Всероссийское СМИ
«Академия педагогических идей «НОВАЦИЯ»
Свидетельство о регистрации ЭЛ №ФС 77-62011 от 05.06.2015 г.
(выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций)

Сайт: akademnova.ru
e-mail: akademnova@mail.ru

Шарипов Ф.Ф. Разработка программного обеспечения для решение систем линейных алгебраических уравнений методом Гаусса // Академия педагогических идей «Новация». Серия: Студенческий научный вестник. – 2017. – № 08 (август). – АРТ 379-эл. – 0,3 п.л. - URL: http: //akademnova.ru/page/875550

РУБРИКА: ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

УДК 004.021

Шарипов Фидан Фаритович
студент 3 курса, факультет информатики и робототехники
ФГБОУ ВО «Уфимский государственный авиационный университет»
г. Уфа, Российская Федерация
e-mail: qusijue@gmail.com

РАЗРАБОТКА ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ ДЛЯ РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ ГАУССА

Аннотация: в данной статьи рассматривается алгоритм приложения для решения систем линейных алгебраических уравнений, реализованное на языке программирования C#.

Ключевые слова: метод Гаусса, математика, разработка ПО, описание алгоритма.

Sharipov Fidan Faritovich
3st year student, Faculty of Informatics and Robotics
FGBOU VO «Ufa State Aviation Technical University»
Ufa, Russian Federation

DEVELOPMENT OF SOFTWARE FOR SOLVING SYSTEMS OF LINEAR ALGEBRAIC EQUATIONS USING THE GAUSS METHOD

Abstract: In this article we consider an application algorithm for solving systems of linear algebraic equations, implemented in the programming language C#.

Keywords: Gauss method, mathematics, software development, algorithm description.

Система линейных алгебраических уравнений(СЛАУ) — система уравнений, каждое уравнение в которой является линейным — алгебраическим уравнением первой степени[1].

Решение систем линейных алгебраических уравнений — одна из классических задач линейной алгебры, во многом определившая её объекты и методы. Кроме того, линейные алгебраические уравнения и методы их решения играют важную роль во многих прикладных направлениях, в том числе в линейном программировании, эконометрике.

Метод Гаусса — классический метод решения системы линейных алгебраических уравнений, названный в честь немецкого математика Карла Фридриха Гаусса, который заключается в последовательном исключении переменных, путем элементарных преобразований система уравнений приводится к равносильной системе треугольного вида, из которой последовательно, начиная с последних (по номеру), находятся все переменные системы[2].

Метод Гаусса является одним из эффективных методов, потому что он менее трудоемкий по сравнению с такими методами, как метод Халецкого, метод Краммера и математический метод.

В ряде случаев СЛАУ нельзя решить с помощью метода Гаусса. Например, когда система уравнений является несовместной или неопределенной. СЛАУ называется совместной, если она имеет, хотя бы одно решение, в противном случае система называется несовместной. Система называется определённой, если она совместна и имеет единственное решение, иначе она называется неопределённой.

В настоящее время существует множество математических пакетов, которые позволяют решать СЛАУ, но большинство из них являются платными и требуют глубокого изучения. Целью данной работы является разработка программного обеспечения(ПО) для решения систем линейных алгебраических уравнений методом Гаусса, которая предназначена для быстрой проверки решения. Целевая аудитория программного продукта - студенты, а так же для те кто начал изучать данную тему.

1. Математическая модель

Для того чтобы начать разработку ПО, необходимо построить математическую модель выбранного метода. Она нужна для того, чтобы понять, как устроен конкретный объект, какова его структура и основные свойства.

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ &\ldots \\ &a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{aligned} \qquad (1)$$

Дана система линейных уравнений, запишем её в матричном виде:

$Ax = b$,

где $$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix} \qquad (2)$$

Система (1) путем последовательного исключения неизвестных приводится к системе с треугольной матрицей(квадратная матрица, в которой все элементы ниже или выше главной диагонали равны нулю), из которой и определяются значения неизвестных.

Процесс исключения неизвестных можно описать следующим образом:

Пусть $a_{11}\neq 0$. Разделим первое уравнение на a_{11}. Затем вычтем из каждого i–го ($i\geq 2$) уравнения, полученного после деления, первое, умноженное на a_{i1} . В результате, после преобразований x_1 окажется исключенным из всех уравнений кроме первого.

