В. А. Жукова
Д. Б. Литвин
А. В. Шуваев

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ И ИНСТРУМЕНТАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ЭКОНОМИКИ

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ИГР И ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ. ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
СТАВРОПОЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

В. А. Жукова, Д. Б. Литвин, А. В. Шуваев

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ И ИНСТРУМЕНТАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ЭКОНОМИКИ

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ИГР И ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ. ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Учебное пособие

Ставрополь
«АГРУС»
2017

УДК 330.105
ББК 65.050;65.23
Ж86

Авторский коллектив:
Виктория Артемовна Жукова,
Дмитрий Борисович Литвин,
Александр Васильевич Шуваев

Жукова, Виктория Артемовна

Ж86 Математические и инструментальные методы экономики: Элементы теории игр и принятия решений. Задачи нелинейного программирования : учебное пособие / В. А. Жукова, Д. Б. Литвин, А. В. Шуваев. – Ставрополь : АГРУС Ставропольского гос. аграрного ун-та, 2017. – 72 с.

ISBN 978-5-9596-1398-3

Учебное пособие входит в серию методических разработок, призванных способствовать овладению студентами теоретических основ материала по применению математических и инструментальных методов в экономических исследованиях. С целью полного освоения студентами материала и выработки у них навыков решения задач по разделам теории игр и принятия решений, а также нелинейного программирования приводятся примеры задач в каждом разделе с подробным их решением. Предложены задания для решения в аудитории и для самостоятельной работы. Типовые варианты расчетно-графических работ по изучаемым разделам математики помогут преподавателям оценить уровень знаний студентов.

Предназначено для преподавателей, бакалавров, обучающихся по агроинженерным направлениям; может использоваться магистрами при изучении математических и инструментальных методов экономики.

УДК 330.105
ББК 65.050;65.23

ISBN 978-5-9596-1398-3

Содержание

Глава 1 Элементы теории игр и принятия решений

1.1 Принятие решений в условиях неопределенности. Понятие об игровых моделях

Неопределенность является характеристикой внешней среды, в которой принимается управленческое решение о развитии или функционировании экономического объекта. Внешняя среда может находиться в одном из множества возможных состояний. Таким образом, по сути, мы имеем в наличии игру, с одной стороны которой находится нами изучаемый объект или экономическая система, а с другой – конкурент в лице действительного лица, либо комплекса внешних условий, то есть теория игр изучает ситуации принятия решений несколькими взаимодействующими индивидами (агентами, участниками и т.д., в дальнейшем называемыми *игроками*). Такие ситуации часто возникают в экономической, политической, биологической и пр. обстановках. Нас будут интересовать в основном экономические и управленческие ситуации.

Классический пример – изучение олигополии, но имеется и множество других примеров – торги и аукционы, международная торговля, в микроэкономике, – доход предприятия от продажи ассортимента изделий зависит не только от установленной на него цены, но и от объема продаж; или при выборе стратегии производства товаров, выпускаемых предприятием, необходимо учитывать конкурентоспособность ассортимента товара и т.п. Поэтому теория игр стала составной частью курсов микро- и макроэкономики, отчасти их языком.

1.2 Матричная игра

Теория игр рассматривает социально-экономические ситуации, связанные с принятием решений, в которых, по крайней мере, два противника имеют конфликтующие цели. К числу типичных примеров теории игр относятся, например, борьба нескольких фирм за государственный заказ, обменные и торговые операции и др.

Во многих практических задачах возникают ситуации, когда требуется принять решение, не имея достаточной информации. Неизвестными могут быть как условия осуществления какой-либо операции, так и сознательные действия лиц, от которых зависит успех этой операции.

Ситуации, в которых сталкиваются интересы двух сторон и результат любой операции, осуществляемой одной из сторон, зависит от действий другой стороны, называются конфликтными.

Математическая модель конфликтной ситуации называется игрой, а математическая теория, помогающая принимать рациональные решения в конфликтной ситуации, − теорией игр.

Конфликтующие стороны называются игроками, а действия, которые могут выполнять игроки, − стратегиями.

От реальной ситуации игра отличается тем, что в игре противники действуют по строго определенным правилам.

Матричной игрой называется игра, осуществляемая по следующим правилам:

1. В игре участвуют два игрока;

2. Каждый из игроков обладает конечным набором стратегий;

3. Игра заключается в том, что каждый из игроков, не имея информации о действиях противника, делает один ход (выбирает одну из своих стратегий). Результатом выбора игроками стратегий является выигрыш и проигрыш в игре.

4. И выигрыш, и проигрыш выражаются числами.

Матричная игра двух игроков с нулевой суммой может рассматриваться как следующая абстрактная игра двух игроков.

Первый игрок имеет m стратегий $i=1,2,...,m$, второй имеет n стратегий $j=1,2,...,n$. Каждой паре стратегий $(i;\, j)$ поставлено в соответствие число a_{ij}, выражающее выигрыш первого игрока за счет второго игрока, если первый игрок примет свою i-ю стратегию, а второй – свою j-ю стратегию.

Каждый из игроков делает один ход: первый игрок выбирает свою i-ю стратегию $\left(i=\overline{1,\ m}\right)$, второй – свою j-ю стратегию $\left(j=\overline{1,\ n}\right)$, после чего первый игрок получает выигрыш a_{ij} за счет второго игрока (если $a_{ij}<0$, то это значит, что первый игрок платит второму сумму $\left|a_{ij}\right|$). На этом игра заканчивается.

Каждая стратегия игрока $i=\overline{1,\ m};\, j=\overline{1,\ n}$ часто называется ***чистой стратегией***.

Рассмотрим матрицу:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \multicolumn{6}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \multicolumn{6}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Проведение каждой партии матричной игры с матрицей A сводится к выбору первым игроком i-й строки, а вторым игроком j-го столбца и получения первым игроком (за счет второго игрока) выигрыша a_{ij}. Матрица A называется *платежной матрицей* игры.

Пример 1. Игра, называемая «Открывание пальцев», заключается в следующем. Два игрока одновременно из сжатого кулака правой руки открывают по нескольку пальцев. Общее количество открытых пальцев является суммой выигрыша, причем, если общее количество открытых пальцев четно, то выигрывает первый игрок, если же общее количество открытых пальцев нечетно, то выигрывает второй игрок. Составить платежную матрицу игры.

Решение. Поскольку каждый из игроков может открыть 1, 2, 3, 4 или 5 пальцев, то у каждого из них имеется по 5 соответствующих стратегий: стратегии A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 у первого игрока, и B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 - у второго. Таким образом, рассматриваемая игра является матричной игрой типа 5х5, и можно составить таблицу выигрышей, в зависимости от стратегий, применяемых игроками:

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	2	3	4	5	6
A_2	3	4	5	6	7
A_3	4	5	6	7	8
A_4	5	6	7	8	9
A_5	6	7	8	9	10

Из таблицы следует, что платежная матрица игры имеет вид:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}.$$

Для принятия оптимального управленческого решения необходимо иметь некоторый способ сравнения двух стратегий. Самый простой и естественный принцип, по которому можно их сравнить - это принцип доминирования, состоящий в следующем: если в платежной матрице ***A*** все элементы строки $A_i=\left(a_{i1},\, a_{i2},\, ...,\, a_{in}\right)$ не меньше соответствующих элементов строки $A_k=\left(a_{k1},\, a_{k2},\, ...,\, a_{kn}\right)$, по крайней мере один строго больше, то строка A_i называется ***доминирующей***, а строка A_k ***доминируемой***. Аналогичны понятия доминирующего и доминируемого столбцов.

Первому игроку невыгодно применять стратегии, которым соответствуют доминируемые строки, второму игроку невыгодно применять стратегии, которым соответствуют доминирующие столбцы, поэтому при решении игры можно уменьшить размеры платежной матрицы путем удаления из нее доминирующих столбцов и доминируемых строк.

Пример 2. Исследовать игру, заданную следующей матрицей:

$$A=\begin{pmatrix} 8 & 6 & 4 & 7 & 7 \\ 5 & 4 & 3 & 4 & 6 \\ 4 & 3 & 2 & 3 & 4 \\ 7 & 2 & 6 & 5 & 9 \end{pmatrix}.$$

Решение. 1-я строка доминирует над 2-й и 3-й, так как все ее элементы соответственно не меньше элементов 2-й и 3-й строк. Поэтому стратегии первого игрока A_2 и A_3 заведомо менее выгодны, чем A_1, и могут быть исключены. В результате получаем матрицу $\begin{pmatrix} 8 & 6 & 4 & 7 & 7 \\ 7 & 2 & 6 & 5 & 9 \end{pmatrix}$.

В этой матрице 1-й, 4-й и 5-й столбцы доминируют над 2-м. Поскольку столбцы характеризуют стратегии игрока второго игрока (*B)*, стремящегося уменьшить выигрыш игрока *A*, то эти стратегии заведомо невыгодны. После их исключения получаем матрицу $\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$, в которой нет доминирующих стратегий.

Задания для решения в аудитории

Исследуйте игры, заданные следующими матрицами:

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 10 & 8 \end{pmatrix}$.

2. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 10 & 4 & 3 & 10 \\ -2 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

3. $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 & 3 & 7 \\ 3 & 5 & 1 & 4 & 5 \\ 10 & 6 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

4. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 0 \\ 3 & 7 & 9 & 6 \\ -5 & 3 & -2 & -4 \\ 8 & 5 & -3 & -5 \end{pmatrix}$.

5. $A = \begin{pmatrix} -2 & 8 & 5 & 7 & 9 \\ -3 & 9 & 3 & 5 & 4 \\ -4 & 2 & 0 & 6 & 1 \\ 8 & 1 & 9 & 3 & 10 \\ 2 & 0 & 7 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

6. $A = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 9 & 6 & 5 \\ 6 & 2 & 5 & 7 & 7 \\ 5 & 1 & -3 & 6 & 6 \\ 4 & 0 & -5 & 5 & 6 \\ 5 & 1 & 4 & 6 & 4 \end{pmatrix}$.

1.3 Алгоритм решения матричной игры

В таблице представлены варианты решения игры, заданной платежной матрицей А.

	Наличие седловой точки	Отсутствие седловой точки
Тип стратегии	**Чистая стратегия**	**Смешанная стратегия**
Метод решения	Решение найдено	1.Через систему уравнений. 2.Графический метод. 3.Использование симплекс-метода.

Описание алгоритма

1. На основании анализа платёжной матрицы следует определить, существуют ли в ней доминируемые стратегии, и исключить их.

2. Найти верхнюю и нижнюю цены игры и определить, имеет ли данная игра седловую точку (нижняя цена игры должна быть равна верхней цене игры).

3. Если седловая точка существует, то оптимальными стратегиями игроков, являющимися решением игры, будут их чистые стратегии, соответствующие седловой точке. Цена игры равна верхней и нижней цены игры, которые равны между собой.

4. Если игра не имеет седловой точки, то решение игры следует искать в смешанных стратегиях. Для определения оптимальных смешанных стратегий в играх $m \times n$ следует использовать симплекс-метод, предварительно переформулировав игровую задачу в задачу линейного программирования.

Представим алгоритм решения матричной игры графически.

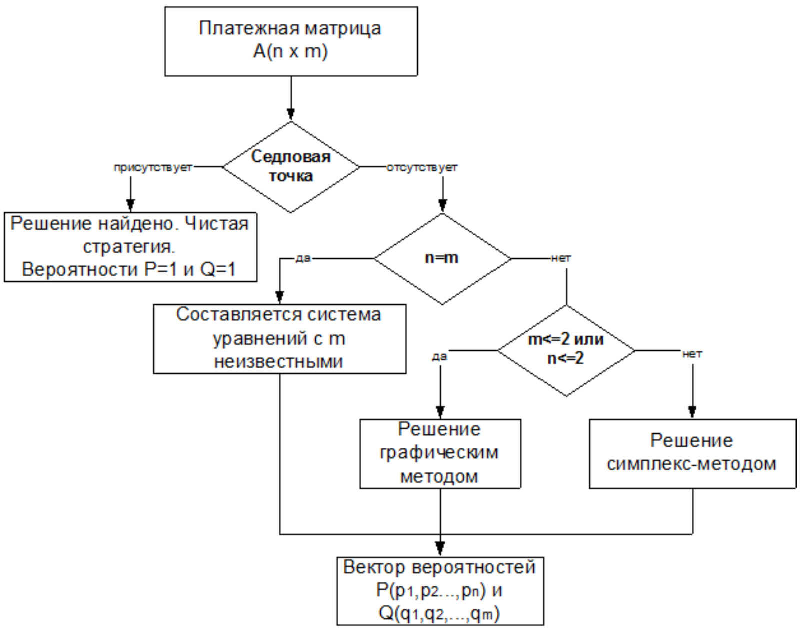


Рис. 1 - Схема решения матричной игры

Методы решения матричной игры в смешанных стратегиях

Если седловая точка отсутствует, решение игры проводят в смешанных стратегиях и решают следующими методами:

1. Решение игры через систему уравнений.

Если задана квадратная матрица $n \times n$ $(n = m)$, то вектор вероятностей можно найти, решив систему уравнений. Этот метод используется не всегда и применим только в отдельных случаях (если матрица 2×2, то решение игры получается практически всегда). Если в решении получаются отрицательные вероятности, то данную систему решают симплекс-методом.

2. Решение игры графическим методом.

В случаях, когда $n = 2$ или $m = 2$, матричную игру можно решить графически.

3. Решение матричной игры симплекс-методом.

В этом случае матричная игра сводится к задаче линейного программирования.

1.4 Решение матричных игр в чистых стратегиях

Ключевым моментом в исследовании игр является понятие оптимальных стратегий игроков. Основной метод, позволяющий найти оптимальную стратегию в условиях неопределенности, состоит в следующем: формулируется некоторая гипотеза о поведении среды, позволяющая дать единственную численную оценку каждой стратегии. Оптимальной считается та стратегия, для которой численная оценка является максимальной.

Заметим, что задание оценки каждой стратегии позволяет сравнить любые две стратегии: из двух стратегий лучшей считается та, которая имеет большую оценку (стратегии, имеющие одинаковую численную оценку, считаются эквивалентными). Таким образом, задание оценок стратегий устанавливает критерий для сравнения стратегий. Рассмотрим теперь важнейшие критерии, используемые для задач принятия решений в условиях неопределенности.

КРИТЕРИЙ ЛАПЛАСА L основан на гипотезе равновероятности применения стратегий и содержательно может быть сформулирован следующим образом: ***«поскольку мы ничего не знаем о состояниях*** **экономической** (управленческой или др.) ***среды, их*** (стратегии) ***надо считать равновероятными»***. Иногда этот принцип называется также принципом недостаточного основания. При принятии данной гипотезы в качестве оценки стратегии *i* надо брать соответствующий ей средний выигрыш, то есть:

$$L(i) = \frac{1}{m} \cdot \sum a_{ij}, \text{ где } (j = 1...m)$$

Оптимальная по данному критерию стратегия L_0 находится из условия:

$$L(i_0) = \max L(i), \text{ где } (i = 1...n)$$

КРИТЕРИЙ ГУРВИЦА G связан с введением числа $0 \le \alpha \le 1$, называемого «показателем пессимизма-оптимизма». Гипотеза о поведении среды состоит в том, что наихудший вариант реализуется с вероятностью α, а наилучший - с вероятностью $(1-\alpha)$. Тогда оценкой стратегии i является число $G(i) = \alpha$. При α=1 данный критерий превращается в критерий крайнего пессимизма (критерий Вальда), а при $\alpha = 0$ - в критерий крайнего оптимизма. Содержательная трудность при использовании критерия Гурвица - назначение показателя пессимизма.

КРИТЕРИЙ ВАЛЬДА V (принцип гарантированного результата) основан на гипотезе крайней осторожности (крайнего пессимизма), которая формулируется так: ***«при выборе той или иной стратегии надо рассчитывать на худший из возможных вариантов».*** Если принять эту гипотезу, то оценкой стратегии i является число

$$V(i) = \min a_{ij}, \text{ где } (j = 1...m)$$

Исходя из этих позиций, 1-й игрок исследует матрицу выигрышей A следующим образом: для каждого значения i $(i=\overline{1,m})$ определяется минимальное значение выигрыша в зависимости от применяемых стратегий 2-го игрока

$$\min_j a_{ij} \quad (i = 1,\ ...,\ m),$$

то есть определяется минимальный выигрыш для 1-го игрока при условии, что он примет свою i-ю чистую стратегию, затем из этих минимальных выигрышей отыскивается такая стратегия $i = i_0$, при которой этот минимальный выигрыш будет максимальным, то есть находится следующим образом:

$$\max_i \min_j \ a_{ij} = a_{i_0 j_0} = \underline{\alpha} \tag{1}$$

Выбранную с его использованием стратегию называют ***максиминной***, а полученный в результате ее применения выигрыш называют ***максиминным***, или ***нижней ценой игры.***

Число $\underline{\alpha}$, определенное по формуле (1), называется ***нижней чистой ценой игры*** и показывает, какой минимальный выигрыш может гарантировать себе 1-й игрок, применяя свои чистые стратегии при всевозможных действиях 2-го игрока.

Если значения функции выигрыша имеют характер потерь (то есть, фактически они являются не выигрышами, а проигрышами), то оценкой стратегии i для второго игрока является:

$$\min_j \max_i \ a_{ij} = a_{i_0 j_0} = \overline{\alpha} \tag{2}$$

Число $\overline{\alpha}$, определяемое по формуле *(2)*, называется ***чистой верхней ценой игры*** и показывает, какой максимальный выигрыш первому игроку за счет своих стратегий может гарантированно не допустить 2-й игрок.

Применяя свои чистые стратегии, 1-й игрок может обеспечить себе выигрыш не меньше $\underline{\alpha}$, а 2-й игрок за счет применения своих чистых стратегий может не допустить выигрыш 1-го игрока больше, чем $\overline{\alpha}$.

Максиминные стратегии игроков становятся устойчивыми, пока оба игрока их придерживаются и выигрыш одного из них равен проигрышу другого. Такая игра, где $\underline{\alpha} = \overline{\alpha}$, имеет ***седловую точку*** в чистых стратегиях и ***чистую цену*** игры: $\upsilon = \underline{\alpha} = \overline{\alpha}$.

Седловая точка – это пара чистых стратегий (i_0, j_0) соответственно игроков 1-го и 2-го, при которых достигается равенство $\underline{\alpha} = \overline{\alpha}$.

В это понятие вложен следующий смысл: если один из игроков придерживается стратегии, соответствующей седловой точке, то другой игрок не сможет поступить лучше, чем придерживаться стратегии, также соответствующей седловой точке.

Пример 3. Горный курорт предлагает четыре вида экскурсионных троп, начинающихся соответственно от I, II, III и IV уровней канатной дороги. Количество комплектов с провиантом и необходимыми приспособлениями, а также цена на них зависят от высоты, на которой расположены тропы. Причем, решение о продолжении похода и переходе на следующую тропу группа принимает в пути. Исходные данные для составления платежной матрицы игры даны в таблице.

Уровни дороги	***I***	***II***	***III***	***IV***
Комплектов, шт.	3	7	12	17
Цена, руб. за комплект	100	150	200	250

Необходимые турнаборы можно закупить перед походом по цене в 100 руб. за комплект.

Определить оптимальную стратегию в закупке наборов до начала похода, если на фиксированную группу в зависимости от уровня дороги необходимо: A_1 – 3 комплекта, A_2 – 7 комплектов, A_3 – 12 комплектов, A_4 – 17 комплектов.

Решение. Для составления платежной матрицы надо рассчитать затраты на покупку турнаборов в расчете на высотность похода с учетом данных таблицы.

Обозначим высотность маршрутов в соответствии с нумерацией уровней канатной дороги: I – B_1, II – B_2, III – B_3, IV – B_4.

Заполняем платежную матрицу.

