Всероссийское СМИ
«Академия педагогических идей «НОВАЦИЯ»
Свидетельство о регистрации ЭЛ №ФС 77-62011 от 05.06.2015 г.
(выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций)

Сайт: akademnova.ru
e-mail: akademnova@mail.ru

Токарев К.С. Графическая интерпретация взаимосвязей решений исходной и двойственной задач линейного программирования // Академия педагогических идей «Новация». Серия: Студенческий научный вестник. – 2018. – №8 (август). – АРТ 459-эл. – 0,3 п.л. - URL: http: //akademnova.ru/page/875550

РУБРИКА: ЭКОНОМИЧЕСКИЕ НАУКИ

УДК 330.43

Токарев Кирилл Сергеевич
студент 2 курса, направление подготовки «Бизнес-информатика»
Научный руководитель: Уродовских В.Н., к.т.н., доцент
ФГОБУ ВПО «Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации» (Липецкий филиал)
г. Липецк, Российская Федерация
e-mail: kir_tokarev@mail.ru

ГРАФИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ВЗАИМОСВЯЗЕЙ РЕШЕНИЙ ИСХОДНОЙ И ДВОЙСТВЕННОЙ ЗЛП

Аннотация: в статье рассматривается графический метод решения ЗЛП, зависимость между исходными и двойственными задачами, а также приводятся примеры их решений.

Ключевые слова: задача линейного программирования, двойственная задача, графический метод.

Tokarev Kirill
2nd year student, direction of training "business informatics"
Supervisor: V. Urodovskih, CtS, Associate Professor
FGOBU VPO "Financial University under Government of the Russian Federation" (Lipetsk branch)
Lipetsk, Russian Federation

Всероссийское СМИ
«Академия педагогических идей «НОВАЦИЯ»
Свидетельство о регистрации ЭЛ №ФС 77-62011 от 05.06.2015 г.
(выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций)

Сайт: akademnova.ru
e-mail: akademnova@mail.ru

GRAPHICAL INTERPRETATION OF THE INTERRELATIONSHIPS BETWEEN THE SOLUTIONS OF THE ORIGINAL AND DUAL LPP

Annotation: The article tells about the graphical method of solving LPP, the relationship between the original and dual problems and provides examples of their solutions.

Keywords: linear programming problem, dual problem, graphical method.

Задача линейного программирования сводится к нахождению оптимального решения (оптимального плана) при условии, что целевая функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ линейна, все условия ограничения линейны и $x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$.

Для каждой ЗЛП существует двойственная задача, решений которой тесно связано с решением прямой, при этом:

- матрица ограничений двойственной задачи есть транспонированная матрица прямой задачи;
- вектор "цен" для прямой задачи есть вектор правых частей ограничений задачи ДЗ и наоборот.

Решением двойственной задачи является оптимальный план двойственных оценок ресурсов, которые определяют их дефицитность.

Целью данной работы является рассмотрение алгоритма графического интерпретирования решения ЗЛП для исходной и двойственной задач. Для этого необходимо решить следующие задачи:

- сформулировать исходную задачу линейного программирования;
- описать переход к двойственной задаче;

Сайт: akademnova.ru
e-mail: akademnova@mail.ru

- проанализировать влияние изменения входных данных на графическое представление исходной и двойственной задач в трех возможных «сценариях».

В виде задачи линейного программирования может быть представлен план производства некоторой компании. В таком случае, необходимо составить ЭММ, где: коэффициенты при неизвестных в целевой функции будут являться ценами на производимый товар (услугу), сами неизвестные — кол-вом единиц товара, а коэффициенты при неизвестных в ограничениях — ценами на ресурсы, затрачиваемые на производство единицы продукции. В таком случае, решением задачи будет оптимальный план производства, при котором компания достигнет максимального объема выручки, используя имеющиеся ресурсы.

