М. В. Ткачёва

МАТЕМАТИКА

ВЕРОЯТНОСТЬ И СТАТИСТИКА

10–11

классы

УГЛУБЛЁННЫЙ УРОВЕНЬ

ЗАДАЧНИК

Учебное пособие, разработанное в комплекте с учебником

Москва
«Просвещение»
2023

УДК 373.167.1:519.2+519.2(075.3)
ББК 22.117я721.6
Т48

Учебник и разработанное в комплекте с ним учебное пособие допущены к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ начального общего, основного общего, среднего общего образования организациями, осуществляющими образовательную деятельность, в соответствии с Приказом Министерства просвещения Российской Федерации № _____ от _______________ г.

Ткачёва, Мария Владимировна.
Т48 Математика. Вероятность и статистика : 10–11-е классы : углублённый уровень : задачник : учебное пособие, разработанное в комплекте с учебником / М. В. Ткачёва. — Москва : Просвещение, 2023. — 80 с. : ил.
ISBN 978-5-09-108370-5.
Данное учебное пособие разработано в комплекте с учебниками Бунимовича Е. А., Булычева В. А. «Математика. Вероятность и статистика. 10 класс. Углублённый уровень», «Математика. Вероятность и статистика. 11 класс. Углублённый уровень» в соответствии с требованиями Федерального государственного образовательного стандарта среднего общего образования в редакции Приказа Министерства просвещения № 732 от 12.08.2022.
Задачник предназначен для учащихся, учителей, методистов и всех заинтересованных в образовательном процессе. Книга может быть использована для подготовки к итоговой аттестации по математике, организации повторения и дифференцированной работы на уроках и факультативах, а также для самостоятельного освоения методов решения задач углублённого уровня сложности.

УДК 373.167.1:519.2+519.2(075.3)
ББК 22.117я721.6

ISBN 978-5-09-108370-5

Предисловие

Данное учебное пособие входит в учебно-методический комплект по вероятности и статистике углублённого уровня Е. А. Бунимовича, В. А. Булычева для 10–11 классов, соответствующий требованиям Федерального государственного образовательного стандарта среднего общего образования в редакции Приказа Министерства просвещения № 732 от 12.08.2022 г.

Каждую тему в задачнике предваряет краткий теоретический материал. После него даны упражнения, которые делятся на обязательные, дополнительные и трудные задачи. Упражнения разделены на три главы, соответствующие большим разделам — **«Комбинаторика»**, **«Элементы теории вероятностей»** и **«Статистика»**. Главы, в свою очередь, разбиты на параграфы, которые базируются на определённой содержательной линии внутри темы, указанной в названии главы.

В теоретической части приводятся примеры решения задач. Выполнение упражнений позволит углубить математические знания и поможет на ЕГЭ решать самые трудные задачи.

В конце каждой главы размещены задания рубрики **«Проверь себя!»**, с помощью которых учащиеся смогут оценить, насколько хорошо усвоена тема.

К большинству упражнений, а также ко всем заданиям рубрики ***«Проверь себя!»*** в конце книги приведены ***ответы*** или ***указания*** к решению.

Внутри текста используются следующие обозначения:

текст, который важно знать и полезно помнить

▶◁ решение задачи

●○ обоснование утверждения или вывод формулы

обязательные задачи

дополнительные задачи

трудные задачи

I
глава

Комбинаторика

В нашу современную жизнь вторгается математика с её особым стилем мышления, становящимся сейчас обязательным и для инженера, и для биолога.

Б. В. Гнеденко

§ 1 Правило произведения

В курсе алгебры основной школы решались элементарные комбинаторные задачи, связанные с составлением различных соединений (комбинаций) из имеющихся элементов. Было сформулировано *правило произведения*, упрощающее в ряде случаев подсчёт числа соединений определённого вида. Напомним его.

Если существует n вариантов выбора первого элемента и для каждого из них имеется m вариантов выбора второго элемента, то всего существует $n \cdot m$ различных пар с выбранными таким образом первым и вторым элементами.

Задача 1 Сколько различных двузначных чисел можно записать с помощью цифр 0, 1, 2, 3?

▶ В качестве первой цифры может быть выбрана любая из цифр 1, 2, 3 (т. е. $n = 3$). Второй цифрой может быть выбрана любая из четырёх данных цифр 0, 1, 2, 3 (т. е. $m = 4$). Согласно правилу произведения число всевозможных двузначных чисел, составленных с помощью предложенных цифр, равно $n \cdot m = 3 \cdot 4 = 12$.

Ответ 12. ◁

Задача 2 Сколько различных трёхзначных чисел можно записать с помощью цифр 0, 1, 2, 3?

▶ При решении задачи 1 было установлено, что с помощью цифр 0, 1, 2 и 3 можно записать 12 различных двузначных чисел. К каждому из них можно приписать любую из четырёх имеющихся цифр, получая тем самым различные трёхзначные числа. Таким образом, согласно правилу произведения существует $12 \cdot 4 = 48$ различных трёхзначных чисел, записанных с помощью данных цифр.

Ответ 48. ◁

При решении задачи 2 фактически дважды использовалось правило произведения. Действительно, первую цифру числа можно было выбрать 3 способами, вторую к ней присоединить — любым из 4 способов, третью цифру к каждому образованному двузначному числу можно было приписать 4 способами. Всего трёхзначных чисел с помощью данных цифр можно образовать $(3 \cdot 4) \cdot 4 = 48$ способами. Таким образом, правило произведения может быть применено неоднократно для подсчёта числа соединений из трёх, четырёх и т. д. элементов, выбираемых из определённых множеств с конечным числом элементов.

Задача 3 Сколько различных пятибуквенных *слов* можно записать с помощью букв «и» и «л»? (*Словом* в комбинаторике называют любую последовательность букв; среди составленных из данных букв *слов* только слово «лилии» имеет смысл в русском языке.)

▶ Каждая из пяти букв составляемого *слова* последовательно выбирается из предложенных двух букв. Применив 4 раза правило произведения, найдём число всевозможных пятибуквенных *слов*, составленных из двух данных букв:

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5 = 32.$$

Ответ 32. ◁

Упражнения

1 Сколько различных двузначных чисел с разными цифрами можно записать, используя цифры:

1) 1, 2 и 3; 2) 4, 5 и 6; 3) 5, 6, 7 и 8;
4) 6, 7, 8 и 9; 5) 0, 2, 4 и 6; 6) 0, 3, 5 и 7?

2 Сколько различных трёхзначных чисел можно записать с помощью цифр:

1) 2 и 3; 2) 8 и 9; 3) 0 и 2; 4) 0 и 5?

3 Сколько различных трёхзначных чисел, не имеющих одинаковых цифр, можно записать с помощью цифр:

1) 3, 4 и 5; 2) 7, 8 и 9; 3) 5, 6, 7 и 8; 4) 1, 2, 3 и 4?

4 Сколько различных четырёхбуквенных *слов* можно записать с помощью букв:

1) «м» и «а»; 2) «п» и «а»; 3) «к», «а» и «о»; 4) «ш», «а» и «л»?

5 Путешественник может попасть из пункта A в пункт C, проехав через пункт B. Между пунктами A и B имеются три различные дороги, а между пунктами B и C — четыре различные дороги. Сколько существует различных маршрутов между пунктами A и C?

6 Чтобы попасть из города M в город K, нужно проехать через город N. Между городами M и N имеются четыре автодороги, а из города N в город K можно попасть либо поездом, либо самолетом. Сколько существует различных способов добраться из города M в город K?

7 Сколькими способами могут распределиться золотая и серебряная медали на чемпионате по футболу, если в нём принимают участие:

1) 32 команды; 2) 16 команд?

8 Сколькими способами можно составить расписание 5 уроков на один день из 5 различных учебных предметов?

9 Сколькими способами можно составить расписание 6 уроков из 6 разных учебных предметов?

10 Сколькими способами могут занять очередь в школьный буфет:

1) 6 учащихся; 2) 5 учащихся?

11 В классе 18 учащихся. Из их числа нужно выбрать физорга, культорга и казначея. Сколькими способами это можно сделать, если один ученик может занимать не более одной должности?

12 В классе 20 учащихся. Необходимо назначить по одному дежурному в столовую, вестибюль и спортивный зал. Сколькими способами это можно сделать?

13 Сколько различных шифров можно набрать в автоматической камере хранения, если шифр составляется с помощью: 1) любой из 10 гласных букв с последующим трёхзначным числовым кодом; 2) любой из 8 согласных букв «к», «л», «м», «н», «п», «р», «с», «т» с последующим четырёхзначным числовым кодом (нуль в коде может стоять и на первом месте)?

14 Сколько существует пятизначных чисел, в которых все цифры, стоящие на нечётных местах, различны?

15 Сколько существует шестизначных чисел, в которых все цифры, стоящие на чётных местах, различны?

16 Сколько нечётных: 1) трёхзначных; 2) четырёхзначных чисел можно записать с помощью цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, если любую из них можно использовать в записи числа не более одного раза?

§ 2 Перестановки

Задача 1 Сколькими способами можно поставить рядом на полке 4 различные книги?

▶ На первое место можно поставить любую из четырёх книг, на второе — любую из трёх оставшихся, на третье — любую из двух оставшихся и на четвёртое место — последнюю оставшуюся книгу. Применяя последовательно правило произведения, получим $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.

Ответ Книги можно поставить 24 способами. ◁

В этой задаче фактически было найдено число всевозможных соединений из четырёх элементов, которые отличались одно от другого порядком расположения этих элементов. Такие соединения называют перестановками.

Определение. *Перестановками из n элементов* называются соединения, которые состоят из одних и тех же n элементов и отличаются одно от другого только порядком их расположения.

Число перестановок из n элементов обозначают P_n (P — первая буква французского слова *permutation* — перестановка) и читают «пэ энное».

В задаче 1 было найдено $P_4 = 24$.

Последовательно применяя правило произведения, можно получить формулу числа перестановок P_n из n различных элементов:

$$P_n = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1, \text{ откуда}$$
$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-2)(n-1)\,n.$$

Произведение первых n натуральных чисел обозначают $n!$ (читается «эн факториал»), т. е. $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$, причём по определению $1! = 1$. Таким образом,

$$\boldsymbol{P_n = n!} \qquad (1)$$

Задача 2 Сколькими способами можно положить 6 различных открыток в 6 имеющихся конвертов (по одной открытке в конверт)?

▶ Задача сводится к нахождению числа перестановок из 6 элементов. По формуле (1) находим: $P_6 = 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$.

Ответ 720 способами. ◁

Упражнения

17 Найти значение:

1) P_5; 2) P_7; 3) P_9; 4) P_8.

18 Сколькими способами можно рассадить четверых детей на четырёх стульях в столовой детского сада?

19 Сколькими способами могут занять места 5 учащихся класса за пятью одноместными партами?

20 Сколькими способами можно установить дежурство по одному человеку в день:

1) среди семи учащихся класса в течение 7 дней;

2) среди девяти учащихся класса в течение 9 дней?

21 Сколько различных пятизначных чисел, не содержащих одинаковых цифр, можно записать с помощью цифр 1, 2, 3, 4, 5 так, чтобы:
1) последней была цифра 3;
2) первой была цифра 4;
3) первой была цифра 5, а второй — цифра 1;
4) первой была цифра 2, а последней — цифра 4;
5) первыми были цифры 3 и 4, расположенные в любом порядке;
6) последними были цифры 1 и 2, расположенные в любом порядке?

22 Упростить форму записи выражений (полагая, что k — натуральное число, $k > 4$):
1) $6! \cdot 7$; 2) $10! \cdot 11$; 3) $15 \cdot 14!$; 4) $12 \cdot 11!$;
5) $k!\,(k+1)$; 6) $(k-1)!\,k$; 7) $(k-1)!\,k\,(k+1)$;
8) $(k-2)!\,(k-1) \cdot k$; 9) $(k-4)!\,(k^2-5k+6)$;
10) $(k-3)!\,(k^2-3k+2)$.

24 Найти значение выражения:

1) $\frac{26!}{25!}$; 2) $\frac{32!}{31!}$; 3) $\frac{12!}{10!}$; 4) $\frac{14!}{12!}$;

5) $\frac{5! \cdot 3!}{7!}$; 6) $\frac{6! \cdot 4!}{8!}$; 7) $\frac{10!}{8! \cdot 3!}$; 8) $\frac{11!}{9! \cdot 2!}$.

24 Упростить выражение (буквами n и m обозначены натуральные числа):

1) $\frac{P_{n+1}}{P_n}$; 2) $\frac{P_{n+2}}{P_{n+1}}$; 3) $\frac{m!(m+1)}{(m+2)!}$; 4) $\frac{(m+3)!}{(m+1)!(m+2)}$.

25 Решить уравнение относительно n:

1) $\frac{P_n}{P_{n+1}}=\frac{1}{4}$; 2) $\frac{P_{n+2}}{P_{n+1}}=5$;

3) $\frac{P_n}{P_{n-2}}=20$; 4) $\frac{P_{n-1}}{P_{n+1}}=\frac{1}{12}$.

26 Сколько различных *слов* можно составить, переставляя местами буквы в слове: 1) гипотенуза; 2) треугольник?

27 Сколько различных шестизначных чисел, не содержащих одинаковых цифр и кратных 5, можно записать с помощью цифр 1, 2, 3, 4, 5 и 6?

28 Сколько различных шестизначных чисел, не содержащих одинаковых цифр и кратных 4, можно записать с помощью цифр 1, 3, 5, 6, 7 и 9?