Стратегии закупки	комплекты	Категории маршрутов			
		B_1	B_2	B_3	B_4
		I 3	II 7	III 12	IV 17
A_1	3				
A_2	7				
A_3	12				
A_4	17				

1. Для стратегии закупки A_1 рассмотрим четыре случая.

Случай A_1B_1. Затраты составят 300 (руб.).

Случай A_1B_2. При выходе на II маршрут потребуется 7 турнаборов, то есть придется докупить 4 комплекта (к 3-м приобретенным ранее по цене 100 руб.) уже по 150 руб. за комплект. Тогда затраты составят: $3\cdot 100+4\ \cdot 150=900$ (руб.).

Случай A_1B_3. На III маршруте к закупленным 3 комплектам по 100 руб. придется докупать на месте 9 комплектов по цене 200 руб. за штуку. Затраты составят: $3\cdot 100+9\cdot 200=2100$ (руб.).

Случай A_1B_4. К закупленным 3-м комплектам по 100 руб. при выходе на IV маршрут необходимо докупить 14 турнаборов по 250 руб. за комплект. Затраты составят: $3\cdot 100+14\cdot 250=4050$ (руб.).

2. Для стратегии закупки турнаборов A_2 тоже рассматриваем четыре случая.

Случай A_2B_1. Закупить перед выходом 7 комплектов по 100 руб., остатки использовать для пешего возвращения на базу. Затраты составят: $7\cdot 100=700\,руб.$

Случай A_2B_2. Закупить перед выходом 7 комплектов по 100 руб. Затраты составят: $7\cdot 100=700$ (руб.).

Случай A_2B_3. К закупленным перед выходом к 7-ми комплектам по 100 руб. за штуку при выходе на III маршрут придется докупить 5 комплектов по 200 руб. за штуку. Затраты составят: $7\cdot 100+5\cdot 200=1700$ (руб.).

Случай A_2B_4. Закупить перед выходом 7 комплектов по 100 руб. и в случае необходимости докупить 10 турнаборов по цене 250 руб. Затраты составят: $7\cdot 100+10\cdot 250=3200$ (руб.).

3. Для стратегий A_3 и A_4 в закупке турнаборов расчеты аналогичны.

Случай A_3B_1. Закупить наборы из расчета на выход к III маршруту. Затраты составят $12\cdot 100=1200$ (руб.).

Случай A_3B_2. Аналогично. Затраты составят $12\cdot 100=1200$ (руб.).

Случай A_3B_3. Затраты составят $12\cdot 100=1200$ (руб.).

Случай A_3B_4. Закупив 12 комплектов по 100 руб., придется докупить 5 комплектов по 250 руб. за комплект. Затраты составят $12\cdot 100+5\cdot 250=2450$ (руб.).

Случай A_4B_1. Закупить необходимые для IV маршрута наборы до подъема по 100 руб. за комплект. Затраты составят $17\cdot 100=1700$ (руб.).

Случай A_4B_2. Затраты составят $17\cdot 100=1700$ (руб.).

Случай A_4B_3. Затраты составят $17 \cdot 100 = 1700$ (руб.).

Случай A_4B_4. Затраты составят $17 \cdot 100 = 1700$ (руб.).

Платежная матрица составлена.

Стратегии закупки		Категории маршрутов			
		B_1	B_2	B_3	B_4
		I	II	III	IV
A_1	3	300	900	2100	4050
A_2	7	700	700	1700	3200
A_3	12	1200	1200	1200	2450
A_4	17	1700	1700	1700	1700

Стратегии закупки		Категории маршрутов				minα	maxminα
		B_1	B_2	B_3	B_4		
		I	II	III	IV		
A_1	3	300	900	2100	4050	300	
A_2	7	700	700	1700	3200	700	
A_3	12	1200	1200	1200	2450	1200	
A_4	17	1700	1700	1700	1700	1700	1700
maxβ		1700	1700	2100	4050		
minmax β		1700	1700				

Нижней ценой игры будет являться значение $\alpha = \max$ (300, 700, 1200, 1700) = 1700.

Верхней ценой игры будет являться значение $\beta = \min$(1700, 1700, 2100, 4050) = 1700.

Следовательно, так как $\alpha = \beta$ игра имеет седловую точку, которая и является решением задачи. Это точка (A_4B_2). Таким образом, наличие седловой точки указывает на то, что следует производить закупку турнаборов в расчете на подъем по IV маршруту. При этом затраты не превысят 1700 рублей.

Задания для решения в аудитории

1. Найти нижнюю и верхнюю цены игры с платежной матрицей

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

2. Для отопления помещения надо заготовить топливо. Расход топлива и цены на него зависят от погоды в зимнее время. Зима может быть мягкой, нормальной и суровой. Исходные данные для составления платежной матрицы игры в таблице.

Показатели	Зима		
	мягкая	нормальная	суровая
Расход, т	7	12	20
Цена, руб. за 1 т	200	300	400

Летом можно уголь закупить по минимальной цене 200 рублей, а неиспользованный остаток продавать весной по 100 рублей за тонну. Определите оптимальную стратегию в закупке топлива: A_1 – 7 т, A_2 – 12 т и A_3 – 20 т.

Рассчитайте оптимальные *затраты (выберите оптимальную стратегию закупки топлива*) на покупку топлива в расчете на одно помещение с учетом данных таблицы. (Обозначим состояние погоды (*стратегии погоды*) зимой: мягкая зима – B_1, нормальная – B_2, суровая – B_3.)

3. Два предприятия, производящие шкафы-купе, конкурируют между собой за рынок сбыта. Стратегии, которыми могут воспользоваться оба предприятия, заданы следующей матрицей:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 6 & 3\\ 5 & 4 & 7 & 9\\ 3 & 2 & 8 & 10\\ 1 & 3 & 1 & 2\end{pmatrix}.$$

Определите, какие стратегии являются наиболее выгодными для предприятий.

3. Генеральные директора компаний Motorola и Samsung на корпоративной вечеринке поспорили о том, чья компания останется в выигрыше при продаже новой серии сотовых телефонов. Стратегии, среди которых компании должны выбрать свою, представлены в матрице Y. Определите наиболее выгодную из стратегий для каждого предприятия, а также цену игры.

$$Y=\begin{pmatrix}7 & 3 & 2 & 6\\ 6 & 5 & 7 & 8\\ 7 & 1 & 3 & 5\\ 5 & 2 & 1 & 4\end{pmatrix}.$$

1.5 Смешанные стратегии в матричных играх

Если партнеры играют только один раз, то игрокам целесообразно придерживаться принципа минимакса, как в игре с седловой точкой, так и в игре без седловой точки. В случае многократного повторения игры с седловой точкой игрокам также целесообразно придерживаться принципа минимакса.

Если же многократно повторяется игра без седловой точки, то постоянное использование минимаксных стратегий становится невыгодным.

Для многократно повторяемых игр без седловой точки вводится следующее определение.

В играх, которые повторяются многократно, каждая из стратегий применяемые игроками называется ***чистой*** стратегией.

Смешанная стратегия игрока – это вероятностная комбинация чистых стратегий, то есть чистых стратегий, взятых в случайном порядке с некоторыми вероятностями.

Замечание. Каждая чистая стратегия является частным случаем смешанной стратегии, когда одна из стратегий применяется с вероятностью 1, а все остальные − с вероятностью 0.

Стратегии, входящие с ненулевыми вероятностями в оптимальную стратегию игрока, называются ***активными***.

Подобно играм, имеющим седловые точки в чистых стратегиях, вводится следующее определение: ***оптимальными смешанными стратегиями*** игроков A и B называются такие наборы x^*, y^* соответственно, которые удовлетворяют равенству:

$$\min_y \max_x M(A,\ x,\ y) = \max_x \min_y M(A,\ x^*,\ \ y^*).$$

Величина $M\left(A, x^*, y^*\right)$ называется при этом ***ценой игры*** и обозначается через v.

Таким образом, решение матричной игры сводится к нахождению неотрицательных параметров решений системы ограничений. Однако это требует большого объема вычислений, которое растет с увеличением числа чистых стратегий игроков. Поэтому в первую очередь следует, по возможности, уменьшить число чистых стратегий игроков.

Отметим, что исключение доминируемых (*не строго*) стратегий может привести к потере некоторых решений. Если же исключаются только строго доминируемые стратегии, то множество решений игры не изменится.

В 1928 году фон Нейманом была доказана основная теорема теории игр, утверждающая, что каждая игра имеет, по крайней мере, одно решение, возможно, в области смешанных стратегий.

Поскольку все чистые стратегии являются частными случаями смешанных стратегий, то из основной теоремы теории игр можно получить

Следствие 1. Любая игра имеет цену.

Следствие 2. Цена игры удовлетворяет неравенству $\underline{\alpha} \le \nu \le \overline{\alpha}$.

Следствие 3. Средний выигрыш остается равным цене игры, если один из игроков придерживается своей оптимальной стратегии, а другой игрок применяет свои активные стратегии с любыми вероятностями.

1.6 Аналитический метод решения игры типа 2 х 2

Рассмотрим игру без седловой точки типа 2 х 2 с платежной матрицей:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Оба игрока имеют только такие оптимальные стратегии, которые используют все свои чистые стратегии с положительными вероятностями. В противном случае один из игроков (например, 1) имеет чистую оптимальную стратегию, а другой - только смешанные.

Найдем оптимальную стратегию игрока *A*. Согласно следствию 3 из основной теоремы теории игр эта стратегия обеспечивает игроку *A* выигрыш, равный цене игры *V*, даже если игрок *B* не выходит за пределы своих активных стратегий. В данной игре обе чистые стратегии игрока *B* являются активными, поскольку в противном случае игра имела бы решение в области чистых стратегий, то есть была бы игрой с седловой точкой.

Пусть $X=(\mathrm{p}_1,\mathrm{p}_2)$ - оптимальная стратегия игрока 1. Отсюда вытекает, что неизвестные p_1, p_2, V удовлетворяют следующей системе из трех линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}p_1+a_{21}p_2=V, \\ a_{12}p_1+a_{22}p_2=V, \\ \quad p_1+\quad p_2=1, \end{cases}$$

Решение данной системы имеет вид:

$$\begin{cases} p_1=\dfrac{a_{22}-a_{21}}{a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}}, \\ p_2=\dfrac{a_{11}-a_{12}}{a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}}, \\ V=\dfrac{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}{a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}}. \end{cases}$$

Аналогичные рассуждения приводят нас к тому, что оптимальная стратегия игрока $2-Y=(\mathrm{q}_1,\mathrm{q}_2)$ удовлетворяет системе уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}q_1+a_{12}q_2=V, \\ a_{21}q_1+a_{22}q_2=V, \\ \quad q_1+\quad q_2=1, \end{cases}$$

Решение системы имеет вид:

$$\begin{cases} q_1=\dfrac{a_{22}-a_{12}}{a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}}, \\ q_2=\dfrac{a_{11}-a_{21}}{a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}}, \\ V=\dfrac{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}{a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}}. \end{cases}$$

1.7 Решение игр вида $2\times n$ и $m\times 2$. Графический метод

У таких игр всегда имеется решение, содержащее не более двух активных стратегий для каждого из игроков. Если найти эти активные стратегии, то игра $2\times n$ или $m\times 2$ сводится к игре 2×2, которую мы уже умеем решать. Поэтому игры $2\times n$ и $m\times 2$ решают обычно графо-аналитическим методом. Рассмотрим решение матричной игры на примере.

Пример 4.

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Решение.

				$\underline{\alpha}$
	1 6	4 3	7 2	1 2
$\overline{\alpha}$	6	4	7	2 4

$\underline{\alpha}=2, \overline{\alpha}=4$ то есть $\underline{\alpha}\neq\overline{\alpha}$, поэтому игра не имеет седловой точки, и решение должно быть в смешанных стратегиях.

1. Строим графическое изображение игры (рисунок 2).

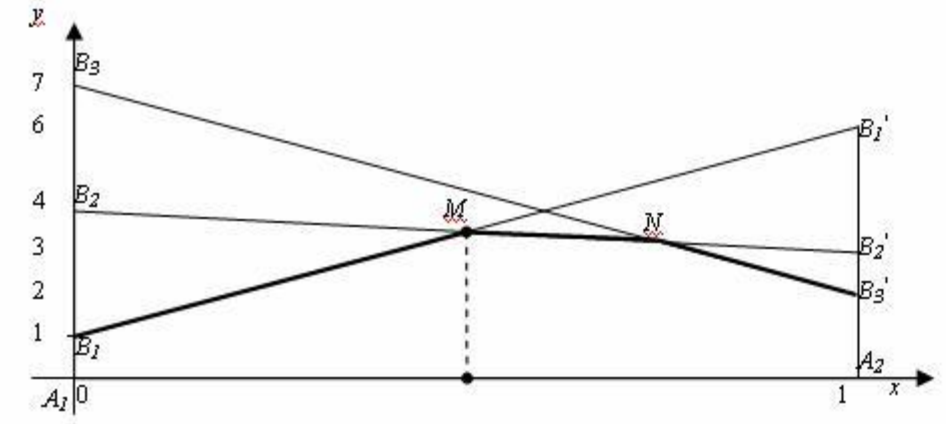


Рис. 2 – Графическое изображение игры

Если игрок *B* применяет стратегию B_1, то выигрыш игрока *A* при применении стратегии A_1 равен $a_{11}=1$, а при использовании A_2 выигрыш равен $a_{21}=6$, поэтому откладываем отрезки $A_1B_1=1, A_2B_1'=6$ на перпендикулярах в A_1 и A_2 и соединяем их отрезком. Аналогично для стратегий B_2 и B_3 строим отрезки $B_2\,B_2'$ и $B_3\,B_3'$.

2. Выделяем нижнюю границу выигрыша $B_1M\ N\ B_3'$ и находим наибольшую ординату этой нижней границы, ординату точки *M*, которая равна цене игры ν.

3. Определяем пару стратегий, пересекающихся в точке оптимума M.В этой точке пересекаются отрезки B_2B_2' и B_1B_1', соответствующие стратегиям B_1 и B_2 игрока B. Следовательно, стратегию B_3 ему применять невыгодно. Исключаем из матрицы третий столбец и решаем игру 2×2 аналитически:

$$\begin{cases} p_1 + 6p_2 = v; \\ 4p_1 + 3p_2 = v; \\ p_1 + p_2 = 1. \end{cases} \qquad \begin{aligned} &p_1 + 6p_2 = 4p_1 + 3p_2; \\ &3p_2 = 3p_1; \\ &p_1 = p_2 = \frac{1}{2}. \end{aligned} \qquad v = \frac{1}{2} + \frac{6}{2} = \frac{7}{2}$$

$$\begin{cases} q_1 + 4q_2 = \dfrac{7}{2}; \\ q_1 + q_2 = 1; \end{cases} \qquad 3q_2 = \frac{5}{2};\ q_2 = \frac{5}{6};\ q_1 = \frac{1}{6}.$$

Ответ: $\gamma = \frac{7}{2};\ P_A = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right);\ Q_B = \left(\frac{1}{6}; \frac{5}{6}; 0\right)$.

Задания для решения в аудитории

1. Решить задачу с платежной матрицей 2×2 аналитическим методом.

$$A = \begin{pmatrix} 12 & 22 \\ 32 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Составить платежную матрицу и решить игру.

Швейное предприятие реализуется свою продукцию через магазин. Сбыт зависит от состояния погоды. В условиях теплой погоды предприятие реализует *1000* костюмов и *2300* платьев, а при прохладной погоде - *1400* костюмов и *700* платьев. Затраты на изготовление одного костюма равны *20* , а платья - *5* рублям, цена реализации соответственно равна 40 рублей и 12 рублей. Определить оптимальную стратегию предприятия.

3. Решить задачи теории игр графическим методом.

Пусть игра задана матрицей:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 & 3 \\ 6 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

4. Найти оптимальные стратегии игроков и определить цену игры.

Обувная фабрика планирует выпуск моделей обуви A и B. Спрос на эту продукцию неопределен, однако можно предположить, что он может принимать одно из двух состояний (1 и 2). В зависимости от этих состояний прибыль предприятия различна и определяется матрицей $A = \begin{pmatrix} 52 & 22 \\ 22 & 49 \end{pmatrix}$. Найдите оптимальное соотношение между объемами выпуска каждой из моделей, при котором предприятию гарантируется средняя величина прибыли при любом состоянии спроса.

1.8 Приведение матричной антагонистической игры к задачам линейного программирования

Алгоритм поиска решения матричной антагонистической игры, заданной платежной матрицей, имеющей размерность $m \times n$ при больших значениях m и n, сводится к алгоритму симплекс-метода решения пары взаимодвойственных задач линейного программирования. Покажем, как привести конечную матричную антагонистическую игру к двум взаимодвойственных задачам линейного программирования.

Пусть антагонистическая игра задана платёжной матрицей A, имеющей размерность $m \times n$, и эта игра является не вполне определённой. Необходимо найти решение игры, то есть определить оптимальные смешанные стратегии первого и второго игроков:

$$P^* = \left(p_1^*, p_2^*, ..., p_m^*\right), \; Q^* = \left(q_1^*, q_2^*, ..., q_n^*\right),$$

где P^* и Q^* - векторы, компоненты которых p_i^* и p_j^* характеризуют вероятности применения чистых стратегий i и j соответственно первым и вторым игроками и соответственно для них выполняются соотношения:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} q_1^* & q_2^* & \ldots & q_n^* \end{array} \\ \begin{array}{c} p_1^* \\ p_2^* \\ . \\ p_m^* \end{array} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{array}$$

$$p_1^* + p_2^* + \ldots + p_m^* = 1, \; q_1^* + q_2^* + \ldots + q_n^* = 1$$

Найдём сначала оптимальную стратегию первого игрока P^*. Эта стратегия должна обеспечить выигрыш первому игроку не меньше V, то есть больше или равно V, при любом поведении второго игрока, и выигрыш, равный V , при его оптимальном поведении, то есть при стратегии Q*.

Цена игры V нам пока неизвестна. Без ограничения общности, можно предположить её равной некоторому положительному числу $V > 0$. Действительно, для того, чтобы выполнялось условие $V > 0$, достаточно, чтобы все элементы матрицы A были неотрицательными. Этого всегда можно добиться с помощью аффинных преобразований: прибавляя ко всем элементам матрицы A одну и ту же достаточно большую положительную константу M; при этом цена игры увеличится на M, а решение не изменится. Итак, будем считать $V > 0$. Предположим, что первый игрок A применяет свою оптимальную стратегию P^*, а второй игрок B свою чистую стратегию j - ю, тогда средний выигрыш (математическое ожидание) первого игрока A будет равен:

$$a_j = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} p_i^* = a_{1j} p_1^* + a_{2j} p_2^* + \ldots + a_{mj} p_m^*.$$

Оптимальная стратегия первого игрока (A) обладает тем свойством, что при любом поведении второго игрока (B) обеспечивает выигрыш первому игроку, не меньший, чем цена игры V; значит, любое из чисел a_j не может быть меньше V ($\geq V$). Следовательно, при оптимальной стратегии, должна выполняться следующая система неравенств:

$$\begin{cases} a_{11}p_1^* + a_{21}p_2^* + \ldots + a_{m1}p_m^* \geq V, \\ a_{12}p_1^* + a_{22}p_2^* + \ldots + a_{m2}p_m^* \geq V, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{1n}p_1^* + a_{2n}p_2^* + \ldots + a_{mn}p_m^* \geq V. \end{cases} \tag{1}$$

Разделим неравенства (1) на положительную величину V (правые части системы (1)) и введём обозначения:

$$y_1 = \frac{p_1^*}{V}, y_2 = \frac{p_2^*}{V}, \ldots, y_m = \frac{p_m^*}{V} \tag{2}$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, \ldots, y_m \geq 0, \tag{3}$$

Тогда условия (1) запишутся в виде:

$$\begin{cases} a_{11}V_1 + a_{21}V_2 + \ldots + a_{m1}V_m \geq 1, \\ a_{12}V_1 + a_{22}V_2 + \ldots + a_{m2}V_m \geq 1, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{1n}V_1 + a_{2n}V_2 + \ldots + a_{mn}V_m \geq 1. \end{cases} \tag{4}$$

где $y_1, y_2, \ldots, y_m$ - неотрицательные переменные. В силу (2) и того, что $p_1^* + p_2^* + \ldots + p_m^* = 1$ переменные $y_1, y_2, \ldots, y_m$ удовлетворяют условию, которое обозначим через F:

$$F = y_1 + y_2 + \ldots + y_m = \frac{1}{V} \tag{5}$$

Поскольку первый игрок свой гарантированный выигрыш старается сделать максимально возможным, очевидно, при этом правая часть (5) $\frac{1}{V} \to V$ - принимает минимальное значение.

