

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Хакасский государственный университет им. Н.Ф. Катанова»
Сельскохозяйственный колледж

Карпушева Татьяна Владимировна,
преподаватель

ПЛАН ЗАНЯТИЯ

Тема урока: Решение показательных уравнений

Цели:

- Образовательные: проверить степень усвоения знаний студентами по теме «Решение рациональных и иррациональных уравнений», актуализировать знания студентов по теме «Свойства степеней», ввести определение показательного уравнения, рассмотреть методы решения показательных уравнений.
- Развивающие: развивать логическое мышление, вычислительные навыки.
- Воспитательные: способствовать развитию интереса к изучению математики.

Вид занятия: урок

Тип занятия: комбинированный

Оборудование: мультимедийная установка, ноутбук, тестовые задания

Ход занятия	Методы
1. Организационный момент а) приветствие б) проверка состава группы в) проверка готовности к уроку	Беседа Визуально
2. Проверка знаний студентов по теме «Решение рациональных и иррациональных уравнений» а) устный опрос: – Что называется уравнением? – Что называется корнем уравнения? – Что значит «решить уравнение»? – В каком случае уравнения называются равносильными? – Какое уравнение называется рациональным? – Какое уравнение называется иррациональным? б) тестирование: – Инструктаж, – Решение тестовых заданий	Фронтальный опрос Объяснительный Индивидуальная работа, взаимопроверка
3. Подведение итогов проверки знаний студентов	Обобщение, оценка знаний
4. Сообщение темы урока, постановка целей урока, начальная мотивация учебной познавательной деятельности	Беседа
5. Актуализация опорных знаний: а) решение заданий на применение свойств степеней, б) повторение свойств степеней, в) решение заданий на определение оснований степеней	Устная фронтальная работа Репродуктивный
6. Изучение нового материала: а) определение показательного уравнения, б) применение показательных уравнений (опережающее задание), в) методы решения показательных уравнений	Объяснительно-иллюстративный с применением мультимедиа Решение задач
7. Первичное закрепление изученного материала: – Решение задач	Фронтальная работа Индивидуальная работа
8. Подведение итогов урока	Анализ и оценка результатов работы
9. Домашнее задание: – Теоретический материал: Мордкович А.Г. Алгебра и начала анализа, §46. – Решить показательные уравнения: $7^x - 7^{x-1} = 6$, $10^x = \sqrt[3]{100}$.	Комментарии к выполнению

Ход занятия

1. Организационный момент (Приветствие учащихся, проверка состава группы, запись в журнале)

2. Повторение изученного материала

а) устный опрос (фронтальный):

- Что называется уравнением?
- Что называется корнем уравнения?
- Что значит «решить уравнение»?
- В каком случае уравнения называются равносильными?
- Какое уравнение называется рациональным?
- Какое уравнение называется иррациональным?

б) Тестирование.

Даны два варианта заданий, в каждом из которых нужно выбрать только по одному правильному варианту ответов

1 вариант	2 вариант
1) $(x^2 - 1)(x + 3) = 0$ а) -3; -1; 1 б) -3; 1 в) -1; 1	1) $(x^2 - 4)(x + 1) = 0$ а) -2; -1; 2 б) -2; 2 в) -1; 4
2) $\frac{x - 27}{x + 1} = -1$ а) 14 б) 13 в) 27	2) $\frac{x + 6}{x - 6} = 3$ а) 6 б) 12 в) -3
3) $\sqrt{2x+1} = 3$ а) 1 б) 4 в) 5	3) $\sqrt{2x-4} = 2$ а) 3 б) 4 в) 0
4) $\sqrt[4]{2-x} = 0$ а) 0 б) 1 в) 2	4) $\sqrt[3]{6-3x} = 0$ а) 0 б) 1 в) 2
5) $\sqrt{5x-14} = x-2$ а) 3 б) 3; 6 в) 6	5) $\sqrt{1+5x} = 1-x$ а) 0 б) 0; 7 в) 7

Ключ к тесту (ответы одинаковы для двух вариантов):

