Всероссийское СМИ
«Академия педагогических идей «НОВАЦИЯ»
Свидетельство о регистрации ЭЛ №ФС 77-62011 от 05.06.2015 г.
(выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций)

Сайт: akademnova.ru
e-mail: akademnova@mail.ru

Афанасенко К.А., Горшков О.В., Колпаков И.Ю. О разрешимости задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка, не разрешенного относительно производной // Академия педагогических идей «Новация». Серия: Студенческий научный вестник. – 2017. – № 11 (ноябрь). – АРТ 438-эл. – 0,2 п.л. - URL: http: //akademnova.ru/page/875550

РУБРИКА: ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

УДК 517.929

Афанасенко Кирилл Андреевич
Горшков Олег Владимирович
студенты 2 курса, электротехнический факультет,
ФГБОУ ВО «Пермский национальный исследовательский политехнический университет»,
г. Пермь, Российская Федерация
e-mail: kirill_afanasenko@mail.ru
gorshkovoleg97@gmail.com
Колпаков Илья Юрьевич
к.физ.-мат.н., доцент,
ФГБОУ ВО «Пермский национальный исследовательский политехнический университет», ФГБОУ ВО «Пермский государственный национальный исследовательский университет»,
г. Пермь, Российская Федерация
e-mail: kolpakov.ilia@mail.ru

О РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА, НЕ РАЗРЕШЕННОГО ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНОЙ

Аннотация: В работе найдены условия разрешимости задачи Коши для одного дифференциального уравнения первого порядка, не разрешенного относительно производной. Условия разрешимости задачи Коши были получены с применением теоремы типа Лере-Шаудера.

Ключевые слова: задача Коши; теорема Лере-Шаудера; существование решения.

Всероссийское СМИ
«Академия педагогических идей «НОВАЦИЯ»
Свидетельство о регистрации ЭЛ №ФС 77-62011 от 05.06.2015 г.
(выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций)

Сайт: akademnova.ru
e-mail: akademnova@mail.ru

Afanasenko Kirill Andreevich
Gorshkov Oleg Vladimirovich
2-nd year students, faculty of electrical engineering
FGBOU VO «Perm National Research Polytechnic University»
Perm, Russian Federation
Kolpakov Ilya Yurievich
PhD, Associate Professor
FGBOU VO «Perm National Research Polytechnic University»,
FGBOU VO «Perm State University»
Perm, Russian Federation

ABOUT SOLVABILITY OF THE CAUCHY PROBLEM FOR THE DIFFERENTIAL EQUATION OF THE FIRST ORDER WHICH HASN'T BEEN RESOLVED BY RATHER DERIVATIVE

Abstract: Conditions of solvability of the Cauchy problem for one differential equation of the first order which hasn't been resolved by rather derivative are found in work. Conditions of solvability of the Cauchy problem were received with application theorem of the Leray–Schauder's type.
Keywords: the Cauchy problem; Leray–Schauder's theorem; existence of solution.

Рассмотрим нелинейную задачу для дифференциального уравнения первого порядка, не разрешенного относительно производной

$$\begin{cases} g(t,\dot{x}) = f(t,x), \\ x(0) = x_0,\ t \in [0;T], \end{cases} \qquad (1)$$

где функции $f, g : [0;T] \times R^1 \to R^1$ и предполагается, что функция g непрерывна, функция f удовлетворяет условию Каратеодори.

Пусть L_p – пространство суммируемых в степени p на отрезке $[0;T]$ функций, L_∞ – пространство измеримых ограниченных в существенном на отрезке $[0;T]$ функций, C - пространство непрерывных на отрезке $[0;T]$

Сайт: akademnova.ru
e-mail: akademnova@mail.ru

функций, D_p - пространство абсолютно непрерывных на отрезке $[0;T]$ функций с нормой

$$\|x\|_{D_p} = |x(0)| + \|\dot{x}\|_{L_p}.$$

Под решением понимается такой элемент пространства D_p, который почти всюду на отрезке $[0;T]$ удовлетворяет уравнению и начальному условию задачи (1).

В работе доказывается существование решения задачи (1) в шаре радиуса R с центром в точке $x = 0$ пространства D_p. Задача (1) сводится к квазилинейной задаче с обратимым линейным оператором. В последующем, полученная задача заменяется эквивалентным ей операторным уравнением, к которому применяется теорема типа Лере-Шаудера [1]. При этом решение задачи (1) ищется в предположении, что левая часть уравнения представима в виде разности $g(t,\dot{x}) = l(t)\dot{x} - g_0(t,\dot{x})$, где функция $l(t), l^{-1}(t) \in L_\infty$, а функция $g_0 : [0;T] \times R^1 \to R^1$ удовлетворяет условию:

$$|g_0(t,v)| \le a_0 + b_0|v|.$$

Некоторые математические модели реальных процессов приводят к задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно старшей производной и, в частности, к задаче (1). Обычно при исследовании нелинейных задач, в том числе и задачи (1), используется явная или неявная линеаризация. В частности, в работах [2-4] используется редукция нелинейной задачи к некоторой вспомогательной квазилинейной, к которой применяются известные схемы исследования на разрешимость квазилинейных или резонансных краевых задач. К числу методов, использующих неявную линеаризацию нелинейных задач можно отнести метод Ньютона-Канторовича, метод применения теорем о неявной функции, методы теории нелинейных фредгольмовых операторов. В этом случае нелинейный оператор аппроксимируется своей производной [5-7].