29 Имеются 8 книг, среди которых:

1) 6 книг различных авторов и двухтомник одного автора, книг которого не было среди предыдущих шести книг;
2) 5 книг различных пяти авторов и трёхтомник шестого автора.
Сколькими способами можно расставить эти книги на полке так, чтобы книги одного автора стояли рядом?

§ 3 Размещения

Задача 1 Сколько различных двузначных чисел можно записать с помощью цифр 1, 2, 3, 4 при условии, что в каждой записи нет одинаковых цифр?

▶ Перебором убедимся в том, что из четырёх цифр 1, 2, 3, 4 можно составить 12 двузначных чисел, удовлетворяющих условию:

12, 13, 14,
21, 23, 24,
31, 32, 34,
41, 42, 43.

В записи двузначного числа на первом месте может стоять любая из данных четырёх цифр, а на втором — любая из трёх оставшихся. По правилу произведения таких двузначных чисел $4 \cdot 3 = 12$.

Ответ 12. ◁

При решении задачи 1 из четырёх данных элементов (цифр 1, 2, 3, 4) были образованы всевозможные соединения по два элемента в каждом, причём любые два соединения отличались либо составом элементов (например, 12 и 34), либо порядком их расположения (например, 12 и 21). Такие соединения называют размещениями.

Определение. *Размещениями из m элементов по n элементов* ($n \leqslant m$) называются такие соединения, каждое из которых содержит n элементов, взятых из данных m разных элементов, и которые отличаются одно от другого либо самими элементами, либо порядком их расположения.

Число всевозможных размещений из m элементов по n элементов обозначают A_m^n и читают «А из эм по эн». Так, например, при решении задачи 1 было установлено, что $A_4^2 = 12$.

Выведем формулу для вычисления A_m^n — числа размещений из m элементов по n элементов.

● Пусть имеется m различных элементов. Тогда число размещений, состоящих из одного элемента, выбранного из имеющихся m элементов, равно m, т. е. $A_m^1 = m$.

Чтобы составить все размещения из m элементов по 2, к каждому из ранее образованных размещений из m элементов по 1 будем последовательно присоединять по одному из оставшихся $(m - 1)$ элементов. По правилу произведения число таких соединений равно $A_m^1 \cdot (m - 1)$. Таким образом, $A_m^2 = m(m - 1)$.

Для составления всех размещений из m по 3 к каждому из ранее полученных размещений из m элементов по 2 присоединим по очереди по одному из оставшихся $(m - 2)$ элементов. По правилу произведения число таких соединений равно $A_m^2 \cdot (m - 2)$, т. е. $A_m^3 = m(m - 1)(m - 2)$.

Последовательно применяя правило произведения, для любого $n \leqslant m$ получаем

$$A_m^n = m(m - 1)(m - 2) \cdot \ldots \cdot (m - (n - 1)). \quad ○ \qquad (1)$$

Например, $A_4^2 = 4 \cdot 3 = 12$; $A_4^3 = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$; $A_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

Отметим, что правая часть формулы (1) содержит произведение n последовательных натуральных чисел, наибольшее из которых равно m. Пусть в формуле (1) $m = n$. Тогда

$$A_n^n = n\,(n-1)\,(n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = P_n,$$

т. е. число размещений из n элементов по n равно числу перестановок из этих элементов:

$$\boldsymbol{A_n^n = P_n}. \qquad (2)$$

Задача 2 Сколькими способами можно обозначить данный вектор, используя буквы A, B, C, D, E, F?

▶ В условии задачи даны 6 букв. Для обозначения вектора используются 2 буквы, причём порядок записи этих букв в обозначении имеет значение. Поэтому задача сводится к нахождению числа размещений из 6 по 2. Находим $A_6^2 = 6 \cdot 5 = 30$.

Ответ 30 способами. ◁

Задача 3 Решить уравнение $A_n^2 = 56$.

▶ Отметим, что $n \geqslant 2$ и n $\boldsymbol{N}$. По формуле (1) имеем $A_n^2 = n\,(n-1) = n^2 - n$, т. е. $n^2 - n = 56$, откуда $n^2 - n - 56 = 0$ и $n_1 = 8$, $n_2 = -7$. Так как корнем заданного уравнения может быть натуральное число $n \geqslant 2$, то $n = -7$ — посторонний корень.

Ответ $n = 8$. ◁

Преобразуем формулу (1) для нахождения числа размещений A_m^n.

● Запишем формулу (1) следующим образом:

$$A_m^n = (m-n+1)\,(m-n+2) \cdot \ldots \cdot (m-1)\,m.$$

Умножив обе части этого равенства на $(m-n)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \times (m-n)$, получим

$$(m-n)! \cdot A_m^n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (m-n)\,(m-n+1)\,(m-n+2) \times \ldots \cdot (m-1)\,m,$$

т. е. $(m-n)! \cdot A_m^n = m!$, откуда

$$\boldsymbol{A_m^n = \frac{m!}{(m-n)!}}. \ \bigcirc \qquad (3)$$

Для того чтобы формула (3) была справедлива не только для $n < m$, но и для $n = m$ (так как имеет смысл $A_m^m = P_m = m!$), полагают по определению $0! = 1$.

Задача 4 Вычислить: $\dfrac{A_{20}^7 + A_{20}^6}{A_{20}^5}$.

Используя формулу (3), находим

$$\frac{A_{20}^7 + A_{20}^6}{A_{20}^5} = \frac{\frac{20!}{13!} + \frac{20!}{14!}}{\frac{20!}{15!}} = \frac{15!}{13!} + \frac{15!}{14!} = 14 \cdot 15 + 15 = 15 \cdot (14 + 1) = 225.$$

Ответ 225. ◁

Упражнения

30 Вычислить:

1) A_4^1; 2) A_5^1; 3) A_5^2; 4) A_4^2;
5) A_7^7; 6) A_6^6; 7) A_{10}^3; 8) A_8^3.

31 В классе изучают 8 предметов естественно-математического цикла. Сколькими способами можно составить расписание на пятницу, если в этот день должны быть:
1) 5 уроков из пяти разных предметов этого цикла;
2) 6 уроков из шести разных предметов этого цикла.

32 Сколько существует способов для обозначения с помощью букв A, B, C, D, E, F вершин данного:
1) четырёхугольника; 2) треугольника?

33 В классе 20 человек. Сколькими способами из их числа можно сделать назначение: 1) физорга и культорга; 2) физорга, культорга и казначея?

34 Найти значение выражения:

1) $\dfrac{A_{15}^9 - A_{15}^8}{A_{15}^7}$; 2) $\dfrac{A_{18}^{10} + A_{18}^{11}}{A_{18}^9}$; 3) $\dfrac{A_9^4 \cdot A_4^4}{A_8^6}$; 4) $\dfrac{A_5^5 \cdot A_{10}^3}{A_9^7}$.

35 Решить относительно m уравнение:

1) $A_m^2 = 72$; 2) $A_m^2 = 56$; 3) $A_m^3 = 12m$;
4) $A_m^3 = 20m$; 5) $A_{m+1}^2 = 110$; 6) $A_{m+2}^2 = 90$;
7) $A_m^5 = 18A_{m-2}^4$; 8) $(m-4) \cdot A_m^4 = 21\,(m-5) \cdot A_{m-2}^3$.

36 Упростить выражение:

1) $\dfrac{A_9^n \cdot P_{10-n}}{P_8}$, где $n \leqslant 9$; 2) $\dfrac{P_{12}}{A_{13}^n \cdot P_{14-n}}$, где $n \leqslant 13$.

37 В шахматном турнире участвуют: 1) 6 юношей и 2 девушки; 2) 5 юношей и 3 девушки. Сколькими способами могут распределиться места среди девушек, если все участники турнира набирают разное количество очков.

§ 4 Сочетания и их свойства

Задача 1 Покупатель из имеющихся в питомнике 10 саженцев хочет выбрать 2. Сколькими способами он может это сделать?

▶ Пусть x — число всевозможных пар саженцев, выбираемых из 10 имеющихся. Если бы в выбираемой паре был важен порядок расположения саженцев, то таких пар было бы в 2 раза больше числа x, т. е. $2x$. Но число упорядоченных пар из любых элементов, выбираемых из 10 имеющихся различных элементов, равно A_{10}^2. Таким образом, $2x = A_{10}^2$, т. е. $2x = 90$, откуда $x = 45$.

Ответ 45 способами. ◁

При решении этой задачи из 10 саженцев были образованы пары — соединения по 2 саженца, которые отличались друг от друга только составом. Такие соединения называют сочетаниями.

Определение. *Сочетаниями из m элементов по n* элементов в каждом ($n \leqslant m$) называются соединения, каждое из которых содержит n элементов, взятых из данных m разных элементов, и которые отличаются одно от другого по крайней мере одним элементом.

Число всевозможных сочетаний из m различных элементов по n элементов обозначают C_m^n (C — первая буква французского слова *combinaison* — сочетание) и читают «це из эм по эн». При решении задачи 1 было установлено, что $C_{10}^2 = 45$.

Выведем формулу для подсчёта числа сочетаний из m различных элементов по n элементов в каждом.

● Образуем все соединения, содержащие n элементов, выбранных из данных m разных элементов, без учёта порядка их расположения. Число таких соединений равно C_m^n.

Из каждого полученного соединения перестановками его элементов можно образовать $P_n = n!$ соединений, отличающихся одно от другого только порядком расположения элементов. Тем самым получим все размещения из m элементов по n, число которых равно A_m^n. По правилу произведения число таких соединений равно $C_m^n \cdot P_n$. Итак, $C_m^n \cdot P_n = A_m^n$, откуда

$$\boldsymbol{C_m^n = \frac{A_m^n}{P_n}}. \qquad (1)$$

○

Например, $C_m^n = \frac{A_5^3}{P_3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 10.$

Заметим, что если $m = n$, то $C_n^n = \frac{A_n^n}{P_n} = \frac{P_n}{P_n} = 1.$

Учитывая, что $A_m^n = \frac{m!}{(m-n)!}$ при $m \geqslant n$ и $P_n = n!$, формулу (1) можно представить в виде

$$\boldsymbol{C_m^n = \frac{m!}{(m-n)! \cdot n!}}, \text{ где } m \geqslant n. \qquad (2)$$

Например, $C_7^4 = \frac{7!}{(7-4)! \cdot 4!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 35.$

Задача 2 Сколько существует способов выбора двух карт из колоды в 36 карт?

▶ Изымаемые из колоды всевозможные пары карт без учёта порядка их расположения в наборе образуют сочетания из 36 по 2. По формуле (2) находим

$$C_{36}^2 = \frac{36!}{(36-2)! \cdot 2!} = \frac{36!}{34! \cdot 2!} = \frac{35 \cdot 36}{2} = 35 \cdot 18 = 630.$$

Ответ 630 способов. ◁

Рассмотрим два свойства сочетаний, которые в ряде случаев упрощают вычисления при решении задач.

Свойство 1. $\boldsymbol{C_m^n = C_m^{m-n}}$.

● По формуле (2) имеем

$$C_m^n = \frac{m!}{(m-n)! \cdot n!},$$

$$C_m^{m-n} = \frac{m!}{(m-(m-n))! \cdot (m-n)!} = \frac{m!}{n! \cdot (m-n)!},$$

т. е. $C_m^n = C_m^{m-n}$. ○

Свойство 2 (рекуррентное свойство).

$$C_m^n + C_m^{n+1} = C_{m+1}^{n+1}.$$

● Воспользуемся соотношением (1):

$$C_m^n + C_m^{n+1} = \frac{A_m^n}{P_n} + \frac{A_m^{n+1}}{P_{n+1}} =$$

$$= \frac{m(m-1)\ldots(m-(n-1))}{n!} + \frac{m(m-1)\ldots(m-(n-1))(m-n)}{(n+1)!} =$$

$$= \frac{m(m-1)\ldots(m-(n-1))(n+1) + m(m-1)\ldots(m-(n-1))(m-n)}{(n+1)!} =$$

$$= \frac{m(m-1)\ldots(m-(n-1))(n+1+m-n)}{(n+1)!} =$$

$$= \frac{(m+1)m(m-1)\ldots(m-(n-1))}{(n+1)!} = \frac{A_{m+1}^{n+1}}{P_{n+1}} = C_{m+1}^{n+1}. \ \bigcirc$$

Задача 3 Найти значение выражения $C_{20}^{18} + C_{20}^{19}$.

▶ Воспользуемся свойством 2, получим $C_{20}^{18} + C_{20}^{19} = C_{21}^{19}$. По формуле (2) имеем

$$C_{21}^{19} = \frac{21!}{(21-19)!\cdot 19!} = \frac{21!}{2!\cdot 19!} = \frac{20\cdot 21}{2} = 210.$$

Ответ 210. ◁

Упражнения

38 Найти значение:

1) C_7^1; 2) C_6^1; 3) C_8^2; 4) C_7^2;

5) C_7^3; 6) C_8^3; 7) C_9^8; 8) C_{10}^9;

9) C_{15}^{15}; 10) C_{12}^{12}; 11) C_{30}^0; 12) C_{40}^0;

13) C_{50}^{48}; 14) C_{40}^{38}; 15) C_{70}^2; 16) C_{60}^2.

39 Сколькими способами для участия в конференции из 9 членов научного общества можно выбрать:

1) троих студентов; 2) четверых студентов?

40 Сколько различных аккордов, содержащих: 1) 4 звука; 2) 3 звука, можно образовать из 12 клавиш одной октавы?

41 В помещении 16 ламп. Сколько существует вариантов его освещения, если одновременно должны светиться: 1) 15 ламп; 2) 14 ламп?

42 На плоскости отмечено: 1) 16 точек; 2) 13 точек, причём никакие 3 из них не лежат на одной прямой. Сколько различных отрезков можно построить, соединяя эти точки попарно?

