Краевое государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение «Каменский педагогический колледж»

БИНОМ НЬЮТОНА

Индивидуальный проект по учебной дисциплине
«Математика»

Выполнила: Погорелова Алина,
студентка 391 группы

Руководитель: Ильиных Т.Г./ _________
подпись

Оценка ________________________

2020

Содержание

1. Введение

Исаак Ньютон

"Подумаешь, Бином Ньютона"
Кот промяукал Бегемот
(Он Воланда слуга покорный),
Предсказывая жизни ход.
Все это только подтверждает
Ньютона гений, но давно
Бином известен был в Китае,
Арабы знали про него.
Но обобщил Ньютон решение,
Возвёл он в степень многочлен...
Избавил нас от всех сомнений
Других же нет у нас проблем.
Скажите нам совсем без прений
Зачем нам нужен тот бином?
Комбинаторику явлений
Мы без бинома не найдём

Оскар Хуторянский

Долгое время считалось, что для натуральных показателей степени эту формулу, как и треугольник, позволяющий находить коэффициенты, изобрёл Блез Паскаль, описавший её в XVII веке. Однако историки науки обнаружили, что формула была известна ещё китайскому математику Яну Хуэю (англ.), жившему в XIII веке, а также исламским математикам ат-Туси (XIII век) и ал-Каши (XV век). В середине XVI века Михаэль Штифель описал биномиальные коэффициенты и также составил их таблицу до степени 18.

Формула бинома Ньютона для целых положительных показателей была известна задолго до Исаака Ньютона, но он в 1676 году указал на возможность распространения этого разложения и на случай дробного или отрицательного показателя. Строгое обоснование указанных Ньютоном возможностей дал Н. Абель в 1826 году. В случае дробного или отрицательного n все биномиальные коэффициенты отличны от нуля, а правая часть формулы получает бесконечный ряд членов (биномиальный ряд). Бином Ньютона играет роль во многих областях математики, в частности в алгебре и теории чисел.

Исаак Ньютон около 1677 года обобщил формулу для произвольного показателя степени (дробного, отрицательного и др.). Из биномиального разложения Ньютон, а позднее и Эйлер, выводили всю теорию бесконечных рядов.

Объект исследования: алгебраическая формула Ньютона

Предмет исследования: закономерность разложения биномиальных коэффициентов в формуле

Цель: изучить бином Ньютона и его свойства, показать применение данных свойств при решении задач

Глава 1. Бином Ньютона

Бином Ньютона — формула разложения произвольной натуральной степени двучлена $(a+b)^n$ в многочлен.

$$(a+b)^n = C_n^0 + a^n + C_n^1 + a^{n-1}\ b + C_n^2 + a^{n-2}\ b^2\ + \cdots . + C_n^{n-1} + ab^{n-1} + C_n^n\ {}_{b^n}$$

где имеем, что $C^k_{n} = \dfrac{(n)!}{(k)!(n-k)!} = \dfrac{n\ (n-1)(n-2)....^\circ\ \big(n(k-1)\big)}{(k)!}$

биномиальные коэффициенты, где есть n по k, k = 0,1,2, …. n , а «!» - является знаком факториал.

Знаем наизусть формулы «квадрата суммы» $(a+b)^2$ и «куба суммы» $(a+b)^3$, но при увеличении показателя степени с определением коэффициентов при членах многочлена начинаются трудности, которые я рассматриваю в своей работе Слово «бином» означает двучлен, т.е. сумму двух слагаемых. Из школьного курса известны так называемые формулы сокращенного умножения:

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a + b)^3 = a^3 +3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Обобщением этих формул является формула, называемая формулой бинома Ньютона. Используются в школе и формулы разложения на множители разности квадратов, суммы и разности кубов. Имеют ли они обобщение для других степеней? Да, есть такие формулы, они часто используются в решении различных задач: на доказательство делимости, сокращение дробей, приближенные вычисления.

Глава 2. Свойства разложения бинома Ньютона

1) Количество членов разложения бинома на единицу больше показателя степени бинома.

2) Все члены разложения имеют одну и ту же степень n относительно первого и второго членов бинома, т. е. разложение есть однородный многочлен, причем показатели первого члена убывают от n до 0, а показатели второго члена возрастают от 0 до *n*.

3) Коэффициенты разложения следуют так: первый равен $1 = C^0_n$ и последующие соответственно равны C^1_n ,C^2_n,… $C^n_n = 1$ *т. е. коэффициент (k + 1)-го члена равен* C^k_n. *Эти коэффициенты называются биномиальными. Заметим, что биномиальные коэффициенты всегда натуральные числа, если показатель бинома есть натуральное число.*

4) Биномиальные коэффициенты, равноотстоящие от концов разложения, равны между собой: $C^0_n= C^n_n$, $C^1_n= C^{n-1}_n$, $C^k_n= C^{n-k}_n$

5) Из свойств 1 и 4 следует, что если показатель бинома четный, то в разложении бинома средний член имеет наибольший биномиальный коэффициент, а если показатель бинома нечетный, то в разложении имеется два средних члена с одинаковым наибольшим коэффициентом.

