_0 :

$$y = \frac{\ln x}{x}, \quad x_0 = 1.$$

10. Найти приближенное значение: $\sqrt{5}.$ 11. Тело движется по закону $S = t^4 - 2t^3 + 6t - 2.$ Найти V и a при $t_0 = 3.$

Вариант 15

Найти y' :

1. $y = \frac{xe^x}{1-x^2}.$

2. $y = 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\sin x}.$

3. $y = \ln \sin \frac{x+3}{x}.$

4. $y = \sin^3(x^2 + 3x + 1).$

5. $y = \sqrt{x + \sqrt{x}}.$

6. $\begin{cases} x = t + e^{-t} \\ y = 1 - e^t \end{cases}.$

7. $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} t \\ y = \ln(1-t^2) \end{cases}.$

8. $e^{x-2} + yx - 3y - 2 = 0.$

9. Записать уравнение касательной плоскости к $y(x)$ в точке x_0 :
 $y = x^2 + 5x - 1, \quad x_0 = 1.$

10. Найти приближенное значение: $\sqrt[4]{15}.$

11. Тело движется по закону $S = t^3 - 3t^2 + 2 \ln t.$
Найти V и a при $t = 2.$

Вариант № 1

- 1) Найти наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке

$$y = x^2 + \frac{16}{x} - 16, \quad [1; 4]$$

- 2) Провести полное исследование функции

а) $y = \frac{4x}{4 + x^2}$

б) $y = \frac{x^3 + 4}{x^2}$

в) $y = (2x + 3)e^{-2(x+1)}$

и построить её график.

Вариант № 2

- 1) Найти наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке

$$y = 4 - x - \frac{4}{x^2}, \quad [1; 4]$$

- 2) Провести полное исследование функции

а) $y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$

б) $y = \frac{2}{x^2 + 2x}$

в) $y = -(2x + 1)e^{2(x+1)}$

и построить её график.

Вариант № 3

- 1) Найти наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке

$$y = 2\sqrt{x} - x, \quad [0; 4]$$

- 2) Провести полное исследование функции

а) $y = \ln(1 - x^2)$

б) $y = \frac{12}{9 + x^2}$

в) $y = (2x + 5)e^{-2(x+2)}$

и построить её график.

Вариант № 4

- 1) Найти наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке

$$y = x - 4\sqrt{x} + 5, \quad [1; 9]$$

- 2) Провести полное исследование функции

a) $y = \frac{x^3}{2(x+1)^2}$

б) $y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$

в) $y = \frac{e^{2(x-1)}}{2(x-1)}$

и построить её график.

Вариант № 5

- 1) Найти наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке

$$y = \frac{10x}{1+x^2}, \quad [0; 3]$$

- 2) Провести полное исследование функции

a) $y = \ln \frac{1+x}{1-x}$

б) $y = \frac{4x^2}{3+x^2}$

в) $y = (x-2)e^{3-x}$

и построить её график.

Вариант № 6

- 1) Найти наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке

$$y = 2x^2 + \frac{108}{x} - 59, \quad [2; 4]$$

- 2) Провести полное исследование функции

a) $y = \frac{3x^2 - 1}{x^3}$

б) $y = \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 1}$

в) $y = (x+4)e^{-(x+3)}$

и построить её график.

Вариант № 7

- 1) Найти наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке

$$y = 3 - x - \frac{4}{(x+2)^2}, \quad [-1; 2]$$

- 2) Провести полное исследование функции

а) $y = \ln(x^2 + 1)$ б) $y = \frac{4 - x^3}{x^2}$ в) $y = \frac{e^{2-x}}{2 - x}$

и построить её график.

Вариант № 8

- 1) Найти наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке

$$y = x - 4\sqrt{x+2} + 8, \quad [-1; 7]$$

- 2) Провести полное исследование функции

а) $y = \sqrt{x \ln x}$ б) $y = \frac{x^2 - 4x + 1}{x - 4}$ в) $y = (3 - x)e^{x-2}$

и построить её график.

Вариант № 9

- 1) Найти наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке

$$y = \frac{4x}{4 + x^2}, \quad [-4; 2]$$

- 2) Провести полное исследование функции

а) $y = \frac{e^x}{x}$ б) $y = \frac{2x^3 + 1}{x^2}$ в) $y = \frac{e^{-(x+2)}}{x + 2}$

и построить её график.