Рассмотрим пример. Некоторая компания производит два вида продукции по ценам 150 и 100 условных единиц за штуку соответственно. На каждую единицу производимого товара компания тратит ресурсы, например — человекочасы и ткань (швейный цех). На производство изделия первого вида необходимо 1 у.е. на оплату труда работника и 2 у.е. на оплату ткани. Соответственно на производство изделия второго вида — 3,5 у.е. и 0,5 у.е. Фонд заработной платы составляет 350 у.е., а фонд материалов — 240 у.е. На основе вышеизложенных данных составим ЭММ исходной задачи (представлена на рисунке 1):

Рисунок 1

ЭММ исходной задачи

Ф-ия→max	f(x)=	150	*x1+	100	*x2			
Огр.1	f(x)=	1	*x1+	3,5	*x2	≤		350
Огр.2	f(x)=	2	*x1+	0,5	*x2	≤		240

Решим задачу при помощи надстройки табличного редактора MS Excel «Поиск решения» (рисунок 2):

Рисунок 2

Решение исходной задачи

x1	x2		
103	68		
150	100	22250	
1	3,5	341	350
2	0,5	240	240

Стоит отметить, что на значения x_1 и x_2 было наложено условие целостности — это обусловлено тем, что кол-во изделий, производимых швейным цехом, не может быть нецелым.

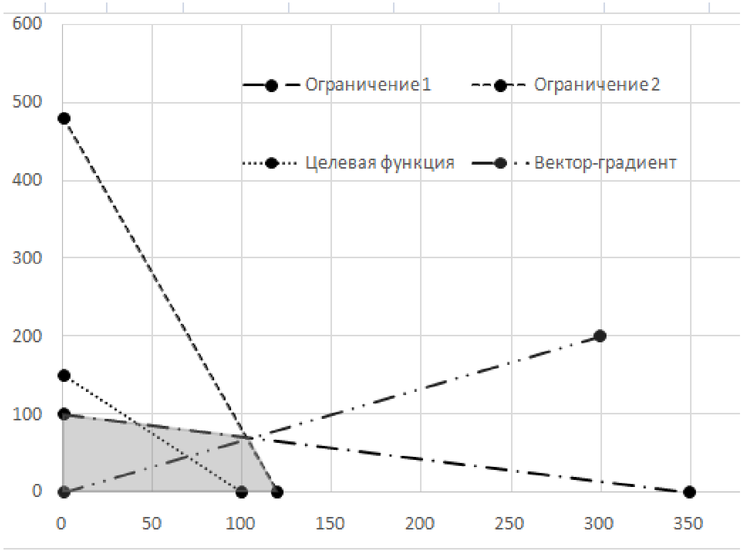
Далее рассмотрим графический метод решения задачи. В декартовой системе координат с осями x_1 и x_2 необходимо построить ОДР, границы которой будут составлять исходные неравенства (ограничения). Далее строится вектор-градиент: он соединяет точку начала координат и точку, координатами которой являются «цены» в целевой функции. Вектор-градиент показывает направление наискорейшего роста целевой функции. И, наконец, на графике изображается сама целевая функция. В конечном итоге, для задачи из примера получаем следующий график (рисунок 3):

Всероссийское СМИ
«Академия педагогических идей «НОВАЦИЯ»
Свидетельство о регистрации ЭЛ №ФС 77-62011 от 05.06.2015 г.
(выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций)

Сайт: akademnova.ru
e-mail: akademnova@mail.ru

Рисунок 3

Графическая интерпретация исходной задачи



Переход к двойственной задаче осуществляется путем транспонирования расширенной матрицы исходной задачи. При этом: коэффициенты при переменных в целевой функции исходной задачи становятся нижней границей ограничений двойственной задачи, т.е. при продаже объема ресурсов, затрачиваемого на производство одной единицы товара, должно быть выручено не меньше денег, чем при производстве из этих ресурсов продукции; значение целевой функции двойственной задачи должно быть минимизировано; переменные этой функции представляют собой теневые цены на ресурсы (теневые цены — это минимальные цены на ресурсы, используемые в производстве, по которым производитель может продать ресурсы и получить столько же выручки, сколько бы получил при производстве из них продукции).