43 На окружности отмечено: 1) 10 точек; 2) 12 точек. Сколько различных треугольников с вершинами, выбранными из этих точек, можно построить?

44 На окружности отмечено: 1) 7 точек; 2) 8 точек. Сколько различных выпуклых четырёхугольников с вершинами, выбранными из этих точек, можно построить?

45 Из колоды карт, содержащей 36 листов, выбирают: 1) 3 карты бубновой масти и одну карту трефовой масти; 2) одну карту пиковой масти и две карты червовой масти. Сколькими способами можно осуществить такой выбор?

46 Имеются 5 тюльпанов и 6 нарциссов. Сколькими способами можно составить букет: 1) из 3 тюльпанов и 2 нарциссов; 2) из 2 тюльпанов и 3 нарциссов?

47 В школьном хоре 7 девочек и 4 мальчика. Сколькими способами из состава хора можно выбрать для участия в районном смотре:

1) 5 девочек и 2 мальчиков; 2) 4 девочек и 3 мальчиков?

48 Найти значение выражения, предварительно его упростив:

1) $C_{13}^{10}+C_{13}^{11}$; 2) $C_{14}^{12}+C_{14}^{13}$;

3) $C_{19}^{4}-C_{18}^{4}$; 4) $C_{21}^{3}-C_{20}^{3}$;

5) $C_{61}^{3}-C_{60}^{2}$; 6) $C_{71}^{3}-C_{70}^{2}$.

49 Решить уравнение:

1) $C_{x+1}^{2}+C_{x+1}^{3}=7x$; 2) $C_{x-1}^{3}+C_{x-1}^{2}=4(x-1)$;

3) $C_{x}^{3}=\frac{4}{15}C_{x+2}^{4}$; 4) $5C_{x}^{3}=C_{x+2}^{4}$;

5) $C_{3x+1}^{3x-1}=120$; 6) $C_{2x+1}^{2x-1}=36$.

§ 5 Бином Ньютона

В теории многочленов часто двучлены называют *биномами*. Рассмотрим целые неотрицательные степени бинома $a + b$ (при условии $a + b \neq 0$):

$(a + b)^0 = 1,$

$(a + b)^1 = 1 \cdot a + 1 \cdot b,$

$(a + b)^2 = 1 \cdot a^2 + 2ab + 1 \cdot b^2,$

$(a + b)^3 = 1 \cdot a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1 \cdot b^3,$

$(a + b)^4 = (a + b)^3\,(a + b) =$

$= 1 \cdot a^4 + 4a^{3b} + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1 \cdot b^4,$

$(a + b)^5 = (a + b)^4\,(a + b) =$

$= 1 \cdot a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + 1 \cdot b^5$

и т. д.

Можно доказать справедливость следующей формулы, называемой биномиальной формулой Ньютона:

$$\begin{aligned}(a + b)^m = C_m^0 \cdot a^m + C_m^1 \cdot a^{m-1}b + \\ + C_m^2 \cdot a^{m-2}b^2 + \ldots + C_m^n \cdot a^{m-n}b^n + \ldots + \\ + C_m^{m-1} \cdot ab^{m-1} + C_m^m \cdot b^m.\end{aligned} \tag{1}$$

Формулу (1) чаще всего называют просто *биномом Ньютона*, а числа C_m^n — *биномиальными коэффициентами*, которые могут быть найдены по формуле

$$\boldsymbol{C_m^n = \frac{m!}{(m-n)! \cdot n!}}.$$

Биномиальные коэффициенты легко находить с помощью так называемого *треугольника Паскаля* — таблицы значений C_m^n, составленной на основании рекуррентного свойства числа сочетаний $C_m^n + C_m^{n+1} = C_{m+1}^{n+1}$ с учётом того, что $C_m^0 = C_m^n = 1$. Ниже приводится фрагмент треугольника Паскаля, в котором стрелками показан процесс получения определённых членов таблицы на основании рекуррентного свойства.

Например, при $m = 4$ имеем строку 1, 4, 6, 4, 1, полученную из предыдущей строки следующим образом: $4 = 1 + 3$, $6 = 3 + 3$, $4 = 3 + 1$ (первый и последний члены строки равны $C_4^0 = C_4^4 = 1$).

m \ n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1										
1	1 ⊕	1									
2	1 ⊕	2 ⊕	1								
3	1 ⊕	3 ⊕	3 ⊕	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
7	1	7	21	35	35	21	7	1			
8	1	8	28	56	70	56	28	7	1		
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

Эта таблица наглядно иллюстрирует свойство 1 числа сочетаний $C_m^n = C_m^{m-n}$, которое можно сформулировать так: *числа, одинаково удалённые от концов строки треугольника Паскаля, равны*.

Задача 1 Записать разложение бинома $(x-2)^6$.

▶ По формуле (1) находим

$$(x-2)^6 = (x+(-2))^6 =$$
$$= C_6^0 x^6 + C_6^1 x^5 \cdot (-2) + C_6^2 x^4 \cdot (-2)^2 + C_6^3 x^3 \cdot (-2)^3 +$$
$$+ C_6^4 x^2 \cdot (-2)^4 + C_6^5 x \cdot (-2)^5 + C_6^6 \cdot (-2)^6 =$$
$$= x^6 + 6x^5 \cdot (-2) + 15x^4 \cdot 4 + 20x^3 \cdot (-8) +$$
$$+ 15x^2 \cdot 16 + 6x \cdot (-32) + 64 =$$
$$= x^6 - 12x^5 + 60x^4 - 160x^3 + 240x^2 - 192x + 64. \triangleleft$$

Заметим, что при записи разложения степени бинома полезно контролировать следующие моменты:

1) число членов получаемого многочлена на единицу больше показателя m степени бинома, т. е. равно $m + 1$;

2) показатели степени первого слагаемого бинома последовательно убывают на единицу от m до 0, а показатели второго последовательно возрастают на единицу от 0 до m;

3) биномиальные коэффициенты, равноудалённые от начала и конца разложения по формуле (1), равны между собой.

Задача 2 Доказать свойство элементов строки треугольника Паскаля:

$$C_m^0 + C_m^1 + C_m^2 + \ldots + C_m^{m-1} + C_m^m = 2^m. \quad (2)$$

▶ Равенство (2) получается из равенства (1) при $a = b = 1$. ◁

Задача 3 Найти член разложения $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{10}$, содержащий x^2.

▶ $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{10} = \left(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}\right)^{10}$. Общий член разложения десятой степени бинома $x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}$ имеет вид $C_{10}^n \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{10-n} \cdot \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)^n$. Для того чтобы некоторый член этого разложения содержал x^2, должно выполняться равенство

$$\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{10-n} \cdot \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)^n = x^2. \quad (3)$$

Но $\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{10-n} \cdot \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)^n = x^{5-\frac{n}{2}} \cdot x^{-\frac{n}{2}} = x^{5-n}$.

Равенство (3) выполняется при $5 - n = 2$, т. е. при $n = 3$. При $n = 3$ имеем $C_{10}^3 = 120$.

Ответ $120x^2$. ◁

Упражнения

50 Записать разложение бинома:

1) $(1 + x)^8$; 2) $(x + 1)^7$; 3) $(a - 1)^9$; 4) $(y - 1)^{10}$;
5) $(2x + 1)^5$; 6) $(x + 2)^6$; 7) $(3x + 2)^4$; 8) $(2a + 3)^5$;
9) $\left(2a - \frac{1}{2}\right)^5$; 10) $\left(3x - \frac{1}{3}\right)^4$.

51 Записать разложение бинома:

1) $\left(1 + \sqrt{2}\right)^n$; 2) $\left(1 + \sqrt{3}\right)^5$;
3) $\left(a - \frac{1}{3a}\right)^7$; 4) $\left(b - \frac{1}{2b}\right)^6$.

52 Найти четвёртый член разложения бинома:

1) $(\sqrt{x}+x)^{12}$; 2) $(x-\sqrt{x})^{14}$; 3) $\left(x-\frac{1}{x}\right)^{13}$;

4) $\left(\frac{1}{x}+x\right)^{11}$; 5) $(a^{0,1}+a^{0,2})^{9}$; 6) $(b^{0,3}+b^{0,4})^{8}$.

53 С помощью свойства элементов строки треугольника Паскаля найти сумму:

1) $C_7^0+C_7^1+C_7^2+C_7^3+C_7^4+C_7^5+C_7^6+C_7^7$;

2) $C_6^6+C_6^5+C_6^4+C_6^3+C_6^2+C_6^1+C_6^0$;

3) $C_6^1+C_6^2+C_6^3+C_6^4+C_6^5$;

4) $C_7^6+C_7^5+C_7^4+C_7^3+C_7^2+C_7^1$;

5) $C_9^0+C_9^1+C_9^2+C_9^3+C_9^4$;

6) $C_{11}^5+C_{11}^4+C_{11}^3+C_{11}^2+C_{11}^1+C_{11}^0$.

54 Найти член разложения бинома:

1) $\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{12}$, содержащий x^{-1};

2) $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{16}$, содержащий x^3.

Упражнения к главе I

55 Вычислить:

1) $\frac{7!-5!}{5!}$; 2) $\frac{6!-4!}{5!}$; 3) $\frac{149!}{148!}-\frac{36!}{35!}$;

4) $\frac{97!}{96!}+\frac{35!}{34!}$; 5) $\frac{4!\cdot 8!}{6!\cdot 7!}$; 6) $\frac{9!\cdot 5!}{7!\cdot 6!}$.

56 Упростить:

1) $\frac{(n+3)!}{(n+1)!}$; 2) $\frac{(n+2)!}{(n-1)!}$;

3) $\left(\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{n!}\right)\cdot n!$; 4) $\left(\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}\right)\cdot n!$;

5) $\left(\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+2)!}\right)\cdot(n+1)!$; 6) $\left(\frac{1}{(n+2)!}+\frac{1}{n!}\right)\cdot(n+1)!$.

57 Найти значение выражения:

1) $\frac{A_7^4}{P_5}$; 2) $\frac{A_6^3}{P_4}$; 3) $\left(\frac{C_{11}^7}{10}-\frac{C_7^2}{5}\right)\cdot\frac{P_5}{A_6^4}$; 4) $\left(\frac{C_{10}^7}{3}+\frac{C_6^2}{6}\right)\cdot\frac{P_4}{A_5^4}$.

58 Решить уравнение:

1) $\frac{P_{x+1}}{P_{x-1}}=30$; 2) $\frac{P_x}{P_{x-2}}=42$; 3) $\frac{1}{P_{x-5}}=\frac{56}{P_{x-3}}$; 4) $\frac{1}{P_{x-4}}=\frac{110}{P_{x-2}}$;

5) $A_{x+1}^3=72\,(x-1)$; 6) $A_{x-1}^4=40\,(x-2)\,(x-3)$;

7) $5C_{n+1}^3=8C_n^4$; 8) $C_n^3=4C_{n-2}^2$.

59 Сколькими способами можно составить график очерёдности дежурства (по одному человеку в день) в школьной столовой среди: 1) восьми учащихся на восемь дней; 2) семи учащихся на семь дней?

60 Сколько существует способов выбора троих учёных из числа:

1) десяти сотрудников; 2) девяти сотрудников?

61 Сколькими способами могут распределиться одно первое, одно второе и одно третье места среди: 1) десяти участников соревнования; 2) восьми участников соревнования?

62 Сколькими способами можно рассадить на 20 стульях:
1) четверых учащихся; 2) троих учащихся?

63 Найти значение выражения, предварительно его упростив:

1) $C_{12}^{10}+C_{12}^{11}$; 2) $C_{11}^9+C_{11}^{10}$; 3) $C_8^6+C_8^7+C_9^8$; 4) $C_9^5+C_9^6+C_{10}^7$.

64 Записать разложение бинома:

1) $(2-x)^5$; 2) $(x-2)^4$; 3) $(a+3)^4$; 4) $(3+a)^5$;

5) $(x-1)^3$; 6) $(1-x)^7$; 7) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^6$; 8) $\left(2a+\frac{1}{2}\right)^6$.

Проверь себя!

1 В вазе лежат 7 разных пирожных. Сколько существует вариантов выбора из них двух пирожных?

2 Сколькими способами можно подарить 6 различных по окраске мячей шести малышам, вручая каждому по одному мячу?

3 Сколько существует способов занять 3 одноместные парты в первом ряду класса, если в выборе мест участвуют 22 школьника?

4 Найти значение выражения $\frac{C_8^3\cdot P_6}{A_7^4}$.

5 Записать разложение бинома $(1-x)^6$.

65 Сколькими способами можно назначить патруль из двух солдат и одного офицера, если в роте:

1) 75 солдат и 6 офицеров; 2) 78 солдат и 5 офицеров?

66 Сколько диагоналей имеет выпуклый:

1) семиугольник; 2) восьмиугольник?

67 Найти значение выражения, предварительно его упростив:

1) $C_4^1 + C_4^2 + C_4^3 + C_4^4$; 2) $C_5^1 + C_5^2 + C_5^3 + C_5^4$;

3) $C_7^0 + C_7^7 + C_7^1 + C_7^6 + C_7^2 + C_7^5 + C_7^3 + C_7^4$;

4) $C_6^0 + C_6^6 + C_6^1 + C_6^5 + C_6^2 + C_6^4 + C_6^3$;

5) $C_{12}^2 + C_{12}^3 + C_{13}^4 + C_{14}^5$; 6) $C_9^3 + C_9^4 + C_{10}^5 + C_{11}^6$;

7) $C_{21}^7 - C_{20}^7$; 8) $C_{25}^9 - C_{24}^9$; 9) $C_{15}^{10} - C_{14}^9$; 10) $C_{13}^8 - C_{12}^7$.