Вариант № 10

- 1) Найти наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке

$$y = -\frac{x^2}{2} + \frac{8}{x} + 8, \quad [-4; -1]$$

- 2) Провести полное исследование функции

а) $y = xe^{-\frac{x^2}{2}}$

б) $y = \frac{(x-1)^2}{x^2}$

в) $y = \frac{e^{3(x+1)}}{3(x+1)}$

и построить её график.

Вариант № 11

- 1) Найти наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке

$$y = x^2 + 5x + 6, \quad [-10; 10]$$

- 2) Провести полное исследование функции

а) $y = \arctg \frac{2x}{1-x^2}$

б) $y = \frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 6x$

в) $y = \frac{2x+1}{e^{-2(x+1)}}$

и построить её график.

Вариант № 12

- 1) Найти наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке

$$y = x + \frac{1}{x}, \quad \left[\frac{1}{2}; 10 \right]$$

- 2) Провести полное исследование функции

а) $y = \frac{1}{\ln x - 1}$

б) $y = \frac{4x}{x^2 + 4}$

в) $y = \frac{e^{3x-1}}{3(x-1)}$

и построить её график.

Вариант № 13

- 1) Найти наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке

$$y = \sqrt{5-4x}, \quad [-1;1]$$

- 2) Провести полное исследование функции

a) $y = e^{-\frac{1}{x^2}}$

б) $y = \frac{x^2(x-1)}{(x+1)^2}$

в) $y = \frac{x+2}{e^{2x-1}}$

и построить её график.

Вариант № 14

- 1) Найти наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке

$$y = x^3 - 3x^2 + 6x - 2, \quad [-1;1]$$

- 2) Провести полное исследование функции

a) $y = e^{-\frac{1}{2-x}}$

б) $y = \frac{1}{1-x^2}$

в) $y = (x-7)e^{-x+1}$

и построить её график.

Вариант № 15

- 1) Найти наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке

$$y = \frac{x-1}{x+1}, \quad [0;4]$$

- 2) Провести полное исследование функции

a) $y = \frac{4x^3 + 5}{x}$

б) $y = \frac{x^2 - 4}{(x-1)^2}$

в) $y = (2x-5)e^{-3(x+1)}$

и построить её график.

Вариант № 1

1. Выполнить действия и результат записать в алгебраической форме

а) $(1+i) + (3-2i) - (4-i)$; б) $(1+i)^2 - 2i$; в) $\frac{(3-4i)(2+i)}{\sqrt{3}+i}$;

г) $\frac{(1+i)\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)}{2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)}$; д) $\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^5 \cdot \left(\cos\frac{5\pi}{4} - i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$.

2. Решить уравнение $x^2 - 6x + 13 = 0$. Корни уравнения изобразить на комплексной плоскости.

3. Изобразить на комплексной плоскости множество точек $z = x + iy$, если

а) $|x| \leq 1$, б) $|z - z_0| < 3$, $z_0 = 2 + 3i$, в) $y < -2$.

4. Даны комплексные числа $z_1 = 6\sqrt{3} + 6i$, $z_2 = -4i$.

а) Изобразить числа z_1 , z_2 , $\bar{z}_2$, $-z_2$.

б) Найти геометрически $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$, $z_1 \cdot z_2$.

в) Представить z_1 и z_2 в тригонометрической и показательной формах.

5. Пользуясь формулой Муавра, вычислить $(1-i)^6$.

6. Найти все значения $\sqrt[3]{8}$ и изобразить их на комплексной плоскости.

7. Из равенства $(1+i)x - (4+2i)y = 1-2i$ найти x и y , если

а) x и y - действительные числа, б) x и y - чисто мнимые числа.

8. Вектор, изображающий z_1 , сжали в два раза и повернули на угол $\frac{\pi}{4}$.

Найти комплексное число, соответствующее полученному вектору.

Вариант № 2

1. Выполнить действия и результат записать в алгебраической форме

а) $(2 - 3i) + (4 + 2i) - (2 - 7i)$; б) $(4 + i)^2 + 3i$; в) $\frac{(2 + 3i)(-1 + i)}{\sqrt{2} - i}$;

г) $\frac{(1 + i)\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)}{4\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right)}$; д) $\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^4 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right)$.

2. Решить уравнение $5x^2 + 2x + 2 = 0$. Корни уравнения изобразить на комплексной плоскости.

3. Изобразить на комплексной плоскости множество точек $z = x + iy$, если

а) $x < 2$, б) $1 < |z + 2| < 3$, в) $y = 1$.