1)	а
2)	б
3)	б
4)	в
5)	б

- Инструктаж (раздаются задания по вариантам и бланки ответов, инструктаж по решению заданий и по заполнению бланков ответа),
- Решение тестовых заданий по вариантам (все бланки ответов возвращаются преподавателю),
- Взаимопроверка (бланки ответов перемешиваются между собой и раздаются студентам, ответы к тестовым заданиям выводятся на экран, рядом с верным ответом ставится «+», рядом с неправильным – «-», подсчитывается количество «+», которое переводится по шкале в оценку)
- Подведение итогов тестирования (выставление оценок в журнал, комментарии к проведенному тестированию)

Шкала перевода количества правильных ответов в оценки:

Кол-во правильных ответов	Оценка
5	«5»
4	«4»
3	«3»
0, 1, 2	«2»

3. Сообщение темы урока, постановка целей урока, начальная мотивация учебной познавательной деятельности

Считай несчастным тот день или час, в который ты не усвоил ничего нового и ничего не прибавил к своему образованию.
Я.А.Коменский

4. Актуализация опорных знаний:

Тема сегодняшнего занятия тесно связана с уже изученной – «Свойства степеней», поэтому нам необходимо вспомнить свойства степеней, для этого решим задания на применение свойств степеней:

а) решение заданий на применение свойств степеней:

(задания выведены на экран)

Вычислите:

1. 4^0 ;
2. 3^1 ;
3. $7^3 \cdot 7^{-2}$;
4. $3^5 : 3^3$;
5. $(5^2)^{1/2}$;
6. 6^{-2} .

Сформулируем уже известные нам свойства степеней:

б) повторение свойств степеней:

$$a^1 = a;$$

$$a^0 = 1$$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n};$$

$$a^m : a^n = a^{m-n}; (a \neq 0)$$

$$(a^m)^n = a^{mn};$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}; (b \neq 0)$$

$$(ab)^x = a^x b^x$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, (a \neq 0);$$

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}, (a > 0).$$

Также необходимо определить, к каким основаниям можно привести числа:

в) решение задач на определение оснований степеней:

$$2=2^1;$$

$$8=2^3;$$

$$9=3^2;$$

$$16=2^4=4^2;$$

$$25=5^2;$$

$$27=3^3;$$

$$32=2^5;$$

$$36=6^2;$$

$$49=7^2;$$

$$64=2^6=4^3=8^2;$$

$$81=3^4=9^2;$$

$$100=10^2;$$

$$125=5^3;$$

$$128=2^7;$$

$$216=2^8=4^4.$$

5. Изучение нового материала

5.1. Определение показательного уравнения

Определение 1. Показательными уравнениями называются уравнения, в которых неизвестные содержатся в показателе степени, а основаниями степеней являются положительные числа не равные 1. ($a^x = b$).

Например, $2^{x+6} = 8$.

5.2. Применение показательных уравнений:

Показательные уравнения можно встретить не только в математике, но и во многих других науках. Например,

В физике:

- Процесс изменения температуры чайника при кипении.
- Процессы ядерной физики, например, радиоактивный распад.
- Барометрическая формула: при постоянной температуре давление воздуха убывает с убыванием высоты над уровнем моря.
- Формула разрядки конденсатора.
- Определение скорости падения в безвоздушном пространстве.
- Вычисление амплитуды колебания маятника, гири, качающейся на пружине.

В географии:

- Рост народонаселения.

В биологии:

- Закон органического размножения при благоприятных условиях. Например, рост древесины, рост количества бактерий. Так же по этому закону возрастает количество клеток гемоглобина в организме человека, который потерял много крови.
- Закон органического затухания подобен размножению, происходит с той же скоростью и по тем же условиям, но происходит в обратную сторону.

В медицине:

- Диагностика заболеваний, например, при диагностике почечных болезней часто определяют способность почек выводить из крови радиоактивные изотопы, причем их количество в крови падает по показательному закону.

В экономике:

- Формула сложного процентного роста $S_n = (1 + p/100)^n * S$, где p - % годовых, S – внесенная сумма, S_n – сумма, которая будет на счете через n лет. Например, прибыль предприятия за n -ый год работы, банковские вклады.