По той же схеме исключается x_2 , x_3, ..., x_n , после чего получается треугольная матрица с единичной главной диагональю.

$$
\begin{aligned}
x_1 + \tilde{a}_{12}x_2 + \ldots + \tilde{a}_{1n}x_n &= \tilde{b}_1 \\
x_2 + \ldots + \tilde{a}_{2n}x_n &= \tilde{b}_2 \\
\ldots \\
\tilde{x}_n &= \tilde{b}_n
\end{aligned}
\qquad (3)
$$

Общая формула определения неизвестных

$$x_i = \tilde{b}_i^{(i-1)} - \sum_{j=i+1}^{n} \tilde{a}_{ij}^{(i-1)} x_j, \quad i = n, n-1, \ldots 1 \qquad (4)$$

Из последнего уравнения сразу определяется x_n, далее, подставляя его в предпоследнее уравнение, получаем x_{n-1} и т.д.

Процесс нахождения неизвестных по способу Гаусса распадается на два этапа:

Первый – приведение матрицы к треугольному виду – прямой ход.

Второй – определение неизвестных по полученным формулам – обратный ход.

Процесс исключения k–го неизвестного называется k–м шагом прямого хода.

Элементы $a_{11}, a_{22}^{(1)}, \ldots, a_{nn}^{(n-1)}$ называются ведущими.

Сайт: akademnova.ru
e-mail: akademnova@mail.ru

Общие формулы пересчета коэффициентов системы на *k*-м шаге:

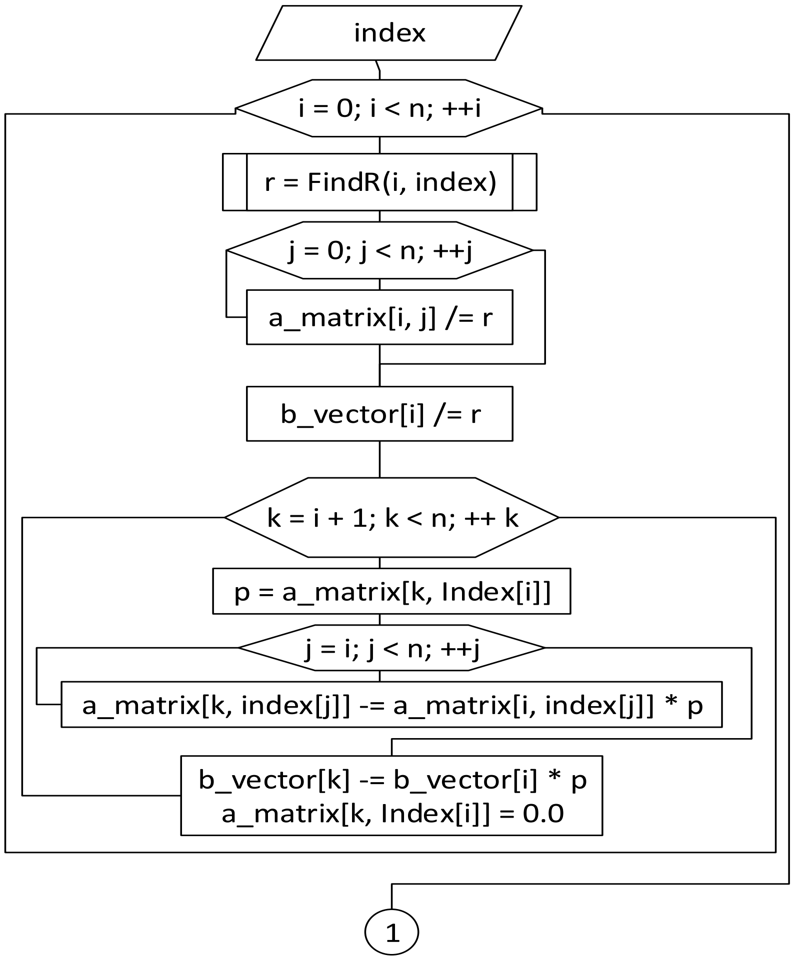
$$\tilde{a}_{kj}^{(k-1)} = \frac{a_{kj}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}},\ j = k,\ldots n \quad \tilde{b}_k^{(k-1)} = \frac{b_k^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}},$$

$$a_{ij}^k = a_{ij}^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)} \cdot \tilde{a}_{kj}^{(k-1)}$$

$$b_i^k = b_i^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)} \cdot \tilde{b}_k^{(k-1)}$$

$$i = k+1,\ldots,n; \quad j = k,\ldots,n \tag{5}$$

На основании описанной математической модели решения СЛАУ методом Гаусса, был написан алгоритм программы решения СЛАУ(Рисунки 1 - 3).