4. Даны комплексные числа $z_1 = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $z_2 = -12i$.

а) Изобразить числа z_1 , z_2 , $\bar{z}_2$, $-z_2$.

б) Найти геометрически $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$, $z_1 \cdot z_2$.

в) Представить z_1 и z_2 в тригонометрической и показательной формах.

5. Пользуясь формулой Муавра, вычислить $(\sqrt{3} - i)^{50}$.

6. Найти все значения $\sqrt[6]{1}$ и изобразить их на комплексной плоскости.

7. Из равенства $(2 - 3i)x - y = 4 + 2i$ найти x и y , если

а) x и y - действительные числа, б) x и y - чисто мнимые числа.

8. Вектор, изображающий z_1 , растянули в 1,5 раза и повернули на угол $\frac{\pi}{6}$. Найти комплексное число, соответствующее полученному вектору.

Вариант № 3

1. Выполнить действия и результат записать в алгебраической форме

а) $(3+4i)-(4-2i)+(-3+i)$; б) $(1-2i)^2+4i$; в) $\frac{(2-2i)(4+5i)}{\sqrt{3}+4i}$;

г) $\frac{(2+2i)\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)}{4\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)}$; д) $2e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot \left(0,5e^{i\frac{\pi}{12}}\right)^3$.

2. Решить уравнение $x^2-2x+5=0$. Корни уравнения изобразить на комплексной плоскости.

3. Изобразить на комплексной плоскости множество точек $z=x+iy$, если

а) $x=1$, б) $1<|z|<5$, $\frac{\pi}{6}<\varphi<\frac{\pi}{2}$, в) $1<|y|<3$.

4. Даны комплексные числа $z_1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$, $z_2=-\sqrt{3}+3i$.

а) Изобразить числа z_1 , z_2 , $\bar{z}_2$, $-z_2$.

б) Найти геометрически z_1+z_2 , z_1-z_2 , $\frac{z_1}{z_2}$, $z_1 \cdot z_2$.

в) Представить z_1 и z_2 в тригонометрической и показательной формах.

5. Пользуясь формулой Муавра, вычислить $(1-\sqrt{3}i)^6$.

6. Найти все значения $\sqrt[4]{81}$ и изобразить их на комплексной плоскости.

7. Из равенства $x+(4-2i)y=18+i$ найти x и y , если

а) x и y - действительные числа, б) x и y - чисто мнимые числа.

8. Вектор, изображающий z_1 , сжали в 3 раза и повернули на угол $-\frac{\pi}{4}$.

Найти комплексное число, соответствующее полученному вектору.

Вариант № 4

1. Выполнить действия и результат записать в алгебраической форме

а) $(2 + 4i) + (2 - i) - (4 - i)$; б) $(\sqrt{3} + i)^2 - 4i$; в) $\frac{(4 - 3i)(-2 + i)}{\sqrt{2} - i}$;

г) $\frac{(2 - 2i) \cdot 2 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)}{4 \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right)}$; д) $2e^{\frac{\pi}{6}i} \cdot \left(0,3e^{i\frac{\pi}{8}} \right)^2$.

2. Решить уравнение $x^2 + 6x + 13 = 0$. Корни уравнения изобразить на комплексной плоскости.

3. Изобразить на комплексной плоскости множество точек $z = x + iy$, если

а) $4 < |x| < 7$, б) $|z - z_0| \leq 3$, $z_0 = 2 + 3i$, в) $y > 1$.

4. Даны комплексные числа $z_1 = -4\sqrt{3} - 4i$, $z_2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$.

а) Изобразить числа z_1 , z_2 , $\bar{z}_2$, $-z_2$.

б) Найти геометрически $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$, $z_1 \cdot z_2$.

в) Представить z_1 и z_2 в тригонометрической и показательной формах.

5. Пользуясь формулой Муавра, вычислить $(\sqrt{3} + i)^{15}$.

6. Найти все значения $\sqrt[4]{-1}$ и изобразить их на комплексной плоскости.

7. Из равенства $(4 + 3i)x - iy = 3 - 2i$ найти x и y , если

а) x и y - действительные числа, б) x и y - чисто мнимые числа.

8. Вектор, изображающий z_1 , растянули в 2 раза и повернули на угол $\frac{\pi}{4}$.

Найти комплексное число, соответствующее полученному вектору.

