Всероссийское СМИ
«Академия педагогических идей «НОВАЦИЯ»
Свидетельство о регистрации ЭЛ №ФС 77-62011 от 05.06.2015 г.
(выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций)

Сайт: akademnova.ru
e-mail: akademnova@mail.ru

Насырова Е.А. Тригонометрия трехгранных углов и сферических треугольников // Академия педагогических идей «Новация». Серия: Студенческий научный вестник. – 2019. – №1 (январь). – АРТ 7-эл. – 0,2 п.л. - URL: http: //akademnova.ru/page/875550

РУБРИКА: ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

УДК 514.1

Насырова Есения Аликовна
студентка 2 курса, факультет математики и информационных технологий
Научный руководитель: Шабаева А.Ф., к.ф.-м.н., доцент
Стерлитамакский филиал ФГБОУ ВПО
«Башкирский государственный университет»
г. Стерлитамак, Российская Федерация
e-mail: nea_1998@mail.ru

ТРИГОНОМЕТРИЯ ТРЕХГРАННЫХ УГЛОВ И СФЕРИЧЕСКИХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Аннотация: В статье определяются понятия трехгранного угла и сферического треугольника, проводится тригонометрия трехгранного угла на основе теоремы синусов, а также определяется взаимосвязь между сферическим треугольником и трехгранным углом.

Ключевые слова: трехгранный угол, сферический треугольник, теорема синусов, угол, грань, ребро.

Nasyrova Esenia
2nd year student, features of mathematics and information technology
Supervisor: A. Shabaeva, PhD, Associate Professor
Sterlitamak branch FGBOU VPO "Bashkir State University"
Sterlitamak, Russian Federation

Всероссийское СМИ
«Академия педагогических идей «НОВАЦИЯ»
Свидетельство о регистрации ЭЛ №ФС 77-62011 от 05.06.2015 г.
(выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций)

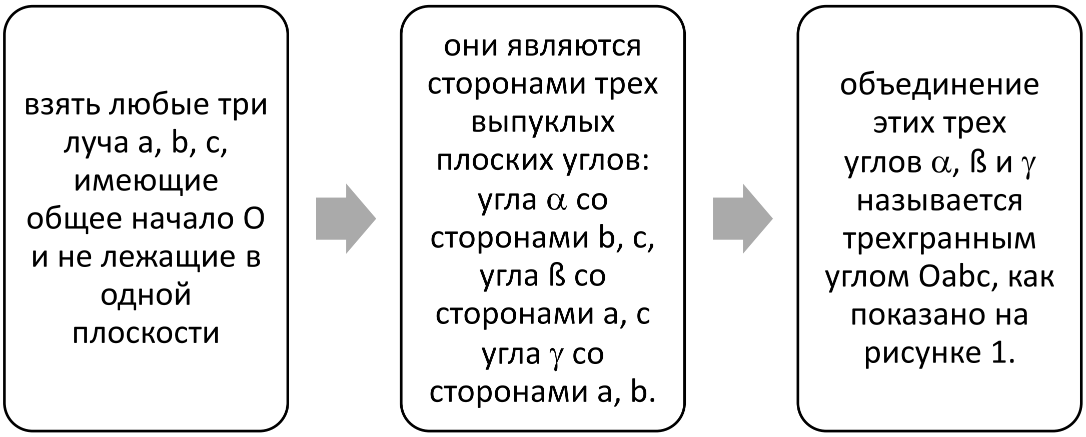
Сайт: akademnova.ru
e-mail: akademnova@mail.ru

TRIGONOMETRY TRIHEDRAL ANGLES AND SPHERICAL TRIANGLES

Abstract: The article defines the concept of the trihedral angle and a spherical triangle is trigonometry trihedral angle based on the theorem of sines, as well as define the relationship between a spherical triangle and a trihedral angle.
Keywords: polynomial, trihedral angle, spherical triangle, sine theorem, angle, face, edge.

Аналогами плоских углов в стереометрии считаются двугранные углы, в то время как трехгранные углы являются аналогами плоских треугольников.