Случай задачи (1) с периодическим краевым условием рассматривался ранее в работе [8].

Обозначим через $h(t)=\frac{1}{l(t)}$, при этом будем предполагать, что функции $l(t), l^{-1}(t) \in L_\infty$ на отрезке $[0;T]$. Существование такой функции позволяет задачу (1) переписать в виде

$$\begin{cases} \dot{x}(t)=h(t)\left(g_0(t,\dot{x})+f(t,x)\right), \\ x(0)=x_0,\, t\in[0;T]. \end{cases} \qquad (2)$$

Обозначим через X и Y пространства $X=\left\{x\in D_p[0;T] \,\|\, x(0)=x_0\right\}$ и $Y=L_p[0;T]$ соответственно. Задачу (2) в пространстве X запишем в виде операторного уравнения

$$Lx=Nx,$$

где операторы $L, N: X\to Y$ определены равенствами

$$Lx=\dot{x},\;\; Nx=h(t)n(t,x,\dot{x}),$$

$$n(t,x,\dot{x}) \overset{def}{=} g_0(t,\dot{x})+f(t,x).$$

Так как оператор L является обратимым на пространстве X, то краевая задача (2) эквивалентна интегральному уравнению

$$x(t)=x_0+\int_0^t h(s)n\left(s,x(s),\dot{x}(s)\right)ds. \qquad (3)$$

Соответствующее операторное уравнение тогда запишется в виде

$$x=KNx \overset{def}{=} Fx,$$

где $F: X\to X$, $K: Y\to X$ - обратный к L оператор.

Ниже под $\overline{S_R(0)}$ и $\sigma_R(0)$ понимается замкнутый шар и сфера радиусов R с центрами в нуле.

Для нахождения условий существования решения уравнения (3) воспользуемся теоремой типа Лере – Шаудера [1] из книги [9, стр.406]:

Теорема 1. Пусть оператор F действует из шара $\overline{S_R(0)} \subset X$ в X и вполне непрерывен. Если $\|Fx\| \le \|x\|$ для всех x с $\|x\| = R$, то оператор F имеет в $\overline{S_R(0)}$ неподвижную точку.

Для доказательства полной непрерывности произведения KN рассмотрим расширение оператора K на пространство C, то есть будем считать, что оператор K действует из пространства L_p в C. Тогда оператор K вполне непрерывен, а, следовательно, произведение KN также вполне непрерывно. Не трудно показать, что $\|Ky\|_C \le |x_0| + T^{1/q}\|y\|_{L_p}$.

Докажем существование решения уравнения $x(t) = x_0 + \int\limits_0^t (Nx)(s)\,ds$ на пространстве X, содержащегося в пространстве C. Тогда, вследствие непрерывности оператора N, правая часть данного уравнения принадлежит D_p и, следовательно, само решение $x(t)$ также принадлежит D_p. Это доказывает существование решения исходной задачи (1) в пространстве D_p. Подобный подход использовался в работе [10].

Для нахождения эффективных условий разрешимости, оценим оператор N в уравнении (3):

$$\|Nx\|_{Lp} = \left\|h(t)n\left(t, x(t), \dot{x}(t)\right)\right\|_{Lp} = \left(\int\limits_0^T \left|h(s)n\left(s, x(s), \dot{x}(s)\right)\right|^p ds\right)^{1/p} \le c\left(\int\limits_0^T \left|n\left(s, x(s), \dot{x}(s)\right)\right|^p ds\right)^{1/p} \le$$

$$\le c\left(\left(\int_0^T \left|g_0\left(s,\dot{x}(s)\right)\right|^p ds\right)^{1/p} + \left(\int_0^T \left|f\left(s,x(s)\right)\right|^p ds\right)^{1/p}\right) \le$$

$$\le c\left(\left(\int_0^T \left(a_0 + b_0\left|\dot{x}(s)\right|\right)^p ds\right)^{1/p} + \left(\int_0^T \left(a + b\left|x(s)\right|\right)^p ds\right)^{1/p}\right) \le$$

$$\le c\left(a_0T^{1/p} + b_0\left\|\dot{x}\right\|_{Lp} + aT^{1/p} + b\left(\int_0^T \left|x_0 + \int_0^s \dot{x}(\tau)\,d\tau\right|^p ds\right)^{1/p}\right) \le$$

$$\le c\left(\left(a_0 + a\right)T^{1/p} + b_0\left\|\dot{x}\right\|_{Lp} + bT^{1/p}\left(\left|x_0\right| + \int_0^T \left|\dot{x}(\tau)\right| d\tau\right)\right) \le$$

$$\le c\left(\left(a_0 + a\right)T^{1/p} + bT^{1/p}\left|x_0\right| + \left(b_0 + bT\right)\left\|\dot{x}\right\|_{Lp}\right) \le$$

$$\le c\left(\left(a_0 + a\right)T^{1/p} + \alpha\left\|x\right\|_{Dp}\right)$$

(где $c = vrai\sup\left|h(t)\right|$, $\alpha = \max\left(bT^{1/p}; b_0 + bT\right)$).