5.3. Методы решения показательных уравнений

1. Метод приравнивания оснований или метод приведения степеней к одинаковому основанию

В этом случае показательное уравнение приводят к уравнению вида $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, где $a > 0$ и $a \neq 1$, и используют следующую **теорему**: показательное уравнение $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ ($a > 0$, $a \neq 1$) равносильно уравнению $f(x) = g(x)$.

Пример 1. $2^{x+6} = 8$; $2^{x+6} = 2^3$, Основания степеней равны, значит, равны и показатели степеней, т.е. $x + 6 = 3$, следовательно, $x = -3$.

Ответ: - 3.

Пример 2. $(1/5)^{2x} = 125$; $5^{-2x} = 5^3$, $-2x = 3$, $x = -1,5$.

Ответ: - 1,5.

Пример 3. $3^{2x-2} = 1$; $3^{2x-2} = 3^0$; $2x-2=0$; $2x=2$; $x=1$.

Ответ: $x=1$.

Пример 4.

Решить уравнение $4 \cdot 2^x = 1$.

Запишем уравнение в виде $2^{x+2} = 2^0$, откуда

$$x + 2 = 0.$$

Ответ: $x=-2$.

2. Вынесение общего множителя за скобки

За скобки выносят член с наименьшим показателем степени. Чтобы найти многочлен, заключенный в скобки, надо каждый член многочлена, стоящего в левой части уравнения, разделить на вынесенный множитель, Деление осуществлять по правилу: $a^m : a^n = a^{m-n}$.

Пример 1. $4^{x+1} + 4^x = 320$, вынесем за скобки степень с наименьшим показателем.

$$4^x * 4 + 4^x = 320,$$

$$4^x (4 + 1) = 320,$$

$$4^x * 5 = 320,$$

$$4^x = 320 : 5,$$

$$4^x = 64,$$

$$4^x = 4^3,$$

$$x = 3.$$

Ответ: 3.

Пример 2. $6^{x+1} + 35 * 6^{x-1} = 71$,

$$6^{x-1} (6^2 + 35) = 71,$$

$$6^{x-1} * 71 = 71,$$

$$6^{x-1} = 71 : 71,$$

$$6^{x-1} = 1,$$

$$6^{x-1} = 6^0,$$

$$x - 1 = 0,$$

$$x = 1.$$

Ответ: 1.

3. Введение новой переменной

Вводится новая переменная $y = a^x$ и рассматривается квадратное уравнение относительно новой переменной.

Пример 1. $7^{2x} - 6 \cdot 7^x - 7 = 0$,

пусть $y = 7^x$, тогда

$$y^2 - 6y - 7 = 0,$$

$$D = 36 + 28 = 64,$$

$$y_1 = (6+8)/2 = 7;$$

$$y_2 = (6-8)/2 = -1;$$

$$1) 7^x = 7; 2) 7^x = -1;$$

$$x_1 = 1 \quad \text{решений нет}$$

Ответ: 1.

Пример 2. $4^x - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$,

т. к. $4^x = (2^2)^x = (2^x)^2$, то

$$(2^x)^2 - 5 \cdot 2^x + 4 = 0,$$

пусть $y = 2^x$, тогда

$$y^2 - 5y + 4 = 0,$$

$$D = 25 - 16 = 9,$$

$$y_1 = (5+3)/2 = 4; y_2 = (5-3)/2 = 1;$$

$$1) 2^x = 4, 2) 2^x = 1;$$

$$2^x = 2^2, 2^x = 2^0,$$

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = 0.$$

Ответ: 2; 0.

4. Метод почленного деления

Пример 1.

Решить уравнение $3^x = 7^x$.

Так как $7^x \neq 0$, то уравнение можно записать в

виде $\frac{3^x}{7^x} = 1$, откуда $\left(\frac{3}{7}\right)^x = 1$, $x = 0$.

$$x = 0. \quad \triangleleft$$

Ответ: $x=0$.

5. Метод группировки

При решении одной задачи часто используют не один метод, а несколько, т.е. комбинацию методов.

Пример 1.

