**Всероссийское СМИ**
**«Академия педагогических идей «НОВАЦИЯ»**
**Свидетельство о регистрации ЭЛ №ФС 77-62011 от 05.06.2015 г.**
**(выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций)**

**Сайт:** akademnova.ru
**e-mail:** akademnova@mail.ru

***Буга А.С. Доказательство центральной предельной теоремы для схемы Бернулли с использованием условия Линденберга // Академия педагогических идей «Новация». Серия: Студенческий научный вестник. – 2026. – №4 (май) – АРТ 12-эл. – 0,2 п.л. - URL: http: //akademnova.ru/page/875550***

***РУБРИКА: ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ***

**УДК 519.214.4**

**Буга Арина Сергеевна**
студентка 2 курса, институт информационных технологий
*Научный руководитель:* Трямкин М.В., к.ф.-м.н.
МИРЭА - Российский технологический университет
г. Москва, Российская Федерация
e-mail: arina-buga@mail.ru

# ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЦЕНТРАЛЬНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ СХЕМЫ БЕРНУЛЛИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ УСЛОВИЯ ЛИНДЕНБЕРГА

*Аннотация:* В статье рассматривается последовательность независимых случайных величин Бернулли $X_n$ с вероятностью успеха $p_n = 1/n$. Доказывается, что центрированная и нормированная сумма $(S_n - \log n)/\sqrt{\log n}$ слабо сходится к стандартному нормальному закону. Доказательство основано на проверке условия Линденберга для треугольной схемы и применении теоремы Линденберга-Феллера.

*Ключевые слова:* центральная предельная теорема, схема Бернулли, условие Линденберга, треугольная схема, слабая сходимость, теорема Линденберга-Феллера.

**Всероссийское СМИ**
**«Академия педагогических идей «НОВАЦИЯ»**
**Свидетельство о регистрации ЭЛ №ФС 77-62011 от 05.06.2015 г.**
**(выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций)**

**Сайт:** akademnova.ru
**e-mail:** akademnova@mail.ru

**Buga Arina Sergeevna,**
2nd year student, Institute of Information Technology
Supervisor: M. Tryamkin, PhD in Physics and Mathematics
MIREA - Russian Technological University
Moscow, Russian Federation

# PROOF OF THE CENTRAL LIMIT THEOREM FOR THE BERNOULLI SCHEME USING THE LINDENBERG CONDITION

*Abstract:* The article considers a sequence of independent Bernoulli random variables $X_n$ with success probability $p_n = 1/n$. It is proved that the centered and normalized sum $(S_n - \log n)/\sqrt{\log n}$ converges weakly to the standard normal law. The proof is based on verifying the Lindeberg condition for a triangular array and applying the Lindeberg-Feller theorem.

*Keywords:* central limit theorem, Bernoulli scheme, Lindeberg condition, triangular array, weak convergence, Lindeberg-Feller theorem.

**Введение**. Пусть $\{X_n\}n \geq 1$ – последовательность независимых случайных величин, где $Xn$ имеет распределение Бернулли с вероятностью успеха $p_n = 1/n$: $P(X_n = 1) = \frac{1}{n}$, $P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}$. Слагаемые независимы, но не одинаково распределены [2]. Обозначим $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Известно [4], что математическое ожидание и дисперсия суммы равны $\mathbb{E}S_n = H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, $\mathrm{Var}(S_n) = \sum_{k=1}^{n} (\frac{1}{k} - \frac{1}{k^2}) = H_n - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$. Поскольку $H_n = \log n + \gamma + o(1)$ [3], а $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2 = \pi^2/6$, то $Var(S_n) \sim \log n$.

Цель работы — доказать слабую сходимость $\frac{S_n - \log n}{\sqrt{\log n}} \to \mathrm{N}(0,1)$, где $N(0,1) -$ стандартное нормальное распределение. Для её решения применяется условие Линденберга и теорема Линденберга-Феллера [5].

**Теорема Линденберга-Феллера**. Рассмотрим треугольную схему: для каждого $n$ определим независимые случайные величины $Y_{n,1}, \dots, Y_{n,n}$ с нулевыми математическими ожиданиями и конечными дисперсиями $\sigma_{n,k}^2 = \mathbb{E}Y_{n,k}^2$. Пусть $s_n^2 = \sum_{k=1}^{n} \sigma_{n,k}^2$.

Согласно теореме Линденберга-Феллера [1], если для любого $\varepsilon > 0$ выполнено условие Линденберга $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{s_n^2} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left[Y_{n,k}^2 1_{\{|Y_{n,k}| > \varepsilon s_n\}}\right] = 0$, и $s_n^2 \to \sigma^2 > 0$, то $\sum_{k=1}^{n} Y_{n,k} \to N(0, \sigma^2)$. В нашем случае мы положим $\sigma^2 = 1$ и покажем, что $s_n^2 \to 1$.

