Всероссийское СМИ
«Академия педагогических идей «НОВАЦИЯ»
Свидетельство о регистрации ЭЛ №ФС 77-62011 от 05.06.2015 г.
(выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций)

Сайт: akademnova.ru
e-mail: akademnova@mail.ru

Шаяхметов И.Р. Интегрирующий множитель в дифференциальных уравнениях// Академия педагогических идей «Новация». – 2018. – №9 (сентябрь). – АРТ 324-эл. – 0,2 п. л. – URL: http://akademnova.ru/page/875548

РУБРИКА: ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

УДК 517.923

Шаяхметов Ильгиз Римович
Студент 2 курса, факультета математики и информационных технологий
Научный руководитель: Сабитова Ю.К., к.ф.м.н, доцент
СФ БашГУ Башкирского Государственного Университета
Стерлитамак, Российская Федерация
e-mail: ilgizlondon.ru

ИНТЕГРИРУЮЩИЙ МНОЖИТЕЛЬ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ

Аннотация: в статье рассматривались свойства интегрирующего множителя в дифференциальных уравнениях, рассмотрим пример.
Ключевые слова: интегрированный множитель, дифференциальные уравнения первого порядка.

Shayakhmetov Ilgiz Rimovich
2nd year student, faculty of mathematics and information technology Scientific supervisor: PhD.m.n, associate Professor Sabitova Yuliya Kamilevna
SF Bashkir state University Bashkir State University
Sterlitamak, Russian Federation

Всероссийское СМИ
«Академия педагогических идей «НОВАЦИЯ»
Свидетельство о регистрации ЭЛ №ФС 77-62011 от 05.06.2015 г.
(выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций)

Сайт: akademnova.ru
e-mail: akademnova@mail.ru

INTEGRATING FACTOR DIFFERENTIAL EQUATIONS

Annotation: the properties of the integrating factor in differential equations are considered in the article, considered example.
Key words: integrated multiplier of the differential equation of the first order.

Обыкновенные дифференциальные уравнения рассматриваются с теоретической и практической точки зрения и представляют собой фундаментальную основу для большинства других разделов высшей математики: уравнения математической физики, уравнения с частными производными, вариационное исчисление, и кроме этого представляют базу для более углубленного изучения физики, механики и остальных естественных наук.

Обыкновенный дифференциальные уравнения первого порядка имеют следующие основные типы: однородные уравнения, уравнения с разделяющимися переменными, линейные дифференциальные уравнения, уравнения Риккати, Якоби, Бернулли, а также уравнения в полных дифференциалах.

Если ни к одному из перечисленных типов не приводится дифференциальное уравнение первого порядка, тогда необходимо найти интегрирующий множитель для того, чтобы представить его к уравнению в полных дифференциалах.

Интегрирующий множитель представляет собой функцию двух переменных, при умножении на которую, дифференциальное уравнение первого порядка делаются уравнением в полных дифференциалах:

Всероссийское СМИ
«Академия педагогических идей «НОВАЦИЯ»
Свидетельство о регистрации ЭЛ №ФС 77-62011 от 05.06.2015 г.
(выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций)

Сайт: akademnova.ru
e-mail: akademnova@mail.ru

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

В данной формуле интегрирующий множитель есть функция двух переменных x и y, но в некоторых случаях он может зависеть от одной переменной.

Так, для дифференциального уравнения $ydx - xdy = 0$. Интегрирующим множителем будет являться функция — $1/x^2$. Интегрирующий множитель μ(x,y) в частных производных должен удовлетворять уравнению:

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} - \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x} = 0.$$

Условием этого уравнения является выражение:

$$\mu(Pdx + Qdy)$$

является полным дифференциалом.

Любое дифференциальное уравнение 1-го порядка:

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

имеет бесконечное количество интегрирующих множителей. Зная один интегрирующий множитель можно интегрировать уравнение. Интегрирующий множитель, для многих видов дифференциальных уравнений 1-го порядка, заранее известен. Уравнение является уравнением в полных дифференциалах, если выполнено условие $\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}$

Итак, зная интегрирующий множитель, можно найти не только общий интеграл, а все особые решения уравнения. Особым решением уравнения является такое решение, интегрирующий множитель вдоль которого обращается в бесконечность.

Пример. Решите дифференциальное уравнение.

$$(1-x^2y)dx + x^2(y-x)\ dy = 0$$

$$P(x,y) = 1 - x^2y,$$

$$Q(x,y) = x^2(y-x)$$

Вычислим частные производные:

$$\frac{dP}{dy} = (1-x^2y)'y = -x^2$$

$$\frac{dQ}{dx} = \left(x^2(y-x)\right)' = 2x(y-x) + x^2(-1) = 2xy - 2x^2 - x^2 = 2xy - 3x^2$$

Условие не выполняется, т.е. $\frac{dP}{dy} \neq \frac{dQ}{dx}$

Значит уравнение не является уравнением в полных дифференциалах.

Умножим данное уравнение на интегрирующий множитель $\mu = \frac{1}{x^2}, x \neq 0$

Получим: $\frac{1}{x^2}(1-x^2y)dx + \frac{1}{x^2}x^2(y-x)dy = 0,$

$$\left(\frac{1}{x^2} - y\right)dx + (y-x)dy = 0.$$

Вычислим частные производные:

$$\frac{dP}{dy} = \ -1 \qquad\qquad \frac{dQ}{dx} = -1$$

$\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}$ - следовательно,

Полученное дифференциальное уравнение является уравнением в полных дифференциалах.

Составим систему:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dx} = P(x,y) \\ \dfrac{du}{dy} = Q(x,y) \end{cases} \quad => \begin{cases} \dfrac{du}{dx} = \dfrac{1}{x^2} - y \\ \dfrac{du}{dy} = y - x \end{cases}$$

Проинтегрируем первое уравнение по x, получим:

$$\int \frac{du}{dx} dx = \int (\frac{1}{x^2} - y)\, dx;$$

$$u'_y(x,y) = \int \frac{dx}{x^2} - y \int dx,$$

$$u(x,y) = -\frac{1}{x} - yx + \varphi(y)$$

Дифференцируем по y:

$$u'_y(x,y) = \left(-\frac{1}{x} - yx + \varphi(x)\right)' = -x + \varphi'(y),$$

$$-x + \varphi'(y) = y - x,$$

$$\varphi'(y) = y,$$

$$\varphi(y) = \int y dy,$$

$$\varphi(y) = \frac{y^2}{2} + C.$$

Тогда функция $u(x,y)$ примет вид:

$$u(x,y) = -\frac{1}{x} - yx + \frac{y^2}{2} + C \quad /(*2)$$

Или можно дописать в следующем виде

$$xy^2 - 2x^2y - 2 = C$$

Ответ: $xy^2 - 2x^2y - 2 = C$

Всероссийское СМИ
«Академия педагогических идей «НОВАЦИЯ»
Свидетельство о регистрации ЭЛ №ФС 77-62011 от 05.06.2015 г.
(выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций)

Сайт: akademnova.ru
e-mail: akademnova@mail.ru

Список использованной литературы:

1. Бибиков Ю.Р. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Высшая школа, 2002. – 304 с.
2. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1999. – 332 с.
3. Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения: примеры и задачи. – М.: Высшая школа, 2003. – 383 с.

Дата поступления в редакцию: 06.09.2018 г.
Опубликовано: 10.09.2018 г.