68 Сколькими способами из колоды в 36 карт можно выбрать:

1) две карты чёрной масти; 2) две карты червовой масти?

69 Шифр в камере хранения состоит из двух букв, выбираемых из 10 гласных русского алфавита, и четырёхзначного числового кода (буквы и цифры в шифре могут повторяться; числовой код 0000 также возможен). Сколько различных шифров можно использовать в этой камере хранения?

70 В некотором государстве автомобильный номер составляется из трёх различных букв алфавита, состоящего из 25 букв, и трёх цифр (с их возможными повторами). Скольким автомобилям можно присвоить получаемые таким образом номера?

71 Записать разложение бинома:

1) $(3a + 1)^5$; 2) $(x + 3)^6$; 3) $\left(x - \frac{1}{3}\right)^7$; 4) $\left(\frac{a}{3} - 1\right)^5$;

5) $(10x - 0{,}1)^6$; 6) $(0{,}1b - 10)^7$; 7) $\left(\frac{2}{a} + \frac{a}{2}\right)^7$; 8) $\left(\frac{2}{c} + \frac{c}{2}\right)^8$.

72 Найти член разложения бинома:

1) $\left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{15}$, содержащий $x^{\frac{1}{3}}$; 2) $\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x}\right)^{14}$, содержащий x^2;

3) $\left(\frac{1}{\sqrt[4]{x}} + \sqrt[3]{x}\right)^{16}$, содержащий, $x^{-\frac{13}{12}}$;

4) $\left(\sqrt[5]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{13}$, содержащий $x^{-0{,}6}$.

II

глава

Элементы теории вероятностей

Высшее назначение математики... состоит в том, чтобы находить скрытый порядок в хаосе, который нас окружает.

Н. Винер

§ 6 События

Всё, что происходит или не происходит в реальной действительности, называют явлениями или *событиями*. Практика показывает, что если некоторое событие происходит достаточно часто, то в его наступлении существует определённая закономерность.

Раздел математики, называемый *теорией вероятностей*, и занимается исследованием закономерностей в массовых явлениях.

Определение 1. Событие называют *случайным* по отношению к некоторому испытанию (опыту), если в ходе этого испытания оно может произойти, а может и не произойти.

Например, если испытание состоит в одном бросании игральной кости (игрального кубика), то в ходе этого испытания возможны следующие события (*исходы* испытания): на верхней грани кости окажется число 1, число 2, ..., число 6. Каждое из этих событий является случайным, так как оно может произойти, а может и не произойти.

Случайные события в теории вероятностей обычно обозначаются начальными буквами латинского алфавита A, B, C и др.

Определение 2. Событие U называют *достоверным* по отношению к некоторому испытанию, если в ходе этого испытания событие U обязательно произойдёт.

Например, достоверным событием будет появление одного из шести чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6 при одном бросании игральной кости.

Если испытание заключается в извлечении одного шара из коробки, в которой лежат только белые шары, то извлечение белого шара будет достоверным событием.

Определение 3. Событие V называют *невозможным* по отношению к некоторому испытанию, если в ходе этого испытания событие V заведомо не произойдёт.

Например, невозможным событием является выпадение числа 7 при бросании обычного игрального кубика.

Предположим, что в результате некоторого испытания обязательно происходит одно из взаимоисключающих друг друга событий, причём каждое из них не разделяется на более простые. Такие события называют *элементарными событиями* (или *элементарными исходными* испытаниями).

Например:

1) в испытании с бросанием игрального кубика существует шесть элементарных исходов: выпадение числа 1, выпадение числа 2, ..., выпадение числа 6;

2) при бросании монеты существует два элементарных события: появление орла и появление решки;

3) при изъятии одного шара из коробки, в которой находятся два белых и один чёрный шар, существует три элементарных исхода: изъятие любого из двух белых шаров и изъятие чёрного шара;

4) при одном бросании канцелярской кнопки существуют два элементарных исхода испытания: падение кнопки с касанием острия поверхности, на которую она падает, и падение плашмя — без касания острия поверхности падения.

Рассмотренные в каждом из примеров события *несовместны* (появление одного из них исключает появление другого) и *единственно возможны* (обязательно произойдёт одно из них). Однако в первых трёх примерах элементарные события являются *равновозможными* (у каждого из них шансы появиться равны), а в четвёртом примере (для большинства реальных кнопок) шансы названных двух событий различны.

Заметим, что на практике равновозможность событий иногда удаётся определить из соображений симметрии.

Кроме элементарных событий, в теории вероятностей рассматриваются и более сложные события. Например, при бросании игрального кубика может быть рассмотрено событие A — появление чётного числа, которое «распадается» на 3 элементарных события (появление числа 2, 4 или 6).

Упражнения

73 (Устно.) Каким событием (достоверным, невозможным или случайным) является событие:
1) изъятая из колоды одна карта оказалась семёркой треф;
2) при комнатной температуре и нормальном атмосферном давлении медь оказалась в жидком состоянии;
3) при температуре 20 °С и нормальном атмосферном давлении вода оказалась в жидком состоянии;
4) наугад названное натуральное число оказалось больше нуля;
5) вынутый наудачу цветок из букета гвоздик оказался розой;
6) в результате броска игрального кубика появилось число 5?

74 (Устно.) Перечислить все элементарные события, которые могут произойти в результате следующего испытания:
1) бросается на стол игральный кубик и определяется число очков, появившееся на верхней грани (грани, противоположной той, которая лежит на плоскости стола);
2) на поверхность стола бросается игральный тетраэдр (грани которого пронумерованы числами 1, 2, 3, 4) и определяется число на той грани, которая лежит на поверхности стола;
3) бросается на пол монета и определяется видимая сторона;
4) на пол роняют усечённый конус, выточенный из дерева, и определяют геометрическую фигуру, по которой упавший конус касается пола;
5) из всех карт одной масти (взятых из колоды с 36 листами) случайным образом выбирается одна карта и определяется изображение на ней;
6) из коробки, в которой лежат 5 шаров пяти различных цветов, извлекается один шар и называется его цвет.
Высказать предположение о том, являются ли перечисленные элементарные события равновозможными.

75 (Устно.) Выяснить, являются ли события A и B несовместными, если:
1) A — появление туза, B — появление дамы в результате одного изъятия одной карты из колоды карт;
2) A — появление туза, B — появление карты бубновой масти в результате одного изъятия одной карты из колоды;
3) A — выпадение числа 6, B — выпадение чётного числа при одном бросании игральной кости;
4) A — выпадение числа 4, B — выпадение нечётного числа в результате одного броска игральной кости.

§ 7 Комбинации событий. Противоположное событие

Пусть в определённом испытании могут произойти события A и B. Рассмотрим некоторые комбинации этих событий.

Определение 1. *Суммой* (*объединением*) событий A и B называется событие, которое состоит в том, что происходит хотя бы одно из данных событий. Сумму событий A и B обозначают $A + B$ (или $A \cup B$).

На рисунке 1 с помощью *кругов Эйлера* проиллюстрировано понятие суммы событий A и B: большой круг изображает все элементарные события, которые могут произойти в рассматриваемом испытании, левый малый круг изображает событие A, правый — событие B, а закрашенная область — событие $A + B$.

Допустим, испытание состоит в определении числа на верхней грани игрального кубика после одного броска, при этом событие A — выпало чётное число, событие B — выпало число, кратное трём. Тогда событие $A + B$ состоит в том, что на верхней грани кубика появится либо чётное, либо кратное трём (либо чётное и кратное трём) число, т. е. событие $A + B$ означает, что появится одно из чисел 2, 3, 4, 6.

Определение 2. *Произведением* (*пересечением*) событий A и B называется событие, которое состоит в том, что происходят оба этих события. Произведение событий A и B обозначают AB (или $A \cap B$).

Рисунок 2 иллюстрирует с помощью кругов Эйлера произведение событий A и B: закрашенная область (общая часть кругов A и B) иллюстрирует событие AB.

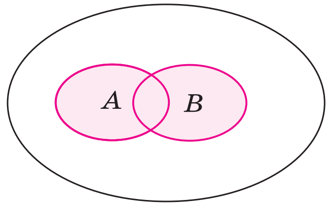

Рис. 1

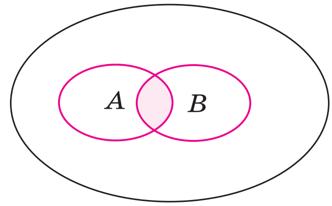

Рис. 2

Например, если событие A — выпадение чётного числа, а событие B — выпадение числа, кратного 3, в результате одного броска игрального кубика, то событие AB — выпадение чётного числа, кратного 3 (такое число одно — это 6).

Задача 1 Из колоды карт наугад вынимают одну карту и рассматривают два события: A — вынута карта пиковой масти, B — вынут король. Описать события $A + B$ и AB.

Ответ Событие $A + B$ — вынута карта пиковой масти или вынут король; событие AB — из колоды вынут король пиковой масти.

Определение 3. События A и B называют *равными* (*равносильными*) и пишут $A = B$, если событие A происходит тогда и только тогда, когда происходит событие B.

Например, если в испытании с одним бросанием игрального кубика событие A — выпало число 6, а событие B — выпало наибольшее из возможных чисел, то $A = B$.

Рассмотрим события A и $\bar{A}$ (читается «а с чертой»), связанные с одним испытанием.

Определение 4. Событие $\bar{A}$ называют *противоположным* событию A, если событие $\bar{A}$ происходит тогда и только тогда, когда не происходит событие A.

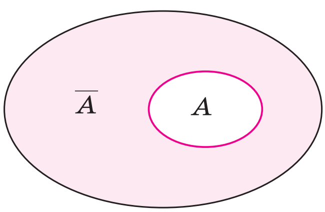

Рис. 3

Например, если событие A — выпадение чётного числа при бросании игральной кости, то $\bar{A}$ — выпадение нечётного числа; если A — попадание по мишени при одном выстреле, то $\bar{A}$ — непопадание (промах).

На рисунке 3 проиллюстрирована взаимосвязь событий A и $\bar{A}$ на множестве всех элементарных исходов испытания (событие $\bar{A}$ изображено закрашенной областью).

Задача 2 Пусть A и B — произвольные события. Записать с помощью введённых обозначений следующие события:

1) A_1 — произошли оба события;
2) A_2 — ни одно из двух событий A и B не произошло;
3) A_3 — произошло только событие A;
4) A_4 — произошло по крайней мере одно из событий A и B;
5) A_5 — произошло либо только событие A, либо только событие B.

▶ 1) $A_1 = AB$; 2) $A_2 = \bar{A}\bar{B}$;
3) $A_3 = A\bar{B}$; 4) $A_4 = A + B$; 5) $A_5 = A\bar{B} + \bar{A}B$. ◁

Упражнения

76 (Устно.) Из колоды карт вынимается одна карта. Пусть событие A — изъятие из колоды карты с картинкой, B — изъятие карты червовой масти. Пояснить, в чём заключается событие $A + B$; AB.

77 Двадцать карточек пронумерованы числами от 1 до 20. Произвольно из них выбирается одна карточка. Пусть событие A — на карточке записано число, кратное 4; событие B — на карточке записано число, кратное 6. Выяснить, в чём состоят события $A + B$ и AB.

78 (Устно.) Испытание состоит из двух выстрелов по мишени. Событие A — попадание по мишени при первом выстреле, B — попадание при втором выстреле. Пояснить, в чём состоят события $A + B$ и AB.

79 На стол бросают две игральные кости. Событие A — на первой кости выпало число 5, B — на второй кости выпало число, не меньшее пяти. Установить, в чём заключаются события $A + B$ и AB.

80 (Устно.) Установить событие, являющееся противоположным событию:
1) при одном броске монеты выпала решка;
2) в результате броска игральной кости выпало число, равное двум;
3) в результате броска игральной кости выпало число, большее четырёх;
4) в результате броска игральной кости выпало число, не большее трёх;
5) из колоды карт изъята карта бубновой масти;
6) из колоды карт извлечена шестёрка;
7) хотя бы одна пуля попала в цель в испытании с тремя выстрелами по мишени;
8) хотя бы на одной из двух брошенных игральных костей появилось число 6;
9) в расписании уроков на понедельник первым уроком поставлена физика;
10) при сдаче экзамена студент получил оценку «отлично».

81 Пусть C и D — произвольные события. Записать следующие события:
1) произошли оба данных события;
2) произошло только событие C;
3) произошло только событие D;
4) ни одно из данных событий не произошло;
5) произошло, по крайней мере, одно из данных двух событий;
6) произошло только одно из данных событий.

§ 8 Вероятность события

Пусть событие A связано с испытанием, имеющим n равновозможных элементарных исходов. И пусть событие A наступает тогда, когда осуществляется любой из m каких-то элементарных исходов ($m \leqslant n$), и не наступает тогда, когда осуществляется любой из оставшихся ($n - m$) исходов. Тогда говорят, что указанные m исходов, приводящие к событию A, *благоприятствуют* событию A.

Определение. *Вероятностью* $P(A)$ события A в испытании с равновозможными элементарными исходами называется отношение числа исходов m, благоприятствующих событию A, к числу n всех исходов испытания.

Таким образом,

$$\boldsymbol{P(A) = \frac{m}{n}}, \textbf{ где } \boldsymbol{m \leqslant n}. \qquad (1)$$

Заметим, что вероятность наступления каждого элементарного события в испытании с n равновозможными исходами равна $\frac{1}{n}$. Так, например, появление любого из шести чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6 после одного бросания игрального кубика имеет вероятность $\frac{1}{6}$.

Из формулы (1) следует, что $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$,
а также $P(V) = 0$, $P(U) = 1$,
где V — невозможное событие; U — достоверное событие.