Таким образом, задача решения антагонистической игры для первого игрока свелась к следующей математической задаче: определить неотрицательные значения переменных $y_1, y_2, \ldots, y_m$, чтобы они удовлетворяли системе функциональных линейных ограничений в виде неравенств, системе общих ограничений и минимизировали целевую функцию F:

$$F = y_1 + y_2 + \ldots + y_m \to \min$$

Это типичная задача линейного программирования (двойственная) и она может быть решена симплекс - методом. Таким образом, решая задачу линейного программирования, мы можем найти оптимальную стратегию $P^* = \left(p_1^*, p_2^*, \ldots, p_m^*\right)$ игрока А.

Найдём теперь оптимальную стратегию $Q^* = \left(q_1^*, q_2^*, \ldots, q_n^*\right)$ игрока B. Всё будет аналогично решению игры для игрока A, с той разницей, что игрок B стремиться не максимизировать, а минимизировать выигрыш (по сути дела его проигрыш), а значит, не минимизировать, а максимизировать величину $\frac{1}{V}$, т.к. $V \to \min$. Вместо условий (4) должны выполняться условия:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le 1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le 1, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le 1. \end{cases} \tag{6}$$

где

$$x_1 = \frac{q_1^*}{V}, x_2 = \frac{q_2^*}{V}, \ldots, x_n = \frac{q_n^*}{V}, \tag{7}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0 \tag{8}$$

Требуется так выбрать переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$, чтобы они удовлетворяли условиям (6), (8) и обращали в максимум линейную функцию цели F':

$$F' = x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \frac{1}{V} \to \max$$

Таким образом, задача решения антагонистической игры для второго игрока свелась к следующей математической задаче: определить неотрицательные значения переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, чтобы они удовлетворяли системе функциональных линейных ограничений в виде неравенств (6), системе общих ограничений (8) и максимизировать целевую функцию F':

$$F' = x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \frac{1}{V} \to \min$$

Это типичная задача линейного программирования (прямая) и она может быть решена симплекс - методом. Таким образом, решая прямую задачу линейного программирования, мы можем найти оптимальную стратегию $Q^* = \left(q_1^*, q_2^*, \ldots, q_n^*\right)$ игрока B.

Подведём итог.

Задача второго игрока минимизация проигрыша V	**Задача первого игрока максимизация выигрыша V**
1	*2*
Целевая функция	
$F' = x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \frac{1}{V} \to \max$	$F' = y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_m = \frac{1}{V} \to \min$

1	2
Функциональные ограничения	
$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le 1$ $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le 1$ . . . . $a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le 1$	$a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m \ge 1$ $a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m2}y_m \ge 1$ . . . . . . $a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m \ge 1$
Общие (прямые) ограничения	
$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0$	$y_1 \ge 0, y_2 \ge 0, \ldots, y_m \ge 0$

Задачи обоих игроков образуют пару симметричных взаимо двойственных задач линейного программирования, и, поэтому нет необходимости решать обе эти задачи, т.к. найдя решение одной из них, можно найти и решение другой.

Пример 5. Решить игру с матрицей:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0,3 & 0,5 \\ 0,6 & 0,1 & -0,1 \\ 0,4 & 0,2 & 0,1 \end{pmatrix}$$

Решение.

1. В соответствии с алгоритмом определим, существуют ли в ней доминируемые стратегии, чтобы исключить их. Доминируемых стратегий нет.

2. Поскольку матрица содержит отрицательные числа, то нужно добиться, чтобы все её элементы были неотрицательны, прибавив ко всем её элементам число, равное модулю наименьшего числа матрицы. Минимальный элемент матрицы равен -0,1, его модуль равен 0,1. Прибавим ко всем элементам платёжной матрицы число, равное 0,1, в результате получим:

$$\begin{pmatrix} 0,1 & 0,4 & 0,6 \\ 0,7 & 0,2 & 0 \\ 0,5 & 0,3 & 0,2 \end{pmatrix}$$

Умножим все элементы полученной матрицы на 10, чтобы удобнее проводить последующие вычисления.

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 7 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Проведённые аффинные преобразования на оптимальных стратегиях не скажутся, а цену игры мы восстановим, сделав обратные преобразования (разделим полученную сумму на 10 и отнимем 0,1).

Припишем строкам вероятности p_1, p_2, p_3.

$$\begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 7 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Тогда среднее значение (математическое ожидание) выигрыша игрока *A* при применении игроком *B* своей первой стратегии равен: $1\cdot p_1+7\cdot p_2+5\cdot p_3$ (первый столбец поэлементно умножаем на вероятности p_1, p_2, p_3 и полученные произведения суммируем).

Этот выигрыш не может быть меньше гарантированной цены игры *V*: $1\cdot p_1+7\cdot p_2+5\cdot p_3 \ge V$. Аналогично для других стратегий игрока *B*.

$$\begin{cases} p_1+7\cdot p_2+5\cdot p_3 \ge V, \\ 4\cdot p_1+2\cdot p_2+3\cdot p_3 \ge V, \\ 6\cdot p_1+2\cdot p_2+p_3 \ge V, \\ p_i \ge 0, \quad i=1,2,3. \end{cases}$$

Разделим обе части неравенства на *V* и введём обозначения $y_i=\dfrac{p_i}{V}$ $(i=1,2,3)$:

$$\begin{cases} y_1+7\cdot y_2+5\cdot y_3 \ge 1, \\ 4\cdot y_1+2\cdot y_2+3\cdot y_3 \ge 1, \\ 6\cdot y_1+2\cdot y_2+y_3 \ge 1, \\ y_i \ge 0, \quad i=1,2,3. \end{cases}$$

$$F=y_1+y_2+y_3=\frac{(p_1+p_2+p_3)}{V}=\frac{1}{V}$$

Игрок *A* стремиться повысить цену игры ($V\to\max$). Поэтому $F\to\min$.

Получили задачу линейного программирования: $F=y_1+y_2+y_3\to\min$

$$\begin{cases} y_1+7\cdot y_2+5\cdot y_3 \ge 1, \\ 4\cdot y_1+2\cdot y_2+3\cdot y_3 \ge 1, \\ 6\cdot y_1+2\cdot y_3 \ge 1, \\ y_i \ge 0, \quad i=1,2,3. \end{cases}$$

Аналогично припишем столбцам вероятности q_1, q_2, q_3

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} q_1 & q_2 & q_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 7 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Тогда средний проигрыш игрока *B* при применении игроком *A* его первой стратегии равен: $1\cdot q_1+4\cdot q_2+6\cdot q_3$ (первую строку поэлементно умножаем на вероятности q_1, q_2, q_3 и полученные произведения суммируем).

Этот проигрыш не может быть больше цены игры *V*: $1\cdot q_1+4\cdot q_2+6\cdot q_3\le V$. Аналогично для других стратегий игрока *A*.

$$\begin{cases} q_1+4\cdot q_2+6\cdot q_3\le V, \\ 7\cdot q_1+2\cdot q_2+0\cdot q_3\le V, \\ 5\cdot q_1+3\cdot q_2+2\cdot q_3\le V, \\ q_i\ge 0,\quad i=1,2,3. \end{cases}$$

Разделим обе части неравенств на *V* и введём обозначения $x_i=\dfrac{q_i}{V}\quad (i=1,2,3)$

$$\begin{cases} x_1+4\cdot x_2+6\cdot x_3\le 1, \\ 7\cdot x_1+2\cdot x_2+0\cdot x_3\le 1, \\ 5\cdot x_1+3\cdot x_2+2\cdot x_3\le 1, \\ x_i\ge 0,\quad i=1,2,3. \end{cases}\qquad F'=x_1+x_2+x_3=\frac{(q_1+q_2+q_3)}{V}=\frac{1}{V}$$

Игрок *B* стремится понизить цену игры ($V\to\min$), поэтому $F'\to\max$. Получили задачу линейного программирования: $F'=x_1+x_2+x_3\to\max$.

$$\begin{cases} x_1+4\cdot x_2+6\cdot x_3\le 1, \\ 7\cdot x_1+2\cdot x_2+0\cdot x_3\le 1, \\ 5\cdot x_1+3\cdot x_2+2\cdot x_3\le 1, \\ x_i\ge 0,\quad i=1,2,3. \end{cases}$$

Полученные задачи являются взаимно двойственными задачами линейного программирования. Решим любую из них симплекс-методом. Окончательный результат - таблица имеет следующий вид:

y_1	$3/28$		$p_1=$	$3/8$
y_2	0		$p_2=$	0
y_3	$5/28$		$p_3=$	$\frac{5}{8}$
F'	$2/7$		$V=$	$3\cdot(1/2)$
x_1	$1/7$		$q_1=$	$1/2$
x_2	0		$q_2=$	0
x_3	$1/7$		$q_3=$	$1/2$
F	$2/7$		$V=$	$3\cdot(1/2)$

Итак, оптимальные стратегии: $P^*=\left(\frac{3}{8};0;\frac{5}{8}\right)$, $Q^*=\left(\frac{1}{2};0;\frac{1}{2}\right)$, цена игры: для модифицированной задачи $V = 3{,}5$, а для исходной задачи $V' = \dfrac{3{,}5}{10 - 0{,}1} = 0{,}25.$

Задания для решения в аудитории

Решить задачу. При необходимости свести задачу теории игр к задаче линейного программирования и решить ее.

1. Дана матрица игры. Привести игру к задаче линейного программирования. Решить игру в смешанных стратегиях.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 & 5 \\ 6 & 2 & 4 & 6 \\ 3 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

2. Предприятие имеет возможность самостоятельно планировать объемы выпуска сезонной продукции Π_1, Π_2, Π_3. Не проданная в течение сезона продукция позже реализуется по сниженной цене. Данные о себестоимости продукции, отпускных ценах и объемах реализации в зависимости от уровня спроса приведены в таблице:

Вид продукции	**Себесто-имость**	**Цена единицы продукции**		**Объем реализации при уровне спроса**		
		В течение сезона	После уценки	повышенный	средний	пониженный
Π_1	2,6	3,4	2,8	14	8	5
Π_2	3,7	4,2	3,2	38	22	9
Π_3	1,5	2,8	1,7	24	13	7

Требуется:

1) придать описанной ситуации игровую схему, указать допустимые стратегии сторон, составить платежную матрицу;

2) дать рекомендации об объемах выпуска продукции по видам, обеспечивающих предприятию наивысшую прибыль.

Указание. Для уменьшения размерности платежной матрицы считать, что одновременно на все три вида продукции уровень спроса одинаков: повышенный, средний или пониженный.

3. Молочный комбинат «Ставропольский» планирует выпуск двух видов новой продукции: питьевой биойогурт и пудинг сливочный. Спрос на эти продукты не определен, но можно предположить, что он принимает одно из двух состояний: хороший и удовлетворительный. В зависимости от этих состояний прибыль комбината различна и определяется матрицей A: $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$.

Найти оптимальное соотношение между объемами выпуска каждого из продуктов, при котором комбинату гарантирована средняя прибыль при любом состоянии спроса.

Глава 2 Задачи нелинейного программирования

2.1 Геометрический метод решения задачи нелинейного программирования

В общем виде задача нелинейного программирования состоит в определении максимального (минимального) значения функции:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (1)$$

при условии, что ее переменные удовлетворяют ограничениям:

$$\begin{cases} g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le b_i \quad (i = \overline{1,k}), \\ g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = b_i \quad (i = \overline{k+1,m}), \end{cases} \qquad (2)$$

где f и g_{i} — некоторые известные функции n-переменных, а b_{i} — заданные числа.

Здесь имеется в виду, что в результате решения задачи будет определена точка $X^* = (x_1^*; x_2^*; \ldots; x_n^*)$ координаты которой удовлетворяют соотношениям (2) и такая, что для всякой другой точки $X = (x_1; x_2; \ldots; x_n)$, удовлетворяющей условиям (2), выполняется неравенство:

$$f(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*) \ge f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad [\, f(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*) \le f(x_1, x_2, \ldots, x_n)].$$

Если f и g_{i} — линейные функции, то задача (1), (2) является задачей линейного программирования.

Соотношения (2) образуют систему ограничений и включают в себя условия неотрицательности переменных, если такие условия имеются. Условия неотрицательности переменных могут быть заданы и непосредственно.

В евклидовом пространстве E_n система ограничений (2) определяет область допустимых решений (ОДР) задачи. В отличие от задачи линейного программирования для нелинейного случая ОДР не всегда является выпуклой и может быть даже разрывной.

Если определена область допустимых решений, то нахождение решения задачи (1), (2) сводится к определению такой точки этой области, через которую проходит гиперповерхность наивысшего (наинизшего) уровня $f = (x_1; x_2; \ldots; x_n) = h$. Указанная точка может находиться как на границе области допустимых решений, так и внутри нее.

Процесс нахождения решения задачи нелинейного программирования (1), (2) с использованием ее геометрической интерпретации включает следующие этапы:

1. Находят область допустимых решений задачи, определяемую соотношениями (2) (если она пуста, то задача не имеет решения).
2. Строят гиперповерхность $f = (x_1; x_2; \ldots; x_n) = h$ уровня h.

3. Определяют гиперповерхность наивысшего (наинизшего) уровня или устанавливают неразрешимость задачи из-за неограниченности функции (1) сверху (снизу) на множестве допустимых решений.

4. Находят точку области допустимых решений, через которую проходит гиперповерхность наивысшего (наинизшего) уровня, и определяют в ней значение функции (1).

Пример 1. Найти максимальное и минимальное значения функции:

$$F=(x_1-3)^2+(x_2-4)^2 \qquad (3)$$

при условиях:

$$\begin{cases} 3x_1+2x_2\geq 7, \\ 10x_1-x_2\leq 8, \\ -18x_1+4x_2\leq 12, \end{cases} \qquad (4)$$

$$x_1,x_2\geq 0. \qquad (5)$$

Решение. Областью допустимых решений задачи (3)-(5) является треугольник АВС (рисунок 3).

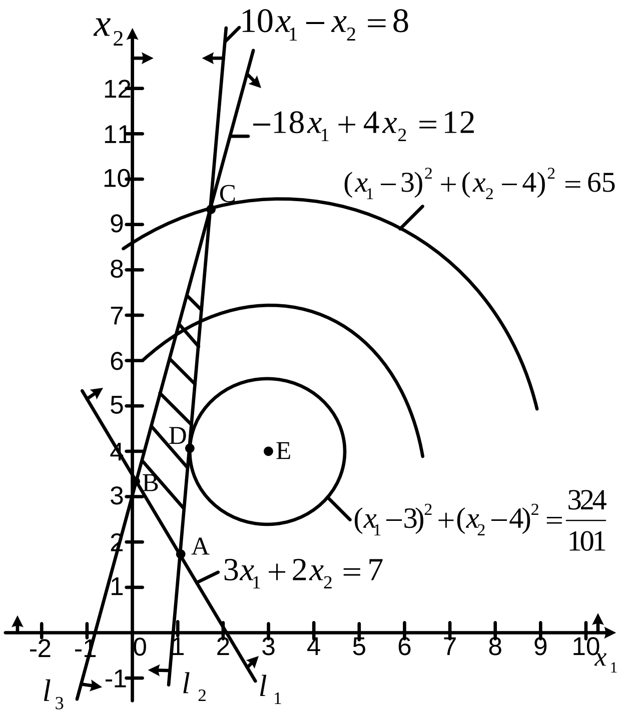


Рис. 3 - Интерпретация решения задачи из примера 1

Полагая значение целевой функции (3) равным некоторому числу h, получаем линии уровня, а именно окружности $(x_1-3)^2+(x_2-4)^2=h$ с центром $E(3;4)$ и радиусом $\sqrt{h}$. С увеличением (уменьшением) числа h значения функции F соответственно увеличиваются (уменьшаются).

Проводя из точки E окружности разных радиусов, видим, что минимальное значение целевая функция принимает в точке D, в которой окружность касается области решений.

Для определения координат этой точки воспользуемся равенством $k_L = k_{кас}$ угловых коэффициентов прямой $10x_1 - x_2 = 8$ и касательной к окружности в точке *D*.

Из уравнения прямой $x_2 = 10x_1 - 8$ видим, что ее угловой коэффициент в точке *D* равен $k_L = 10$. Угловой же коэффициент касательной к окружности в точке *D* определим как значение производной функции x_2 от переменной x_j в этой точке.

Рассматривая x_2 как неявную функцию переменной x_j и дифференцируя уравнение окружности, получим:

$$2(x_1 - 3) + 2(x_2 - 4)x_2' = 0.$$

Откуда:

$$x_2' = k_{кас} = \frac{-(x_1 - 3)}{(x_2 - 4)}.$$

Приравнивая найденное выражение числу 10, получаем одно из уравнений для определения координат точки *E*: $10(x_2 - 4) = -x_1 + 3$.

Присоединяя к нему уравнение ограничивающей прямой, на которой лежит точка *E*, получим систему: $\begin{cases} x_1 + 10x_2 = 43; \\ 10x_1 - x_2 = 8, \end{cases}$ откуда $x_1^* = \frac{123}{101}$, $x_2^* = \frac{422}{101}$

Таким образом, $F_{min} = \left(\frac{123}{101} - 3\right)^2 + \left(\frac{422}{101} - 4\right)^2 = \frac{324}{101}$.

Как видно из рисунка 3, максимальное значение целевая функция принимает в точке *C*(2;12). Ее координаты определены путем решения системы уравнений прямых, на пересечении которых находится точка *C*.

$$\begin{cases} 10x_1 - x_2 = 8, \\ -18x_1 + 4x_2 = 12. \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 2, \\ x_2 = 12. \end{cases}$$

Таким образом, максимальное значение функции:

$$F_{max} = (2-3)^2 + (12-4)^2 = 1 + 64 = 65.$$

Пример 2. Найти максимальное и минимальное значения функции:

$$F = 3x_1 + 4x_2 \tag{6}$$

при условиях:

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \le 25, \\ x_1 x_2 \ge 4, \end{cases} \tag{7}$$

$$x_1, x_2 \ge 0 \tag{8}$$

Решение. Область решений задачи (6)-(8) изображена на рисунке 4. На этом рисунке построены две линии уровня, представляющие собой прямые. Из рисунка 2 видно, что максимальное значение целевая функция задачи принимает в точке *E*, в которой прямая касается окружности $x_1^2 + x_2^2 = 25$, а минимальное в точке *D*, где прямая касается гиперболы $x_1 x_2 = 4$.

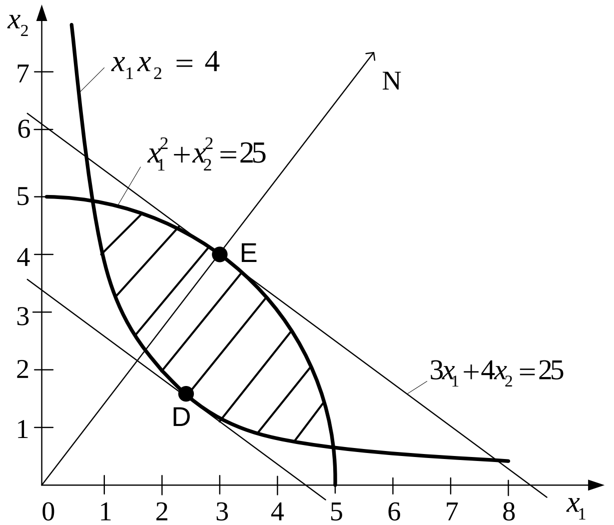


Рис. 4 - Интерпретация решения задачи из примера 2

Для определения координат точки *E* воспользуемся равенством $k_F = k_{кас}$ угловых коэффициентов прямой $3x_1 + 4x_2 = h$, (где h — некоторая постоянная) и касательной к окружности в точке *E*.