Всероссийское СМИ
«Академия педагогических идей «НОВАЦИЯ»
Свидетельство о регистрации ЭЛ №ФС 77-62011 от 05.06.2015 г.
(выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций)

Сайт: akademnova.ru
e-mail: akademnova@mail.ru

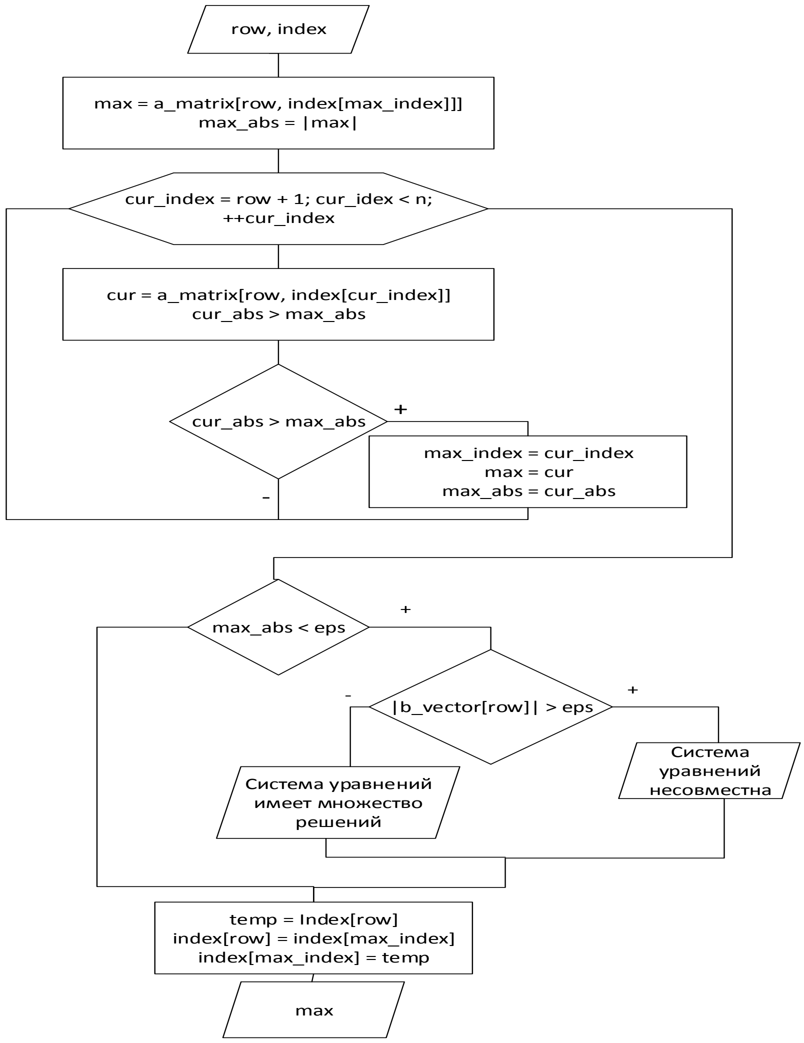


Рисунок 1. Блок-схема решения СЛАУ методом Гаусса(прямой ход)

