

Галиаскаров Д.Р. Геометрические фракталы // Академия педагогических идей «Новация». Серия: Студенческий научный вестник. – 2017. – № 06 (июнь). – АРТ 274-эл. – 0,2 п.л. - URL: <http://akademnova.ru/page/875550>

РУБРИКА: ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

УДК 621.396.96

Галиаскаров Динислам Радикович

студент 1 курса факультета
математики и информационных технологий

Научный руководитель: доцент
к.ф.-м.н., Шабаетова А.Ф.

ФГБОУ ВО Стерлитамакский филиал
Башкирского государственного университета
г. Стерлитамак, Российская Федерация

Dinislamg1@gmail.com

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФРАКТАЛЫ

Аннотация: В статье рассмотрены основные виды фракталов,
большое внимание уделено геометрическим фракталам.

Ключевые слова: фракталы, геометрические фракталы.

Galiaskarov Dinislam R.

1st year student

Supervisor: Candidate of physical and mathematical sciences,
associate professor, A.F. Shabaeva

Sterlitamak branch of the Bashkir state university

GEOMETRIC FRACTALS

Summary: The main types of fractals are considered in the article, great attention was paid to geometric fractals.

Keywords: fractals, geometric fractals.

Многие природные системы настолько сложны и постоянны, что использование только знакомых объектов классической геометрии для их моделирования представляется весьма безнадёжным. Как к примеру, построить модель ледяного хребта айсберга или модель морских растений в терминах геометрии? Фракталы и математический хаос - подходящие средства для исследования поставленных вопросов. Термин *фрактал* относится к некоторой статичной геометрической конфигурации, такой как мгновенный снимок молнии. *Хаос* - термин динамики, используемый для описания явлений, подобных турбулентному поведению погоды. Нередко то, что мы наблюдаем в природе, интригует нас бесконечным повторением одного и того же узора, увеличенного или уменьшенного во сколько угодно раз. Например, у дерева есть ветви. На этих ветвях есть ветки поменьше и т.д. Теоретически, элемент «разветвление» повторяется бесконечно много раз, становясь все меньше и меньше. То же самое можно заметить, разглядывая фотографию горного рельефа. Попробуйте немного приблизить изображение горной гряды - вы снова увидите горы. Так проявляется характерное для фракталов свойство *самоподобия*.

Изучение фракталов и хаоса открывает замечательные возможности, как в исследовании бесконечного числа приложений, так и в области чистой математики.

Следует отметить, что слово фрактал -**множество**, обладающее свойством **самоподобия**. Оно может быть употреблено, если рассматриваемая фигура обладает какими-либо из ниже перечисленных свойств:

- Обладает нетривиальной структурой на всех шкалах. В отличие от регулярных фигур (таких, как окружность, эллипс, график гладкой функции): если мы рассмотрим небольшой фрагмент регулярной фигуры в очень крупном масштабе, он будет похож на фрагмент прямой. Для фрактала увеличение масштаба не ведет к упрощению структуры, на всех шкалах мы видим одинаково сложную картину.
- Является самоподобной или приближенно самоподобной.
- Может быть построен при помощи рекурсивной процедуры.

Фракталы бывают: геометрические, алгебраические и стохастические. Рассмотрим геометрические фракталы.

Наиболее простые из фракталов – *геометрические*, как кривая Коха. Фракталы этого класса самые наглядные. Алгоритм построения геометрического фрактала в общем случае таков. Прежде всего, нам нужны две подходящие геометрические фигуры, назовем их основой и фрагментом. На первом этапе изображается основа будущего фрактала. Затем некоторые ее части заменяются фрагментом, взятым в подходящем масштабе, – это первая итерация построения. Затем у полученной фигуры снова некоторые части меняются на фигуры, подобные фрагменту, и т.д. Если продолжить этот процесс до бесконечности, то в пределе получится фрактал. Рассмотрим этот процесс на примере кривой Коха.