Для углового коэффициента прямой k_F получим:

$$x_2 = \frac{h}{4} - \frac{3}{4} x_1 \text{, откуда } k_F = -3/4 .$$

Для определения углового коэффициента $k_{кас}$ касательной к окружности дифференцируем уравнение окружности $x_1^2 + x_2^2 = 25$ как неявную функцию переменной x_1, получим:

$$2x_1 + 2x_2 x_2' = 0 \text{ или } x_2' = -x_1/x_2 .$$

Приравнивая $k_F = k_{кас}$, получаем одно из уравнений для определения координат точки *E*: $x_1/x_2 = 3/4$. В качестве второго уравнения возьмем уравнение ограничивающей окружности. Таким образом, для определения координат точки *E* имеем систему:

$$\begin{cases} x_1 = 3/4\, x_2 \\ x_1^2 + x_2^2 = 25 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 3/4\, x_2 \\ (9/16 + 1) x_2^2 = 25 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \pm 3 \\ x_2^2 = \pm 4 \end{cases} .$$

С учетом неотрицательности переменных $x_1^* = 3,\ x_2^* = 4$.

Значит, $F_{max} = 3^2 + 4^2 = 25$.

Для определения координат точки *D* также воспользуемся равенством $k_F = k_{кас}$ угловых коэффициентов прямой $3x_1 + 4x_2 = h$ и касательной, теперь уже к гиперболе $x_1 x_2 = 4$ в точке *D*.

Дифференцируя уравнение $x_1 x_2 = 4$ по переменной x_1, получим:

$$x_2 + x_1 x_2' = 0 \text{ или } x_2' = -x_2/x_1 .$$

Откуда,

$$k_F = k_{кас}; \quad x_2/x_1 = 3/4.$$

В результате, для определения координат точки D имеем систему:

$$\begin{cases} x_1 = 4/3\,x_2 \\ x_1 x_2 = 4 \end{cases} \to \begin{cases} x_1 = 4/3\,x_2 \\ 4/3\,x_2^2 = 4 \end{cases} \to \begin{cases} x_1 = 4/3\,x_2 \\ x_2^2 = 1/3 \end{cases} \to \begin{cases} x_1 = \pm 4\Big/\left(3\sqrt{3}\right) \\ x_2 = \pm 1\Big/\sqrt{3} \end{cases}.$$

С учетом неотрицательности переменных $x_1^* = \dfrac{4}{3\sqrt{3}}, \quad x_2^* = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$..

Следовательно, $F_{min} = 3\dfrac{4}{3\sqrt{3}} + 4\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{8}{\sqrt{3}}$.

Задания для самостоятельного решения

1. Найти максимальное значение функции $F = x_2 - x^2{}_1 + 6x_1$ при условиях:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 24, \\ x_1 + 2x_2 \le 15, \\ 3x_1 + 2x_2 \le 24, \\ x_2 \le 4. \end{cases}$$

2. Найти максимальное и минимальное значения функции $F = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 3)^2$ при условиях:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \ge 6, \\ 3x_1 - 2x_2 \le 18, \\ -x_1 + 2x_2 \le 8. \end{cases}$$

3. Найти максимальное значение функции $F = x_1 x_2$ при условиях:

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 \ge 12, \\ 2x_1 + 3x_2 \le 24, \\ -3x_1 + 4x_2 \le 12. \end{cases}$$

4. Найти минимальное значение функции $F = 9(x_1 - 5)^2 + 4(x_2 - 6)^2$ при условиях:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \ge 12, \\ x_1 - x_2 \le 6, \\ x_2 \le 4. \end{cases}$$

5. Найти максимальное значение функции $F = 4x_1 + 3x_2$ при условиях:

$$\begin{cases} x_1^2 - 2x_1 + x_2^2 - 2x_2 - 34 \ge 0, \\ x_1 \ge 1, \\ x_2 \ge 1. \end{cases}$$

6. Найти максимальное значение функции $F = x_1 x_2$ при условиях:

$$\begin{cases} x_1^2 + 2x_1 + x_2^2 - 2x_2 - 14 \ge 0, \\ 2x_1 + x_2 \le 10. \end{cases}$$

Выпуклое программирование

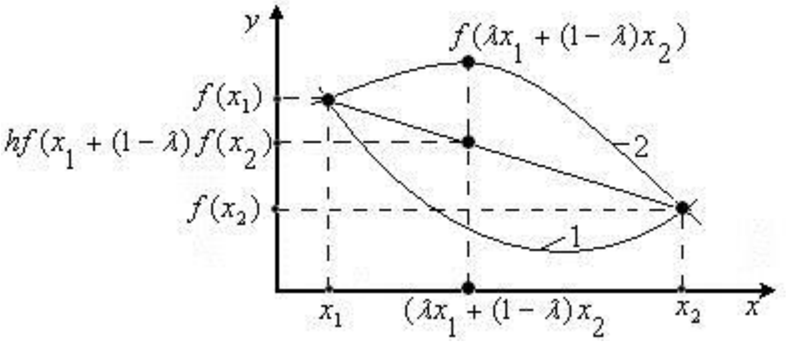
Краткие теоретические сведения

Функция $f(x)$ называется выпуклой вниз (просто выпуклой) на множестве X, если для любых $x_1, x_2 \in X$ и любых $\lambda \in [0;1]$ выполняется неравенство:

$$f\left(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\right) \le \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

Функция $f(x)$ называется выпуклой вверх (вогнутой) на множестве X, если для любых $x_1, x_2 \in X$ и любых $\lambda \in [0;1]$ выполняется неравенство:

$$f\left(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\right) \ge \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$



1 - Выпуклая вниз (выпуклая) на множестве X функция;

2 - Выпуклая вверх (вогнутая) на множестве X функция.

Рис. 5 – Изображение выпуклых функций

Задача выпуклого программирования формулируется так. Требуется найти вектор $x \in R^n$, доставляющий выпуклой вверх дифференцируемой функции:

$$f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_n) \to max \tag{9}$$

максимум на множестве допустимых решений, заданных ограничениями:

$$\varphi_i(x) \le b_i, i = 1,2,...,m, \tag{10}$$

у которых все $\varphi_i(x),\ (i = 1,2,...,m)$ - выпуклые вниз дифференцируемые функции.

Функцией Лагранжа задачи выпуклого программирования (9)-(10) называется функция:

$$L(x,y) = f(x) + \left(y, \left(b - \varphi(x)\right)\right) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} y_i \left(b_i - \varphi_i(x)\right),\ x \in R^n, y \in R^m, \tag{11}$$

при этом координаты $y_1, y_1, ..., y_m$ вектора $y = \left(y_1 \quad y_2 \quad ... \quad y_m \right)^T \in R^m$ называются множителями Лагранжа для задачи выпуклого программирования (9)-(10).

Говорят, что задача выпуклого программирования (9)-(10) удовлетворяет условию регулярности, если существует хотя бы одна внутренняя точка множества допустимых решений, определяемого неравенствами (10) [то есть такая точка $x \in R^n$, что $\varphi_i(x) < b_i, (i = 1,2,...,m)$].

Точка $(x^*, y^*) \in R^{n+m}$ $(x^* \in R^n, y^* \in R_+^m)$ называется седловой точкой функции $L(x,y)$, если для всех $x \in R^n, y \in R_+^m$

$$L(x, y^*) \le L(x^*, y^*) \le L(x^*, y), \tag{12}$$

(максимум по x и минимум по y).

Теорема Куна-Таккера

Если задача на max выпуклого программирования (9)-(10) удовлетворяет условию регулярности, то точка $x^* \in R^n$ является оптимальным решением этой задачи тогда и только тогда, когда существует такой вектор:

$$y^* = \left(y_1^* \quad y_2^* \quad ... \quad y_m^* \right)^T \in R_+^m$$

с неотрицательными координатами, что точка $(x^*, y^*) \in R^{n+m}$ является седловой точкой (12) функции Лагранжа данной задачи [1].

Условия Куна-Таккера в дифференциальной форме. Если функция Лагранжа $L(x,y)$ является выпуклой вверх по x, выпуклой вниз по y и непрерывно дифференцируемой по всем $x_j, (j = 1,2,...,n)$ и $y_i, (i = 1,2...,m)$, то для того чтобы пара $x^* \in R^n, y^* \in R^m$ была седловой точкой функции Лагранжа $L(x,y)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

$$\left. \frac{\partial L(x,y)}{\partial x_j} \right|_{\substack{x=x^* \\ y=y^*}} = \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} y_i \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x_j} \right|_{\substack{x=x^* \\ y=y^*}} \le 0, \quad j = 1,2...,n, \tag{13}$$

$$x_j^* \left. \frac{\partial L(x,y)}{\partial x_j} \right|_{\substack{x=x^* \\ y=y^*}} = x_j^* \left. \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} y_i \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x_j} \right) \right|_{\substack{x=x^* \\ y=y^*}} = 0, \quad j = 1,2...,n, \tag{14}$$

$$\left. \frac{\partial L(x,y)}{\partial y_i} \right|_{\substack{x=x^* \\ y=y^*}} = b_i - \varphi_i\left(x\right) \Big|_{x=x^*} \ge 0, \quad i = 1,2...,m, \tag{15}$$

$$y_i^* \left. \frac{\partial L(x,y)}{\partial y_i} \right|_{\substack{x=x^* \\ y=y^*}} = y_i^* \left(b_i - \varphi_i\left(x\right) \right) \Big|_{\substack{x=x^* \\ y=y^*}} = 0, \quad i = 1,2...,m, \tag{16}$$

$$x_j^* \ge 0, \quad j = 1,2...,n, \quad y_i^* \ge 0, \quad i = 1,2...,m, \tag{17}$$

Покажем, что частным случаем теоремы Куна-Таккера являются условия экстремумов двойственной задачи линейного программирования.

Используя матричную запись, где *x, y, c, b* - вектор-столбцы, запишем задачу линейного программирования на максимум:

$$f(x)=f(x_1,x_2,...,x_n)=c^T x\to max\,;\quad \varphi(x)\le b\to Ax\le b\,.$$

Функция Лагранжа (11) в этом случае примет вид:

$$L\left(x,y\right)=c^T x+y^T\left(b-Ax\right),\ \ x\in R^n,y\in R^m \tag{18}$$

Тогда на основании (13)-(17) и (18) получим условия оптимального плана:

$$\left.\frac{\partial L(x,y)}{\partial x_j}\right|_{\substack{x=x^*\\y=y^*}}\le 0;\quad\to\quad \left.\left(c^T-y^T A\right)\right|_{\substack{x=x^*\\y=y^*}}\le 0^T;\quad\to\quad \left.A^T y\ge c\right|_{\substack{x=x^*\\y=y^*}};$$

$$\left.x_j^*\frac{\partial L(x,y)}{\partial x_j}\right|_{\substack{x=x^*\\y=y^*}}=0;\quad\to\quad \left.\left(c^T-y^T A\right)x=0\right|_{\substack{x=x^*\\y=y^*}};\quad\to\quad \left.c^T x=y^T Ax\right|_{\substack{x=x^*\\y=y^*}};$$

$$\left.\frac{\partial L(x,y)}{\partial y_i}\right|_{\substack{x=x^*\\y=y^*}}\ge 0;\quad\to\quad \left.b-Ax\ge 0\right|_{\substack{x=x^*\\y=y^*}};\quad\to\quad \left.Ax\le b\right|_{\substack{x=x^*\\y=y^*}};$$

$$\left.y_i^*\frac{\partial L(x,y)}{\partial y_i}\right|_{\substack{x=x^*\\y=y^*}}=0;\quad\to\quad \left.y^T\left(b-Ax\right)=0\right|_{\substack{x=x^*\\y=y^*}};\quad\to\quad \left.b^T y=y^T Ax\right|_{\substack{x=x^*\\y=y^*}}.$$

Отсюда заключаем, что в седловой точке двойственной задачи $\left(x^*,y^*\right)$ достигается максимум по *x* и минимум по *y*, причем эти экстремумы равны:

$$\left.c^T x=b^T y=y^T Ax\right|_{\substack{x=x^*\\y=y^*}}$$

Численные методы

В общем случае система условий Куна-Таккера в дифференциальной форме представляет собой систему нелинейных уравнений, отыскание точных решений которой, как правило, затруднительно и не всегда возможно. Кроме того, задача нелинейного программирования, может иметь несколько локальных экстремумов, а область допустимых решений (ОДР) может быть невыпуклой и даже состоять из нескольких несвязанных областей.

Поэтому на практике теорема Куна-Таккера используется редко, а для приближенного решения задач нелинейного программирования используются численные методы. Рассмотрим несколько таких методов для задач выпуклого программирования.

Метод возможных направлений

Основная идея метода такова. В качестве начального приближения к оптимальному решению задачи выпуклого программирования (9)-(10):

$$f(x)=f(x_1,x_2,...,x_n)\to max\,;\qquad \varphi_i(x)\le b_i, i=1,2,...,m$$

выбирается некоторая внутренняя точка $x^{(0)}$ множества допустимых решений [то есть все ограничения (10) в этой точке должны выполняться как строгие неравенства].

Далее строится последовательность:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + h^{(k)} e^{(k)}, k = 1,2,3... \tag{19}$$

приближений к точке максимума целевой функции $f(x)$ на множестве допустимых решений.

Вектор $e^{(k)}$, определяющий направление перемещения из точки $x^{(k)}$ в точку $x^{(k+1)}$ (на k-м шаге метода) должен удовлетворять двум требованиям.

1. При достаточно малых $h^{(k)}$ точка $x^{(k+1)}$, определяемая формулой (19), должна принадлежать множеству допустимых решений (то есть вектор $e^{(k)}$ должен задавать возможное направление). В частности, если точка $x^{(k)}$ является граничной точкой множества допустимых решений, то вектор $e^{(k)}$ должен быть направлен внутрь этого множества.

2. При достаточно малых $h^{(k)}$ вектор $e^{(k)}$ должен задавать направление возрастания целевой функции $f(x)$.

Величина шага $h^{(k)}$ смещения в (19) выбирается из условия наибольшего роста целевой функции $f(x)$ при перемещении из точки $x^{(k)}$ в точку $x^{(k+1)}$ с учетом того, что новое приближение $x^{(k+1)}$ должно оставаться во множестве допустимых решений.

Если очередное приближение $x^{(k)}$ является внутренней точкой множества допустимых решений [то есть в этой точке все ограничения (10) выполняются как строгие неравенства], то вектор $e^{(k)}$ можно выбрать совпадающим с градиентом:

$$\nabla f(x^{(k)}) = \left.\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f(x_1, x_2, ... x_n)}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial f(x_1, x_2, ... x_n)}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f(x_1, x_2, ... x_n)}{\partial x_n} \end{pmatrix}\right|_{x = x^{(k)}}$$

целевой функции $f(x)$ [тогда $e^{(k)} = grad\ f(x^{(k)})$ будет указывать направление наискорейшего возрастания функции $f(x)$ в точке $x^{(k)}$].

Если же $x^{(k)}$ является граничной точкой множества допустимых решений, то некоторые из неравенств (11) в точке $x^{(k)}$ обращаются в равенства. В этом случае движение в направлении градиента может вывести за пределы множества допустимых решений.

В этом случае возможное направление:

$$e^{(k)} = \left(e_1^{(k)} \quad e_2^{(k)} \quad \ldots \quad e_n^{(k)} \right)^T$$

возрастания целевой функции $f(x)$ в точке $x^{(k)}$ выбирается так, чтобы выполнялись следующие условия.

1. Угол между вектором $e^{(k)}$ и вектором $\nabla f(x^{(k)})$ должен быть как можно меньшим.

2. Для каждого из ограничений $i = i_1, i_2, \ldots, i_n$, активных в точке $x^{(k)}$ (то есть обращающихся в точке $x^{(k)}$ в строгие равенства), угол между вектором $e^{(k)}$ и внешней нормалью к гиперплоскости:

$$\pi_i = \left\{ x \in R^n \middle| \ \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} x_j = b_i \right\},$$

касательной к границе множества допустимых решений в точке $x^{(k)}$, должен быть не меньше $\pi / 2$ (то есть вектор $e^{(k)}$ должен быть направлен внутрь множества допустимых решений задачи).

3. Вектор $e^{(1)}$ должен быть ограниченным — поскольку направление определяется с точностью до положительного множителя, данное условие обеспечивает однозначность выбора $e^{(1)}$.

Эти условия приводят к постановке следующей задачи:

$$e^{(1)} = \pi / 2, \quad z = \left(\nabla f(x^{(k)}), e^{(k)} \right) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f(x^{(k)})}{\partial x_j} e_j^{(k)} \to max, \tag{20}$$

$$\begin{cases} \left(\nabla \varphi_i(x^{(k)}), e^{(k)} \right) = \sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{\partial \varphi_i(x^{(k)})}{\partial x_j} e_j^{(k)} \le 0, \ \ i = i_1, i_2, \ldots i_q, \\ \sum\limits_{j=1}^{n} \left| e_j^{(k)} \right| \le 1. \end{cases} \tag{21}$$

Данную задачу можно свести к задаче линейного программирования, для этого нужно представить переменные $e_j^{(k)}$ (которые по смыслу задачи (20)-(21) могут принимать значения произвольного знака) как разности $e_j^{(k)} = e_{j+}^{(k)} - e_{j-}^{(k)}$ новых неотрицательных переменных $e_{j+}^{(k)} \ge 0, \ \ e_{j-}^{(k)} \ge 0$ и добавить условия $e_{j+}^{(k)} e_{j-}^{(k)} = 0, \ \ j = 1,2,\ldots,n \ j = 1,2 \, j = 1,2,\ldots,n,\ldots,n$ (то есть или $e_{j+}^{(k)} = 0$, или $e_{j-}^{(k)} = 0$)

При этом:

$$\left| e_1^{(1)} \right| = e_{1+}^{(1)} + e_{1-}^{(1)} \qquad \left| e_2^{(1)} \right| = e_{2+}^{(1)} + e_{2-}^{(1)},$$

и задача (20)-(21) примет вид:

$$z = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f(x^{(k)})}{\partial x_j} \left(e_{j+}^{(k)} - e_{j-}^{(k)} \right) \to max, \tag{22}$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{\partial \varphi_i(x^{(k)})}{\partial x_j}\left(e_{j+}^{(k)} - e_{j-}^{(k)}\right) \le 0, \quad i = i_1, i_2, ..., i_q, \\ \sum\limits_{j=1}^{n} e_{j+}^{(k)} + \sum\limits_{j=1}^{n} e_{j-}^{(k)} \le 1, \end{cases} \tag{23}$$

$$e_{j+}^{(k)} e_{j-}^{(k)} = 0, \quad j = 1,2,...,n, \tag{24}$$

$$e_{j+}^{(k)} \ge 0, \;\; e_{j-}^{(k)} \ge 0, \quad j = 1,2,...,n. \tag{25}$$

Эту задачу после введения фиктивных переменных (для преобразования к предпочитаемому виду) можно решить симплексным методом. При этом для учета условий $e_{j+}^{(k)} e_{j-}^{(k)} = 0$ при вычислительной реализации симплексного метода необходимо следить за тем, чтобы не вводить в базис одновременно переменные $e_{j+}^{(1)}$ и $e_{j-}^{(1)}$ с одинаковым индексом $j(j = 1,2,...,n)$.

