

Всероссийское СМИ

«Академия педагогических идей «НОВАЦИЯ»

Свидетельство о регистрации Эл №ФС 77-62011 от 05.06.2015 г.

(выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций)

Сайт: akademnova.ru

e-mail: akademnova@mail.ru

Буга А.С. Доказательство центральной предельной теоремы для схемы Бернулли с помощью характеристических функций // Академия педагогических идей «Новация». Серия: Студенческий научный вестник. – 2026. – №4 (май) – АРТ 11-эл. – 0,2 п.л. - URL: <http://akademnova.ru/page/875550>

РУБРИКА: ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

УДК 519.214.4

Буга Арина Сергеевна

студентка 2 курса, институт информационных технологий

Научный руководитель: Трямкин М.В., к.ф.-м.н.

МИРЭА - Российский технологический университет

г. Москва, Российская Федерация

e-mail: arina-buga@mail.ru

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЦЕНТРАЛЬНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ
СХЕМЫ БЕРНУЛЛИ С ПОМОЩЬЮ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ
ФУНКЦИЙ**

Аннотация: В статье рассматривается последовательность независимых случайных величин Бернулли X_n с вероятностью успеха $p_n = 1/n$. Доказывается, что центрированная и нормированная сумма $(S_n - \log n) / \sqrt{\log n}$ слабо сходится к стандартному нормальному закону. Доказательство основано на методе характеристических функций и теореме Леви о непрерывности.

Ключевые слова: центральная предельная теорема, схема Бернулли, характеристическая функция, теорема Леви о непрерывности, слабая сходимость, гармонические числа.

Всероссийское СМИ

«Академия педагогических идей «НОВАЦИЯ»

Свидетельство о регистрации Эл №ФС 77-62011 от 05.06.2015 г.

(выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций)

Сайт: akademnova.ru

e-mail: akademnova@mail.ru

Buga Arina Sergeevna,

2nd year student, Institute of Information Technology

Supervisor: M. Tryamkin, PhD in Physics and Mathematics

MIREA - Russian Technological University

Moscow, Russian Federation

PROOF OF THE CENTRAL LIMIT THEOREM FOR THE BERNOULLI SCHEME USING CHARACTERISTIC FUNCTIONS

Abstract: The article considers a sequence of independent Bernoulli random variables X_n with success probability $p_n = 1/n$. It is proved that the centered and normalized sum $(S_n - \log n)/\sqrt{\log n}$ converges weakly to the standard normal law. The proof is based on the method of characteristic functions and Lévy's continuity theorem.

Keywords: central limit theorem, Bernoulli scheme, characteristic function, Lévy continuity theorem, weak convergence, harmonic numbers.

Введение. Пусть $\{X_n\}_{n \geq 1}$ — последовательность независимых случайных величин, где X_n имеет распределение Бернулли с вероятностью успеха $p_n = 1/n$: $P(X_n = 1) = \frac{1}{n}$, $P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}$. Обозначим $S_n = X_1 + \dots + X_n$.

Цель работы — доказать слабую сходимость $\frac{S_n - \log n}{\sqrt{\log n}} \rightarrow N(0,1)$, где $N(0,1)$ — стандартное нормальное распределение. Слагаемые независимы, но не одинаково распределены [1]. Для её решения применяется аппарат характеристических функций [2].

Характеристические функции. Характеристической функцией случайной величины X называется функция $\phi_X(t) = \mathbb{E}e^{itX}, t \in \mathbb{R}$. Характеристическая функция существует для любого распределения, поскольку $|e^{itX}| = 1$ [3].

Основные свойства характеристической функции [4]:

1. $\phi_X(0) = 1, |\phi_X(t)| \leq 1$ для всех t ;
2. $\phi_X(t)$ равномерно непрерывна на \mathbb{R} ;
3. если X и Y независимы, то $\phi_{X+Y}(t) = \phi_X(t)\phi_Y(t)$;
4. для $Y = aX + b$ имеем $\phi_Y(t) = e^{ibt}\phi_X(at)$.

Ключевую роль в доказательстве играет теорема Леви о непрерывности [5]. Если для последовательности случайных величин Z_n характеристические функции $\phi_{Z_n}(t)$ сходятся при каждом t к некоторой функции $\phi_\infty(t)$, непрерывной в нуле, то $\phi_\infty(t)$ является характеристической функцией некоторого распределения F_∞ и Z_n сходится по распределению к F_∞ . В частности, если $\phi_{Z_n}(t) \rightarrow e^{-t^2/2}$, то $Z_n \rightarrow N(0,1)$ [6].

Моменты и нормировка. Вычислим математическое ожидание и дисперсию одного слагаемого: $\mathbb{E}X_n = \frac{1}{n}, \text{Var}(X_n) = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right)$. Следовательно, $\mathbb{E}S_n = H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}, \text{Var}(S_n) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k^2}\right) = H_n - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$. Гармонические числа H_n имеют асимптотику $H_n = \log n + \gamma + o(1)$, где γ — постоянная Эйлера, а $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2 = \pi^2/6$ [2]. Поэтому $\text{Var}(S_n) = \log n + (\gamma - \pi^2/6) + o(1) \sim \log n$.