Вариант № 5

1. Выполнить действия и результат записать в алгебраической форме

а) $(3-i) - (-4+i) - (2+2i)$; б) $(1+4)^2 - i$; в) $\frac{(2-3i)(1+3i)}{2+3i}$;

г) $\frac{2e^{\frac{\pi}{3}i} \cdot 3 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)}{2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)}$; д) $21e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot \left(0,2e^{\frac{\pi}{8}i} \right)^2$.

2. Решить уравнение $2x^2 - 8x + 12 = 0$. Корни уравнения изобразить на комплексной плоскости.

3. Изобразить на комплексной плоскости множество точек $z = x + iy$, если

а) $|x| < 2$, б) $|z - z_0| \leq 3$, $z_0 = -1 + i$, в) $y = 4$.

4. Даны комплексные числа $z_1 = -3 - \sqrt{3}i$, $z_2 = -3i$.

а) Изобразить числа z_1 , z_2 , $\bar{z}_2$, $-z_2$.

б) Найти геометрически $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$, $z_1 \cdot z_2$.

в) Представить z_1 и z_2 в тригонометрической и показательной формах.

5. Пользуясь формулой Муавра, вычислить $(2 + \sqrt{12}i)^5$.

6. Найти все значения $\sqrt[6]{-2}$ и изобразить их на комплексной плоскости.

7. Из равенства $(4 - 3i)x + 2iy = i$ найти x и y , если

а) x и y - действительные числа, б) x и y - чисто мнимые числа.

8. Вектор, изображающий z_1 , сжали в 1,5 раза и повернули на угол $-\frac{\pi}{6}$.

Найти комплексное число, соответствующее полученному вектору.

Вариант № 6

1. Выполнить действия и результат записать в алгебраической форме

а) $(7+i) + (2-i) + (-4+i)$; б) $(2+3i)^2 + 4$; в) $\frac{(3-i)(-2+4i)}{2-i}$;

г) $\left(4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right)^2 \cdot \left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$; д) $e^{\frac{\pi}{2}i} \cdot \left(2e^{\frac{\pi}{8}i}\right)^4$.

2. Решить уравнение $3x^2 - 14x + \frac{218}{3} = 0$. Корни уравнения изобразить на комплексной плоскости.

3. Изобразить на комплексной плоскости множество точек $z = x + iy$, если

а) $x = 4$, б) $2 < |z| < 4, \quad 0 < \varphi < \frac{3}{4}\pi$, в) $y > 1$.

4. Даны комплексные числа $z_1 = -\sqrt{3} + i$, $z_2 = 3\sqrt{3} - 3i$.

а) Изобразить числа z_1 , z_2 , $\bar{z}_2$, $-z_2$.

б) Найти геометрически $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$, $z_1 \cdot z_2$.

в) Представить z_1 и z_2 в тригонометрической и показательной формах.

5. Пользуясь формулой Муавра, вычислить $(2 - 2i)^5$.

6. Найти все значения $\sqrt[3]{-2+2i}$ и изобразить их на комплексной плоскости.

7. Из равенства $4ix + 3y = 7 - 2i$ найти x и y , если

а) x и y - действительные числа, б) x и y - чисто мнимые числа.

8. Вектор, изображающий z_1 , растянули в 2 раза и повернули на угол $\frac{\pi}{8}$.

Найти комплексное число, соответствующее полученному вектору.

Вариант № 7

1. Выполнить действия и результат записать в алгебраической форме

а) $(3-4i)-(-3+i)-(4-8i)$; б) $\left(4+\frac{1}{2}i\right)^2+2i$; в) $\frac{(2-3i)(3+2i)}{1+i}$; г) $3e^{i\frac{\pi}{3}}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{-1}$; д) $2\cdot\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)\cdot 0,5\cdot\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)^2$.

2. Решить уравнение $x^2+6x+6=0$. Корни уравнения изобразить на комплексной плоскости.

3. Изобразить на комплексной плоскости множество точек $z=x+iy$, если

а) $x>1$, б) $4<|z|<5$, $-\frac{\pi}{2}<\varphi<-\frac{\pi}{4}$, в) $1<y<2$.

4. Даны комплексные числа $z_1=\frac{3}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{6}}{2}i$, $z_2=12$.

а) Изобразить числа z_1 , z_2 , $\bar{z}_2$, $-z_2$.

б) Найти геометрически z_1+z_2 , z_1-z_2 , $\frac{z_1}{z_2}$, $z_1\cdot z_2$.