Сайт: akademnova.ru
e-mail: akademnova@mail.ru

Таким образом, ЭММ двойственной задачи будет иметь следующий вид (рисунок 4):

Рисунок 4

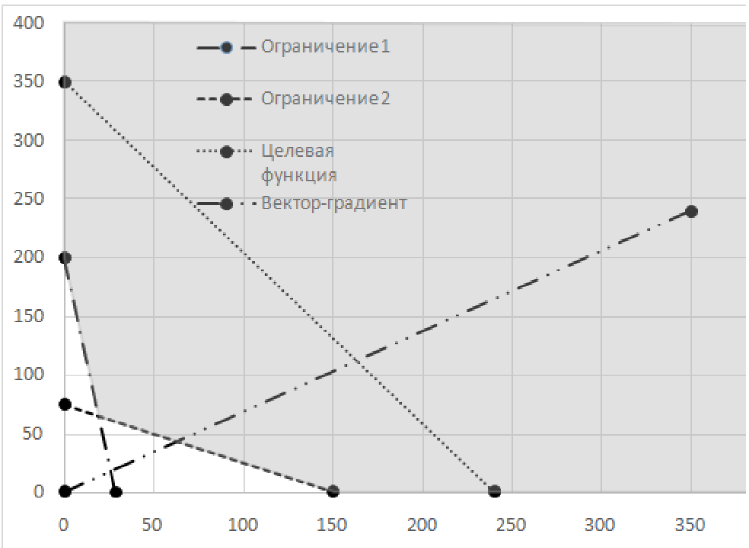
ЭММ двойственной задачи

Ф-ия→min	f(x)=	350	*x1+	240	*x2		
Огр.1	f(x)=	3,5	*x1+	0,5	*x2	≥	100
Огр.2	f(x)=	1	*x1+	2	*x2	≥	150

Аналогично с исходной задачей, построим график для двойственной:

Рисунок 5

Графическая интерпретация двойственной задачи



Координатами точки оптимума являются значения теневых цен на ресурсы. Если решить двойственную задачу с помощью надстройки «Поиск решения» подобно исходной задаче, значение целевой функции, которое мы получим, будет равно значению целевой функции исходной задачи за исключением небольших погрешностей, обусловленных условием целостности (данное условие не актуально для двойственной задачи).

Всероссийское СМИ
«Академия педагогических идей «НОВАЦИЯ»
Свидетельство о регистрации ЭЛ №ФС 77-62011 от 05.06.2015 г.
(выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций)

Сайт: akademnova.ru
e-mail: akademnova@mail.ru

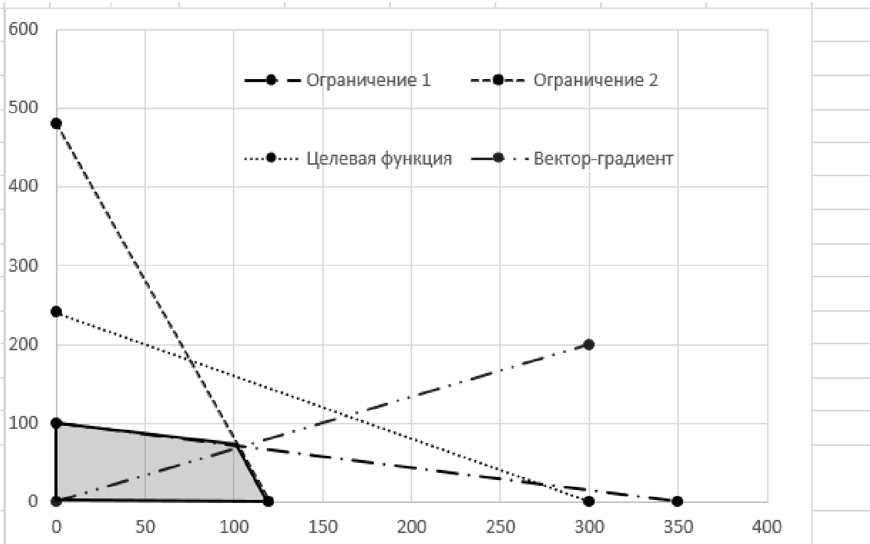
Чтобы проследить изменения в графической интерпретации исходной и двойственной задач при изменении входных данных, представим, что возможны следующие ситуации.