Кривая Коха была изобретена в девятнадцатом веке немецким математиком Хельге фон Кох, который, изучая работы Георга Контора и

Карла Вейерштрассе, натолкнулся на описания некоторых странных кривых с необычным поведением.

Рассмотрим построение кривой Коха. Построение кривой начинается с отрезка единичной длины (рис. 1) - это 0-е поколение кривой Коха. Далее каждое звено (в нулевом поколении один отрезок) заменяется на образующий элемент, обозначенный на рис.1 через $n=1$. В результате такой замены получается следующее поколение кривой Коха. В 1-ом поколении - это кривая из четырех прямолинейных звеньев, каждое длиной по $1/3$. Для получения 3-го поколения проделываются те же действия - каждое звено заменяется на уменьшенный образующий элемент. Итак, для получения каждого последующего поколения, все звенья предыдущего поколения необходимо заменить уменьшенным образующим элементом. Кривая n -го поколения при любом конечном n называется предфракталом. На примере изображено пятое поколение кривой.

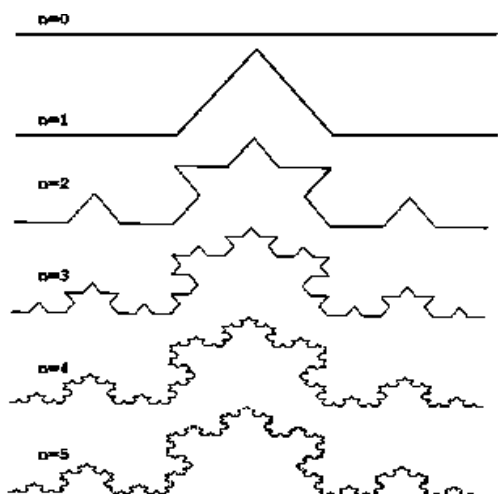


Рис. 1. Триадная кривая Коха.

В своем исследовании, уже Мандельброт, много экспериментировал с кривыми Коха, и получил фигуры, такие как Острова Коха, Кресты Коха,

Снежинки Коха и даже трехмерные представления кривой Коха, используя тетраэдр и прибавляя меньшие по размерам тетраэдры к каждой его грани. Рассмотрим фрактал Крест Коха.

Крест Коха (рис. 2.) — это один из вариантов кривой Коха, изобретенный Мандельбротом. Вместо отрезка прямой он использовал квадрат или прямоугольник. В этом фрактале использована та же самая идея что и в оригинальной кривой Коха.

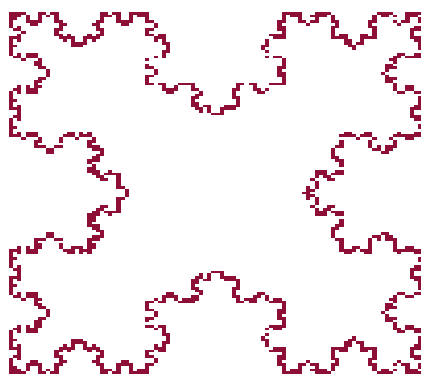


Рис.2. Крест Коха

Рассмотрим еще один вид конструктивных фракталов – семейство драконов. Иногда их называют по имени первооткрывателей драконами Хейвея–Хартера (своей формой они напоминают китайских драконов) (рис.3.).

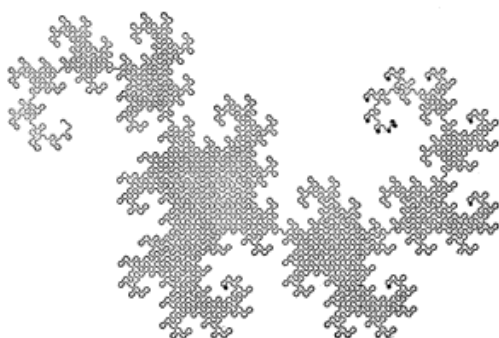


Рис.3.Дракон Хартера.