в) Представить z_1 и z_2 в тригонометрической и показательной формах.

5. Пользуясь формулой Муавра, вычислить $(-\sqrt{3}+i)^5$.

6. Найти все значения $\sqrt[4]{-i}$ и изобразить их на комплексной плоскости.

7. Из равенства $(7-i)x+2iy=3+2i$ найти x и y , если

а) x и y - действительные числа, б) x и y - чисто мнимые числа.

8. Вектор, изображающий z_1 , сжали в 2,5 раза и повернули на угол $-\frac{\pi}{5}$.

Найти комплексное число, соответствующее полученному вектору.

Вариант № 8

1. Выполнить действия и результат записать в алгебраической форме

а) $(-2 + i) - (4 - 2i) + (-4 + 3i)$; б) $(2i + 3)^2 - 4i$; в) $\frac{(12 - 4i)(2 - 3i)}{2 + 3i}$;
 г) $\frac{(2 \cdot (\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ))^3 \cdot (3(\cos 90^\circ + i \sin 90^\circ))^5}{3(\cos 2\pi + i \sin 2\pi)}$; д) $e^{\frac{\pi}{2}i} \cdot \left(2e^{\frac{\pi}{3}i}\right)^6$.

2. Решить уравнение $x^2 - 3x - 4 = 0$. Корни уравнения изобразить на комплексной плоскости.

3. Изобразить на комплексной плоскости множество точек $z = x + iy$, если

а) $x > 2$, б) $|z - z_0| < 5$, $z_0 = 3 - 4i$, в) $1 < |y| < 4$.

4. Даны комплексные числа $z_1 = -\sqrt{6} - \sqrt{2}i$, $z_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

а) Изобразить числа z_1 , z_2 , $\bar{z}_2$, $-z_2$.

б) Найти геометрически $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$, $z_1 \cdot z_2$.

в) Представить z_1 и z_2 в тригонометрической и показательной формах.

5. Пользуясь формулой Муавра, вычислить $(-1 + i)^7$.

6. Найти все значения $\sqrt[5]{-1 + i}$ и изобразить их на комплексной плоскости.

7. Из равенства $7x + (5 - 3i)y = 2 + 3i$ найти x и y , если

а) x и y - действительные числа, б) x и y - чисто мнимые числа.

8. Вектор, изображающий z_1 , растянули в 2 раза и повернули на угол $\frac{\pi}{6}$.

Найти комплексное число, соответствующее полученному вектору.

Вариант № 9

1. Выполнить действия и результат записать в алгебраической форме

- а) $(-2 + i) - (12 - 3i) + (4 + i)$; б) $(2 - i)^2 - 2i$; в) $\frac{(3 - 2i)(-4 + i)}{3 - 7i}$;
 г) $2(\cos 15^\circ + i \sin 15^\circ)^3 \cdot (\cos 45^\circ - i \sin 45^\circ)$; д) $e^{\frac{\pi}{2}i} \cdot \left(0, 2e^{\frac{\pi}{12}i}\right)^3$.

2. Решить уравнение $5x^2 - 2x + 2 = 0$. Корни уравнения изобразить на комплексной плоскости.

3. Изобразить на комплексной плоскости множество точек $z = x + iy$, если

- а) $1 < x < 3$, б) $|z + z_0| \leq 5$, $z_0 = 3 - 4i$, в) $y = 4$.

4. Даны комплексные числа $z_1 = -\sqrt{2} - \sqrt{6}i$, $z_2 = -1 - i$.

а) Изобразить числа z_1 , z_2 , $\bar{z}_2$, $-z_2$.

б) Найти геометрически $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$, $z_1 \cdot z_2$.

в) Представить z_1 и z_2 в тригонометрической и показательной формах.

5. Пользуясь формулой Муавра, вычислить $(1 - i)^8$.

6. Найти все значения $\sqrt[4]{2 - 2i}$ и изобразить их на комплексной плоскости.

7. Из равенства $(1 - 3i)x + (4 + 2i)y = 2 + 3i$ найти x и y , если

- а) x и y - действительные числа, б) x и y - чисто мнимые числа.

8. Вектор, изображающий z_1 , сжали в 2 раза и повернули на угол $\frac{4\pi}{3}$.

Найти комплексное число, соответствующее полученному вектору.