Рост цен. Предположим, что появилась возможность поднять цены на оба вида товаров (240, 300) при сохранении прочих равных условий. В конечном итоге, целевые функции и исходной и двойственной задач будут иметь большее значение в сравнении с числом, которое мы получили в базовом случае. Очевидно, что при повышении цены растет сумма выручки, и, исходя из определения теневых цен, становится очевидным их рост, что подтверждает график ЭММ двойственной задачи.

График ЭММ исходной задачи в данном случае выглядит следующим образом (рисунок 6):

Рисунок 6

Графическая интерпретация исходной задачи для первой ситуации



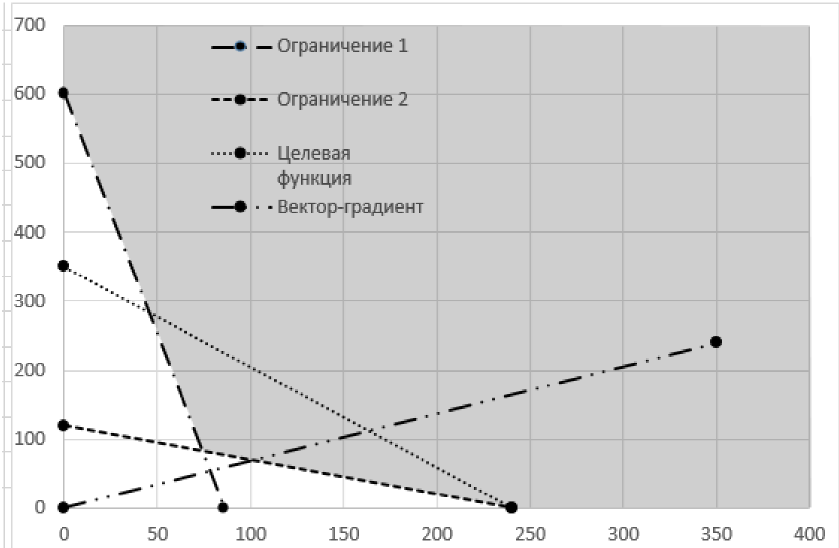
В свою очередь, график ЭММ двойственной задачи выглядит так (рисунок 7):

Всероссийское СМИ
«Академия педагогических идей «НОВАЦИЯ»
Свидетельство о регистрации ЭЛ №ФС 77-62011 от 05.06.2015 г.
(выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций)

Сайт: akademnova.ru
e-mail: akademnova@mail.ru

Рисунок 7

Графическая интерпретация двойственной задачи для первой ситуации

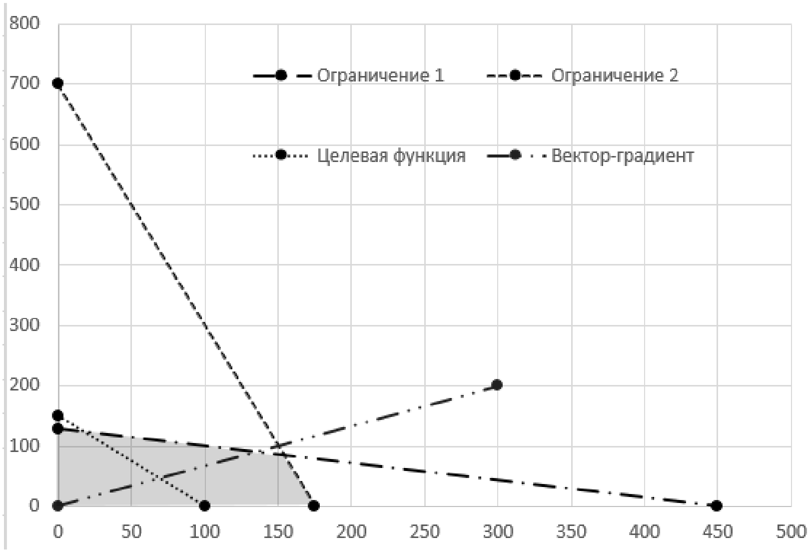


Увеличение объема ресурсов. Предположим, что абстрактное предприятие по какой-то причине имеет возможность использовать больший объем ресурсов (450, 350). Прочие условия не меняются. Проследим изменения на графиках в исходной и двойственной задачах.