Так как $\left\|x\right\|_C \le \beta\left\|x\right\|_{Dp}$, где $\beta = \max\left(1; T^{1/q}\right)$, то условие Теоремы 1: $\left\|Fx\right\| \le \left\|x\right\|$ для всех x с $\left\|x\right\| = R$, примет вид

$$\left|x_0\right| + T^{1/q}c\left(\left(a_0 + a\right)T^{1/p} + \alpha\left\|x\right\|_{Dp}\right) \le \left\|x\right\|_{Dp}.$$

Из данного неравенства находим радиус шара R, на котором существует решение уравнения (3):

$$\left\|x\right\|_{Dp} \ge \frac{\left|x_0\right| + \left(a_0 + a\right)Tc}{1 - \alpha c T^{1/q}}.$$

Откуда следует, что если $\alpha c T^{1/q} < 1$, то на сфере $\sigma_R(0) \subset X$ радиуса $R = \dfrac{\left|x_0\right| + \left(a_0 + a\right)Tc}{1 - \alpha c T^{1/q}}$ выполнены условия теоремы 1.

Таким образом, доказано утверждение о существовании решения краевой задачи (1):

Теорема 2. Пусть функция $f(t,x)$ удовлетворяет условию Каратеодори, функция $g(t,\dot{x}) = l(t)\dot{x} - g_0(t,\dot{x})$, где $l(t), l^{-1}(t) \in L_\infty$, $g_0(t,\dot{x})$

Всероссийское СМИ
«Академия педагогических идей «НОВАЦИЯ»
Свидетельство о регистрации ЭЛ №ФС 77-62011 от 05.06.2015 г.
(выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций)

Сайт: akademnova.ru
e-mail: akademnova@mail.ru

непрерывна и для каждого фиксированного $t \in [0;T]$ выполняется неравенство

$$|g_0(t,v)| \le a_0 + b_0|v|.$$

Тогда если выполнены условия

1) $|f(t,x)| \le a + b|x|$;

2) $\alpha c T^{1/q} < 1$,

где $\alpha = \max\left(bT^{1/p}; b_0 + bT\right)$, $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$, $c = vrai\sup\left|l^{-1}(t)\right|$,

то существует решение задачи (1) на шаре $\overline{S_R(0)} \subset D_p[0;T]$ с радиусом $R = \frac{|x_0| + (a_0 + a)Tc}{1 - \alpha c T^{1/q}}$.

Список использованной литературы:

1. *J. Leray – J. Schauder* // Ann. Ecole Norm. Sup. 1934. Vol. 51, № 3. P. 45–78.
2. *Диблик Й.* Существование и единственность решения начальной краевой задачи для дифференциальных уравнений, частично разрешенных относительно производных // Деп. в ВИНИТИ. 1984, № 908-84.
3. *Елисеенко М.Н.* О периодических решениях обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка, не разрешенных относительно производных // Дифференциальные уравнения, 1985, т.21, №9. С. 1618-1621.
4. *Просенюк Л.Г.* Существование и асимптотика *О*-решений дифференциального уравнения, не разрешенного относительно производной // Украинский математический журнал, 1987. т.39, №6. С.796-799.
5. *Беллман Р., Калаба Р.* Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи, пер. с англ., М., 1968. 184 с.
6. *Борисович Ю.Г., Звягин В.Г., Сапронов Ю.И.* Нелинейные фредгольмовы отображения и теория Лере-Шаудера // УМН,1977. т.32, №4. С.3-54.
7. *Дмитриенко В.Т.* Двухточечная краевая задача для дифференциальных уравнений второго порядка, не разрешенных относительно старшей производной // Приближенные методы исследования дифференциальных уравнений и их приложения. Куйбышев, 1982. С.47-58.
8. *Колпаков И.Ю.* О существовании периодического решения краевой задачи для одного дифференциального уравнения первого порядка, не разрешенного относительно производной // Современные проблемы науки и образования, 2014, №3. http://www.science-education.ru/117-13237.

9. *Треногин В.А.* Функциональный анализ. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002, 488 с.
10. *Максимов В.П.* Вопросы общей теории ФДУ: дис. докт. физ.-мат. наук. - Пермь, 1984. – 254 с.

Дата поступления в редакцию: 28.10.2017 г.
Опубликовано: 01.11.2017 г.