Для того, чтобы определить трехгранный угол необходимо воспользоваться следующей схемой:



Всероссийское СМИ
«Академия педагогических идей «НОВАЦИЯ»
Свидетельство о регистрации ЭЛ №ФС 77-62011 от 05.06.2015 г.
(выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций)

Сайт: akademnova.ru
e-mail: akademnova@mail.ru

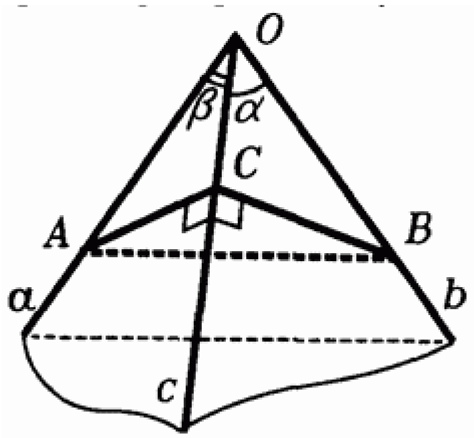


Рисунок 1. – Определение трехгранного угла

На основе рисунка 1 можно сказать о том, что элементами трехгранного угла являются:

1) Три грани α, ß и γ трехгранного угла Oabc;

2) Три двугранных угла при ребрах a, b, c;

3) Величины α, ß, γ и â, $\hat{b}$, $\hat{c}$.

Для того, чтобы построить тригонометрию трехгранных углов, выразим одни элементы трехгранного угла через другие.

Итак, выведем аналог теоремы синусов и из уравнения

$$\cos\gamma = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \cos\hat{c}$$

найдем cos$\hat{c}$ и подставим его в равенство $\sin^2\hat{c} = 1 - \cos^2\hat{c}$, благодаря чему получаем следующее:

$$\sin^2\hat{c} = 1 - \cos^2\hat{c} = 1 - \frac{(\cos\gamma - \cos\alpha \cdot \cos\beta)^2}{\sin^2\alpha \cdot \sin^2\beta} =$$

$$= \frac{1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma + 2\cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma}{\sin^2\alpha \cdot \sin^2\beta}.$$

Всероссийское СМИ
«Академия педагогических идей «НОВАЦИЯ»
Свидетельство о регистрации ЭЛ №ФС 77-62011 от 05.06.2015 г.
(выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций)

Сайт: akademnova.ru
e-mail: akademnova@mail.ru

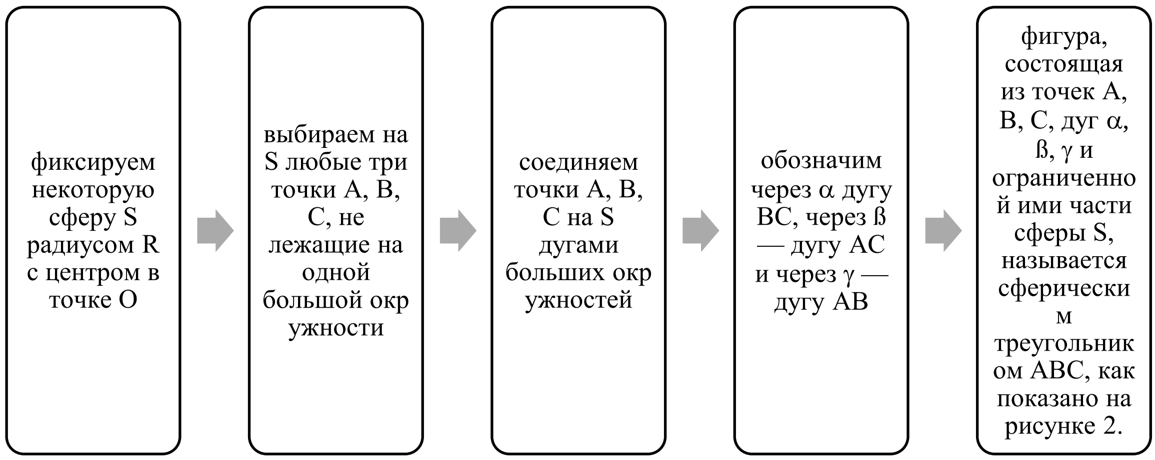
Поделив на $sin^2\hat{\gamma}$ получаем равенство:

$$\frac{sin^2\hat{c}}{sin^2\gamma} = \frac{1 - cos^2\alpha - cos^2\beta - cos^2\gamma + 2cos\alpha \cdot cos\beta \cdot cos\gamma}{sin^2\alpha \cdot sin^2\beta \cdot sin^2\gamma}. \quad (1)$$

Его правая часть симметрична относительно величин α, ß, γ. Следовательно, если так же вычислить отношения $\frac{sin^2\hat{a}}{sin^2\,\alpha}$ и $\frac{sin^2\hat{b}}{sin^2ß}$, то справа получим то же выражение, что и в (1) [1]. Поэтому эти отношения равны, а так как входящие в них синусы все положительные, то получаем следующий аналог теоремы синусов для трехгранного угла:

$$\frac{sin\hat{a}}{sin\alpha} = \frac{sin\hat{b}}{sin\beta} = \frac{sin\hat{c}}{sin\gamma}.$$