Исходная (рисунок 8):

Рисунок 8

Графическая интерпретация исходной задачи для второй ситуации

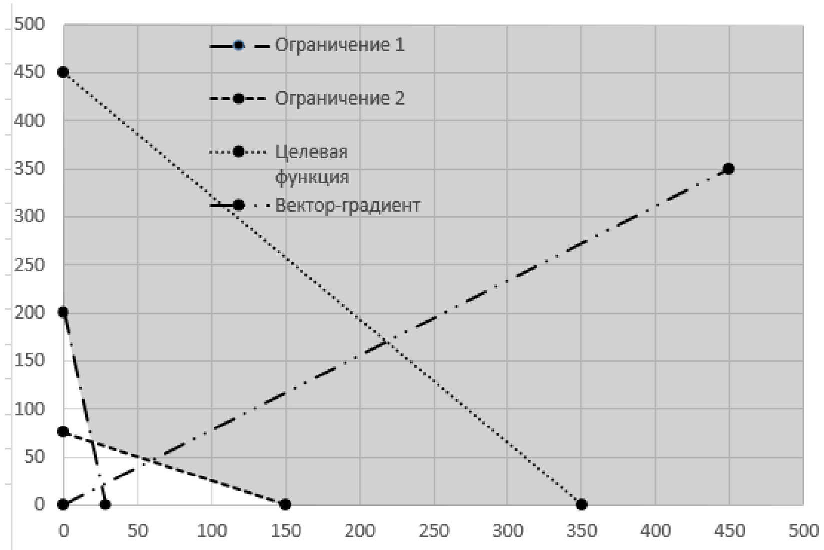


Мы видим увеличение объемов производства, что было не трудно спрогнозировать.

Двойственная (рисунок 9):

Рисунок 9

Графическая интерпретация двойственной задачи для второй ситуации



Теневая цена на материалы не изменилась и график имеет такой же вид как и в базовом примере.

Уменьшение человекочасов. Предположим, что по случаю установки более совершенного производственного оборудования, на производство продукции стало уходить меньше времени. Чтобы ввести эти условия, необходимо изменить коэффициенты при неизвестных в любом из неравенств. Пусть это будет первое ограничение (рисунок 10):

Рисунок 10

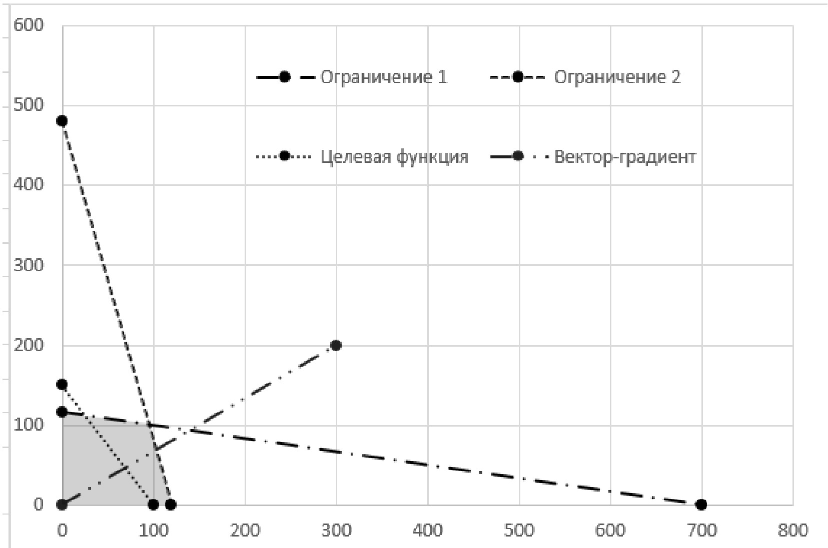
ЭММ исходной задачи для третьей ситуации

