Всероссийское СМИ
«Академия педагогических идей «НОВАЦИЯ»
Свидетельство о регистрации ЭЛ №ФС 77-62011 от 05.06.2015 г.
(выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций)

Сайт: akademnova.ru
e-mail: akademnova@mail.ru

Попова Л.М. Векторный метод в стереометрии // Академия педагогических идей «Новация». Серия: Студенческий научный вестник. – 2019. – №1 (январь). – АРТ 11-эл. – 0,2 п.л. - URL: http: //akademnova.ru/page/875550

РУБРИКА: ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

УДК 514.7

Попова Любовь Михайловна
студентка 2 курса, факультет математики и информационных технологий
Научный руководитель: Шабаева А.Ф., к.ф.-м.н., доцент
Стерлитамакский филиал ФГБОУ ВПО «Башкирский государственный университет»
г. Стерлитамак, Российская Федерация
e-mail: liuba.dolgowa2018@mail.ru

ВЕКТОРНЫЙ МЕТОД В СТЕРЕОМЕТРИИ

Аннотация: В статье рассматривается векторный метод решения стереометрических задач, и, как пример, приводится решение аффинной задачи, изучающей взаимное расположение прямых и плоскостей.

Ключевые слова: вектор, стереометрия, аффинные задачи, компланарность, коллинеарность, плоскость, фигура.

Popova Lyubov Mikhailovna
2nd year student, features of mathematics and information technology
Supervisor: A. Shabaeva, PhD, Associate Professor
Sterlitamak branch FGBOU VPO "Bashkir State University"
Sterlitamak, Russian Federation

Всероссийское СМИ
«Академия педагогических идей «НОВАЦИЯ»
Свидетельство о регистрации ЭЛ №ФС 77-62011 от 05.06.2015 г.
(выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций)

Сайт: akademnova.ru
e-mail: akademnova@mail.ru

VECTOR METHOD IN SOLID GEOMETRY

Abstract: The article considers a vector method for solving stereometric problems, and, as an example, provides a solution to the affine problem, studying the mutual arrangement of lines and planes.
Keywords: vector, solid geometry, affine tasks, complanarity, collinear, plane, figure.

В настоящее время многие задачи в геометрии решаются с помощью векторного метода, в стереометрии же данный метод используется в основном для того, чтобы найти значения углов в прямоугольном параллелепипеде. Хотя в геометрии и содержится большой теоретический материал, посвященный данной теме, в стереометрии же пласт этих знаний остается невостребованным. Поэтому очень важно именно на практике рассмотреть решение стереометрических задач с помощью векторного метода.

Кроме того, решение стереометрических задач с помощью векторов даже проще, чем решение средствами элементарной геометрии. Данный факт выражается в том, что решая задачи по стереометрии с помощью вектора можно обойтись без дополнительных построений, без которых невозможно решение в геометрии.

Знание коллинеарности и компланарности составляет существенную часть в решении аффинных задач стереометрии, которые совместно со знаниями свойств скалярного произведения двух векторов и условий их перпендикулярности позволяют перевести в векторную форму отношения перпендикулярности прямых и плоскостей, что позволяет решать метрические задачи с помощью векторов.

Всероссийское СМИ
«Академия педагогических идей «НОВАЦИЯ»
Свидетельство о регистрации ЭЛ №ФС 77-62011 от 05.06.2015 г.
(выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций)

Сайт: akademnova.ru
e-mail: akademnova@mail.ru

К основным формулам при векторном способе решения аффинных задач стереометрии являются:

1) $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)$ для середины M отрезка AB и произвольной точки O пространства,

2) $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)$ для центроида M треугольника ABC и произвольной точки O пространства.

Рассмотрим далее решение данной задачи: отрезок, соединяющий вершину тетраэдра с центроидом противолежащей грани, называется медианой этого тетраэдра; отрезок, соединяющий середины противоположных ребер тетраэдра, называется его бимедианой.

Докажите:

а) что все медианы тетраэдра пересекаются в одной точке и эта точка делит каждую из медиан в отношении 3:1, считая от вершины;

б) все бимедианы тетраэдра пересекаются в одной точке и делятся ею пополам;

в) точка пересечения бимедиан тетраэдра совпадает с точкой пересечения его медиан.

Решение.

а) Допустим H_1, H_2, H_3, H_4 — это центроиды граней ABC, ABP, BCP, ACP, соответственно; а M — точка, делящая медиану PH_1 тетраэдра PABC в отношении $PM : MH_1 = 3 : 1$(рис. 1).