Введём центрированные и нормированные величины [3]: $Y_{n,k} = \frac{X_k - 1/k}{\sqrt{\log n}}, k =$

$1, \dots, n$. Тогда $Z_n := \sum_{k=1}^n Y_{n,k} = \frac{S_n - H_n}{\sqrt{\log n}}$. Дисперсия Z_n равна $\text{Var}(Z_n) =$

$$\frac{1}{\log n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{H_n - \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k^2}\right)}{\log n} \rightarrow 1.$$

Характеристическая функция Z_n и её разложение.

Характеристическая функция слагаемого $Y_{n,k}$ имеет вид $\phi_{Y_{n,k}}(t) = (1 - \frac{1}{k})e^{-it\frac{1}{k\sqrt{\log n}}} + \frac{1}{k}e^{-it\frac{1-1/k}{\sqrt{\log n}}}$. В силу независимости, $\phi_{Z_n}(t) = \prod_{k=1}^n \phi_{Y_{n,k}}(t)$.

При фиксированном t и больших n аргумент $u = t/\sqrt{\log n}$ мал. Используем разложение экспоненты до второго порядка [5]: $e^{iu} = 1 + iu - \frac{u^2}{2} + O(|u|^3)$.

После подстановки и упрощений (линейный член исчезает благодаря центрированию) получаем

$$\phi_{Y_{n,k}}(t) = 1 - \frac{t^2}{2k \log n} + O\left(\frac{1}{k^2 \log n}\right) + O\left(\frac{1}{k^{3/2}(\log n)^{3/2}}\right). \quad (1)$$

Для логарифма характеристической функции справедливо разложение $\log(1 + z) = z - \frac{z^2}{2} \dots$, откуда

$$\log \phi_{Y_{n,k}}(t) = -\frac{t^2}{2k \log n} + O\left(\frac{1}{k^2 \log n}\right). \quad (2)$$

Суммирование и предельный переход. Суммируя (2) по k от 1 до n , находим $\log \phi_{Z_n}(t) = -\frac{t^2}{2 \log n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + O\left(\frac{1}{\log n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\right)$. Учитывая, что

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = H_n \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty, \quad \text{имеем} \quad \log \phi_{Z_n}(t) = -\frac{t^2 H_n}{2 \log n} + O\left(\frac{1}{\log n}\right).$$

Поскольку $H_n = \log n + \gamma + o(1)$, то $\frac{H_n}{\log n} \rightarrow 1$, и, следовательно,

$$\log \phi_{Z_n}(t) \rightarrow -\frac{t^2}{2}, \quad \phi_{Z_n}(t) \rightarrow e^{-\frac{t^2}{2}}. \quad (3)$$

Применение теоремы Леви и леммы Слуцкого.

Функция $e^{-\frac{t^2}{2}}$ является характеристической функцией стандартного нормального распределения [4] и непрерывна в нуле. По теореме Леви о непрерывности из (3) вытекает

$$Z_n = \frac{S_n - H_n}{\sqrt{\log n}} \rightarrow N(0,1). \quad (4)$$

Далее заметим, что $\frac{S_n - \log n}{\sqrt{\log n}} = \frac{S_n - H_n}{\sqrt{\log n}} + \frac{H_n - \log n}{\sqrt{\log n}}$. Второе слагаемое стремится к нулю, так как $H_n - \log n \rightarrow \gamma$. По лемме Слуцкого [1] добавление величины, сходящейся к нулю по вероятности, не меняет предельного распределения. Поэтому из (4) окончательно получаем $\frac{S_n - \log n}{\sqrt{\log n}} \rightarrow N(0,1)$.

Заключение. В работе методом характеристических функций доказана центральная предельная теорема для суммы независимых бернуллиевских величин с вероятностью успеха $1/n$. Ключевыми элементами доказательства стали: центрирование слагаемых, разложение характеристической функции в ряд Тейлора, суммирование с использованием асимптотики гармонических чисел, теорема Леви о непрерывности и лемма Слуцкого. Полученный результат подтверждает эффективность метода характеристических функций в задачах с неодинаково распределёнными слагаемыми.

Список использованной литературы:

1. Williams D. Probability with Martingales. — Cambridge: Cambridge University Press, 1991. — 251 p.
2. Billingsley P. Probability and Measure. — New York: John Wiley & Sons, 1979. — 515 p.
3. Breiman L. Probability. — Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1968. — 421 p.
4. Feller W. An Introduction to Probability Theory and its Applications. Vol. I. — New York: John Wiley & Sons, 1957. — 461 p.
5. Lukacs E. Characteristic Functions. — London: Griffin, 1970. — 350 p.
6. Chow Y.S., Teicher H. Probability Theory: Independence, Interchangeability, Martingales. — New York: Springer-Verlag, 1978. — 455 p.

Дата поступления в редакцию: 19.05.2026 г.

Опубликовано: 20.05.2026 г.

© Академия педагогических идей «Новация».

Серия «Студенческий научный вестник», электронный журнал, 2026

© Буга А.С., 2026