3	Ф-ия→max	f(x)=	150	*x1+	100	*x2	C(f)=	15000
4	Огр.1	f(x)=	0,5	*x1+	3	*x2	≤	350
5	Огр.2	f(x)=	2	*x1+	0,5	*x2	≤	240

За счет экономии времени, объём производства ощутимо вырос, что в свою очередь привело к увеличению объёма выручки. Мы видим это на графике исходной задачи (рисунок 11):

Рисунок 11

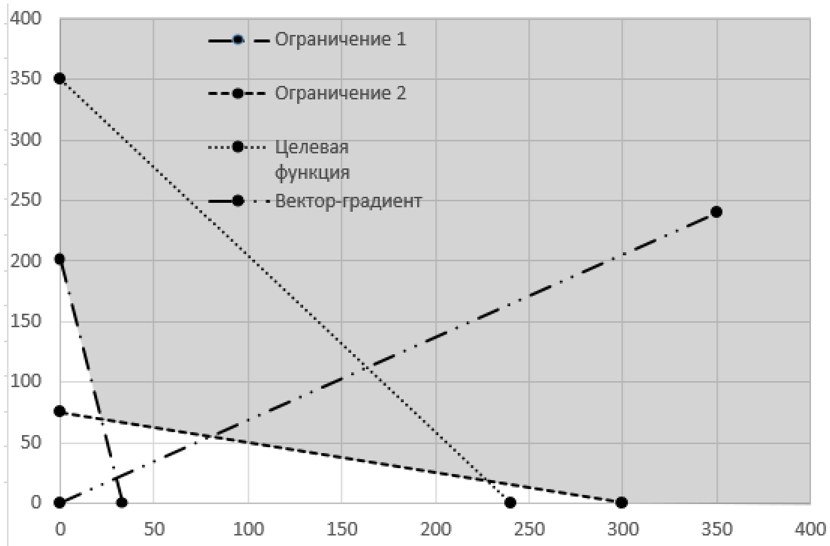
Графическая интерпретация исходной задачи для третьей ситуации



Что же произошло с графиком двойственной задачи (рисунок 12)? Точка оптимума сместилась правее и выше в сравнении с тем, что мы получали в базовой задаче. Это означает, что теперь теневые цены на ресурсы выросли. И, хотя цены на продукцию остались неизменными, рост выручки был достигнут посредством улучшения качественных показателей производства, а значит, что чтобы получить такую же сумму выручки от продажи ресурсов, не используя их в производственном цикле, они должны стоить дороже, чем прежде.

Рисунок 12

Графическая интерпретация двойственной задачи для третьей ситуации



Итак, резюмируя: двойственная задача составляется путем транспонирования матричной записи ЭММ исходной задачи и имеет свой экономический смысл: если в исходной задаче наша цель – максимизировать объем выручки, т.е. значение целевой функции, при наложении ресурсных ограничений, то в двойственной – минимизировать сумму расходов на ресурсы путем изменения цен на приобретаемые ресурсы (не важно, какие). Поставленные задачи решены, цель работы достигнута: на примере был разобран алгоритм графической интерпретации исходной и двойственной задач линейного программирования при изменяющихся входных данных.

Список использованной литературы:

1. Александрова И.А., Гончаренко В.М. Методы оптимальных решений. Руководство к решению задач: учебное пособие для подготовки бакалавров. М.: Финуниверситет, 2012. 114 с.

2. Соловьев В. И. Методы оптимальных решений: Учебное пособие. М.: Финансовый университет, 2012. 364 с.

Дата поступления в редакцию: 22.08.2018 г.
Опубликовано: 28.08.2018 г.