Вариант № 10

1. Выполнить действия и результат записать в алгебраической форме

а) $(2 + 3i) - (4 - 2i) + (-2 + 3i)$; б) $(-1 + i)^2 + 2i$; в) $\frac{(3 + 2i)(3 - 7i)}{3 - 2i}$;
 г) $\left(2(\cos 45^\circ - i \sin 45^\circ)\right)^2 \cdot (\cos \pi + i \sin \pi)$; д) $\left(2e^{\frac{\pi}{4}i}\right)^2 \cdot e^{-i\pi}$.

2. Решить уравнение $3x^2 - 6x + 15 = 0$. Корни уравнения изобразить на комплексной плоскости.

3. Изобразить на комплексной плоскости множество точек $z = x + iy$, если

а) $x < 1$, б) $|z - z_0| < 3$, $z_0 = -4 - i$, в) $-3 < y < 2$.

4. Даны комплексные числа $z_1 = \sqrt{2} - \sqrt{6}i$, $z_2 = 4 - 4i$.

а) Изобразить числа z_1 , z_2 , $\bar{z}_2$, $-z_2$.

б) Найти геометрически $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$, $z_1 \cdot z_2$.

в) Представить z_1 и z_2 в тригонометрической и показательной формах.

5. Пользуясь формулой Муавра, вычислить $(-\sqrt{2} - \sqrt{-2})^4$.

6. Найти все значения $\sqrt[4]{-2 + 2i}$ и изобразить их на комплексной плоскости.

7. Из равенства $(3 - i)x + (4 + 2i)y = -i$ найти x и y , если

а) x и y - действительные числа, б) x и y - чисто мнимые числа.

8. Вектор, изображающий z_1 , растянули в 2 раза и повернули на угол $\frac{4\pi}{3}$. Найти комплексное число, соответствующее полученному вектору.

Вариант № 11

1. Выполнить действия и результат записать в алгебраической форме

а) $(12 - 3i) - (4 - 2i) + (-8 + 4i)$; б) $(2 - i)^2 - i$; в) $\frac{(3 - i)(-5 + i)}{3 + 8i}$;

г) $\frac{(3(\cos 20^\circ + i \sin 20^\circ))^3}{15(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)}$; д) $\frac{2e^{i\pi}}{\left(3 \cdot e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^3}$.

2. Решить уравнение $2x^2 - 12x + 26 = 0$. Корни уравнения изобразить на комплексной плоскости.

3. Изобразить на комплексной плоскости множество точек $z = x + iy$, если

а) $-3 < x < 4$, б) $|z + 2| < 3$, в) $y = 2$.

4. Даны комплексные числа $z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{6}$, $z_2 = -8i$.

а) Изобразить числа z_1 , z_2 , $\bar{z}_2$, $-z_2$.

б) Найти геометрически $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$, $z_1 \cdot z_2$.

в) Представить z_1 и z_2 в тригонометрической и показательной формах.

5. Пользуясь формулой Муавра, вычислить $(1 + i)^{12}$.

6. Найти все значения $\sqrt[4]{-i}$ и изобразить их на комплексной плоскости.

7. Из равенства $(12 + i)x + y = -i$ найти x и y , если

а) x и y - действительные числа, б) x и y - чисто мнимые числа.

8. Вектор, изображающий z_1 , сжали в 1,5 раза и повернули на угол $\frac{5\pi}{4}$.

Найти комплексное число, соответствующее полученному вектору.

Вариант № 12

1. Выполнить действия и результат записать в алгебраической форме

а) $(3-4i)-(2-i)-(-4+2i)$; б) $(1-i)^2+i$; в) $\frac{(2+4i)(-3-i)}{12-4i}$;

г) $\frac{(15(\cos 12^\circ + i \sin 12^\circ))^5}{225(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)}$; д) $(e^{i\pi})^2 \cdot \left(e^{-i\frac{\pi}{2}}\right)^2$.

2. Решить уравнение $10x^2 + 4x + 4 = 0$. Корни уравнения изобразить на комплексной плоскости.

3. Изобразить на комплексной плоскости множество точек $z = x + iy$, если

а) $x = 4$, б) $|z| < 4$, $\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{3}{4}\pi$, в) $y < 1$.

4. Даны комплексные числа $z_1 = \sqrt{6} + i\sqrt{2}$, $z_2 = 8i$.

а) Изобразить числа z_1 , z_2 , $\bar{z}_2$, $-z_2$.

б) Найти геометрически $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$, $z_1 \cdot z_2$.

в) Представить z_1 и z_2 в тригонометрической и показательной формах.