Решить уравнение $3 \cdot 2^{x+1} + 2 \cdot 5^{x-2} = 5^x + 2^{x-2}$.

Запишем уравнение в виде $3 \cdot 2^{x+1} - 2^{x-2} =$

$$= 5^x - 2 \cdot 5^{x-2}, \text{ откуда } 2^{x-2} (3 \cdot 2^3 - 1) = 5^{x-2} (5^2 - 2),$$

$$2^{x-2} \cdot 23 = 5^{x-2} \cdot 23, \left(\frac{2}{5}\right)^{x-2} = 1, x - 2 = 0.$$

Ответ: $x=2$.

6. Первичное закрепление изученного материала:

Решить показательные уравнения, заменить буквой наибольший корень каждого уравнения. Результат решения – слово.

$$1) 2^x = 32, 2^x = 2^5, \underline{x=5}.$$

$$2) 3^{x-1} = 27, 3^{x-1} = 3^3, x-1=3, \underline{x=4}.$$

$$3) 12^x = 1, 12^x = 12^0, \underline{x=0}.$$

$$4) \left(\frac{1}{25}\right)^x = 625, (5^{-2})^x = 5^4, 5^{-2x} = 5^4, -2x=4, \underline{x=-2}.$$

$$5) 144^{3-x} = \left(\frac{1}{12}\right)^{x+7} \quad . (12^2)^{3-x} = (12^{-1})^{x+7}, 12^{6-2x} = 12^{-x-7}, 6-2x=-x-7, -2x+x=-7-6, -x=-13, \underline{x=13}.$$

$$6) \frac{1}{100} \cdot 1000^{x+5} = 10 \quad . 10^{-2} \cdot (10^3)^{x+5} = 10^1, 10^{-2+3x+15} = 10^1, 3x+13=1, 3x=-12, \underline{x=-4}.$$

$$7) 3^{x+2} - 3^{x+1} + 3^x = 21. \text{ Выносим за скобки общий множитель } 3^x, \text{ получаем } 3^x(3^2 - 3^1 + 3^0) = 21, 3^x \cdot 7 = 21, 3^x = 3, \underline{x=1}.$$

- 8) $2^{x+1} + 4^x = 80$. $2^x \cdot 2 + (2^2)^x - 80 = 0$. Пусть $2^x = t$, $t > 0$, тогда уравнение примет вид: $2t + t^2 - 80 = 0$, корни $t_1 = 8$; $t_2 = -10$. Второй корень отрицательный, он не удовлетворяет условию $t > 0$. Вернёмся к замене, получим $2^x = 8$, $x = 3$.
- 9) $2^{3x} \cdot 3^x = 576$.
 Решить уравнение $2^{3x} \cdot 3^x = 576$.
 Так как $2^{3x} = (2^3)^x = 8^x$, $576 = 24^2$, то уравнение можно записать в виде $8^x \cdot 3^x = 24^2$, или в виде $24^x = 24^2$, откуда $x = 2$.
- 10) $3 \cdot 5^{x+3} + 2 \cdot 5^{x+1} = 77$. $5^{x+1}(3 \cdot 25 + 2) = 77$, $5^{x+1} \cdot 77 = 77$, $5^{x+1} = 1$, $5^{x+1} = 5^0$, $x+1=0$, $x = -1$.

Коды для ответов:

Корень	-10	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2
Буква	г	я	с	б	и	р	б	х	и	ь	е	м
Корень	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	17
Буква	з	л	а	у	м	л	ж	д	н	ф	о	п

Полученное слово – **Аль-Хорезми**. Мухаммед Бен Мус Аль-Хорезми – арабский ученый IX века, труд которого стал первым руководством по решению уравнений.

7. Подведение итогов урока

- Какие уравнения называются показательными?
- В каких науках можно встретить показательные уравнения?
- С какими способами решения показательных уравнений сегодня познакомились?

8. Домашнее задание:

- Теоретический материал: Мордкович А.Г. Алгебра и начала анализа, §46.
- Решить показательные уравнения: $7^x - 7^{x-1} = 6$, $10^x = \sqrt[3]{100}$