Пример 1. Требуется найти приближение к оптимальному решению задачи выпуклого программирования:

$$f(x) = -(x_1 - 8)^2 - (x_2 - 8)^2 \to max, \tag{26}$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \le 15, \\ x_1 + x_2 \le 10, \\ x_1 \ge 0, \\ x_2 \ge 0. \end{cases} \tag{27}$$

Для чего провести три первые итерации метода возможных направлений, выбрав в качестве начального приближения вектор:

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Решение. Целевая функция представляет собой отрицательно-определенную квадратичную форму, которая во всей области определения является выпуклой вверх. Функции ограничений являются плоскостями.

Несложно убедиться в том, что исходная точка $x^{(0)}$является внутренней точкой множества допустимых решений (27), поскольку все ограничения выполняются как строгие неравенства:

$$\begin{cases} 3 \cdot 1 + 8 < 15, \\ 1 + 8 < 10, \\ 1 > 0, \\ 8 > 0. \end{cases}$$

Очередное, первое приближение $x^{(0)}$ к оптимальному решению задачи выберем в направлении наискорейшего возрастания целевой функции:

$$e^{(0)} = \nabla f(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} -2(x_1 - 8) \\ -2(x_2 - 8) \end{pmatrix}\Bigg|_{x = x^{(0)}} = \begin{pmatrix} -2(1 - 8) \\ -2(8 - 8) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Найдем границы шага смещения h в направлении $e^{(0)}$, при котором точка:

$$x^{(1)} = x^{(0)} + he^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix} + h\begin{pmatrix} 14 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+14h \\ 8 \end{pmatrix}$$

будет оставаться во множестве допустимых решений. Запишем условия допустимости:

$$\begin{cases} 3(1+14h)+8 \le 15, \\ 1+14h+8 \le 10, \\ 1+14h \ge 0, \\ 8 \ge 0. \end{cases}$$

Решениями этой системы неравенств являются все $h \in [-1/14; 1/14]$. Выберем h из этого отрезка таким образом, чтобы значение целевой функции $f(x)$ в точке $x^{(1)} = x^{(0)} + he^{(0)}$ было максимальным.

Для этого найдем точку максимума функции:

$$\Phi_0(h) = f(x^{(0)} + he^{(0)} = -(1+14h-8)^2 - (8-8)^2 = -(14h-7)^2 = -49(2h-1)^2$$

одной переменной $x^{(1)} = x^{(0)} + he^{(0)}$ на отрезке $x^{(1)} = x^{(0)} + he^{(0)}$

Производная $x^{(1)} = x^{(0)} + he^{(0)}$ $\Phi_0'(h) = -49 \cdot 2(2h-1) = -98(2h-1)$ обращается в нуль в точке $h = 1/2$, положительна при $h = 1/2$ и отрицательна при $h = 1/2$, поэтому точка $h = 1/2$ является точкой глобального максимума функции $h = 1/2$, а максимум функции $\Phi_0(h)$ на отрезке $\Phi_0(h)$ достигается в точке $h^{(0)} = 1/14$.

Таким образом, если выбрать шаг смещения $h^{(0)} = 1/14$ в направлении:

$$e^{(0)} = \begin{pmatrix} 14 \\ 0 \end{pmatrix}$$

наискорейшего роста целевой функции $f(x)$, то при движении от точки:

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

к точке:

$$x^{(1)} = x^{(0)} + h^{(0)}e^{(0)} = \begin{pmatrix} 1+14h^{(0)} \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}$$

целевая функция возрастет наибольшим образом, а точка $x^{(1)}$ останется во множестве допустимых решений.

Итак, получили новое, первое приближение:

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}$$

к оптимальному решению задачи (26)-(27).

Переходим ко второму шагу метода возможных направлений.

Точка $x^{(1)}$ является граничной точкой множества допустимых решений; второе из ограничений (27) выполняется в этой точке как равенство, а остальные — как строгие неравенства:

$$\begin{cases} 3\cdot 2+8<15, \\ 2+8=10, \\ 2>0, \\ 8>0. \end{cases}$$

Поэтому если двигаться в направлении:

$$\nabla f(x^{(1)})=\begin{pmatrix} -2(x_1-8) \\ -2(x_2-8) \end{pmatrix}\Bigg|_{x=x^{(1)}}=\begin{pmatrix} -2(2-8) \\ -2(8-8) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 12 \\ 0 \end{pmatrix}$$

наискорейшего возрастания целевой функции, то новое приближение может выйти за границы области допустимых решений.

Поэтому возможное направление:

$$e^{(1)}=\begin{pmatrix} e_1^{(1)} \\ e_2^{(1)} \end{pmatrix}$$

возрастания целевой функции $f(x)$ в точке $x^{(1)}$ выберем так, чтобы оно являлось оптимальным решением задачи (20)-(21), которая в данном случае примет вид:

$$z=\left(\nabla f(x^{(1)}),e^{(1)}\right)=12e_1^{(1)}+0e_2^{(1)}\to max, \tag{28}$$

$$\begin{cases} \left(\nabla \varphi_2(x^{(1)}),e^{(1)}\right)=e_1^{(1)}+e_2^{(1)}\le 0, \\ \sum\left|e_i^{(1)}\right|=\left|e_1^{(1)}\right|+\left|e_2^{(1)}\right|\le 1. \end{cases} \tag{29}$$

Чтобы свести эту задачу к задаче линейного программирования, представим переменные $e_1^{(1)}$ и $e_2^{(1)}$ как разности новых неотрицательных переменных $e_{1+}^{(1)}\ge 0$, $e_{1-}^{(1)}\ge 0$, $e_{2+}^{(1)}\ge 0$, $e_{2-}^{(1)}\ge 0$:

$$e_1^{(1)}=e_{1+}^{(1)}-e_{1-}^{(1)},\quad e_2^{(1)}=e_{2+}^{(1)}-e_{2-}^{(1)},$$

причем:

$$e_{1+}^{(1)}e_{1-}^{(1)}=0,\quad e_{2+}^{(1)}e_{2-}^{(1)}=0.$$

При этом:

$$\left|e_1^{(1)}\right|=e_{1+}^{(1)}+e_{1-}^{(1)},\quad \left|e_2^{(1)}\right|=e_{2+}^{(1)}+e_{2-}^{(1)},$$

и задача (28)-(29) примет вид:

$$z=12e_{1+}^{(1)}-12e_{1-}^{(1)}\to max, \tag{30}$$

$$\begin{cases} e_{1+}^{(1)}-e_{1-}^{(1)}+e_{2+}^{(1)}-e_{2-}^{(1)}\le 0, \\ e_{1+}^{(1)}+e_{1-}^{(1)}+e_{2+}^{(1)}+e_{2-}^{(1)}\le 1, \end{cases} \tag{31}$$

$$e_{1+}^{(1)}e_{1-}^{(1)}=0,\ e_{1+}^{(1)}e_{1-}^{(1)}=0,\ e_{2+}^{(1)}e_{2-}^{(1)}=0, \tag{32}$$

$$e_{1+}^{(1)} \ge 0, \; e_{1-}^{(1)} \ge 0, \; e_{2+}^{(1)} \ge 0, \; e_{2-}^{(1)} \ge 0. \qquad (33)$$

Будем решать эту задачу симплексным методом, введя предварительно дополнительные переменные s_1 и s_2, чтобы преобразовать неравенства в равенства:

$$z = 12e_{1+}^{(1)} - 12e_{1-}^{(1)} \to max,$$

$$\begin{cases} e_{1+}^{(1)} - e_{1-}^{(1)} + e_{2+}^{(1)} - e_{2-}^{(1)} + s_1 \quad = 0, \\ e_{1+}^{(1)} + e_{1-}^{(1)} + e_{2+}^{(1)} + e_{2-}^{(1)} \quad + s_2 = 1, \\ e_{1+}^{(1)} e_{1-}^{(1)} = 0, \\ e_{2+}^{(1)} e_{2-}^{(1)} = 0, \end{cases}$$

$$e_{1+}^{(1)} \ge 0, \; e_{1-}^{(1)} \ge 0, \; e_{2+}^{(1)} \ge 0, \; e_{2-}^{(1)} \ge 0.$$

Для учета условий $e_{1+}^{(1)} e_{1-}^{(1)} = 0$, $e_{2+}^{(1)} e_{2-}^{(1)} = 0$ при вычислительной реализации симплексного метода будем следить за тем, чтобы не вводить в базис одновременно переменные $e_{j+}^{(1)}$ и $e_{j-}^{(1)}$, $(j = 1,2)$.

Симплексные таблицы представлены ниже:

	$e_{1+}^{(1)}$	$e_{1-}^{(1)}$	$e_{2+}^{(1)}$	$e_{2-}^{(1)}$	b_i
s_1	1	-1	1	-1	0
s_2	1	1	1	1	1
z_{max}	-12	12	0	0	0

	s_1	$e_{1-}^{(1)}$	$e_{2+}^{(1)}$	$e_{2-}^{(1)}$	b_i
$e_{1+}^{(1)}$	1	-1	1	-1	0
s_2	-1	2	0	2	1
z_{max}	12	0	12	-12	0

	s_1	$e_{1-}^{(1)}$	$e_{2+}^{(1)}$	s_2	b_i
$e_{1+}^{(1)}$	1/2	0	1	1/2	1/2
$e_{2-}^{(1)}$	-1/2	1	0	1/2	1/2
z_{max}	6	12	12	6	6

В результате мы получили оптимальное решение задачи (30)-(33):

$$e_{1+}^{(1)} = 1/2, \quad e_{1-}^{(1)} = 0, \quad e_{2+}^{(1)} = 0, \quad e_{2-}^{(1)} = 1/2.$$

Теперь легко найти оптимальное решение задачи (28)-(29):

$$e_1^{(1)} = e_{1+}^{(1)} - e_{1-}^{(1)} = 1/2, \quad e_2^{(1)} = e_{2+}^{(1)} - e_{2-}^{(1)} = 1/2.$$

Тем самым, мы получили направление очередного шага:

$$e_2^{(1)} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}.$$

Найдем границы шага смещения h в направлении $e^{(1)}$ при котором точка:

$$x^{(2)} = x^{(1)} + he^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix} + h\begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + h/2 \\ 8 - h/2 \end{pmatrix}$$

будет оставаться во множестве допустимых решений (27). Имеем:

$$\begin{cases} 3(2+h/2)+8-h/2 \le 15, \\ 2+h/2+8-h/2 \le 10, \\ 2+h/2 \ge 0, \\ 8-h/2 \ge 0. \end{cases}$$

Точка $x^{(2)}$ остается во множестве допустимых решений при всех $h \in [-4;1]$. Выберем h из этого отрезка таким образом, чтобы значение целевой функции $f(x)$ в точке $x^{(2)}$ было максимальным.

Для этого найдем точку максимума целевой функции (26):

$$\Phi_1(h) = f(x^{(1)} + he^{(1)}) = -(2+h/2-8)^2 - (8-h/2-8)^2 =$$
$$= (h/2-6)^2 - h^2/4 = -h^2/2 + 6h - 36$$

одной переменной h на отрезке $h \in -[4;1]$.

Производная $\Phi_1'(h) = -h + 6$ обращается в нуль в точке $h = 6$, положительна при $h < 6$ и отрицательна при $h < 6$, поэтому точка $h = 6$ является точкой глобального максимума функции $\Phi_1(h)$, а максимум функции $\Phi_1(h)$ на отрезке $h \in [-4;1]$ достигается в точке $h^{(1)} = 1$.

Таким образом, если выбрать шаг смещения $h^{(1)} = 1$ в направлении:

$$e^{(1)} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

наискорейшего роста целевой функции $f(x)$, то при движении от точки

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}$$

к точке

$$x^{(2)} = x^{(1)} + h^{(1)}e^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 + h^{(1)}/2 \\ 8 - h^{(1)}/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 15/2 \end{pmatrix}$$

целевая функция возрастет наибольшим образом, а точка $x^{(2)}$ останется во множестве допустимых решений.

Итак, получили очередное приближение:

$$x^{(2)} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 15/2 \end{pmatrix}$$

к оптимальному решению задачи (26)-(27).

Начинаем третий шаг метода возможных направлений.

Точка $x^{(2)}$ является граничной точкой множества допустимых решений: первых два ограничения (27) выполняются в этой точке как равенства, а последних два — как строгие неравенства:

$$\begin{cases} 3\cdot 5/2+15/2=15, \\ 5/2+15/2=10, \\ 5/2>0, \\ 15/2>0. \end{cases}$$

Поэтому если двигаться в направлении:

$$\nabla f(x^{(2)})=\begin{pmatrix} -2(x_1-8) \\ -2(x_2-8) \end{pmatrix}\Bigg|_{x=x^{(2)}}=\begin{pmatrix} -2(5/2-8) \\ -2(15/2-8) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 11 \\ 1 \end{pmatrix}$$

наискорейшего возрастания целевой функции, то новое приближение может выйти за границы области допустимых решений, то есть направление:

$$\nabla f(x^{(2)})=\begin{pmatrix} 11 \\ 1 \end{pmatrix}$$

не является возможным в точке:

$$x^{(2)}=\begin{pmatrix} 5/2 \\ 15/2 \end{pmatrix}.$$

Составим задачу линейного программирования (20)-(21) для определения возможного направления $e^{(2)}$:

$$z=\left(\nabla f(x^{(2)}),e^{(2)}\right)=11e_{1+}^{(2)}-11e_{1-}^{(2)}+e_{2+}^{(2)}-e_{2-}^{(2)}\to max,$$

$$\begin{cases} \left(\nabla \varphi_1(x^{(2)}),e^{(2)}\right)=3e_{1+}^{(2)}-3e_{1-}^{(2)}+e_{2+}^{(2)}-e_{2-}^{(2)}\le 0, \\ \left(\nabla \varphi_2(x^{(2)}),e^{(2)}\right)=e_{1+}^{(2)}-e_{1-}^{(2)}+e_{2+}^{(2)}-e_{2-}^{(2)}\le 0, \\ e_{1+}^{(2)}+e_{1-}^{(2)}+e_{2+}^{(2)}+e_{2-}^{(2)}\le 1, \end{cases}$$

$$e_{1+}^{(2)}e_{1-}^{(2)}=0, \qquad e_{2+}^{(2)}e_{2-}^{(2)}=0,$$

$$e_{1+}^{(2)}\ge 0, \quad e_{1-}^{(2)}\ge 0, \quad e_{2+}^{(2)}\ge 0, \quad e_{2-}^{(2)}\ge 0 .$$

Симплексные таблицы представлены ниже:

	$e_{1+}^{(2)}$	$e_{1-}^{(2)}$	$e_{2+}^{(2)}$	$e_{2-}^{(2)}$	b_i
s_1	3	-3	1	-1	0
s_2	1	-1	1	-1	0
s_3	1	1	1	1	1
z_{max}	-11	11	-1	1	0

	s_2	$e_{1-}^{(2)}$	$e_{2+}^{(2)}$	$e_{2-}^{(2)}$	b_i
s_1	-3	0	-2	2	0
$e_{1+}^{(2)}$	1	-1	1	-1	0
s_3	-1	2	0	2	1
z_{max}	11	0	10	-10	0

	s_2	$e^{(2)}_{1-}$	$e^{(2)}_{2+}$	s_1	b_i
$e^{(2)}_{2-}$	-3/2	0	-1	1/2	0
$e^{(2)}_{1+}$	-1/2	-1	0	1/2	0
s_3	2	2	2	-1	1
z_{max}	-4	0	0	5	0

	s_3	$e^{(2)}_{1-}$	$e^{(2)}_{2+}$	s_1	b_i
$e^{(2)}_{2-}$	3/4	3/2	1/2	-1/4	3/4
$e^{(2)}_{1+}$	1/4	-1/2	1/2	1/4	1/4
s_2	1/2	1	1	-1/2	1/2
z_{max}	2	4	4	3	2

Оптимальное решение этой задачи равно:

$$e^{(2)}_{1+} = 1/4, \quad e^{(2)}_{1-} = 0, \quad e^{(2)}_{2+} = 0, \quad e^{(2)}_{2-} = 3/4,$$

откуда находим направление очередного шага:

$$e^{(2)} = \begin{pmatrix} 1/4 \\ -3/4 \end{pmatrix}.$$

Найдем границы шага смещения h в направлении $e^{(2)}$, при котором точка:

$$x^{(3)} = x^{(2)} + he^{(2)} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 15/2 \end{pmatrix} + h\begin{pmatrix} 1/4 \\ -3/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 + h/4 \\ 15/2 - 3h/4 \end{pmatrix}$$

будет оставаться во множестве допустимых решений. Имеем:

$$\begin{cases} 3(5/2 + h/4) + 15/2 - 3h/4 \le 15 \\ 5/2 + h/4 + 15/2 - 3h/4 \le 10 \\ 5/2 + h/4 \ge 0 \\ 15/2 - 3h/4 \ge 0. \end{cases}$$

Этой системе неравенств удовлетворяют все $h \in [0;5]$. Выберем h из этого отрезка таким образом, чтобы значение целевой функции в точке $x^{(3)} = x^{(2)} + he^{(2)}$ было максимальным.

Для этого найдем точку максимума функции:

$$\Phi_2(h) = f(x^{(2)} + he^{(2)}) = -(5/2 + h/4 - 8)^2 - (15/2 - 3h/4 - 8)^2 =$$
$$= -(h/4 - 11/2)^2 - (3h/4 + 1/2)^2$$

одной переменной h на отрезке $h \in [0;5]$.

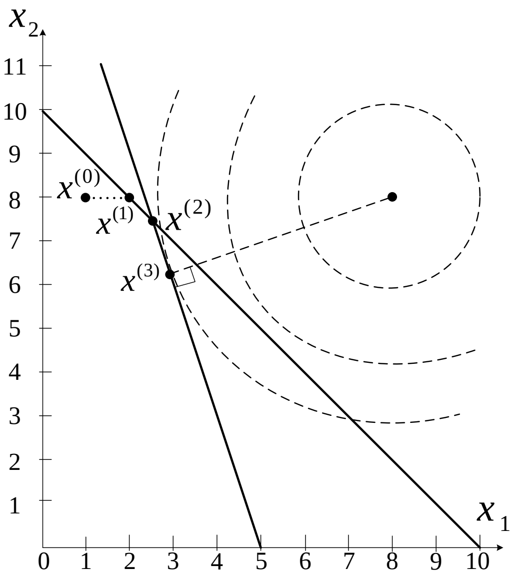
Производная $\Phi_2'(h) = (8 - 5h)/4$ обращается в нуль в точке $h = 8/5$, положительна при $h < 8/5$ и отрицательна при $h > 8/5$, поэтому точка $h = 8/5$ является точкой глобального максимума функции $\Phi_2(h)$ и точкой локального максимума этой функции на отрезке $h \in [0;5]$.

Получаем очередное приближение:

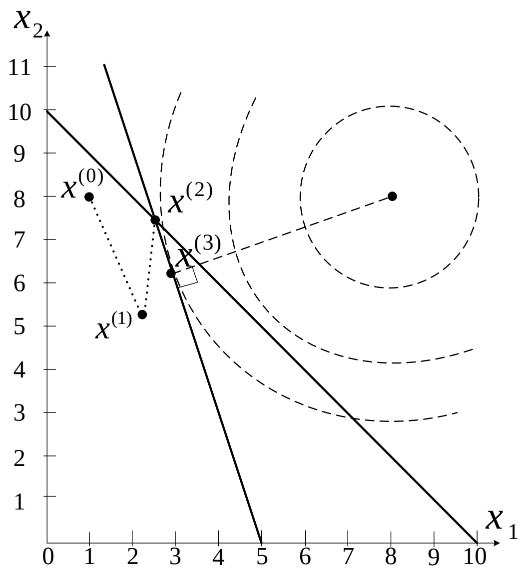
$$x^{(3)} = \begin{pmatrix} 5/2 + 2/5 \\ 15/2 - 6/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29/10 \\ 63/10 \end{pmatrix}$$

Итерационный процесс метода возможных направлений иллюстрируется рисунком 6.