Существует несколько способов построения этой кривой. Вот самый простой и наглядный: нужно взять достаточно длинную полоску бумаги и согнуть ее пополам. Затем снова согнуть ее вдвое в том же направлении, что и в первый раз. После нескольких повторений нужно разогнуть полоску обратно, причем стараться, чтобы в местах сгибов образовались углы в 90° . Тогда в профиль получится кривая дракона. Разумеется, это будет лишь приближение, как и все наши попытки изобразить фрактальные объекты. Компьютер позволяет произвести гораздо больше шагов этого процесса, и в результате получается очень красивая фигура.

Нам более интересен способ, позволяющий получать кривые дракона с помощью геометрического построения. Сначала берется отрезок единичной длины. Затем он заменяется на два отрезка, образующих боковые стороны равнобедренного прямоугольного треугольника, для которых исходный отрезок является гипотенузой. В результате отрезок как бы прогибается под прямым углом. Направление прогиба чередуется. Первый отрезок прогибается вправо (по ходу движения слева направо), второй – влево, третий – опять вправо и т.д. Таким образом, после каждого шага число имеющихся отрезков удваивается, а длина каждого соответственно уменьшается в $\sqrt{2}$ раз.

Рассмотрим Н-фрактал. Всё начинается с фигуры в виде буквы Н, у которой вертикальные и горизонтальные отрезки равны. Затем к каждому из 4 концов фигуры пририсовывается ее копия, уменьшенная в два раза. К каждому концу (их уже 16) пририсовывается копия буквы Н, уменьшенная уже в 4 раза. И так далее. В пределе получится фрактал, который визуально почти заполняет некоторый квадрат. Н-фрактал *всюду плотен* в нём. То есть в любой окрестности любой точки квадрата найдутся точки фрактала. Очень похоже на то, что происходит с Т-квадратом. Это не случайно, ведь, если

присмотреться, видно, что каждая буква Н содержится в своем маленьком квадратике, который был дорисован на таком же шаге.

Можно сказать (и доказать), что Н-фрактал заполняет свой квадрат (англ. *space-filling curve*). Поэтому его фрактальная размерность равна двум. Суммарная длина всех отрезков бесконечна.

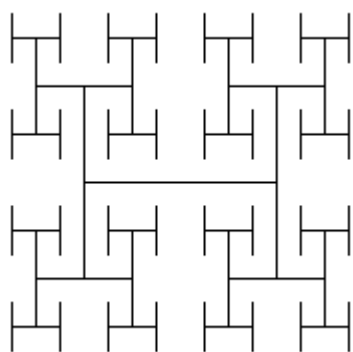


Рис.4.Н-фрактал.

Фрактальная графика — это не просто множество возобновляющихся изображений, это модель структуры и принципа любого сущего. Вся наша жизнь представлена фракталами. Не только визуальными, но ещё и структура этого изображения отражает нашу жизнь. Взять, к примеру, ДНК, это всего лишь основа, одна итерация, а при повторении... появляется человек! И таких примеров много. Невозможно не сказать о широком применении фракталов в компьютерных играх, где рельефы местности нередко являются фрактальными изображениями на основе трёхмерных образцов комплексных множеств и броуновского движения. Фрактальная графика нужна везде, и развитие «фрактальных технологий» — это одна из значительных задач на сегодняшний день.

Список использованной литературы:

1. Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории. Москва: Постмаркет, 2000. - 352 с
2. Фрактал и построение всюду непрерывной, но нигде недифференцируемой функции // XVI международные Ломоносовские чтения: Сборник научных трудов. - Архангельск: Поморский госуниверситет, 2004. С.266-273.

Дата поступления в редакцию: 16.06.2017 г.

Опубликовано: 19.06.2017 г.

*© Академия педагогических идей «Новация». Серия «Студенческий научный вестник»,
электронный журнал, 2017*

© Галиаскаров Д.Р., 2017