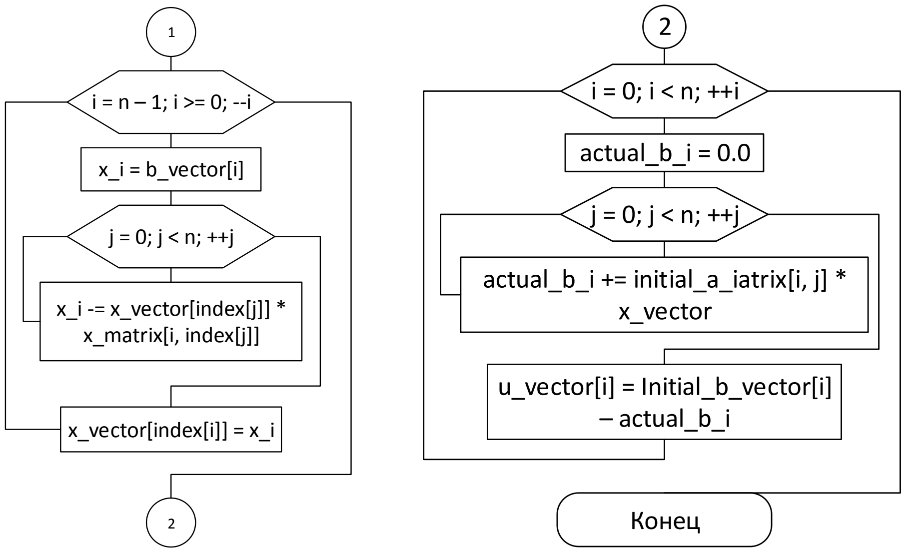


Рисунок 2. Блок-схема решения СЛАУ методом Гаусса(обратный ход)

Суть алгоритма заключается в последовательном исключении переменных из каждого уравнения до тех пор, пока в каждом уравнении не останется по одной переменной.

На этапе "прямого хода" система приводится к треугольному виду, выясняется вырожденность системы. Далее идет "обратный ход", он заключается в следующем: сначала из последнего уравнения сразу находится значение последней переменной, затем найденное значение подставляется в предпоследнее уравнение и находится значение предпоследней переменной, и так далее.

Разбиение алгоритма на две фазы позволяет значительно ускорить решение. Таким образом, если количество строк равно количеству столбцов, то алгоритм будет делать $n^3/4$ операций - это в два раза меньше алгоритма Гаусса-Жордана.

2. Пример решения СЛАУ в разработанной программе

2.1. Описание программы

В качестве среды разработки выступила среда Visual Studio 2012. Приложение написано на Windows Forms, потому что оно позволяет создавать приложения с графическим пользовательским интерфейсом. Программа не требует инсталляции и представлена в виде одного exe-файла.

2.2. Процесс решения СЛАУ

Для решения СЛАУ методом Гаусса, программа ожидает выбора количества неизвестных величин и ввода элементов системы(Рисунок 3). Результат решения СЛАУ выводится в элемент pictureBox(Рисунок 4).

Сайт: akademnova.ru
e-mail: akademnova@mail.ru

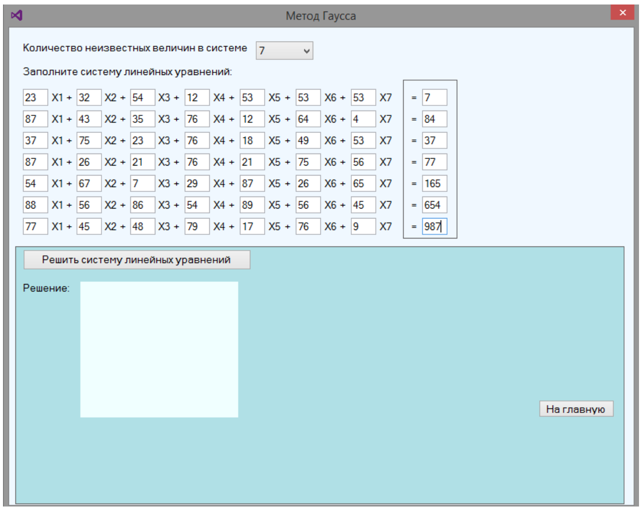


Рисунок 3. Ввод элементов СЛАУ.