Задача 1 Бросают игральную кость. Найти вероятность события: 1) A_1 — выпало чётное число; 2) A_2 — выпало число, кратное 3.

▶ Число всех возможных элементарных исходов испытания $n = 6$.

1) Событию A_1 благоприятствуют 3 исхода (числа 2, 4 и 6), т. е. $m = 3$, поэтому $P(A_1) = \frac{m}{n} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

2) Событию A_2 благоприятствуют 2 исхода (числа 3 и 6), т. е. $m = 2$, поэтому $P(A_2) = \frac{m}{n} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Ответ 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{1}{3}$. ◁

Задача 2 Бросают две монеты. Найти вероятность события A — хотя бы на одной монете выпал орёл.

▶ Обозначим появление орла на выпавшей монете буквой «О», а появление решки — буквой «Р». Тогда равновозможны следующие четыре ($n = 4$) элементарных исхода испытания: ОО, ОР, РО, РР (в каждой паре на первом месте записан результат появления орла или решки на первой монете, на втором месте — на второй монете). Событию A благоприятствуют первые 3 пары исходов ($m = 3$). Поэтому $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{3}{4}$.

Ответ $\frac{3}{4}$. ◁

Задача 3 Игральная кость бросается дважды. Найти вероятность события A — сумма выпавших очков не меньше 10.

▶ Результаты двух бросаний игральной кости — равновозможные упорядоченные пары чисел, выбираемых из чисел 1, 2, 3, 4, 5 и 6. Согласно комбинаторному правилу произведения число таких пар равно $6 \cdot 6 = 36$. Событию A благоприятствуют следующие 6 пар: 4 и 6, 6 и 4, 5 и 5, 5 и 6, 6 и 5, 6 и 6. Таким образом, $P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

Ответ $\frac{1}{6}$. ◁

Задача 4 В ящике лежат 3 белых и 4 чёрных одинаковых на ощупь шаров. Наугад вынимают 2 шара. Найти вероятность события: 1) A — оба вынутых шара белого цвета; 2) B — вынуты шары разного цвета.

▶ Общее число возможных исходов испытания $n = C_7^2 = \frac{7!}{5! \cdot 2!} = 21$.

1) Число благоприятствующих событию A исходов $m = C_3^3 = \frac{3!}{1! \cdot 2!} = 3$, поэтому $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{3}{21} = \frac{1}{7}$.

2) Так как любой из 3 белых шаров может комбинироваться с любым из 4 чёрных шаров, то по правилу произведения существует $3 \cdot 4 = 12$ пар из белого и чёрного шаров, т. е. $m = 12$. Таким образом, $P(B) = \frac{12}{21} = \frac{4}{7}$.

Ответ 1) $\frac{1}{7}$; 2) $\frac{4}{7}$. ◁

Упражнения

82 (Устно.) Какова вероятность выпадения числа: 1) 2; 2) 5 в результате одного бросания игрального кубика?

83 Какова вероятность того, что при изъятии одной карты из колоды в 36 листов игрок вынет: 1) даму треф; 2) короля пик; 3) валета красной масти; 4) семёрку чёрной масти; 5) шестёрку; 6) туза; 7) или даму, или валета; 8) или восьмёрку, или девятку; 9) или короля червовой масти, или даму любой масти; 10) или валета любой масти, или туза пик; 11) не короля треф; 12) не даму?

84 Какова вероятность того, что на открытом наугад листе откидного календаря на январь окажется: 1) 21-е число; 2) 10-е число; 3) 31-е число; 4) 32-е число; 5) число, содержащее в своей записи цифру 0; 6) число, содержащее цифру 4; 7) число, содержащее хотя бы одну цифру 2; 8) число, содержащее хотя бы одну цифру 1?

85 В коробке находятся 2 белых, 3 чёрных и 4 красных шара. Наугад вынимается один шар. Найти вероятность того, что вынутый шар: 1) белый; 2) чёрный; 3) красный; 4) белый или чёрный; 5) белый или красный; 6) чёрный или красный; 7) или белый, или чёрный, или красный; 8) синий.

86 В лотерее участвуют 100 билетов, среди которых: 1) 4 выигрышных; 2) 5 выигрышных. Наугад берут один билет. Какова вероятность того, что взятый билет выигрышный?

87 Брошены две игральные кости. Найти вероятность того, что: 1) на обеих костях выпали числа 6; 2) на обеих костях выпали числа 5; 3) на первой кости выпало число 2, а на второй число 3; 4) на первой кости выпало число 6, а на второй число 1; 5) на первой кости выпало чётное число, а на второй число 3; 6) на первой кости выпало число 2, а на второй нечётное число; 7) на первой кости выпало нечётное число, а на второй чётное число; 8) на первой кости выпало чётное число, а на второй кратное трём; 9) на первой кости выпало число, большее 2, а на второй число, не меньшее 4; 10) на первой кости выпало число, не большее 4, а на второй число, большее 4; 11) сумма выпавших чисел равна 3; 12) сумма выпавших чисел равна 4; 13) сумма выпавших чисел не больше 4; 14) сумма выпавших чисел не меньше 10; 15) произведение выпавших чисел равно 10; 16) произведение выпавших чисел равно 5; 17) произведение выпавших чисел равно 6; 18) произведение выпавших чисел равно 4.

88 Среди 20 деталей, лежащих в ящике, 3 детали бракованные. Наугад вынимают 2 детали. Какова вероятность того, что: 1) обе детали оказались бракованными; 2) одна деталь бракованная, а другая нет; 3) обе детали не бракованные?

89 Среди 15 лампочек 4 испорчены. Наугад берут 2 лампочки. Какова вероятность того, что: 1) обе выбранные лампочки испорчены; 2) одна лампочка исправная, а одна — испорченная; 3) обе лампочки исправные?

90 Брошены 3 игральные кости. Какова вероятность того, что: 1) на каждой кости выпало число 3; 2) выпали одинаковые числа; 3) сумма чисел на всех костях равна 4; 4) произведение всех выпавших чисел равно 2?

91 Из полного набора домино, не глядя, извлекают две костяшки. Найти вероятность того, что: 1) обе костяшки окажутся дублями; 2) на каждой из костяшек одна половинка будет «пустой».

§ 9 Сложение вероятностей

Напомним, что сумма событий A и B — это событие $A + B$, состоящее в наступлении либо только события A, либо только события B, либо и события A и события B одновременно.

Например, если стрелок сделал 2 выстрела по мишени и событие A — попадание в мишень при первом выстреле, событие B — попадание при втором выстреле, то событие $A + B$ — это попадание стрелком в мишень хотя бы при одном из выстрелов.

Теорема. Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий, т. е.

$$\boldsymbol{P(A+B)=P(A)+P(B)}. \qquad (1)$$

● Пусть событиям A и B, связанным с некоторым испытанием, благоприятствуют соответственно k и l исходов, а всего имеется n равновозможных исходов. Так как события A и B несовместны, то среди n исходов нет таких, которые одновременно благоприятствовали бы как событию A, так и событию B. Поэтому событию $A + B$ будут благоприятствовать $k + l$ исходов.

По определению вероятности

$$P(A)=\frac{k}{n},\ P(B)=\frac{l}{n},\ P(A+B)=\frac{k+l}{n}=\frac{k}{n}+\frac{l}{n},$$

откуда следует равенство (1). ○

Следствие. Сумма вероятностей противоположных событий равна единице, т. е.

$$P(A)+P(\bar{A})=1. \qquad (2)$$

● События A и $\bar{A}$ несовместны, поэтому по теореме 1 имеем $P(A+\bar{A})=P(A)+P(\bar{A})$. Но $A+\bar{A}=U$ — достоверное событие, и поэтому $P(A+\bar{A})=P(U)=1$, т. е. $P(A+\bar{A})=P(A)+P(\bar{A})=1$. ○

Задача 1 В ящике лежат 9 шаров, из которых 2 белых, 3 красных и 4 зелёных. Наугад берётся один шар. Какова вероятность того, что этот шар цветной (не белый)?

▶ I способ. Пусть событие A — появление красного шара, событие B — появление зелёного шара, тогда событие $A + B$ — появление цветного шара. Очевидно, что $P(A)=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$, $P(B)=\frac{4}{9}$.

Так как события A и B несовместны, к ним применима теорема сложения вероятностей

$$P(A+B)=P(A)+P(B)=\frac{1}{3}+\frac{4}{9}+\frac{7}{9}.$$

II способ. Пусть событие C — появление белого шара, тогда противоположное ему событие $\bar{C}$ — появление не белого (цветного) шара. Очевидно, что $P(C)=\frac{2}{9}$, а согласно следствию из теоремы имеем

$$P(\bar{C})=1-P(C)=1-\frac{2}{9}=\frac{7}{9}.$$

Ответ $\frac{7}{9}$. ◁

Задача 2 Вероятность того, что при одном выстреле стрелок попадает в мишень, равна 0,8. Какова вероятность того, что, выстрелив по мишени один раз, этот стрелок промахнётся?

▶ Если событие A — попадание в цель при одном выстреле, то по условию $P(A) = 0{,}8$. Противоположное событию A событие $\bar{A}$ — промах, его вероятность $P(\bar{A})=1-P(A)=1-0{,}8=0{,}2$.

Ответ 0,2. ◁

Задача 3 В группе спортсменов 10 лыжников и 7 велосипедистов. Какова вероятность того, что среди случайным образом выбранных из этой группы пятерых человек окажется хотя бы один велосипедист?

▶ Пусть событие A — среди выбранных пятерых человек окажется хотя бы один велосипедист, тогда событие $\bar{A}$ — среди выбранных спортсменов нет ни одного велосипедиста (т. е. все — лыжники). В данном случае вероятность события $\bar{A}$ найти проще, чем $P(A)$. Найдём $P\left(\bar{A}\right)$.

Число всех способов выбрать из имеющихся 17 спортсменов пятерых равно числу сочетаний из 17 по 5, т. е. $n = C_{17}^5$. Благоприятствующими событию $\bar{A}$ будут все пятерки спортсменов, выбранных из 10 лыжников. Их число $m = C_{10}^5$. Таким образом,

$$P\left(\bar{A}\right) = \frac{m}{n} = \frac{C_{10}^5}{C_{17}^5} = \frac{\frac{10!}{5!\cdot 5!}}{\frac{17!}{12!\cdot 5!}} = \frac{10!\cdot 12!}{5!\cdot 17!} =$$

$$= \frac{6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{13\cdot 14\cdot 15\cdot 16\cdot 17} = \frac{9}{221}.$$

Теперь находим $P(A) = 1 - P\left(\bar{A}\right) = 1 - \frac{9}{221} = \frac{212}{221}$.

Ответ $\frac{212}{221}$. ◁

Замечания. 1) Теорема, аналогичная теореме 1, верна для любого конкретного числа событий, т. е.

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n),$$

где $A_1, \ldots, A_n$ — попарно несовместные события.

2) Если $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — все элементарные события некоторого испытания, то их совокупность называют *полем событий*. Очевидно, что эти события попарно несовместны и $A_1 + A_2 + \ldots + A_n = U$, где U — достоверное событие.

$$P(U) = P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) =$$
$$= P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n), \text{ но } P(U) = 1,$$

поэтому

$$P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = 1.$$

Упражнения

92 Из колоды карт (36 листов) наугад вынимается одна карта. Какова вероятность того, что эта карта: 1) либо дама, либо валет; 2) либо шестёрка, либо туз; 3) либо семёрка треф, либо карта бубновой масти; 4) либо туз красной масти, либо карта трефовой масти? Решить задачу двумя способами.

93 В ящике находятся 3 белых, 4 синих и 5 красных шаров. Наугад вынимают один шар. Какова вероятность того, что этот шар: 1) цветной; 2) либо белый, либо красный; 3) либо белый, либо синий? Решить задачу двумя способами.

94 В папке находятся 15 билетов спортивной лотереи, 20 билетов художественной лотереи и 30 билетов денежно-вещевой лотереи. Найти вероятность того, что наугад вынутый из этой пачки один билет окажется билетом: 1) либо спортивной, либо денежно-вещевой лотереи; 2) либо спортивной, либо художественной лотереи; 3) либо художественной, либо денежно-вещевой лотереи. Решить задачу двумя способами.

95 Найти вероятность того, что в результате одного бросания игральной кости выпадет число, отличное от 1.

96 Найти вероятность того, что наугад вынутая из полного набора домино одна кость окажется не дублем.

97 Вероятность попадания мяча в корзину, брошенного один раз некоторым баскетболистом, равна 0,4. Найти вероятность того, что, бросив мяч в корзину, этот баскетболист промахнётся.

98 Вероятность выигрыша по одному билету в некоторой лотерее равна 10^{-5}. Какова вероятность приобретения невыигрышного билета при покупке одного билета?

99 В коробке лежат 5 белых и 7 чёрных шаров. Наугад вынимают 3 шара. Найти вероятность того, что среди них окажется по крайней мере один: 1) белый шар; 2) чёрный шар.

100 В коробке лежат 6 белых и 5 красных шаров. Наугад вынимают 4 шара. Найти вероятность того, что среди них окажется по крайней мере один: 1) белый шар; 2) красный шар.

101 Известно, что среди 100 деталей 5 бракованных. Наугад выбирают 4 детали. Найти вероятность того, что среди них окажется: 1) хотя бы одна бракованная деталь; 2) хотя бы одна не бракованная деталь.

102 В студенческой группе 24 человека, среди которых только 6 девушек. Случайным образом из числа всех студентов выбирают троих на профсоюзную конференцию. Найти вероятность того, что среди них окажется: 1) по крайней мере одна девушка; 2) по крайней мере один юноша.