6) Последующий биномиальный коэффициент разложения равен предыдущему, умноженному на показатель первого члена бинома и предыдущем члене и деленному на число предыдущих членов

Таблица
Биномиальные коэффициенты

	k	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
n											
0		*1*									
1		*1*	*1*								
2		*1*	*2*	*1*							
3		*1*	*3*	*3*	*1*						
4		*1*	*4*	*6*	*4*	*1*					
5		*1*	*5*	*10*	*10*	*5*	*1*				
6		*1*	*6*	*15*	*20*	*15*	*6*	*1*			
7		*1*	*7*	*21*	*35*	*35*	*21*	*7*	*1*		
8		*1*	*8*	*28*	*56*	*70*	*56*	*28*	*8*	*1*	
9		*1*	*9*	*36*	*84*	*136*	*136*	*84*	*36*	*9*	*1*

Нетрудно видеть, что каждая строка данной таблицы симметрична, т.к. коэффициенты при $a^k b^{n-k}$ и $a^{n-k} b^k$ в разложении бинома совпадают. Полученный числовой треугольник называется треугольником Паскаля. Таблицы биномиальных коэффициентов были известны и предшествующим математикам – китайским, арабским и европейским (П. Аппиан, 1527 г.; М. Штифель, 1544 г.; Н. Тарталья, 1556 г.).

Применение бинома Ньютона при решении задач

Пример 1. Разложить выражение $(a+b)^5$, используя формулу бинома Ньютона.

Решение

По треугольнику Паскаля с пятой степенью видно, что биноминальные коэффициенты – это 1, 5, 10, 10, 5, 1 То есть, получаем, что

$$(a+b)^5=a^5+5a^4 b+10a^3 b^2 +10a^2 b^3 +5ab^4 +b^5$$

$a+b^5 = a^5 +5a^4 b+10a^3 b^2 +10a^2 b^3 +5ab^4 +b^5$ является искомым разложением.

Ответ: $(a+b)^5 = a^5 +5a^4 b+10a^3 b^2 +10a^2 b^3 +5ab^4 +b^5$

Пример 2. Найти коэффициенты бинома Ньютона для шестого члена разложения выражения вида $(a+b)^{10}$

Решение

По условию имеем, что n=10, k=6−1=5 n =10, k = 6-1 =5.
Тогда можно перейти к вычислению биномиального коэффициента:

$$C_n^k = C_{10}^5 = \frac{10!}{5!\ (10-5)!} = \frac{10!}{5!\ \ 5!} = \frac{10\ \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{5!\ \ 5!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 252$$

Ответ: коэффициент равен 252 для 6 члена разложения.

Заключение

В школе изучаются и используются так называемые формулы сокращенного умножения: квадраты и кубы суммы и разности двух выражений и формулы разложения на множители разности квадратов, суммы и разности кубов двух выражений. Обобщением этих формул является формула, называемая формулой бинома Ньютона и формулы разложения на множители суммы и разности степеней. Эти формулы часто используются в решении различных задач: на доказательство делимости, сокращение дробей, приближенные вычисления. Рассмотрены интересные свойства треугольника Паскаля, которые тесно связаны с биномом Ньютона.

В работе систематизирована информация по теме, приведены примеры задач на применение бинома Ньютона и формул суммы и разности степеней. Работа может быть использована в работе математического кружка, а также для самостоятельного изучения теми, кто увлекается математикой.

Список литературы:

1. Виленкин Н.Я. Комбинаторика.– изд. "Наука". – М., 1969 г.
2. Никольский С.М., Потапов М.К., Решетников Н.Н., Шевкин А.В. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс: учеб. для общеобразоват. организаций базовый и углубленный уровни - М.: Просвещение, 2014. - 431 с.
3. Решение задач по статистике, комбинаторике и теории вероятностей. 7-9 кл./ автор – составитель В.Н. Студенецкая. – изд. 2-е., испр., - Волгоград: Учитель, 2009 г.
4. Савушкина И.А., Хугаев К.Д., Тишкин С.Б. Алгебраические уравнения высших степеней /методическое пособие для слушателей межвузовского подготовительного отделения. – Санкт-Петербург, 2001.
5. Шарыгин И.Ф. Факультативный курс по математике: Решение задач. Учебное пособие для 10 кл. средней школы. – М.: Просвещение, 1989.
6. Наука и жизнь, Бином Ньютона и треугольник Паскаля [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.nkj.ru/archive/articles/13598/