Сайт: akademnova.ru
e-mail: akademnova@mail.ru

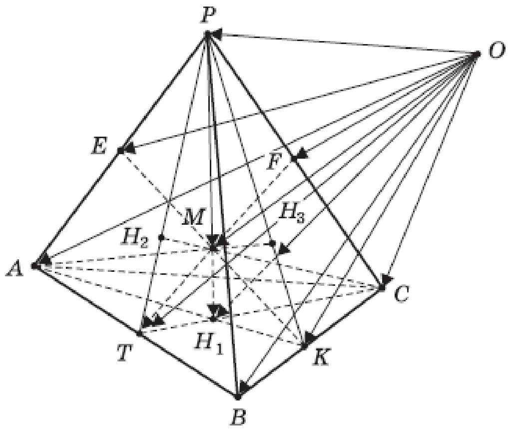

Рисунок 1. Тетраэдр PABC

В таком случае, PM : PH_1 = 3 : 4, откуда

$$PM = \frac{3}{4} PH_1.$$

Для любой точки O пространства и центроида H_1 грани ABC выполняется равенство:

$$\overrightarrow{OH_1} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right).$$

Тогда

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM} = \overrightarrow{OP} + \frac{3}{4}\overrightarrow{PH_1} =$$

$$= \overrightarrow{OP} + \frac{3}{4}\left(\overrightarrow{OH_1} - \overrightarrow{OP}\right) = \overrightarrow{OP} + \frac{3}{4}\overrightarrow{OH_1} - \frac{3}{4}\overrightarrow{OP} =$$

$$= \frac{1}{4}\overrightarrow{OP} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right) = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OP}\right).$$

Аналогично доказывается вышеперечисленное для точек M_1, M_2 и M_3, которые делят медианы CH_2, AH_3, BH_4 тетраэдра в отношении 3 : 1, где выполняется равенство:

$$\overrightarrow{OM_1} = \overrightarrow{OM_2} = \overrightarrow{OM_3} = \overrightarrow{OM} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OP}\right).$$

Всероссийское СМИ
«Академия педагогических идей «НОВАЦИЯ»
Свидетельство о регистрации ЭЛ №ФС 77-62011 от 05.06.2015 г.
(выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций)

Сайт: akademnova.ru
e-mail: akademnova@mail.ru

Значит точки M, M_1, M_2 и M_3 совпадают, что свидетельствует о том, что все медианы PH_1, CH_2, AH_3 и BH_4 тетраэдра PABC пересекаются в одной точке M и делятся ей в отношении 3 : 1, , что и требовалось доказать.

б) Допустим, точки K и E — середины ребер BC и AP (рис. 1), то есть отрезок KE — бимедиана тетраэдра PABC. Поэтому если точка Q — середина бимедианы KE, то для любой точки O пространства выполняется:

$$\overrightarrow{OQ} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OK} + \overrightarrow{OE}\right).$$

Поскольку K и E — середины ребер BC и AP, то справедливы равенства:

$$\overrightarrow{OK} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right), \quad \overrightarrow{OE} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OP}\right).$$

Тогда получаем:

$$\overrightarrow{OQ} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OK} + \overrightarrow{OE}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right) + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OP}\right)\right) = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OP}\right).$$

Аналогично доказываем, что для середины Q_1 бимедианы TF имеет место:

$$\overrightarrow{OQ_1} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OP}\right).$$

Кроме того, данное равенство выполняется и для середины Q_2 третьей бимедианы данного тетраэдра. Это означает:

$$\overrightarrow{OQ_1} = \overrightarrow{OQ_2} = \overrightarrow{OQ},$$

из этого следует, что точки Q, Q_1 и Q_2 совпадают, то есть бимедианы тетраэдра PABC пересекаются в одной точке Q и делятся этой точкой пополам.

в) Итак, для точек M и Q справедливы соответственно равенства:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OP}\right)$$

Всероссийское СМИ
«Академия педагогических идей «НОВАЦИЯ»
Свидетельство о регистрации ЭЛ №ФС 77-62011 от 05.06.2015 г.
(выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций)

Сайт: akademnova.ru
e-mail: akademnova@mail.ru

$$\overrightarrow{OQ} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OP}\right),$$

из которых следует, что

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OQ},$$

так, точка Q пересечения бимедиан тетраэдра PABC совпадает с его центроидом M, что и требовалось доказать.

Таким образом, одним из мощных аппаратов решения стереометрических задач является векторный метод.

Список использованной литературы:

1. Александров А. Д., Вернер А. Л., Рыжик В. И. Стереометрия. Геометрия в пространстве: Учеб. пособие для уч. ст. кл. и абитуриентов. — Висагинас, Alfa, 2016. — 367 с.
2. Александров А. Д. Геометрия: учебник / А. Д. Александров, Н. Ю. Нецветаев. — 2-е изд., исправленное. — СПб.: БХВ-Петербург, 2015. — 456 с.
3. Потоскуев Е.В. Геометрия. 11 кл.: Задачник для общеобразовательных учреждений с углуб. и профильным изучением математики / Е. В. Потоскуев, Л. И. Звавич. — 2-е изд., стереотип. — М.: Дрофа, 2015. — 240 с.

Дата поступления в редакцию: 02.01.2019 г.
Опубликовано: 09.01.2019 г.