Заметим, что $x^{(3)}$ — это точное решение задачи (26)-(27).



а) метод возможных направлений



б) метод условного градиента

Рис. 6 - Иллюстрация итерационных процессов

Метод условного градиента

Опишем метод условного градиента. Пусть $x^{(k)}$ — очередное приближение к оптимальному решению задачи выпуклого программирования (9)-(10) — такая точка $x^{(k)}$ множества допустимых решений, что:

$$\nabla f(x^{(k)}) \neq 0.$$

Тогда в окрестности точки $x^{(k)}$ целевая функция $f(x)$ может быть представлена в виде:

$$f(x) = f\left(x^{(k)}\right) + \left(\nabla f\left(x^{(k)}\right), \left(x - x^{(k)}\right)\right) + o\left(\left\| x - x^{(k)} \right\|\right)$$

Будем максимизировать на допустимом множестве линейную функцию:

$$f_k(x) = \left(\nabla f\left(x^{(k)}\right), \left(x - x^{(k)}\right)\right), \qquad (34)$$

которая является приближением разности $f(x) - f\left(x^{(k)}\right)$ с точностью до величины $o\left(\left\| x - x^{(k)} \right\|\right)$.

Пусть $\tilde{x}^{(k)}$ — решение вспомогательной задачи максимизации функции (34) при ограничениях (10).

Следующее приближение $x^{(k+1)}$ к оптимальному решению исходной задачи (9)-(10) построим по формуле:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + h^{(k)}\left(\tilde{x}^{(k)} - x^{(k)}\right), \qquad (35)$$

в которой величину шага смещения $h^{(k)}$ выберем как:

$$h^{(k)} = min\left\{1; \tilde{h}^{(k)}\right\}, \tag{36}$$

где $h^{(k)}$ выбирается из условия наибольшего роста целевой функции $f(x)$при перемещении из точки $x^{(k)}$ в точку:

$$x^{(k)} + \tilde{h}^{(k)}\left(\tilde{x}^{(k)} - x^{(k)}\right).$$

Тогда, поскольку множество допустимых решений выпукло, $h^{(k)} \in [0;1]$, точка $x^{(k+1)}$ (35) останется допустимым решением.

Отметим, что вспомогательная задача максимизации функции (34) при ограничениях (10) является также задачей выпуклого программирования. Процесс ее решение оказывается, однако, достаточно простым в случае, когда ограничения (10) являются линейными.

Пример 2. Требуется найти приближение к оптимальному решению задачи выпуклого программирования (26)-(27) из примера 1, для чего провести три первые итерации метода условного градиента, выбрав в качестве начального приближения вектор:

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Решение. Как было показано в примере 1, начальное приближение:

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

является допустимым решением.

1-й шаг.

$$\nabla f\left(x^{(0)}\right) = \begin{pmatrix} -2(x_1 - 8) \\ -2(x_2 - 8) \end{pmatrix}\Bigg|_{x=x^{(0)}} = \begin{pmatrix} -2(1-8) \\ -2(8-8) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Поставим вспомогательную задачу максимизации функции (34) при ограничениях (27):

$$f_0(x) = \left(\nabla f\left(x^{(0)}\right), \left(x - x^{(0)}\right)\right) = 14(x_1 - 1) + 0(x_2 - 8) = 14x_1 - 14 \to max,$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \le 15, \\ x_1 + x_2 \le 10, \\ x_1 \ge 0, \\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Оптимальное решение этой задачи равно:

$$\tilde{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Симплексные таблицы представлены ниже:

	x_1	x_2	b_i
x_3	3	1	15
x_4	1	1	10
f_{max}	-14	0	-14

	x_3	x_2	b_i
x_1	1/3	1/3	5
x_4	-1/3	2/3	5
f_{max}	14/3	14/3	56

Выберем $\tilde{h}^{(0)}$ из условия наибольшего роста целевой функции $f(x)$ при перемещении из точки:

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

в точку:

$$x^{(0)} + \tilde{h}^{(0)}\left(\tilde{x}^{(0)} - x^{(0)}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix} + \tilde{h}^{(0)}\begin{pmatrix} 5-1 \\ 0-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+4\tilde{h}^{(0)} \\ 8-8\tilde{h}^{(0)} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим функцию:

$$\Phi_0(h) = f\begin{pmatrix} 1+4h^{(0)} \\ 8-8h^{(0)} \end{pmatrix} = -(1+4h-8)^2 - (8-8h-8)^2 =$$

$$= -16h^2 + 56h - 49 - 64h^2 = -80h^2 + 56h - 49.$$

Производная $\Phi_0'(h) = -160h + 56$ обращается в нуль в точке $h = 56/160 = 7/20$, положительна при $h < 7/20$ и отрицательна при $h > 7/20$, поэтому точка $\tilde{h}^{(0)} = 7/20$ является точкой глобального максимума функции $\Phi_0(h)$.

Величину шага смещения $h^{(0)}$ выберем как:

$$h^{(k)} = \min\left\{1; \tilde{h}^{(k)}\right\} = \{1; 7/20\} = 7/20$$

и построим следующее приближение $x^{(1)}$ к оптимальному решению исходной задачи:

$$x^{(1)} = x^{(0)} + h^{(0)}\left(\tilde{x}^{(0)} - x^{(0)}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix} + \frac{7}{20}\begin{pmatrix} 5-1 \\ 0-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+4\cdot 7/20 \\ 8-8\cdot 7/20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12/5 \\ 26/5 \end{pmatrix}.$$

2-й шаг.

Градиент целевой функции в точке $x^{(1)}$ равен:

$$\nabla f\left(x^{(1)}\right) = \begin{pmatrix} -2(x_1-8) \\ -2(x_2-8) \end{pmatrix}\Bigg|_{x=x^{(1)}} = \begin{pmatrix} -2(12/5-8) \\ -2(26/5-8) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 56/5 \\ 28/5 \end{pmatrix}.$$

Поставим вспомогательную задачу максимизации функции (34) при ограничениях (27):

$$f_1(x) = \left(\nabla f\left(x^{(1)}\right), \left(x - x^{(1)}\right)\right) = \frac{56}{5}\left(x_1 - \frac{12}{5}\right) + \frac{28}{5}\left(x_2 - \frac{26}{5}\right) = \frac{56}{5}x_1 + \frac{28}{5}x_2 - 56 \to \max,$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \le 15, \\ x_1 + x_2 \le 10, \\ x_1 \ge 0, \\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Оптимальное решение этой задачи равно:

$$\tilde{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 15/2 \end{pmatrix}$$

Симплексные таблицы представлены ниже.

Выберем $\tilde{h}^{(1)}$ из условия наибольшего роста целевой функции $f(x)$ при перемещении из точки:

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 12/5 \\ 26/5 \end{pmatrix}$$

	x_1	x_2	b_i
x_3	3	1	15
x_4	1	1	10
f_{max}	-56/5	-28/5	-56

	x_3	x_2	b_i
x_1	1/3	1/3	5
x_4	-1/3	2/3	5
f_{max}	56/15	-28/15	0

	x_3	x_4	b_i
x_1	1/2	-1/2	5/2
x_2	-1/2	3/2	15/2
f_{max}	28/5	14/5	14

в точку:

$$x^{(1)} + \tilde{h}^{(1)}\left(\tilde{x}^{(1)} - x^{(1)}\right) = \begin{pmatrix} 12/5 \\ 26/5 \end{pmatrix} + \tilde{h}^{(1)} \begin{pmatrix} 5/2 - 12/5 \\ 15/2 - 26/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12/5 + \tilde{h}^{(1)}/10 \\ 26/5 + 23\tilde{h}^{(1)}/10 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим функцию:

$$\Phi_1(h) = f\begin{pmatrix} 12/5 + h/10 \\ 26/5 + 23h/10 \end{pmatrix} = -\left(12/5 + h/10 - 8\right)^2 - (26/5 + 23h/10 - 8)^2 =$$

$$= -\left(\frac{h}{10} - \frac{28}{5}\right)^2 - \left(\frac{23h}{10} - \frac{14}{5}\right)^2.$$

Производная:

$$\Phi_1'(h) = -2\left(\frac{h}{10} - \frac{28}{5}\right)\frac{1}{10} - 2\left(\frac{23h}{10} - \frac{14}{5}\right)\frac{23}{10} = -\frac{1}{5}(53h - 70)$$

обращается в нуль в точке $h = 70/53$, положительна при $h < 70/53$ и отрицательна при $h > 70/53$, поэтому точка $\tilde{h}^{(1)} = 70/53$ является точкой глобального максимума функции $\Phi_1(h)$.

Величину шага смещения $h^{(1)}$ выберем как:

$$h^{(1)} = min\left\{1; \tilde{h}^{(1)}\right\} = min\{1; 70/53\} = 1$$

и построим следующее приближение $x^{(2)}$ к оптимальному решению исходной задачи:

$$x^{(2)} = x^{(1)} + h^{(1)}(\tilde{x}^{(1)} - x^{(1)}) = x^{(1)} + \tilde{x}^{(1)} - x^{(1)} = \tilde{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 15/2 \end{pmatrix}.$$

3-й шаг.

Градиент целевой функции в точке $x^{(2)}$ равен:

$$\nabla f\left(x^{(2)}\right) = \left.\begin{pmatrix} -2(x_1 - 8) \\ -2(x_2 - 8) \end{pmatrix}\right|_{x = x^{(2)}} = \begin{pmatrix} -2(5/2 - 8) \\ -2(15/2 - 8) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Поставим вспомогательную задачу максимизации функции (34) при ограничениях (27):

$$f_2(x) = \left(\nabla f\left(x^{(2)}\right), \left(x - x^{(2)}\right)\right) = 11(x_1 - 5/2) + x_2 - 15/2 \to max,$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \le 15, \\ x_1 + x_2 \le 10, \\ x_1 \ge 0, \\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Оптимальное решение этой задачи равно:

$$\tilde{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Симплексные таблицы представлены ниже.

	x_1	x_2	b_i
x_3	3	1	15
x_4	1	1	10
f_{max}	-11	-1	-35

	x_3	x_2	b_i
x_1	1/3	1/3	5
x_4	-1/3	2/3	5
f_{max}	11/3	8/3	20

Выберем $\tilde{h}^{(2)}$из условия наибольшего роста целевой функции $f(x)$ при перемещении из точки:

$$x^{(2)} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 15/2 \end{pmatrix}$$

в точку:

$$x^{(2)} + \tilde{h}^{(2)}\left(\tilde{x}^{(2)} - x^{(2)}\right) = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 15/2 \end{pmatrix} + \tilde{h}^{(2)}\begin{pmatrix} 5 - 5/2 \\ 0 - 15/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 + 5\tilde{h}^{(2)}/2 \\ 15/2 - 15\tilde{h}^{(2)}/2 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим функцию:

$$\Phi_2(h) = f\begin{pmatrix} 5/2 + 5h/2 \\ 15/2 - 15h/2 \end{pmatrix} = -(5/2 + 5h/2 - 8)^2 - (15/2 - 15h/2 - 8)^2 =$$

$$= -\left(\frac{5h}{2} - \frac{11}{2}\right)^2 - \left(-\frac{15h}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 = -\left(\frac{5h}{2} - \frac{11}{2}\right)^2 - \left(\frac{15h}{2} + \frac{1}{2}\right)^2.$$

Производная:

$$\Phi_2'(h) = -2\left(\frac{5h}{2} - \frac{11}{2}\right)\frac{5}{2} - 2\left(\frac{15h}{2} + \frac{1}{2}\right)\frac{15}{2} = -\frac{5}{2}(50h - 8) = -5(25h - 4)$$

обращается в нуль в точке $h = 4/25$, положительна при $h < 4/25$ и отрицательна при $h > 4/25$, поэтому точка $\tilde{h}^{(2)} = 4/25$ является точкой глобального максимума функции $\Phi_2(h)$.

Величину шага смещения $h^{(2)}$ выберем как:

$$h^{(2)} = min\left\{1; \tilde{h}^{(2)}\right\} = min\left\{1; 4/25\right\} = 4/25$$

и построим следующее приближение к оптимальному решению исходной задачи:

$$x^{(3)} = x^{(2)} + h^{(2)}\left(\tilde{x}^{(2)} - x^{(2)}\right) = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 15/2 \end{pmatrix} + \frac{4}{25}\begin{pmatrix} 5 - 5/2 \\ 0 - 15/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29/10 \\ 63/10 \end{pmatrix}.$$

Задание для самостоятельного решения

Требуется найти максимальное значение функции $f(x_1; x_2) = nx_1^2 + 5x_2^2$ при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 18; \\ 2x_1 + x_2 \le 16; \\ x_1 \ge 0; \\ x_2 \ge 0. \end{cases},$$

где n — номер варианта.

Вначале нужно проверить выполнение условия регулярности.

Затем нужно найти приближение к оптимальному решению задачи, для чего провести три первые итерации метода возможных направлений, а затем три первые итерации метода условного градиента, выбрав (для обоих методов) в качестве начального приближения вектор:

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

После этого необходимо с помощью надстройки «Поиск решения» пакета Microsoft Excel проверить правильность решения задачи.

Использование надстройки «Поиск решения» пакета Microsoft Excel

Пример 3. Требуется найти приближение к оптимальному решению задачи выпуклого программирования (26)-(27) из примера 1 с помощью надстройки «Поиск решения» пакета Microsoft Excel.

Решение. Введем в рабочий лист Microsoft Excel формулы, как показано на рисунке 7. Ячейки B1 и B2 отведем под координаты вектора оптимального решения задачи. Запустим надстройку «Поиск решения».

	A	B
1	$x_1 =$	
2	$x_2 =$	
3	$f(x_1, x_2) =$	=–((B1–8)^2+(B2–8)^2)
4	$\varphi_1(x_1, x_2) =$	=3*B1+B2
5	$\varphi_2 x_1, x_2) =$	=B1+B2
6	$b_1 =$	15
7	$b_2 =$	10

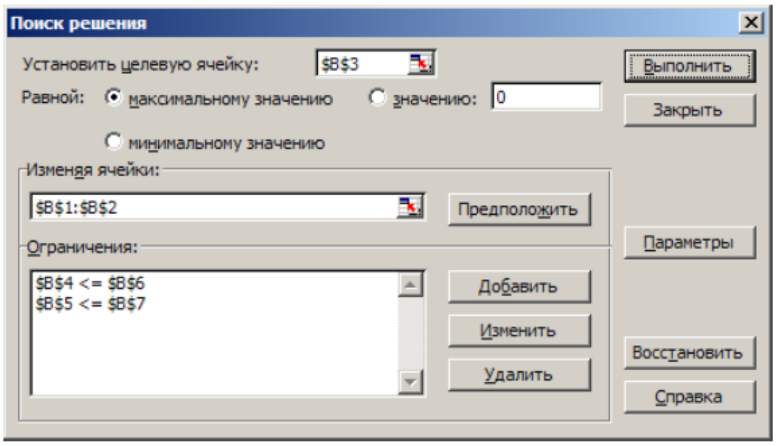
а) формулы Microsoft Excel

	A	B
1	$x_1 =$	
2	$x_2 =$	
3	$f(x_1, x_2) =$	0
4	$\varphi_1(x_1, x_2) =$	0
5	$\varphi_2 x_1, x_2) =$	0
6	$b_1 =$	15
7	$b_2 =$	10

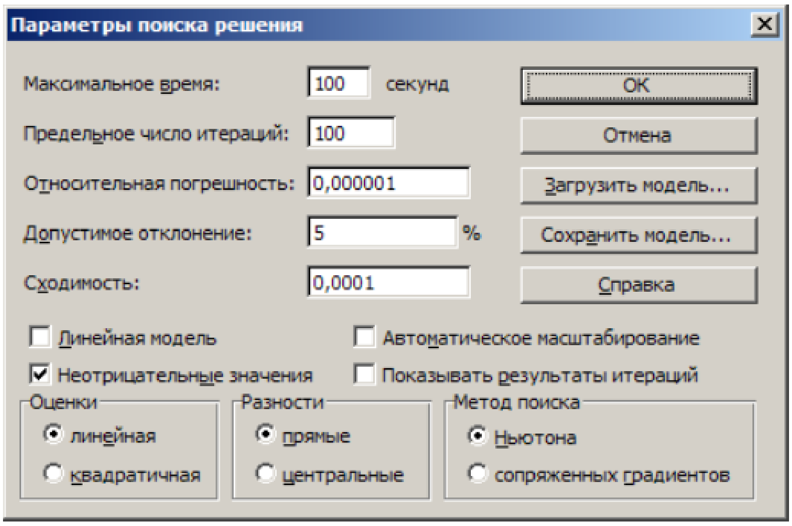
б) результат ввода формул

Рис. 7 - Исходные данные для решения задачи выпуклого программирования с помощью надстройки «Поиск решения»

В появившемся окне ввода данных (рисунок 8,а) укажем ячейку, в которую введена максимизируемая целевая функция, и ограничения (без учета ограничений неотрицательности, которые введем в окне ввода параметров надстройки «Поиск решения» — см. рисунок 8,б).



а) окно ввода данных



б) окно ввода параметров

Рис. 8 - Ввод данных в надстройку "Поиск решения"

Результаты работы надстройки «Поиск решения» непосредственно на рабочем листе представлены на рисунке 9.

	A	B
1	$x_1 =$	2,9
2	$x_2 =$	6,3
3	$f(x_1, x_2) =$	−28,9
4	$\varphi_1(x_1, x_2) =$	15
5	$\varphi_2(x_1, x_2) =$	9,2
6	$b_1 =$	15
7	$b_2 =$	10

Рис. 9 - Результаты работы надстройки «Поиск решения»

Кроме того, имеется возможность получить Отчеты по результатам, по пределам и по устойчивости, подобные тем, что получались при решении задачи линейного программирования. Предлагаем студенту проанализировать информацию в этих отчетах самостоятельно.

2.2 Динамическая задача распределения инвестиций

Динамическое программирование представляет собой математический аппарат, разработанный для решения некоторого класса задач математического программирования путем их разложения на относительно небольшие и, следовательно, менее сложные задачи. Специфика метода динамического программирования состоит в том, что для отыскания оптимального управления планируемая операция разделяется на ряд последовательных шагов или этапов. Соответственно и сам процесс планирования операции становится многошаговым и развивается последовательно, от этапа к этапу, причем каждый раз оптимизируется управление только на одном шаге.

Некоторые операции естественно распадаются на этапы, в других это деление приходится вводить искусственно. Примером «естественно многоэтапной» операции может служить планирование работы предприятия на некоторый период времени, состоящий из нескольких хозяйственных лет или кварталов.

Особо подчеркнем, что принцип динамического программирования отнюдь не предполагает, что, выбирая управление на одном отдельном шаге, можно забыть обо всех остальных. Напротив, управление на каждом шаге должно выбираться с учетом всех его последствий в будущем. Динамическое программирование – это планирование дальновидное, с учетом перспективы.

Однако из этого правила есть исключение. Среди всех шагов существует один, который может планироваться попросту, «без оглядки на будущее». Это – последний шаг. Спланировав оптимальным образом этот последний шаг, можно к нему «пристраивать» предпоследний, затем предпредпоследний и т.д. Поэтому процесс динамического программирования разворачивается от конца к началу. Сначала делаются различные предположения о том, чем кончился предпоследний шаг, и для каждого из них выбирается управление на последнем. Затем делаются различные предположения о том, чем кончился предпредпоследний шаг, то есть рассматриваются различные состояния системы на третьем от конца шаге и выбирается управление на втором от концы шаге так, чтобы оно вместе в уже выбранным управлением на последнем шаге обеспечивало наилучший эффект на двух последних шагах, и так далее, вплоть до первого от начала шага, с которого начинался процесс.