§ 10 Независимые события. Умножение вероятностей

Предположим, что из колоды в 36 карт извлекается одна карта и рассматриваются: событие A — извлечена карта трефовой масти, событие B — извлечена дама треф. Между событиями A и B очевидно наличие какой-то *зависимости*. Действительно, из 9 случаев, благоприятствующих событию A, событию B благоприятствует один; поэтому при наступлении события A вероятность события B равна $\frac{1}{9}$. Но при отсутствии информации о наступлении события A вероятность события B оценивается как равная $\frac{1}{36}$. Так как $\frac{1}{9} > \frac{1}{36}$, то очевидно, что наступление события A повышает шансы события B.

Существуют, однако, пары событий, для которых факт зависимости вероятности наступления одного из них от наступления другого не очевиден.

Определение. События A и B называют *независимыми*, если выполняется равенство

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B). \tag{1}$$

Рассмотрим опыт с бросанием двух игральных костей и исследуем два события: A — на первой кости выпало 5 очков, B — на второй кости выпало 5 очков. Выясним, будут ли события A и B независимыми.

● Появление любого числа очков на первой кости (в частности, наступление события A) не влияет на событие B и на его вероятность. И наоборот, наступление или не наступление события B не влияет на вероятность события A. Таким образом, $P(A) = \frac{1}{6}$ и $P(B) = \frac{1}{6}$.

Событие AB состоит в совместном наступлении событий A и B. Элементарные исходы испытания — это пары чисел, в которых на первом месте стоит число очков первой кости, на втором — число очков второй кости. Всего элементарных исходов испытания $n = 36$. Среди них присутствует лишь одна пара (5 и 5 очков), благоприятствующая событию AB, т. е. $m = 1$.

Таким образом, $P(AB)=\frac{1}{36}=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=P(A)\cdot P(B)$, т. е. события A и B независимые. ○

Часто о независимости событий удается судить не на основании формулы (1), а на основании того, как организован опыт, в котором они происходят. Независимые события появляются тогда, когда опыт состоит из нескольких *независимых испытаний* (как, например, было в рассмотренном опыте с бросанием двух игральных костей).

Если независимость испытаний не очевидна, то независимость событий A и B проверяется с помощью формулы (1).

Задача 1 Выяснить, являются ли события A и B независимыми, если:

1) $P(A)=0{,}2$, $P(B)=0{,}5$, $P(AB)=0{,}1$;

2) $P(A)=\frac{1}{6}$, $P(B)=\frac{2}{3}$, $P(AB)=\frac{2}{9}$.

▶ 1) Так как $P(A)\cdot P(B)=0{,}2\cdot 0{,}5=0{,}1=P(AB)$, то события A и B являются независимыми.

2) Так как $P(A)\cdot P(B)=\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{9}\neq\frac{2}{9}=P(AB)$, то события A и B не являются независимыми. ◁

Задача 2 Пусть наугад называется одно из первых десяти натуральных чисел и рассматриваются события: A — названо чётное число, B — названо число, кратное пяти. Выяснить являются ли события A и B независимыми.

▶ Среди десяти чисел 1, 2, 3, ..., 9, 10 чётных чисел 5, а кратных пяти — 2, поэтому $P(A)=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$, $P(B)=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$. Событие AB состоит в названии числа, кратного как числу 2, так и числу 5, т. е. числу 10. Среди первых десяти натуральных чисел таким является одно число 10, поэтому $P(AB)=\frac{1}{10}$. Так как $P(A)\cdot P(B)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{10}=P(AB)$, то события A и B являются независимыми. ◁

Задача 3 За офисом наблюдают две независимые друг от друга видеокамеры. Вероятность того, что в течение суток первая видеокамера выйдет из строя, равна 0,001, а вероятность того, что выйдет из строя вторая, равна 0,0005. Найти вероятность того, что в течение суток выйдут из строя обе видеокамеры.

▶ Пусть событие A — выход из строя в течение рассматриваемых суток первой видеокамеры, B — выход из строя в течение тех же суток второй камеры. Согласно условию задачи $P(A) = 0{,}001 = 10^{-3}$, $P(B) = 0{,}0005 = 5 \cdot 10^{-4}$. Событие AB — выход из строя в течение суток обеих видеокамер. Считая события A и B независимыми, находим

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B) = 10^{-3} \cdot 5 \cdot 10^{-4} = 5 \cdot 10^{-7}.$$

Ответ $5 \cdot 10^{-7}$. ◁

Задача 4 Вероятность попадания в цель при одном выстреле первым орудием равна 0,8, а вторым орудием — 0,7. Найти вероятность попадания в цель хотя бы одним орудием, после того как они оба, стреляя по цели, сделали по одному выстрелу.

Пусть событие A — попадание в цель хотя бы одним орудием, а противоположное ему событие $\overline{A}$ наступает при промахе как первого, так и второго орудия. Вероятность промаха первого орудия равна $1 - 0{,}8 = 0{,}2$, а вероятность промаха второго равна $1 - 0{,}7 = 0{,}3$. Считая промахи орудий при стрельбе по цели независимыми событиями, находим $P\left(\overline{A}\right) = 0{,}2 \cdot 0{,}3 = 0{,}06$, значит, $P(A) = 1 - P\left(\overline{A}\right) = 1 - 0{,}06 = 0{,}94$.

Ответ 0,94. ◁

Упражнения

103 Выяснить, являются ли события A и B независимыми, если:

1) $P(A) = \frac{2}{5}$, $P(B) = \frac{10}{13}$, $P(AB) = \frac{4}{13}$;

2) $P(A) = 0{,}75$, $P(B) = 0{,}2$, $P(AB) = 0{,}15$;

3) $P(A) = 0{,}3$, $P(B) = 0{,}2$, $P(AB) = 0{,}6$;

4) $P(A) = \frac{3}{14}$, $P(B) = \frac{7}{12}$, $P(AB) = \frac{1}{4}$.

104 Наугад называется: 1) одно из первых двенадцати натуральных чисел; 2) одно из первых тринадцати натуральных чисел. Рассматриваются события: A — названное число является чётным, B — названное число кратно трём. Установить, являются ли события A и B независимыми.

105 Бросаются две игральные кости и рассматриваются события: 1) A — на первой кости выпало число 6, B — на второй кости выпало чётное число; 2) A — на первой кости выпало нечётное число, B — на второй кости выпало число, кратное 3. Убедиться с помощью формулы (1) в независимости событий A и B.

106 Вероятность выигрыша на некоторой бирже в течение каждого из двух фиксированных дней равна 0,3. Найти вероятность того, что на этой бирже: 1) выигрыши произойдут в каждый из этих двух дней; 2) два этих дня не будет выигрышей; 3) выигрыши произойдут хотя бы в один из двух фиксированных дней.

107 Для сигнализации об угоне установлены два независимых датчика. Вероятность того, что при угоне сработает первый датчик, равна 0,97, что сработает второй, равна 0,95. Найти вероятность того, что при угоне: 1) сработают оба датчика; 2) оба датчика не сработают; 3) сработает хотя бы один из датчиков; 4) хотя бы один из датчиков не сработает.

108 В первой партии из 20 деталей 6 нестандартных, а во второй партии из 30 деталей 5 нестандартных. Наугад из каждой партии изымают по одной детали. Найти вероятность того, что: 1) обе детали оказались нестандартными; 2) обе детали оказались стандартными; 3) хотя бы одна деталь оказалась стандартной; 4) хотя бы одна деталь оказалась нестандартной.

109 В первой коробке находятся 7 белых и 3 чёрных шара, а во второй — 5 белых и 9 чёрных. Не глядя из каждой коробки вынимают по одному шару. Найти вероятность того, что: 1) оба вынутых шара белые; 2) оба вынутых шара чёрные; 3) хотя бы один шар белый; 4) хотя бы один шар чёрный.

110 Вероятность того, что цель будет поражена хотя бы одним из двух выстрелов, равна 0,96. Полагая, что каждый раз вероятность поражения цели при одном выстреле одна и та же, найти эту вероятность.

111 Вероятность P того, что при измерении прибором некоторой физической величины будет допущена ошибка, превышающая заданную точность, постоянна. Вероятность того, что ошибка будет допущена этим прибором хотя бы один раз из двух измерений, равна $\frac{32}{81}$. Найти P.

112 Вероятность попадания по мишени при одном выстреле некоторым стрелком равна 0,8. Найти вероятность попадания по мишени этим стрелком: 1) в каждом из трёх выстрелов; 2) хотя бы одним из трёх выстрелов.

113 Имеются 3 партии деталей. Вероятность того, что вынутая из первой партии деталь окажется бракованной, равна 0,1. Вероятность того, что бракованной будет вынутая из второй партии деталь, равна 0,2. Вероятность того, что бракованной будет вынутая из третьей партии деталь, равна 0,3. Случайным образом из каждой партии изымают по одной детали. Найти вероятность того, что: 1) все 3 детали окажутся бракованными; 2) все 3 детали окажутся не бракованными; 3) хотя бы одна деталь окажется не бракованной; 4) хотя бы одна деталь окажется бракованной.

§ 11 Статистическая вероятность

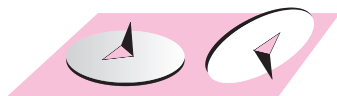

Рис. 4

Определение вероятности, сформулированное в § 8, называется *классическим определением вероятности*. Оно применяется, когда теоретически удаётся выявить все элементарные равновозможные исходы испытания и определить благоприятствующие исследуемому событию исходы. В этом случае число элементарных исходов испытания конечно и выражается конкретным числом. Однако на практике — при изучении случайных явлений в естествознании, экономике, медицине, производстве — часто встречаются испытания, число возможных исходов которых необозримо велико. А в ряде случаев до проведения реальных испытаний трудно или невозможно установить равновозможность исходов испытания. Например, до многократного подбрасывания кнопки (рис. 4) трудно представить, равновозможны ли её падения «на плоскость» и «на остриё». Поэтому наряду с классическим на практике используется и так называемое *статистическое определение вероятности*. Для знакомства с ним требуется ввести понятие *относительной частоты*.

Определение 1. *Относительной частотой* события A в данной серии испытаний называют отношение числа испытаний M, в которых это событие произошло, к числу всех проведённых испытаний N. При этом число M называют *частотой* события A.

Относительную частоту события A обозначают $W(A)$, поэтому по определению

$$\boldsymbol{W(A)=\frac{M}{N}}. \quad (1)$$

Задача 1 Во время стрельбы по мишени было сделано 25 выстрелов и зарегистрировано 15 попаданий. Какова относительная частота попадания по мишени в данной серии выстрелов?

▶ Событие A — попадание по мишени, произошло в 15 случаях, т. е. $M = 15$. Общее число испытаний (выстрелов) $N = 25$. По формуле (1) имеем $W(A) = \frac{M}{N} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5} = 0{,}6$.

Ответ 0,6. ◁

Если проводить реальное испытание с подбрасыванием монеты и наблюдать за относительной частотой появления, например орла, в каждой серии испытаний, то можно заметить следующий факт: чем больше проводится испытаний, тем всё меньше относительная частота появления орла отличается от 0,5, т. е. от значения вероятности этого события в классическом понимании.

Этот факт подтверждают и дошедшие до нас исторические сведения.

Известно, что в XVIII в. французский естествоиспытатель Жорж Луи Леклерк де Бюффон (1707—1788) провёл 4040 испытаний с подбрасыванием монеты. В результате чего наблюдал появление орла 2048 раз. Таким образом, Бюффон получил относительную частоту появления орла, равную $\frac{2048}{4040} \approx 0{,}5069$. В начале XX в. английский учёный Карл Пирсон (1857—1936) провёл с помощью своих учеников 24 000 аналогичных испытаний и наблюдал 12 012 появлений орла. Относительная частота события у Пирсона оказалась равной $\frac{12012}{24000} \approx 0{,}5005$.

Определение 2. *Статистической вероятностью* называют число, около которого колеблется относительная частота события при большом числе испытаний

Различные исследования с большим числом однотипных испытаний проводили учёные в разные годы. Наблюдая за уменьшением амплитуды колебания относительных частот события около некоторого числа при увеличении количества испытаний, швейцарский математик Якоб Бернулли (1654—1705) обосновал так называемый *закон больших чисел*:

Можно считать достоверным тот факт, что при любой большой серии испытаний относительная частота события A стремится к некоторому числу — вероятности этого события. Таким образом, $W(A) \approx P(A)$ при большом числе испытаний.

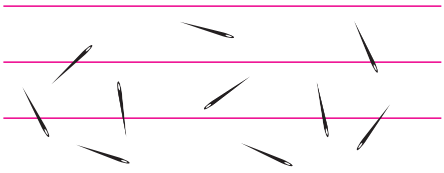
Рис. 5

Проиллюстрируем ещё одним примером сформулированный закон больших чисел.

На листе начерчены параллельные линии, расстояния между которыми равны длине некоторой иглы (рис. 5). Эта игла 100 раз бросается на расчерченный лист, и случаи её пересечения с любой из линий подсчитываются во втором столбце таблицы, где N — число бросаний, M — частота пересечения иглой линии, $\frac{M}{N}$ — относительная частота события в серии из N испытаний, подсчитанная с точностью до десятитысячных.

N	M	$W = \frac{M}{N}$
10	6	0,6
20	14	0,7
30	19	0,6333
40	26	0,65
50	33	0,66
60	40	0,6667
70	46	0,6571
80	54	0,675
90	59	0,6556
100	66	0,66

По результатам 100 бросков можно предположить, что значения дроби $\frac{M}{N}$ колеблются около числа $\frac{2}{3} \approx 0{,}6667$. Действительно ли вероятность рассматриваемого события равна $\frac{2}{3}$? При увеличении числа испытаний было обнаружено, что относительная частота этого события стабилизируется около числа, чуть меньшего, чем $\frac{2}{3}$. На основании понятия геометрической вероятности Бюффон доказал, что вероятность этого события равна $\frac{2}{\pi}$.