**Построение треугольной схемы.** Введём центрированные и нормированные величины: $Y_{n,k} = \frac{X_k - 1/k}{\sqrt{\log n}}, k = 1, \dots, n$. Тогда $\mathbb{E}Y_{n,k} = 0$ и $\sigma_{n,k}^2 = \frac{1}{\log n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k^2}\right)$. Суммарная дисперсия: $s_n^2 = \frac{1}{\log n}\left(H_n - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\right)$, где $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ — гармонические числа. Поскольку $H_n = \log n + \gamma + o(1)$, а $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2 = \pi^2/6$, получаем $s_n^2 \to 1$ [3]. Таким образом, предельная дисперсия равна единице.

**Проверка условия Линденберга.** Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Нам нужно показать, что $L_n(\varepsilon) := \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left[Y_{n,k}^2 1_{\{|Y_{n,k}| > \varepsilon s_n\}}\right] \to 0$.

Заметим, что $Y_{n,k}$ принимает значения $\frac{1-1/k}{\sqrt{\log n}}$ (при $X_k = 1$), $-\frac{1/k}{\sqrt{\log n}}$ (при $X_k = 0$). Следовательно, $\left|Y_{n,k}\right| \le \frac{1}{\sqrt{\log n}}$.

Для достаточно больших $n$ (а именно когда $\frac{1}{\sqrt{\log n}} < \varepsilon$) событие $\left\{\left|Y_{n,k}\right| > \varepsilon\right\}$ может произойти только при $X_k = 0$ и тогда $\left|Y_{n,k}\right| = \frac{1}{k\sqrt{\log n}} > \varepsilon \iff k < \frac{1}{\varepsilon\sqrt{\log n}}$.

Обозначим $K_n = \lfloor \frac{1}{\varepsilon\sqrt{\log n}} \rfloor$. При $k > K_n$ индикатор равен нулю. Для $k \leq K_n$ имеем [6] $\mathbb{E}\left[Y_{n,k}^2 1_{\{|Y_{n,k}|>\varepsilon s_n\}}\right] = \frac{1}{\log n} \cdot \frac{1}{k^2} P(X_k = 0) = \frac{1}{\log n} \cdot \frac{1}{k^2}\left(1 - \frac{1}{k}\right)$.

Следовательно, $L_n(\varepsilon) = \frac{1}{\log n} \sum_{k=1}^{K_n} \frac{1}{k^2}\left(1 - \frac{1}{k}\right) \leq \frac{\pi^2}{6\log n} \to 0$. Таким образом, условие Линденберга выполнено для любого $\varepsilon > 0$.

**Применение теоремы Линденберга-Феллера и леммы Слуцкого**. Поскольку $s_n^2 \to 1$ и условие Линденберга выполняется, теорема Линденберга-Феллера даёт [1]

$$\sum_{k=1}^{n} Y_{n,k} = \frac{S_n - H_n}{\sqrt{\log n}} \Longrightarrow N(0,1). \quad (1)$$

Далее заметим, что $\frac{S_n - \log n}{\sqrt{\log n}} = \frac{S_n - H_n}{\sqrt{\log n}} + \frac{H_n - \log n}{\sqrt{\log n}}$. Второе слагаемое стремится к нулю, так как $H_n - \log n \to \gamma$. По лемме Слуцкого [3] добавление величины, сходящейся к нулю по вероятности, не меняет предельного распределения. Поэтому из (1) окончательно получаем $\frac{S_n - \log n}{\sqrt{\log n}} \to N(0,1)$.

**Заключение**. В работе проверено условие Линденберга для треугольной схемы, порождённой бернуллиевскими величинами с вероятностью успеха $1/n$. Ключевым моментом является то, что индикатор $\{|Y_{n,k}| > \varepsilon\}$ отличен от нуля лишь для очень малых $k$ (порядка $1/(\varepsilon\sqrt{\log n})$), и соответствующий вклад в сумму убывает как $1/(\log n)$. Таким образом, метод Линденберга даёт прямое доказательство центральной предельной теоремы для рассматриваемой схемы, основанное только на моментах второго порядка.

## Список использованной литературы:

1. Williams D. Probability with Martingales. — Cambridge: Cambridge University Press, 1991. — 251 p.

**Всероссийское СМИ**
**«Академия педагогических идей «НОВАЦИЯ»**
**Свидетельство о регистрации ЭЛ №ФС 77-62011 от 05.06.2015 г.**
**(выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций)**
**Сайт:** akademnova.ru
**e-mail:** akademnova@mail.ru

2. Billingsley P. Probability and Measure. — New York: John Wiley & Sons, 1979. — 515 p.

3. Breiman L. Probability. — Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1968. — 421 p.

4. Feller W. An Introduction to Probability Theory and its Applications. Vol. I. — New York: John Wiley & Sons, 1957. — 461 p.

5. Lukacs E. Characteristic Functions. — London: Griffin, 1970. — 350 p.

6. Chow Y.S., Teicher H. Probability Theory: Independence, Interchangeability, Martingales. — New York: Springer-Verlag, 1978. — 455 p.

***Дата поступления в редакцию: 19.05.2026 г.***
***Опубликовано: 20.05.2026 г.***