Учтем, что в начале процесса состояние системы нам известно, и делать какие-то предположения не нужно. Поэтому, имея в виду, что все последующие шаги спланированы для различных состояний системы, остается выбрать управление на первом шаге так, чтобы оно было оптимальным с учетом всех управлений, уже принятых наилучшим образом на всех последующих шагах.

Принцип, положенный в основу построения такого решения (искать всегда оптимальное продолжение процесса относительно того состояния, которое достигнуто в данный момент), принято называть принципом оптимальности.

Состояние системы на каждом шаге характеризуется некоторой переменной величиной, которая называется параметром состояния. Наилучший эффект на данном этапе вместе с уже рассмотренными шагами характеризуется функцией состояния. Решение конкретной задачи методом динамического программирования сводится к выбору параметра состояния (что требует определенного навыка), составлению функции состояния и рекуррентных соотношений, связывающих функции состояния для двух соседних последовательных этапов, и их применению для выбора оптимального управления.

Знакомство с методом динамического программирования проще всего начать с рассмотрения нелинейной задачи распределения ресурсов между предприятиями одного производственного объединения или отрасли. Для определенности можно считать, что речь идет о распределении капитальных вложений.

Предположим, что указано n пунктов, где требуется построить или реконструировать предприятия одной отрасли, для чего выделено b рублей.

Обозначим через $f(\xi)$ прирост мощности или прибыли на j-м предприятии, если оно получит ξ рублей капитальных вложений. В динамической задаче распределения инвестиций требуется найти такое распределение:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

инвестиций между предприятиями, которое максимизирует суммарный прирост мощности или прибыли

$$z = f_1(x_1) + f_2(x_2) + ... + f_n(x_n)$$

при ограничении по общей сумме инвестиций:

$$x_1 + x_2 + ... + x_n = b$$

Будем считать, что все переменные x_j принимают только целые неотрицательные значения:

$$x_j = 0 \text{ или } 1 \text{ или } 2 \text{ или } 3 \text{ и т.д.}$$

Функции $f_j(x_j)$ мы считаем заданными, заметив, что их определение – довольно трудоемкая экономическая задача.

Воспользуемся для решения этой задачи методом динамического программирования. Введем параметр состояния и определим функцию состояния. За параметр состояния ξ примем денежную сумму, выделяемую нескольким предприятиям, а функцию состояния $F_k(\xi)$ определим как максимальную прибыль на первых k предприятиях, если они вместе получают ξ руб. Параметр ξ может изменяться от 0 до b. Если из ξ руб. k-е предприятие получит x_k руб., то каково бы ни было это значение, остальные $(\xi - x_k)$ руб. естественно распределить между предприятиями от первого до (k-1)-го так, чтобы была получена максимальная прибыль $F_{k-1}(\xi - x_k)$

Тогда прибыль будет равна $f_k(x_k) + F_{k-1}(\xi - x_k)$. Надо выбрать такое значение x_k между 0 и ξ, чтобы эта сумма была максимальной, и мы приходим к рекуррентному соотношению на промежутке $0 \le x_k \le \xi$ для k=2,3,…,n:

$$F_k(\xi) = \max\left\{ f_k(x_k) + F_{k-1}(\xi - x_k) \right\}$$

Если же k=1, то $F_1(\xi) = f_1(\xi)$.

Пример 1. Производственное объединение состоит из четырех предприятий (n=4). Общая сумма капитальных вложений равна 700 млн. руб. (b=700), выделяемые предприятиям суммы кратны 100 млн. руб. Если j-е предприятие получает инвестиции в объеме ξ млн. руб., то прирост годовой прибыли на этом предприятии составит $f_j(\xi)$ млн. руб. в год. Значения функций $f_j(\xi)$ приведены в таблице 1. Требуется найти такое распределение

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$$

инвестиций между предприятиями, которое максимизирует суммарный прирост прибыли на всех предприятиях вместе.

Таблица 1

ξ	0	100	200	300	400	500	600	700
$f_1(\xi)$	0	20	34	46	53	55	60	60
$f_2(\xi)$	0	18	29	45	62	78	90	98
$f_3(\xi)$	0	25	41	52	74	82	88	90
$f_4(\xi)$	0	30	52	76	90	104	116	125

Решение. Прежде всего заполняем таблицу 2.

Таблица 2

x_2	$\xi - x_2$ / $F_1(\xi - x_2)$ / $f_2(x_2)$	0	100	200	300	400	500	600	700
		0	20	34	46	53	55	60	60
0	0	0	**20**	34	46	53	55	60	60
10	18	18	**38**	**52**	64	71	73	78	
0	29	29	49	63	75	82	84		
20	45	45	**65**	79	91	98			
0	62	62	**82**	96	108				
30	78	78	**98**	**112**					
0	90	90	110						
40	98	98							

Значения $f_2(\xi)$ складываем со значениями $F_1(\xi - x_2) = f_1(\xi - x_2)$ и на каждой северо-восточной диагонали находим наибольшее число (которое выделяем жирным и обводим рамкой) и указываем соответствующее значение $x_2(\xi)$. Затем заполняем таблицу 3.

Таблица 3

ξ	0	100	200	300	400	500	600	700
$F_2(\xi)$	0	20	38	52	65	82	98	112
$x_2(\xi)$	0	0	100	100	300	400	500	500

Продолжая процесс, табулируем функции $F_3(\xi), x_3(\xi)$ и т. д. (таблицы 4-5).

Таблица 4

x_3	$\xi - x_3$ / $F_2(\xi - x_3)$ / $f_3(x_3)$	0	100	200	300	400	500	600	700
		0	20	38	52	65	82	98	112
0	0	0	20	38	52	65	82	98	112
100	25	**25**	**45**	**63**	77	90	107	123	
200	41	41	61	**79**	93	106	123		
300	52	52	72	94	112	126			
400	74	74	**94**	**112**	**126**				
500	82	82	102	120					
600	88	88	106						
700	90	90							

Таблица 5

ξ	0	100	200	300	400	500	600	700
$F_3(\xi)$	0	25	45	63	79	94	112	126
$x_3(\xi)$	0	100	100	100	200	400	400	400

На долю остальных трех предприятий остается 400 млн. руб. Из таблицы 5 видно, что третьему предприятию должно быть выделено:

$$x_3 = x_3(700 - x_4) = x_3(400) = 200 \textit{млн.руб.}$$

Продолжая обратный процесс, находим:

$$x_2 = x_2(700 - x_4 - x_3) = x_2(200) = 100 \textit{млн.руб.}$$

На долю первого предприятия остается:

$$x_1 = x_1(700 - x_4 - x_3 - x_2) = 100 \textit{млн.руб.}$$

Таким образом, наилучшим является следующее распределение капитальных вложений по предприятиям:

$$x_1 = 100, x_2 = 100, x_3 = 200, x_4 = 300 \textit{млн.руб.}$$

Оно обеспечивает производственному объединению наибольший возможный прирост прибыли 155 млн. руб. Студенту рекомендуется проверить выполнение равенства:

$$f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3) + f_4(x_4) = z_{\max}$$

В таблице 6 заполняем только одну диагональ для значения $\xi = 700$. Наибольшее число на этой диагонали $z_{\max}$=155 тыс. руб., причем четвертому предприятию должно быть выделено $x_4 = x_4(700) = 300$ млн. руб.

Таблица 6

x_4	$\xi - x_4$	0	100	200	300	400	500	600	700
	$F_3(\xi - x_4)$ / $f_4(x_4)$	0	25	45	63	79	94	112	126
0	0								126
100	30							142	
200	52						146		
300	76					**155**			
400	90				153				
500	104			149					
600	116		141						
700	125	125							

2.3 Динамическая задача управления производством и запасами

Предприятие производит партиями некоторые изделия. Предположим, что оно получило заказы на n месяцев. Размеры заказов значительно меняются от месяца к месяцу. Поэтому иногда лучше выполнять одной партией заказы нескольких месяцев, а затем хранить изделия, пока они не потребуются, чем выполнять заказ в тот именно месяц, когда этот заказ должен быть отправлен. Необходимо составить план производства на указанные n месяцев с учетом затрат на производство и хранение изделий. Обозначим:

x_j - число изделий, производимых в j-й месяц;

y_j - величина запаса к началу j-го месяца (это число не содержит изделий, произведенных в j-м месяце);

d_j - число изделий, которые должны быть отгружены в j-*й* месяц;

$f_j(x_j, y_{j+1})$ - затраты на хранение и производство изделий в j-м месяце.

Будем считать, что величины запасов к началу первого месяца y_1 и к концу последнего y_{n+1} заданы.

Задача состоит в том, чтобы найти план производства:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{1}$$

компоненты которого удовлетворяют условиям материального баланса:

$$x_j + y_j - d_j = y_{j+1},\ j = 1, 2, \dots, n \tag{2}$$

и минимизируют суммарные затраты за весь планируемый период:

$$z = \sum_{j=1}^{n} f_j(x_j, y_{j+1}), \tag{3}$$

причем по смыслу задачи:

$$x_j = 0, y_j = 0,\ j = 1, 2, 3 \tag{4}$$

Прежде чем приступить к решению поставленной задачи, заметим, что для любого месяца j величина y_{j+1} запаса к концу месяца должна удовлетворять ограничениям:

$$0 \le y_{j+1} \le d_{j+1} + d_{j+2} + \dots + d_n \tag{5}$$

то есть объем производимой продукции x_j на этапе j может быть настолько велик, что запас y_{j+1} удовлетворяет спрос на всех последующих этапах, но не имеет смысла иметь y_{j+1} больше суммарного спроса на всех последующих этапах. Кроме того, из соотношений (2) и (4) непосредственно следует, что переменная x_j должна удовлетворять ограничениям:

$$0 \le x_j \le d_j + y_{j+1} \tag{6}$$

Следует также заметить, что переменные x_j, y_j могут принимать только целые неотрицательные значения, то есть мы получили задачу целочисленного нелинейного программирования.

Будем решать задачу (1)-(6) методом динамического программирования. Введем параметр состояния и составим функцию состояния. За параметр состояния ξ примем наличный запас в конце k-го месяца $\xi = y_{k+1}$, а функцию состояния $F_k(x)$ определим как минимальные затраты за первые k месяцев при выполнении условия (5):

$$F_k(\xi) = \min_{x1, x2, \dots, xk} \sum_{j=1}^{k} f_j(x_j, y_{j+1}),$$

где минимум берется по неотрицательным целым значениям $x_1, x_2, \dots, x_k$, удовлетворяющим условиям:

$$x_j + y_j - d_j = y_{j+1},\ j = 1, 2, \dots, k-1,\ x_k + y_k - d_k = \xi \tag{7}$$

Учитывая, что:

$$\min_{x_1,x_2,\dots,x_k}\sum_{j=1}^{k}\left(x_j,y_{j+1}\right)=\min_{x_k}\left\{f_k\left(x_k,y_{k+1}\right)+\min_{x_1,x_2,\dots,x_{k-1}}\sum_{j=1}^{k-1}f_j\left(x_j,y_{j+1}\right)\right\}$$

и величина запаса y_k к концу $(k-1)$ - го периода, как видно из уравнения (7), равна:

$$y_k=\xi+d_k-x_k$$

приходим к рекуррентному соотношению:

$$F_k\left(\xi\right)=\min_{x_k}\left\{f_k\left(x_k,\xi\right)+F_{k-1}\left(\xi+d_k-x_k\right)\right\},$$

где минимум берется по единственной переменной x_k, которая, согласно (6), может изменяться в пределах:

$$О\le x_k\le d_k+\xi$$

принимая целые значения, причем верхняя граница зависит от значений параметра состояния, изменяющегося в пределах:

$$О\le\xi\le d_{k+1}+d_{k+1}2+\dots+d_n, \tag{8}$$

а индекс *k* может принимать значения:

$$k=2,3,4,..,n.$$

Если *k* = 1, то:

$$F_1\left(\xi=y_2\right)=\min_{x_1}f_1\left(x_1,\xi\right),$$

где

$$x_1=\xi+d_1-y_1,$$

$$О\le\xi\le d_2+d_3+\dots+d_n,$$

то есть на начальном этапе при фиксированном уровне y_1 исходного запаса каждому значению параметра ξ отвечает только одно значение переменной x_1, что несколько уменьшает объем вычислений.

Применив известную вычислительную процедуру динамического программирования, на последнем шаге (при $k=n$) находим значение последней компоненты x_n^* оптимального решения, а остальные компоненты определяем как:

$$x_k^*=x_k^*\left(y_{n+1}+\sum_{j=k+1}^{n}\left(d_j-x_j^*\right)\right),k=1,2,\dots,n-1.$$

Рассмотрим более подробно функции затрат $f_j\left(x_j,y_{j+1}\right)$ и рекуррентные соотношения. Пусть:

$$\varphi_j\left(x_j\right)=ax_j^2+bx_j+c,$$

$\varphi_j\left(x_j\right)$ - затраты на производство (закупку) x_j единиц продукции на этапе j;

h_j - затраты на хранение единицы запаса, переходящей из этапа *j* в этап *j+1*.

Тогда затраты на производство и хранение на этапе *j* равны:

$$f_j\left(x_j,y_{j+1}\right)=\varphi_j\left(x_j\right)+h_jy_{j+1}=ax_j^2+bx_j+c+h_jy_{j+1}$$

Выведенные ранее рекуррентные соотношения динамического программирования для решения задачи управления производством и запасами в нашем случае принимают вид:

$$F_k\left(\xi = y_{k+1}\right) = \min_{x_k}\left\{ax_k^2 + bx_k + c + h_k y_{k+1} + F_{k-1}\left(y_k\right)\right\} \tag{9}$$

где:

$$k = 2,3,4,...,n$$
$$0 \le y_{k+1} \le d_{k+1} + d_{k+2} + ... + d_n,$$
$$0 \le x_k \le d_k + y_{k+1}, \tag{10}$$
$$y_k = y_{k+1} + d_k - x_k$$

Если же $k = 1$, то:

$$F_1\left(\xi = y_2\right) = \min_{x_1}\left\{ax_1^2 + bx_1 + h_1 y_2\right\} \tag{11}$$
$$0 \le y_2 \le d_2 + d_3 + ... + d_n, \tag{12}$$
$$0 \le x_1 \le d_1 + y_2, \tag{13}$$
$$x_1 + y_1 - d_1 = y_2$$

Остается заметить, что полезно обозначить выражение в фигурных скобках в (9) через:

$$\Omega_k\left(x_k, y_{k+1}\right) = ax_k^2 + bx_k + c + h_k y_{k+1} + F_{k-1}\left(y_k\right)$$

и записать рекуррентное соотношение (9) в виде:

$$F_k\left(\xi = y_{k+1}\right) = \min_{x_k}\Omega_k\left(x_k, y_{k+1}\right), \tag{14}$$

где минимум берется по целочисленной переменной k_x , удовлетворяющей условию (10).

Пример 1. Рассмотрим трехэтапную систему управления запасами с дискретной продукцией и динамическим детерминированным спросом. Пусть спрос (заявки) потребителей на нашу продукцию составляют: на первый этап $d_1 = 3$единицы, на второй – $d_2 = 2$, на третий $-d_3 = 4$единицы. К началу первого этапа на складе имеется только 2 единицы продукции, то есть начальный уровень запаса равен $y_1 = 2$. Затраты на хранение единицы продукции на разных этапах различны и составляют соответственно $h_1 = 1, h_2 = 3, h_3 = 2$. Затраты на производство x_j единиц продукции на j-м этапе определяются функцией:

$$\varphi_j\left(x_j\right) = x_j^2 + 5x_j + 2,\ j = 1,2,3,$$

то есть $a = 1, b = 5, c = 2$. Требуется указать, сколько единиц продукции на отдельных этапах следует производить, чтобы заявки потребителей были удовлетворены, а наши общие затраты на производство и хранение за все три этапа были наименьшими.

Исходные данные задачи можно кратко записать следующим образом:

d_1	d_2	d_3	a	b	c	h_1	h_2	h_3	y_1
1	2	4	1	5	3	1	3	2	2

Решение. Воспользовавшись рекуррентными соотношениями, последовательно вычисляем $F_1(\xi = y_2), F_2(\xi = y_3), F_3(\xi = y_4)$ и соответственно находим $x_1^*(\xi = y_2), x_2^*(\xi = y_3), x_3^*(\xi = y_2)$.

Положим $k = 1$. Согласно (11) имеем:

$$F_1(\xi = y_2) = \min_{x_1}\left\{x_1^2 + 5x_1 + 2 + y_2\right\}$$

Учтем, что согласно (12) параметр состояния $\xi = y_2$ может принимать целые значения на отрезке:

$$0 \le y_2 \le d_2 + d_3$$
$$0 \le y_2 \le 2 + 4$$

то есть:

$$y_2 = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

При этом, вообще говоря, каждому значению параметра состояния должна отвечать определенная область изменения переменной x_1, характеризуемая условием (13):

$$0 \le x_1 \le 3 + y_2$$

непосредственно следует, что объем производства связан со значением параметра состояния переменной $\xi = y_2$ соотношением:

$$x_1 = y_2 + d_1 - y_1 = y_2 + 3 - 2 = y_2 + 1 \qquad (15)$$

В этом и состоит особенность первого этапа. Если задан уровень запаса к началу первого этапа, то каждому значению y_2 отвечает единственное значение x_1, и потому:

$$F_1(\xi = y_2) = \Omega_1(x_1, y_2).$$

Придавая y_2 различные целые значения от 0 до 6 и учитывая (15), находим:

$$y_2 = 0, x_1 = 0 + 1 = 1, \Omega_1(1, 0) = 1^2 + 5*1 + 2 + 1*0 = 8$$
$$y_2 = 1, x_1 = 1 + 1 = 2, \Omega_1(2, 1) = 2^2 + 5*2 + 2 + 1*1 = 17$$

и т.д. Значения функции состояния $F_1(\xi)$ представлены в таблице 1.

Таблица 1

$\xi = y_2$	0	1	2	3	4	5	6
$F_1(\xi = y_2)$	8	17	28	41	56	73	92
$x_1^*(\xi = y_2)$	1	2	3	4	5	6	7

Переходим ко второму этапу. Полагаем k=2 и табулируем функцию $F_2(\xi = y_3)$ с помощью соотношения (14):

$$F_2(\xi = y_3) = \min_{x_2}\Omega_2(x_2, y_3) = \left\{ax_2^2 + bx_2 + c + h_2 y_3 + F_1(y_2)\right\} = \min_{x_2}\left\{x_2^2 + 5x_2 + 2 + 3y_3 + F_1(y_2)\right\} \qquad (16)$$

Здесь минимум берется по единственной переменной x_2, которая может изменяться в пределах:

$$0 \le x_2 \le d_2 + y_3 \text{ или } 0 \le x_2 \le 2 + y_3 \qquad (17)$$

где верхняя граница зависит от параметра состояния $\xi = y_3$, который принимает значения на отрезке:

$$0 \le y_3 \le d_3, \text{ то есть } 0 \le y_3 \le 4,$$

а аргумент y_2 в последнем слагаемом справа в соотношении (16) связан с x_2 и y_3 балансовым уравнением:

$$x_2 + y_2 - d_2 = y_3,$$

откуда следует, что:

$$y_2 = y_3 + d_2 - x_2 = y_3 + 2 - x_2 \qquad (18)$$

Придавая параметру состояния различные значения от 0 до 4, будем последовательно вычислять $\Omega_2(x_2,\xi)$, а затем определять $F_2(\xi)$ и $\tilde{x}_2(\xi)$. Положим, например, $\xi = y_3 = 2$. Тогда, согласно (17),

$$0 \le x_2 \le 4,$$

то есть переменная x_2 может принимать значения 0, 1, 2, 3, 4, а каждому значению x_2 отвечает определенное значение y_2, вычисляемое по формуле (18):

$$y_2 = 4 - x_2.$$

Последовательно вычисляем:

$$\text{если } x_2 = 0, \text{ то } y_2 = 4 - 0 = 4,$$

$$\Omega_2(0,2) = 0^2 + 5*0 + 2 + 3*2 + F_1(4) = 8 + 56 = 64,$$

$$x_2 = 1, \quad y_2 = 4 - 1 = 3,$$

$$\Omega_2(1,2) = 1^2 + 5*1 + 2 + 3*2 + F_1(3) = 14 + 41 = 55,$$

$$x_2 = 2, \quad y_2 = 4 - 2 = 2,$$

$$\Omega_2(2,2) = 2^2 + 5*2 + 2 + 3*2 + F_1(2) = 22 + 28 = 50,$$

$$x_2 = 3, \quad y_2 = 4 - 3 = 1,$$

$$\Omega_2(3,2) = 3^2 + 5*3 + 2 + 3*2 + F_1(1) = 32 + 17 = \boxed{49},$$

$$x_2 = 4, \quad y_2 = 4 - 4 = 0,$$

$$\Omega_2(4,2) = 4^2 + 5*4 + 2 + 3*2 + F_1(0) = 44 + 8 = 52,$$

Наименьшее из полученных значений Ω_2 — это $F_2(2)$, то есть:

$$F_2(\xi = y_3 = 2) = \min_{x_2} \Omega_2(x_2, 2) = \min\{64, 55, 50, 49, 52\} = 49,$$

причем минимум достигается при значении x_2, равном:

$$x_2^*(\xi = y_3 = 2) = 3.$$

Аналогично для значения параметра $\xi = y_3 = 3$, проведя необходимые вычисления, найдем:

$$F_2(\xi = y_3 = 3) = 63, \quad x_2^*(\xi = y_3 = 2) = 3.$$

Процесс табулирования функции $F_2(\xi = y_3)$ приведен в таблице 2, а результаты табулирования сведены в таблице 3.