Упражнения

114 В изготовленной партии из 10 000 деталей обнаружено: 1) 350; 2) 220 бракованных деталей. Найти относительную частоту появления в данной партии бракованной детали. Результат выразить в процентах.

115 Заполнить последний столбец таблицы (с точностью до тысячных):

№ п/п	Испытание	Число испытаний (N)	Наблюдаемое событие	Частота события (M)	Относительная частота события $\left(W = \frac{M}{N}\right)$
1	Брошена монета	200	Выпала решка	98	
2	Брошен игральный кубик	300	Выпало число 4	53	
3	Спортсмен стреляет по мишени	100	Попадание по мишени	93	
4	Брошен игральный тетраэдр (с гранями, пронумерованными числами 1, 2, 3, 4)	200	Выпало число 3	49	

116 Проводились серии из N испытаний с подбрасыванием некоторой правильной треугольной призмы, сделанной из стали. Результаты заносились в таблицу:

Число испытаний (N)	10	50	100	300	500	1000
Частота падения призмы на любую боковую грань (M)	8	34	73	206	353	698
Относительная частота падения призмы на боковую грань (W)						

Заполнить последнюю строку таблицы, округляя результаты вычислений до сотых. Высказать предположение о приближённом значении (с точностью до одной десятой) вероятности события A — падение призмы на боковую грань.

117 Провести серии из N испытаний (где $N_1 = 10$, $N_2 = 20$, $N_3 = 40$, $N_4 = 50$) с подбрасыванием игрального кубика, наблюдая за частотой появления числа 1. Убедиться в том, что относительная частота события A — появление числа 1 с увеличением N всё меньше отличается от числа $\frac{1}{6}$ (значения вероятности этого события в классическом понимании).

Упражнения к главе II

118 (Устно.) Перечислить все элементарные события, которые могут произойти в результате следующего испытания: 1) наугад называется день недели; 2) перекидной календарь на апрель месяц открывается наугад и читается записанное на листе число; 3) на пол роняется тонкий бутерброд и определяется — на какую сторону он упадёт; 4) бросают на пол 2 монеты и наблюдают выпавшие стороны; 5) на пол бросают 3 монеты и наблюдают выпавшие стороны; 6) по мишени по одному разу стреляют 3 стрелка; наблюдается попадание (П) или непопадание (Н) по мишени каждым из них; 7) из пункта A пешеход может попасть в пункт C по одной из трёх дорог (на рисунке 6 дороги проходят либо по сторонам прямоугольника $ABCD$, либо по его диагонали AC); оцениваются длины маршрутов в каждом испытании. Высказать предположение о равновозможности перечисленных элементарных событий.

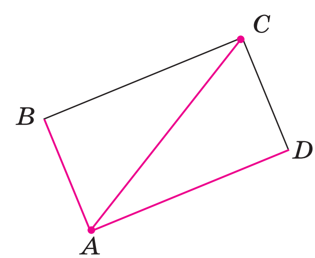

Рис. 6

119 (Устно.) Назвать события $A + B$ и AB, если: 1) из полного набора домино извлекается одна костяшка, событие A — вынута костяшка «два — два», событие B — вынут дубль; 2) из колоды карт в 36 листов извлекается одна карта, событие A — вынута карта с картинкой; событие B — вынут король.

120 Двенадцать карточек пронумерованы натуральными числами от 1 до 12. Случайным образом выбирается одна карточка. Рассматриваются события: 1) A — на карточке записан делитель числа 12, B — записано число, кратное 12; 2) A — на карточке делитель числа 6,

B — на карточке число, кратное 6; 3) A — на карточке число, меньшее 10, B — на карточке число, большее 5; 4) A — на карточке число, большее 7, B — на карточке число, меньшее 9; 5) A — на карточке число, кратное 2, B — на карточке число, кратное 4; 6) A — на карточке число, кратное 3, B — на карточке число, кратное 6. Установить, в чём состоят события $A + B$ и AB.

121 (Устно.) Установить событие, являющееся противоположным событию: 1) выпало число 4 в результате броска игрального тетраэдра; 2) выпало число, кратное 5, в результате броска игрального кубика; 3) хотя бы на одном из кубиков выпало чётное число в результате бросания двух игральных кубиков; 4) хотя бы на одном из двух брошенных игральных тетраэдров появилось число 1; 5) брошенная на шахматную доску шашка имеет с клеткой «f2» хотя бы одну общую точку; 6) брошенная на шахматную доску шашка целиком легла на чёрную клетку.

122 События A и B изображены с помощью кругов Эйлера (рис. 7). Большим кругом изображены все элементарные исходы испытания, с которым связаны события A и B. Перенести рисунок в тетрадь и штриховкой показать событие, состоящее в том, что: 1) произошли оба события A и B; 2) произошло или событие A, или событие B; 3) произошло только событие A; 4) произошло событие $\bar{B}$.

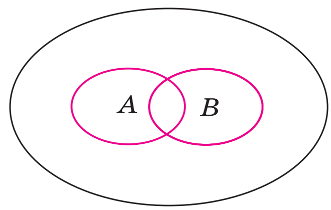

Рис. 7

123 Брошена игральная кость. Найти вероятность события: 1) выпало число, не меньшее 2; 2) выпало число, меньшее 3; 3) выпало число, большее 4; 4) выпало число, не большее 5.

124 В коробке находятся 2 белых, 5 чёрных и один синий шар. Наугад вынимают один из них. Найти вероятность события: 1) вынут белый шар; 2) вынут чёрный шар; 3) вынут синий шар; 4) вынут или белый, или чёрный шар; 5) вынут не чёрный шар; 6) вынут не белый шар.

125 Из колоды карт в 36 листов наугад вынимается одна карта. Найти вероятность того, что эта карта: 1) дама красной масти; 2) шестёрка чёрной масти; 3) семёрка; 4) девятка; 5) с картинкой; 6) не с картинкой; 7) или король, или шестёрка; 8) или семёрка, или туз червей; 9) не король бубен; 10) не валет.

126 Вероятность выигрыша по одному лотерейному билету в некоторой лотерее равна: 1) $2 \cdot 10^{-4}$; 2) $3 \cdot 10^{-5}$. Какова вероятность приобретения невыигрышного билета при покупке одного билета?

127 Установить, являются ли события A и B независимыми, если: 1) $P(A) = 0{,}75$, $P(B) = 0{,}4$, $P(AB) = 0{,}3$; 2) $P(A) = 10^{-3}$, $P(B) = 10^{-2}$, $P(AB) = 10^{-6}$.

128 Наугад называется одно из первых: 1) девятнадцати натуральных чисел; 2) двадцати натуральных чисел; рассматриваются события: A — названо число, кратное 4, B — названо число, кратное 5. Выяснить, являются ли события A и B независимыми.

129 Два стрелка независимо друг от друга стреляют по мишени. Вероятность попадания по мишени у первого стрелка равна 0,65, у второго равна 0,8. Найти вероятность того, что: 1) оба стрелка попадут по мишени; 2) хотя бы один из стрелков попадёт по мишени; 3) оба стрелка промахнутся; 4) хотя бы один промахнётся.

130 Вероятность того, что лампочка в люстре перегорит в течение года, равна 0,3. Считая, что каждая из двух таких лампочек в люстре перегорает независимо от другой, найти вероятность события: 1) в течение года перегорят обе лампочки; 2) в течение года не перегорит ни одна из лампочек; 3) в течение года перегорит хотя бы одна лампочка; 4) в течение года не перегорит хотя бы одна лампочка.

131 Заполнить последний столбец таблицы, округляя результаты вычислений с точностью до тысячных.

№ п/п	Испытание	Число испытаний	Наблюдаемое событие	Частота события	Относительная частота события
1	Брошены два игральных кубика	400	Сумма выпавших чисел равна 2	11	
2	Брошены два игральных кубика	200	Сумма выпавших чисел равна 3	11	
3	Спортсмен стреляет по мишени	300	Попадание по мишени	284	
4	Из колоды карт извлекается одна карта	200	Извлечён туз	23	

Проверь себя!

1 Наугад называется одно из первых восемнадцати чисел. Событие A — названо чётное число, событие B — названо число, кратное 3. Перечислить элементарные исходы испытания, благоприятствующие событию: 1) $A + B$; 2) AB; 3) $\bar{A}$; 4) $\bar{B}$.

2 Брошены 2 игральных кубика. Какова вероятность того, что на первом кубике выпало число 4, а на втором — нечётное число?

3 Вероятность попадания по цели при одном выстреле у первого орудия равна 0,6, у второго — 0,7. Найти вероятность того, что по цели попадёт хотя бы одно орудие после того, как оба сделают по одному выстрелу.

132 С помощью штриховки (см. рис. 7) проиллюстрировать событие: 1) $\overline{A+B}$; 2) $\overline{AB}$, если большой круг на рисунке изображает все элементарные события испытания, с которым связаны события A и B (эти события проиллюстрированы малыми кругами).

133 Бросают 3 монеты и определяют выпавшие стороны. Перечислить все элементарные исходы, благоприятствующие событию: 1) хотя бы на одной монете появилась решка; 2) хотя бы на двух монетах появилась решка.

134 Бросают 3 монеты и наблюдают за выпавшими сторонами. Перечислить все элементарные исходы, благоприятствующие событию $\bar{A}$, если событие A состоит в следующем: 1) только на одной монете появился орёл; 2) хотя бы на одной монете появился орёл.

135 Бросают две игральные кости. Найти вероятность события: 1) произведение появившихся чисел равно 6; 2) произведение появившихся чисел равно 4; 3) сумма выпавших чисел равна 4; 4) сумма выпавших чисел равна 5; 5) сумма выпавших чисел больше 9; 6) сумма выпавших чисел не больше 5.

136 В коробке лежат 5 белых и 6 чёрных шаров. Наугад вынимают 2 шара. Найти вероятность события: 1) оба шара белого цвета; 2) оба шара чёрного цвета; 3) один шар белый, другой чёрный; 4) по крайней мере один шар белый; 5) по крайней мере один шар чёрный.

137 В коробке лежат 6 белых и 7 чёрных шаров. Наугад вынимают 2 шара. Найти вероятность события: 1) оба шара белые; 2) оба шара чёрные; 3) один шар белый, другой чёрный; 4) по крайней мере один шар белый; 5) по крайней мере один шар чёрный.

138 В коробке лежат 5 белых и 7 чёрных шаров. Наугад вынимают 3 шара. Найти вероятность того, что: 1) все шары белые; 2) все шары чёрные; 3) один шар белый и 2 чёрных; 4) один шар чёрный и 2 белых.

139 Клавиатура компьютера имеет 105 клавиш. Найти вероятность того, что при случайном последовательном нажатии трёх клавиш будет написано слово: 1) *дом*; 2) *око*.

140 В первом ящике находятся 8 белых и 9 чёрных шаров, во втором — 6 белых и 5 чёрных. Наугад из каждого ящика выбирают по одному шару. Найти вероятность того, что: 1) оба шара оказались белыми; 2) оба шара оказались чёрными; 3) из первого ящика извлекли белый шар, а из второго — чёрный; 4) из первого ящика извлекли чёрный, а из второго — белый шар; 5) хотя бы один шар оказался белым; 6) хотя бы один шар оказался чёрным.

141 Два мальчика играют в игру *крестики-нолики* на поле 3×3. Первый случайным образом ставит в одну клетку крестик, второй случайным образом ставит нолик в одну из оставшихся 8 клеток. Найти вероятность того, что после этих ходов будут заняты заранее зафиксированные наблюдателем две клетки поля. Решить задачу двумя способами.

III
глава

Статистика

Цель математически оформленных теорий состоит не только в том, чтобы описать с помощью точных формул уже накопленные знания, но и в том, чтобы предсказать новые явления.

Б. В. Гнеденко

§ 12 Случайные величины

Статистика занимается сбором, представлением (в виде таблиц, диаграмм, графиков и др.) и анализом информации о различных случайных величинах.

Случайными величинами называют такие величины, которые в ходе наблюдений или испытаний могут принимать различные значения. Можно говорить о том, что их значения зависят от случая.

Например, сумма чисел (очков), выпадающая при бросании двух игральных костей, — случайная величина. Обозначим её X, тогда $X_1 = 2$, $X_2 = 3$, $X_3 = 4$, …, $X_{11} = 12$ — значения этой случайной величины. В таблице 1 указаны суммы выпавших чисел, а в таблице 2 показано распределение значений случайной величины X (суммы выпавших чисел) по их вероятностям P: каждой из сумм X_1, X_2, X_3, …, X_{11} поставлена в соответствие вероятность, с которой она может появиться в результате одного испытания (одного бросания двух игральных костей).

Например, сумма $X_2 = 3$ появляется в двух благоприятствующих случаях ($1 + 2$ и $2 + 1$) из 36 возможных, поэтому $P_2 = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$.

Таблица 1

I кость / II кость	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Таблица 2

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Для наглядности распределение значений случайной величины X, представленное в таблице 2, может быть изображено в виде, например, линейной или столбчатой диаграммы.

Заметим, что сумма вероятностей ΣP[1] всех значений величины X (записанных во второй строке таблицы 2) равна 1, как сумма вероятностей всех элементарных исходов испытания с нахождением суммы очков при одном бросании двух игральных костей (см. предыдущую главу).