Далее определим, что такое сферический треугольник, для этого воспользуемся следующей схемой:



Всероссийское СМИ
«Академия педагогических идей «НОВАЦИЯ»
Свидетельство о регистрации ЭЛ №ФС 77-62011 от 05.06.2015 г.
(выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций)

Сайт: akademnova.ru
e-mail: akademnova@mail.ru

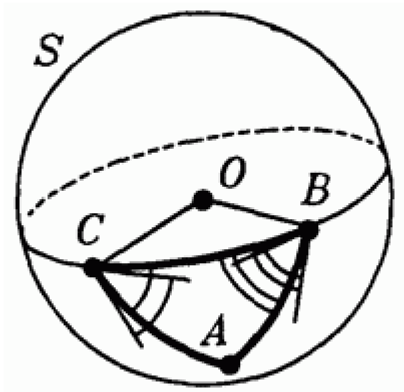


Рисунок 2. Сферический треугольник

Между треугольниками на сфере S и трехгранными углами с вершиной в центре O сферы S естественным образом устанавливается взаимно однозначное соответствие: каждому такому треугольнику ABC соответствует трехгранный угол OABC, ребра которого a, b, c проходят через вершины треугольника, и, наоборот, каждый трехгранный угол с вершиной в точке O "вырезает" на сфере S сферический треугольник (рис. 3) [2].

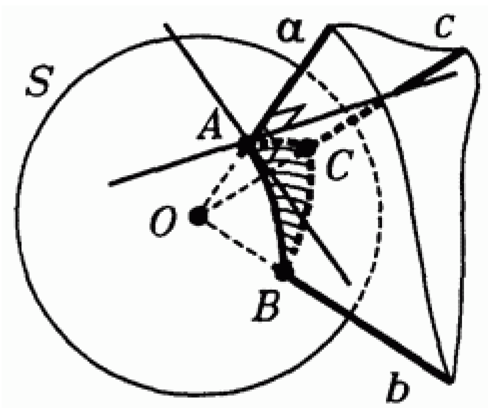


Рисунок 3. Взаимодействие сферического треугольника и трехгранных углов

Итак, на основе рисунка 3 установим соответствие между элементами сферического треугольника и соответствующими им элементами трехгранного угла:

1) Поскольку касательные к окружности являются перпендикулярными радиусам, которые проведены к точке касания, можно выявить соответствие углов сферического треугольника с двухгранными углами трехгранного угла, вырезающего в сфере сферический треугольник.

$$\angle A = \hat{a}, \quad \angle B = \hat{b}, \quad \angle C = \hat{c}.$$

2) Поскольку произведение величины центрального угла радиан на радиус – это длина дуги окружности, значит, что стороны α, ß, γ сферического треугольника ABC выражаются через величины углов граней α_0, $ß_0$, γ_0 соответствующего трехгранного угла по следующим формулам:

$$\alpha = R\alpha_0, \quad \beta = R\beta_0, \quad \gamma = R\gamma_0.$$

На основе равенств, полученных ранее, а также доказанной теоремы синусов получаем теорему, подходящую для сферических треугольников [3]:

$$\frac{\sin\frac{\alpha}{R}}{\sin A} = \frac{\sin\frac{\beta}{R}}{\sin B} = \frac{\sin\frac{\gamma}{R}}{\sin C},$$

Таким образом, трехгранные углы имеют взаимосвязь со сферическими треугольниками.

Всероссийское СМИ
«Академия педагогических идей «НОВАЦИЯ»
Свидетельство о регистрации ЭЛ №ФС 77-62011 от 05.06.2015 г.
(выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций)

Сайт: akademnova.ru
e-mail: akademnova@mail.ru

Список использованной литературы:

1. Александров А. Д., Вернер А. Л., Рыжик В. И. Стереометрия. Геометрия в пространстве: Учеб. пособие для уч. ст. кл. и абитуриентов. — Висагинас, Alfa, 2015.— 576 с.
2. Александров А. Д. Геометрия: учебник / А. Д. Александров, Н. Ю. Нецветаев. — 2-е изд., исправленное. — СПб.: БХВ-Петербург, 2015. — 624 с.
3. Старова О. А. Сферическая геометрия // Грани математики. - 2015. - №5 (17). - С. 35-38.

Дата поступления в редакцию: 28.12.2018 г.
Опубликовано: 04.01.2019 г.