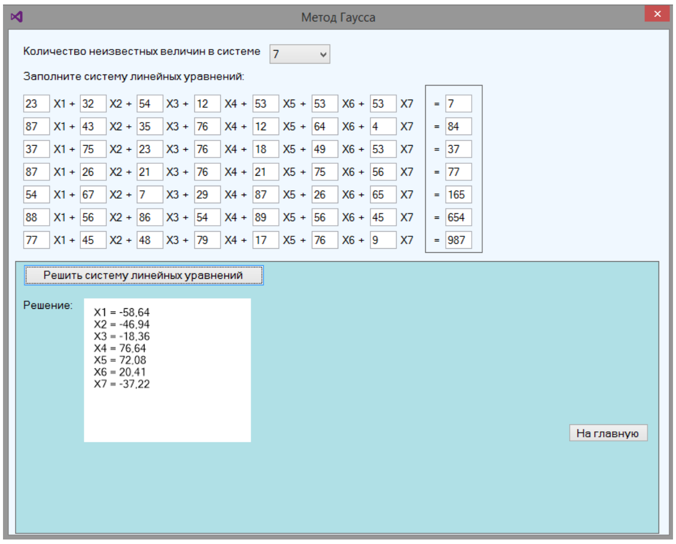


Рисунок 4. Вывод решения СЛАУ.

2.3. Исключения

Существует ряд случаев когда система уравнений не имеет решения: несовместная СЛАУ(система, не имеющая решений) и неопределенная СЛАУ(система имеющая множество решений).

Если программе на вход подана несовместная или неопределенная СЛАУ, то пользователь получит уведомление об этом(Рисунок 5).

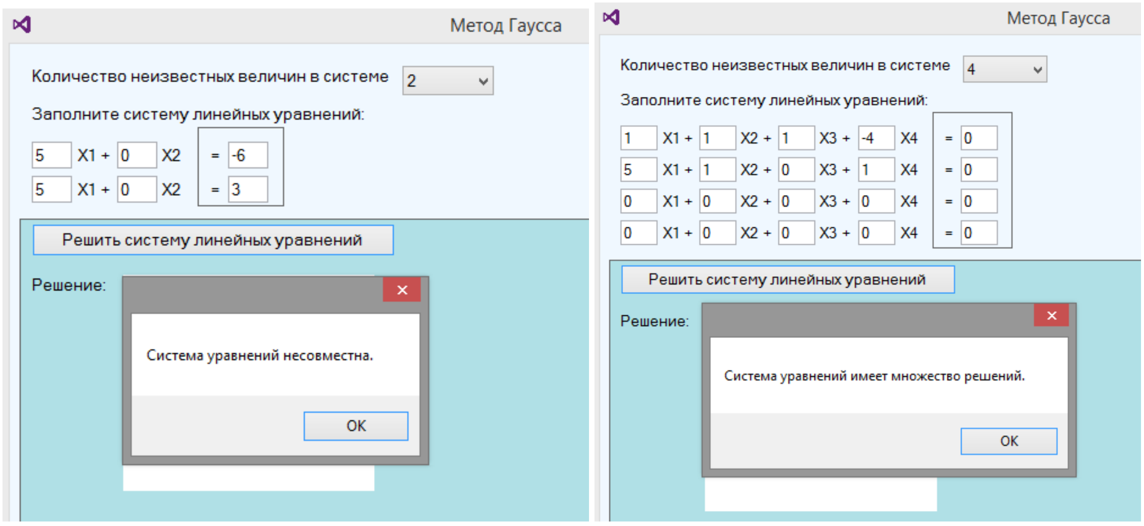


Рисунок 5. Сообщения об ошибках

В конечном итоге получилось программное обеспечение, позволяющие решать СЛАУ методом Гаусса. Результаты работы приложения полностью совпадают с результатами, полученными в популярных математических пакетах. Приложение подойдет для студентов, а так же для тех кто начал изучать тему решений СЛАУ и хотят проверить корректность своих вычислений.

Примечания

1. Википедия – свободная энциклопедия [Электронный ресурс]. - https://ru.wikipedia.org/wikiСистема_линейных_алгебраических_уравнений - (дата обращения: 14.10.2016)
2. Википедия – свободная энциклопедия [Электронный ресурс]. - https://ru.wikipedia.org/wiki/Метод_Гаусса - (дата обращения: 14.10.2016)

Всероссийское СМИ
«Академия педагогических идей «НОВАЦИЯ»
Свидетельство о регистрации ЭЛ №ФС 77-62011 от 05.06.2015 г.
(выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций)

Сайт: akademnova.ru
e-mail: akademnova@mail.ru

Список использованной литературы:

1. Ефимов А.В., Демидович Б.П. Сборник задач по математике для втузов. Часть 1. 1993.

Дата поступления в редакцию: 20.08.2017 г.
Опубликовано: 23.08.2017 г.