Переходим к следующему этапу. Полагаем $k = 3$ и табулируем функцию $F_3(\xi = y_4)$:

$$F_3(\xi = y_4) = \min_{x_3} \left\{ a x_3^2 + b x_3 + c + h_3 y_4 + F_2(y_3) \right\}$$

Вычисляем значение функции состояния только для одного значения аргумента $\xi = y_4 = 0$, так как не хотим оставлять продукцию в запас в конце исследуемого периода. Процесс вычислений приведен в таблице 4. Получаем:

$$F_3(\xi = y_4) = \min_{x_3} \Omega_3(x_3, 0) = \min\left\{80, 71, 665, 62, 62\right\} = 62,$$

причем минимум достигается при двух значениях переменной x_3, равных:

$$x_3^*(\xi = y_4 = 0) = 3 \text{ или } x_3^{**}(\xi = y_4 = 0) = 4$$

Таким образом, мы получили не только минимальные общие затраты на производство и хранение продукции, но и последнюю компоненту оптимального решения. Она равна $x_3^* = 3$ или $x_3^{**} = 4$.

Рассмотрим случай, когда на последнем этапе планируется выпускать три единицы продукции:

$$x_3^* = 3$$

Остальные компоненты оптимального решения найдем по обычным правилам метода динамического программирования. Чтобы найти предпоследнюю компоненту, учтем, что:

$$x_3 + y_3 - d_3 = y_4 \text{ или } 3 + y_3 - 4 = 0$$

откуда:

$$y_3 = 1$$

Из таблицы 3 значений $x_2^*(\xi)$ находим:

$$x_2^* = x_2^*(\xi = y_3 = 1) = 2$$

Аналогично, продолжая двигаться в обратном направлении и учитывая, что:

$$x_2 + y_2 - d_2 = y_3 \text{ или } 2 + y_2 - 2 = 1$$

получаем:

$$y_2 = 1$$

из таблицы 2 значений $x_1^*(\xi)$ находим:

$$x_1^* = x_1^*(\xi = y_2 = 1) = 2.$$

РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА №1
«Элементы теории игр и принятия решений»

Задание 1. Дайте геометрическую интерпретацию решения игры для двух игроков. Для проверки геометрического решения проведите аналитическое решение и сравните его с результатами, полученными геометрическим способом решения.

№1. $A=\begin{pmatrix}0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}6 & 0{,}7 & 0{,}8\\ 0{,}6 & 0{,}5 & 0{,}4 & 0{,}9 & 1{,}1\end{pmatrix}$	**№16.** $A=\begin{pmatrix}3 & 9\\ 6 & 4\\ 7 & 6\\ 9 & 8\end{pmatrix}$
№2. $A=\begin{pmatrix}3 & -5\\ 1 & -2\\ 4 & 2\\ -4 & 3\end{pmatrix}$	**№17.** $A=\begin{pmatrix}5 & 6\\ 3 & 8\\ 2 & 9\\ 4 & 7\end{pmatrix}$
№3. $A=\begin{pmatrix}2 & -3 & 5 & 4\\ 4 & 2 & -4 & 3\end{pmatrix}$	**№18.** $A=\begin{pmatrix}5 & 8 & 4 & 7 & 6\\ 1 & 2 & 8 & 4 & 3\end{pmatrix}$
№4. $A=\begin{pmatrix}1{,}1 & 0{,}6 & 0{,}8 & 1{,}0 & 0{,}4\\ 1{,}2 & 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}6\end{pmatrix}$	**№19.** $A=\begin{pmatrix}3 & 7 & 6 & 4\\ 8 & 4 & 9 & 8\end{pmatrix}$
№5. $A=\begin{pmatrix}3 & 6\\ 2 & 4\\ 5 & 3\\ 4 & 7\end{pmatrix}$	**№20.** $A=\begin{pmatrix}8 & 7 & 4 & 4 & 7\\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10\end{pmatrix}$
№6. $A=\begin{pmatrix}3 & 6 & 1 & 4 & 2\\ 5 & 2 & 4 & 2 & 7\end{pmatrix}$	**№21.** $A=\begin{pmatrix}5 & 8 & 6 & 4 & 7\\ 3 & 2 & 4 & 8 & 9\end{pmatrix}$
№7. $A=\begin{pmatrix}-5 & 3 & -1 & -2 & 2\\ -2 & 5 & -3 & -4 & 3\end{pmatrix}$	**№22.** $A=\begin{pmatrix}3 & 6 & 1 & 4\\ 5 & 2 & 4 & 2\end{pmatrix}$
№8. $A=\begin{pmatrix}-3 & 4\\ 2 & -2\\ -2 & 5\\ 3 & -4\end{pmatrix}$	**№23.** $A=\begin{pmatrix}3 & 6 & 1 & 4\\ 5 & 3 & 6 & 2\end{pmatrix}$
№9. $A=\begin{pmatrix}2 & 5 & 8 & 5\\ 7 & 3 & 4 & 6\end{pmatrix}$	**№24.** $A=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 6 & 5\\ 5 & 6\\ 3 & 9\end{pmatrix}$

№10. $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 5 \\ 5 & 2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$	**№25.** $A=\begin{pmatrix} 7 & -5 & -2 & 4 \\ 5 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$
№11. $A=\begin{pmatrix} 7 & 10 & 8 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 7 & 10 & 8 \end{pmatrix}$	**№26.** $A=\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$
№12. $A=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \\ 6 & 1 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$	**№27.** $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 6 \\ -2 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$
№13. $A=\begin{pmatrix} 5 & 3 & 7 & 4 \\ 2 & 6 & 1 & 8 \end{pmatrix}$	**№28.** $A=\begin{pmatrix} 4 & -3 & 6 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$
№14. $A=\begin{pmatrix} 5 & 7 & 4 & 6 \\ 2 & 1 & 8 & 3 \end{pmatrix}$	**№29.** $A=\begin{pmatrix} 6 & 8 & 3 & 5 & 7 \\ 4 & 7 & 2 & 9 & 3 \end{pmatrix}$
№15. $A=\begin{pmatrix} 7 & 3 & 6 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 8 & 4 \end{pmatrix}$	**№30.** $A=\begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 & -4 & 3 \\ -2 & 3 & 5 & -3 & 5 \end{pmatrix}$

Задание 2. Решить задачу теории игр путем сведения ее к задаче линейного программирования.

№1. $A=\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$	**№16.** $A=\begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$
№2. $A=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$	**№17.** $A=\begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$
№3. $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$	**№18.** $A=\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$
№4. $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$	**№19.** $A=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$
№5. $A=\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$	**№20.** $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$
№6. $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$	**№21.** $A=\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$
№7. $A=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$	**№22.** $A=\begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

№8. $A=\begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$	**№23.** $A=\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$
№9. $A=\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$	**№24.** $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$
№10. $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$	**№25.** $A=\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$
№11. $A=\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$	**№26.** $A=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$
№12. $A=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$	**№27.** $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$
№13. $A=\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$	**№28.** $A=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$
№14. $A=\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$	**№29.** $A=\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$
№15. $A=\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$	**№30.** $A=\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА №2
«Динамическая задача распределения инвестиций»

Производственное объединение состоит из четырех предприятий (n=4). Общая сумма капитальных вложений равна 700 млн. руб. (b=700), выделяемые предприятиям суммы кратны 100 млн. руб. Если j-е предприятие получает инвестиции в объеме ξ млн. руб., то прирост годовой прибыли на этом предприятии составит $f_j(\xi)$ млн. руб. в год (j=1,2,3,4). Значения функций $f_j(\xi)$ известны и для каждого варианта компактно записаны в таблице 1 в следующем виде:

$$f_1(0)\quad f_1(100)\quad f_1(200)\quad f_1(300)\quad f_1(400)\quad f_1(500)\quad f_1(600)\quad f_1(700)$$

$$f_2(0)\quad f_2(100)\quad f_2(200)\quad f_2(300)\quad f_2(400)\quad f_2(500)\quad f_2(600)\quad f_2(700)$$

$$f_3(0)\quad f_3(100)\quad f_3(200)\quad f_3(300)\quad f_3(400)\quad f_3(500)\quad f_3(600)\quad f_3(700)$$

$$f_4(0)\quad f_4(100)\quad f_4(200)\quad f_4(300)\quad f_4(400)\quad f_4(500)\quad f_4(600)\quad f_4(700)$$

Требуется найти такое распределение инвестиций между предприятиями, которое максимизирует суммарный прирост прибыли на всех предприятиях вместе. Для этого необходимо составить математическую модель динамической задачи распределения инвестиций и решить ее методом динамического программирования, обосновывая каждый шаг вычислительного процесса

Таблица 2

№ вар.	Исходные данные	№ вар.	Исходные данные
1	0 20 44 55 63 67 70 70 0 18 29 49 72 87 100 108 0 25 41 52 74 82 88 90 0 30 52 76 90 104 116 125	16	0 28 42 51 57 61 64 66 0 5 20 29 36 41 45 47 0 8 26 37 47 53 58 61 0 22 37 49 59 68 76 82
2	0 15 24 30 36 40 43 45 0 18 26 34 39 42 44 46 0 16 27 37 44 48 50 56 0 10 17 23 29 34 38 41	17	0 70 93 104 110 114 117 119 0 61 80 93 100 106 112 116 0 83 105 114 119 121 126 130 0 75 90 100 102 101 100 97
3	0 42 58 71 80 89 95 100 0 30 49 63 68 69 65 60 0 22 37 49 59 68 76 82 0 50 68 82 92 100 107 112	18	0 12 20 26 37 41 44 45 0 16 27 37 44 48 50 56 0 10 16 21 24 27 29 30 0 11 19 25 29 30 28 21
4	0 37 64 87 105 120 134 145 0 48 75 98 120 132 144 156 0 85 100 111 118 124 129 132 0 47 70 80 86 91 94 98	19	0 14 22 3 39 45 51 56 0 9 15 22 31 39 45 49 0 15 25 35 40 45 50 50 0 35 46 52 55 57 59 60
5	0 10 20 30 38 43 49 52 0 13 25 37 47 55 61 66 0 6 13 20 27 33 38 41 0 24 36 42 46 48 48 49	20	0 15 25 40 50 62 73 82 0 30 49 63 69 68 62 55 0 50 68 82 92 100 107 112 0 83 105 114 116 115 110 105

6	0 5 10 14 17 19 21 22 0 8 13 18 21 23 21 17 0 10 16 21 24 27 29 30 0 11 19 26 30 33 35 36	21	0 15 26 37 46 53 59 63 0 15 24 30 36 40 43 45 0 9 30 33 31 39 45 49 0 24 36 42 46 48 49 49
7	0 28 45 65 78 90 102 113 0 25 41 55 65 75 80 85 0 15 25 40 50 62 73 82 0 20 33 42 48 53 56 58	22	0 37 64 87 105 120 134 145 0 70 93 104 110 114 117 119 0 61 80 93 100 106 112 116 0 28 45 65 78 90 102 113
8	0 28 42 51 57 61 64 66 0 20 27 30 31 32 32 33 0 8 26 37 47 53 58 61 0 5 20 29 36 41 45 47	23	0 10 20 30 38 43 49 52 0 13 25 37 47 55 61 66 0 16 27 37 44 48 50 49 0 10 17 23 29 34 38 41
9	0 5 10 14 17 19 21 22 0 20 34 45 50 48 40 40 0 15 24 30 38 46 52 53 0 26 30 35 40 45 48 50	24	0 6 13 20 27 33 38 41 0 24 36 42 46 48 49 49 0 25 41 52 57 59 57 53 0 18 28 37 45 51 56 59
10	0 3 5 7 8 9 10 10 0 5 8 10 12 13 14 15 0 8 13 17 20 23 25 27 0 6 10 13 15 16 16 16	25	0 30 49 63 75 84 91 97 0 22 37 49 59 68 76 82 0 18 26 34 39 42 44 46 0 16 27 37 44 48 50 56
11	0 15 26 38 45 52 58 63 0 10 17 23 29 34 38 41 0 11 19 26 30 33 35 36 0 25 34 41 46 50 53 56	26	0 6 13 20 27 35 38 41 0 24 36 44 46 47 49 49 0 25 41 52 57 58 57 53 0 18 28 37 45 51 56 59
12	0 25 41 55 65 75 80 85 0 30 52 76 90 104 116 125 0 50 68 82 92 100 107 112 0 61 80 93 100 106 112 116	27	0 30 49 63 75 84 91 97 0 22 37 46 59 68 76 82 0 18 26 34 39 42 44 46 0 16 27 37 44 48 50 56
13	0 20 33 42 48 53 56 58 0 22 37 49 59 68 76 82 0 10 29 42 52 60 65 69 0 16 27 37 44 48 50 56	28	0 28 42 52 57 61 64 66 0 5 20 29 37 41 45 47 0 8 26 37 47 53 58 61 0 22 37 49 59 68 76 82
14	0 8 13 17 20 23 25 27 0 10 17 23 29 34 38 41 0 11 19 26 30 33 35 36 0 10 20 30 38 43 49 52	29	0 10 16 21 24 27 29 30 0 11 19 26 30 33 35 36 0 8 15 23 29 34 38 41 0 14 26 37 46 49 48 44
15	0 75 90 100 108 113 115 117 0 85 100 111 118 124 129 132 0 42 58 71 80 89 95 100 0 28 45 6 78 90 102 113	30	0 20 27 27 31 32 32 33 0 8 26 37 47 53 58 61 0 5 20 29 36 41 45 47 0 20 33 42 48 53 56 58

РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА №3
«Динамическая задача управления производством и запасами»

Рассматривается трехэтапная система управления запасами с дискретной продукцией и динамическим детерминированным спросом. Заявки потребителей на продукцию составляют на этапе j равен d_j единиц (j = 1,2,3).

К началу первого этапа на складе имеется только y_1 единицы продукции. Затраты на хранение единицы продукции на этапе j равно h_j.

Затраты на производство x единиц продукции на j-м этапе определяются функцией:

$$\varphi_j(x_j) = ax_j^2 + bx_j + c, \quad j = 1,2,3.$$

Требуется указать, сколько единиц продукции на отдельных этапах следует производить, чтобы заявки потребителей были удовлетворены, а общие затраты на производство и хранение за все три этапа были наименьшими.

Для этого необходимо составить математическую модель динамической задачи управления производством и запасами и решить ее методом динамического программирования, обосновывая каждый шаг вычислительного процесса. Исходные данные приведены для каждого варианта в таблице 3.

Таблица 3

№ варианта	Исходные данные									
	d_1	d_2	d_3	a	b	c	h_1	h_2	h_3	y_1
1	5	6	7	2	3	4	4	3	2	2
2	3	2	3	1	2	2	4	3	2	3
3	5	2	3	2	2	2	4	5	6	4
4	2	3	3	2	3	4	3	2	2	2
5	3	2	3	1	3	2	4	3	2	1
6	3	2	4	5	1	0	3	3	3	2
7	3	2	4	8	1	1	1	0	1	0
8	6	2	4	3	4	3	2	1	3	1
9	5	4	3	4	4	4	5	0	4	2
10	7	3	4	2	1	3	2	5	7	4
11	3	3	4	2	3	4	2	3	1	3
12	3	2	3	2	2	1	2	3	4	3
13	1	2	3	2	3	1	1	2	3	1
14	2	3	2	5	1	1	3	2	1	2
15	4	2	2	1	1	2	6	4	1	0
16	7	0	4	3	4	0	3	3	3	2
17	2	2	2	1	1	5	1	2	4	2
18	5	1	2	2	0	6	2	1	1	4
19	3	1	2	4	1	2	6	3	5	0
20	6	0	3	1	3	3	5	3	1	4
21	4	5	2	3	3	3	4	0	5	2

22	4	5	1	5	0	2	4	7	0	4
23	5	3	1	2	4	3	5	4	3	1
24	6	2	1	4	0	5	3	4	1	5
25	3	2	1	4	5	0	5	4	0	2
26	7	6	0	1	0	5	4	5	3	4
27	5	5	2	1	0	1	3	4	4	4
28	4	5	2	5	0	4	4	4	4	4
29	6	5	1	4	1	1	3	7	0	3
30	4	3	3	4	3	2	1	3	2	3
31	6	5	1	2	4	1	4	4	4	4
32	3	0	4	4	4	4	1	3	4	3
33	5	0	3	6	0	4	1	1	1	2
34	4	6	2	6	0	4	4	4	4	4
35	6	5	2	2	3	1	4	4	4	3

Библиографический список литературы

1. Вентцель Е.С. Исследование операций: задачи, принципы, методология. – М., Наука, 1980.
2. Колемаев В.А. Практикум по исследованию операций в экономике : учебное пособие для вузов / Под ред. В. А. Колемаева и В. И. Соловьева. – М.: Вега-Инфо, 2010. – 196 с.
3. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах: Учеб. пособие для студентов экономических специальностей вузов. – М.: Высшая школа, 1986, 2004. - 319 с.
4. Кремер Н.Ш. и др. Исследование операций в экономике – М.: ЮНИТИ, 2003.
5. Кузнецов Ю. Н. Математическое программирование – М.: ВШ, 1976-80.
6. Литвин Д. Б. Линейное программирование. Транспортная задача: Учебное пособие / Д.Б. Литвин, С.В. Мелешко, И.И. Мамаев. – Ставрополь: Сервисшкола, 2017. – 84 с.

ДЛЯ ЗАМЕТОК

ДЛЯ ЗАМЕТОК

Публикуется в авторской редакции

Подписано в печать 11.12.2017. Формат набора $60x84^1/_{16}$. Усл. печ. л. 4,19.
Гарнитура «Таймс». Бумага офсетная. Печать офсетная. Тираж 200. Заказ № 24.

Налоговая льгота – Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93-953000

Издательство Ставропольского государственного аграрного университета «АГРУС»,
355017, г. Ставрополь, ул. Пушкина,15. Тел/факс: (8652) 35-06-94.

Отпечатано с готового оригинал-макета в типографии издательско-полиграфического комплекса
СтГАУ «АГРУС», г. Ставрополь, ул. Пушкина, 15.