5. Пользуясь формулой Муавра, вычислить $(2-2i)^5$.

6. Найти все значения $\sqrt[3]{-8}$ и изобразить их на комплексной плоскости.

7. Из равенства $x + (7-3i)y = 12 + 4i$ найти x и y , если

а) x и y - действительные числа, б) x и y - чисто мнимые числа.

8. Вектор, изображающий z_1 , растянули в 2 раза и повернули на угол $\frac{4\pi}{3}$. Найти комплексное число, соответствующее полученному вектору.

Вариант № 13

1. Выполнить действия и результат записать в алгебраической форме

а) $(12 - 4i) - (8 + 2i) - (-3 + i)$; б) $(2 - 5i)^2 - i$; в) $\frac{(2 - 4i)(3 + 8i)}{4 - 3i}$;

г) $\frac{(2(\cos 12^\circ + i \sin 12^\circ))^5}{\cos 30^\circ - i \sin 30^\circ}$; д) $(e^{i\pi})^3 \cdot \left(2e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^{12}$.

2. Решить уравнение $x^2 - 4x + 6 = 0$. Корни уравнения изобразить на комплексной плоскости.

3. Изобразить на комплексной плоскости множество точек $z = x + iy$, если

а) $x < 4$, б) $|z| \leq 1, \quad 0 < \varphi < \frac{3}{4}\pi$, в) $y = -2$.

4. Даны комплексные числа $z_1 = 4\sqrt{3} - 4i$, $z_2 = 4 - 4\sqrt{3}i$.

а) Изобразить числа z_1 , z_2 , $\bar{z}_2$, $-z_2$.

б) Найти геометрически $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$, $z_1 \cdot z_2$.

в) Представить z_1 и z_2 в тригонометрической и показательной формах.

5. Пользуясь формулой Муавра, вычислить $(-\sqrt{2} - \sqrt{2}i)^8$.

6. Найти все значения $\sqrt[4]{16}$ и изобразить их на комплексной плоскости.

7. Из равенства $(4 + 3i)x + (3 + 4i)y = 0$ найти x и y , если

а) x и y - действительные числа, б) x и y - чисто мнимые числа.

8. Вектор, изображающий z_1 , сжали в 1,5 раза и повернули на угол $-\frac{\pi}{9}$.

Найти комплексное число, соответствующее полученному вектору.

Вариант № 14

1. Выполнить действия и результат записать в алгебраической форме

а) $(3 + 4i) - (0,2 - 8i) - (-3 + 2i)$; б) $(2i)^2 + (2 + 3i)^2$; в) $\frac{(1 + 3i)(-2 + 3i)}{12 + 2i}$;

г) $\frac{e^{i\pi}(1 + i)}{\sqrt{2}(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)}$; д) $\frac{(\cos 15^\circ + i \sin 15^\circ)^3 (\cos 75^\circ + i \sin 75^\circ)}{(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)}$

2. Решить уравнение $x^2 - 6x + 16 = 0$. Корни уравнения изобразить на комплексной плоскости.

3. Изобразить на комплексной плоскости множество точек $z = x + iy$, если

а) $x < 4$, б) $|z| \leq 2, \quad -\frac{\pi}{2} < \varphi < -\frac{\pi}{4}$, в) $1 < y < 3$.

4. Даны комплексные числа $z_1 = 3\sqrt{3} + 3i$, $z_2 = 3 + 3\sqrt{3}i$.

а) Изобразить числа z_1 , z_2 , $\bar{z}_2$, $-z_2$.

б) Найти геометрически $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$, $z_1 \cdot z_2$.

в) Представить z_1 и z_2 в тригонометрической и показательной формах.

5. Пользуясь формулой Муавра, вычислить $(1 - i)^7$.

6. Найти все значения $\sqrt[3]{-i}$ и изобразить их на комплексной плоскости.

7. Из равенства $2x + (3 - 4i)y = -i$ найти x и y , если

а) x и y - действительные числа, б) x и y - чисто мнимые числа.

8. Вектор, изображающий z_1 , растянули в 2,5 раза и повернули на угол

$-\frac{\pi}{6}$. Найти комплексное число, соответствующее полученному вектору.

Вариант № 15

1. Выполнить действия и результат записать в алгебраической форме

а) $(2 - 4i) + (-2 + 3i) - (3 - 8i)$; б) $(1 - i)^2 + i^3$; в) $\frac{(3 - 4i)(-2 + i)}{1 - 4i}$;

г) $e^{-i\frac{\pi}{4}} \left(e^{i\frac{\pi}{12}} \right)^3$; д) $\frac{(\cos 75^\circ + i \sin 75^\circ)(\cos 70^\circ + i \sin 70^\circ)^2}{(\cos 35^\circ + i \sin 35^\circ)}$

2. Решить уравнение $36x^2 + 36x + 13 = 0$. Корни уравнения изобразить на комплексной плоскости.

3. Изобразить на комплексной плоскости множество точек $z = x + iy$, если

а) $|x| < 3$, б) $|z - z_0| < 3$, $z_0 = -1 + i$, в) $y = -2$.

4. Даны комплексные числа $z_1 = \sqrt{3} + 3i$, $z_2 = \sqrt{2} + \sqrt{-2}$.

а) Изобразить числа z_1 , z_2 , $\bar{z}_2$, $-z_2$.

б) Найти геометрически $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$, $z_1 \cdot z_2$.

в) Представить z_1 и z_2 в тригонометрической и показательной формах.

5. Пользуясь формулой Муавра, вычислить $(-\sqrt{3} - i)^{12}$.

6. Найти все значения $\sqrt[5]{1}$ и изобразить их на комплексной плоскости.

7. Из равенства $4x + (3 - i)y = 4$ найти x и y , если

а) x и y - действительные числа, б) x и y - чисто мнимые числа.

8. Вектор, изображающий z_1 , сжали в 1,5 раза и повернули на угол $\frac{\pi}{4}$.

Найти комплексное число, соответствующее полученному вектору.

Литература

1. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления том 2. – М.: Физмат литература, 1962.
2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления том 2. - М.: Интеграл – Пресс, 2003.
3. Лунгу К.Н., Норин В.П., Письменный Д.Т., Шевченко Ю.А. Сборник задач по высшей математике 2 курс под редакцией Федина С.Н. – М.: Айрис–пресс, 2004.
4. Кручкович Г.И. Сборник задач по курсу высшей математики. - М.: Высшая школа, 1973.
5. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах часть 2. – М.: ООО «Издательство Оникс», ООО «Издательство «Мир и Образование»», 2006.
6. Поддубный Г.В., Романовский Р.К. Математический анализ для радиоинженеров. М., Воениздат, 1976.
7. Скобля Т.В. Высшая математика. Элементы векторного анализа. М., Воениздат, 1978.
8. Бутузов В.Ф., Крутицкая Н.Ч., Медведев Г.Н., Шишкин А.А. Математический анализ в вопросах и задачах. Функции нескольких переменных. М., Высшая школа, 1988.
9. Морозова В.Д. Теория функций комплексного переменного. М., Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000.

Оглавление

Предисловие.....	3
Глава 1 Понятие функции и ее пределы.....	4
1.1 Функция и область ее определения.....	4
1.2 Множества и операции над ними.....	9
1.3 Элементы математической логики.....	11
1.4 Предел функции.....	15
1.5 Бесконечно малые и бесконечно большие функции.....	19
1.6 Замечательные пределы.....	21
1.7 Вычисление пределов.....	21
1.8 Непрерывность функции.....	30
Тест 1.....	33
Ответы к главе 1.....	37
Глава 2 Производная и дифференциал.....	39
2.1 Производная функции.....	39
2.2 Производные высших порядков.....	42
2.3 Производная неявно заданной функции.....	45
2.4 Производная параметрически заданной функции.....	46
2.5 Дифференциал функции.....	48
Тест 2.....	52
Ответы к главе 2.....	55
Глава 3 Аналитические приложения дифференциального исчисления.....	58
3.1 Правило Лопиталя.....	58
3.2 Формула Тейлора.....	65
3.3 Исследование функции на экстремум.....	68
3.4 Исследование функций на выпуклость и вогнутость, точки перегиба.....	77
3.5 Асимптоты графика функции.....	81
3.6 Полное исследование функции и построение графика.....	84
Тест 3.....	88
Ответы к главе 3.....	90
Глава 4 Комплексные числа и многочлены.....	93
4.1 Комплексные числа.....	93
4.2 Разложение многочлена на множители.....	99
Тест 4.....	105
Ответы к главе 4.....	107
Итоговый тест МА-1.....	109
Приложения.....	115
Приложение 1.....	116
Приложение 2.....	131
Приложение 3.....	146
Приложение 4.....	151
Литература.....	166
Оглавление.....	167