Таблицы распределения значений случайной величины, аналогичные таблице 2, составляются по результатам теоретических расчётов вероятностей. На практике часто после проведения реальных испытаний составляются таблицы распределения значений случайных величин по частотам (или по относительным частотам), после чего для большей наглядности распределение данных представляют либо в виде диаграммы, либо в виде *полигона частот* (полигона относительных частот).

[1] Знак Σ, введённый Л. Эйлером, используется для записи суммы значений некоторой величины (в данном случае — суммы всех значений вероятности P).

Задача 1 Имеются результаты 20 измерений диаметра d болта (в миллиметрах с точностью до 0,1):

10,1; 10,0; 10,2; 10,1; 9,8; 9,9; 10,0;
10,0; 10,2; 10,0;
10,0; 9,9; 10,0; 10,1; 10,0;
9,9; 10,0; 10,1; 10,1; 10,0.

Представить эти данные с помощью: 1) таблиц распределения по частотам M и относительным частотам W; 2) полигона частот.

▶ 1) Имеющиеся данные (значения случайной величины d) представим в виде таблицы 3 распределения по частотам и относительным частотам:

Таблица 3

d	9,8	9,9	10,0	10,1	10,2
M	1	3	9	5	2
$W = \frac{M}{N}$	0,05	0,15	0,45	0,25	0,1

Отметим, что $\Sigma M = N = 20$, $\Sigma W = 1$.

2) На рисунке 8 представлено распределение значений d в виде полигона частот. ◁

Рассмотренные в этом параграфе случайные величины принимали изолированные друг от друга значения. Такие величи-

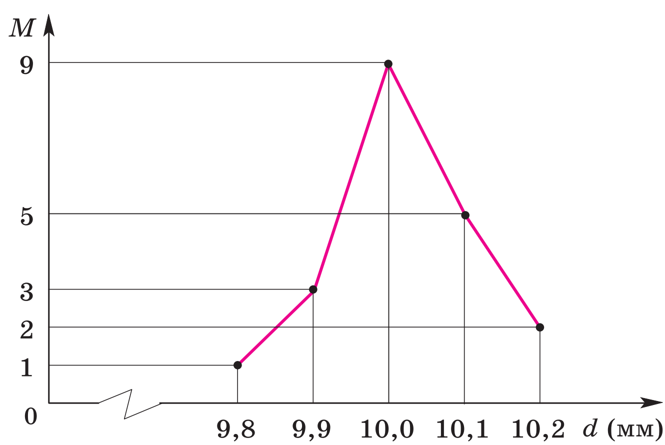

Рис. 8

ны называют *дискретными* (от лат. *discretus* — раздельный, прерывистый).

Если случайная величина может принимать любое значение из некоторого промежутка, то такая величина называется *непрерывной*. Например, время T ожидания автобуса на остановке, когда пассажир приходит на остановку случайным образом, а автобусы ходят с интервалом 10 мин, есть непрерывная случайная величина, принимающая любое числовое значение $T \in [0; 10]$.

Очевидно, число возможных значений непрерывной случайной величины бесконечно. Однако существует способ, с помощью которого можно задать распределение и непрерывной случайной величины. Для этого промежуток значений величины разбивают на части (обычно — на равные) и считают частоты (или вероятности) попадания значений случайной величины в каждую из них.

Рассмотрим п р и м е р. Пусть время горения T (в часах) электрической лампочки некоторого вида $T \in [0; 1000]$. Тогда промежуток [0; 1000] можно разделить, к примеру, на 5 одинаковых по длине промежутков и результаты горения каждой из 100 экспериментальных лампочек занести в частотную таблицу 4:

Таблица 4

T	[0; 200)	[200; 400)	[400; 600)	[600; 800)	[800; 1000]
M	1	3	10	18	68

Отметим, что $\Sigma M = N = 100$.

Данные этой таблицы можно представить с помощью так называемой *гистограммы частот* — ступенчатой фигуры (рис. 174).

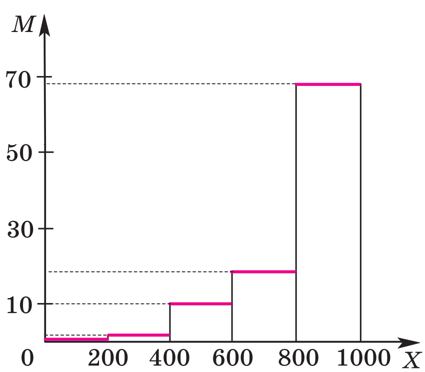

Рис. 9

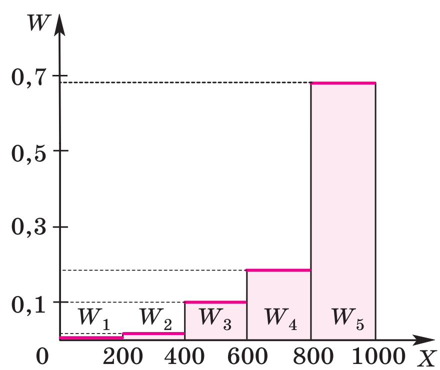

Рис. 10

Если по данным таблицы 4 заполнить таблицу 5 относительных частот, то построенную на её основе ступенчатую фигуру называют *гистограммой относительных частот* (рис. 10).

Таблица 5

X	[0; 200)	[200; 400)	[400; 600)	[600; 800)	[800; 1000]
W	0,01	0,03	0,1	0,18	0,68

Упражнения

142 Составить таблицу распределения по вероятностям P значений случайной величины X — числа очков, появившихся при бросании игрального кубика: 1) на двух гранях которого отмечены 3 очка, на одной — 4 очка, на трёх — 5 очков; 2) на одной грани которого отмечено 2 очка, на другой — 3 очка, на двух гранях — по 4 очка и на оставшихся двух — по 5 очков.

143 Составить таблицу распределения по вероятностям P значений случайной величины X — суммы чисел, появившихся при бросании двух игральных тетраэдров, грани которых пронумерованы натуральными числами от 1 до 4.

144 На стол бросают обыкновенный игральный кубик и игральный октаэдр, грани которого пронумерованы числами от 1 до 8. Составить таблицу распределения значений случайной величины X — суммы выпавших чисел по их вероятностям P.

145 Составить таблицу распределения по частотам M значений случайной величины X — цифр, встречающихся в выборке следующих телефонных номеров:

1) 3965184, 6542913, 7902914, 2878858;
2) 1316573, 4336582, 2983412, 3941009.

146 Построить полигон частот и полигон относительных частот значений случайной величины X, распределение которой представлено в таблице:

1)

X	5	6	7	8	9
M	2	3	6	4	1

2)

X	12	13	14	15	16	17
M	4	5	7	6	4	3

147 В таблице записаны результаты 20 взвешиваний (с точностью до 1 г) одной и той же стальной отливки:

99	97	101	100	99	102	100	102	98	101
100	98	100	98	101	97	101	100	100	99

Составить таблицы распределения по частотам (M) и относительным частотам (W), а также полигон частот значений случайной величины X — результата определения массы стальной отливки.

148 Составить таблицы распределения по частотам (M) и относительным частотам (W), а также полигон частот значений случайной величины Y — ростов 30 девушек спортивной секции гимнастики, приведённых (с точностью до 1 см) в таблице:

160	163	161	162	165	163	166	159	164	165
163	159	164	158	164	162	165	163	166	162
162	164	161	165	163	164	161	166	160	163

149 Сроки службы T приборов некоторого вида (в часах) попадают в промежуток [0; 2500]. Результаты проверки сроков работы 200 приборов этого вида отражены в частотной таблице:

T	[0; 500)	[500; 1000)	[1000; 1500)	[1500; 2000)	[2000; 2500]
M	5	10	15	20	150

Проиллюстрировать распределение этих данных с помощью гистограммы частот.

150 Значения роста H у 100 жителей дома (в сантиметрах) попадают в промежуток [50; 190]. Распределение значений непрерывной случайной величины H отражено в частотной таблице:

H	[50; 70)	[70; 90)	[90; 110)	[110; 130)	[130; 150)	[150; 170)	[170; 190]
M	5	8	10	12	15	30	20

Проиллюстрировать распределение этих данных с помощью гистограммы относительных частот.

§ 13 Центральные тенденции

Однотипные объекты можно сравнивать по общим параметрам, присущим этим объектам. Например, российские монеты можно сравнивать по номиналу, весу, диаметру; юношей одного класса можно сравнивать по возрасту, весу, росту и др. Каждый из названных параметров может принимать определённые числовые значения.

В статистике исследуют различные совокупности данных — числовых значений случайных величин с учётом частот, с которыми они встречаются в совокупности. При этом совокупность всех данных называют *генеральной совокупностью*, а любую выбранную из неё часть — *выборкой*. В статистических исследованиях выборку называют *репрезентативной* (от фр. *representative* — представительный), если в ней присутствуют те и только те значения случайной величины, что и в генеральной совокупности, причём частоты имеющихся в ней данных находятся практически в тех же отношениях, что и в генеральной совокупности.

Рассмотрим пример. Пусть некоторая случайная величина X имеет распределение своих значений по частотам M, представленное в таблице 6,

Таблица 6

X	–1	2	6	8
M	200	500	700	300

и пусть совокупность всех значений этой величины принята за генеральную совокупность. Тогда выборку из этой совокупности, распределение которой представлено в таблице 7, следует считать репрезентативной, так как $200 : 500 : 700 : 300 = 2 : 5 : 7 : 3$ и в выборке присутствуют те и только те значения X, которые присутствуют в генеральной совокупности. Выборки же, представленные в таблицах 8 и 9, не являются репрезентативными.

Таблица 7

X	–1	2	6	8
M	2	5	7	3

Таблица 8

X	–1	2	8
M	2	5	3

Таблица 9

X	–1	2	6	8
M	2	9	7	3

Совокупность данных иногда бывает полезно охарактеризовать (оценить) одним числом — *мерой центральной тенденции* числовых значений её элементов. К таким характеристикам относятся мода, медиана и среднее.

Мода (обозначаают Mo) — это значение случайной величины, имеющее наибольшую частоту в рассматриваемой выборке.

Например, мода выборки 7, 6, 2, 5, 6, 1 равна 6; выборка 2, 3, 8, 2, 8, 5 имеет две моды: $Mo_1 = 2$, $Mo_2 = 8$.

Медиана (обозначают Me) — это число (значение случайной величины), разделяющее упорядоченную выборку на две равные по количеству данных части. Если в упорядоченной выборке нечётное количество данных, то медиана равна серединному из них. Если в упорядоченной выборке чётное количество данных, то медиана равна среднему арифметическому двух серединных чисел.

Задача 1 Найти медиану выборки значений случайной величины: 1) 5, 9, 1, 4, 5, –2, 0; 2) 7, 4, 2, 3, 6, 1.

▶ 1) Расположим элементы выборки в порядке возрастания: –2, 0, 1, 4, 5, 5, 9. Количество данных нечётно. Слева и справа от числа 4 находятся по 3 элемента, т. е. 4 — серединное число выборки, поэтому $Me = 4$.

2) Упорядочим элементы выборки: 1, 2, 3, 4, 6, 7. Количество данных чётно. Серединные данные выборки: 3 и 4, поэтому $Me = \frac{3+4}{2} = 3{,}5$.

Ответ 1) 4; 2) 3,5. ◁

Среднее (или *среднее арифметическое*) выборки — это число, равное отношению суммы всех чисел выборки к их количеству. Если рассматривается совокупность значений случайной величины X, то её среднее обозначают $\bar{X}$.

Задача 2 Найти среднее выборки значений случайной величины X, распределение которых по частотам представлено в таблице 10.

Таблица 10

X	2	3	4	8	10
M	1	2	3	1	1

▶ $$\bar{X} = \frac{2\cdot 1 + 3\cdot 2 + 4\cdot 3 + 8\cdot 1 + 10\cdot 1}{1+2+3+1+1} = \frac{2+6+12+8+10}{8} =$$

$$= \frac{38}{8} = 4{,}75.$$

Ответ 4,75. ◁

Одной из наиболее распространённых характеристик выборки значений случайной величины, чьё распределение по вероятностям известно, является так называемое *математическое ожидание*.

Пусть распределение по вероятностям P значений некоторой случайной величины X задано таблицей 11.

Таблица 11

X	X_1	X_2	X_3	...	X_{n-1}	X_n
P	P_1	P_2	P_3	...	P_{n-1}	P_n

Тогда: число E, где

$$E = X_1P_1 + X_2P_2 + X_3P_3 + \ldots + X_{n-1}P_{n-1} + X_nP_n, \qquad (1)$$

называют *математическим ожиданием* случайной величины X.

Например, для случайной величины X — суммы чисел, выпавших при бросании двух игральных кубиков (её распределение представлено в таблице 2), можно найти её математическое ожидание:

$$E = 2\cdot\frac{1}{36} + 3\cdot\frac{2}{36} + 4\cdot\frac{3}{36} + 5\cdot\frac{4}{36} + 6\cdot\frac{5}{36} + 7\cdot\frac{6}{36} +$$

$$+ 8\cdot\frac{5}{36} + 9\cdot\frac{4}{36} + 10\cdot\frac{3}{36} + 11\cdot\frac{2}{36} + 12\cdot\frac{1}{36} =$$

$$= \frac{1}{36}(2+6+12+20+30+42+40+36+30+22+12) =$$

$$= \frac{1}{36}\cdot 252 = 7.$$

Понятие математического ожидания широко используется в теории игр.

Рассмотрим п р и м е р. Предположим, что в некоторой игре с двумя игроками первый игрок может выиграть $X_1, X_2, \ldots, X_k$ рублей (среди чисел $X_1, X_2, \ldots, X_k$ могут быть отрицательные и 0, а суммарный выигрыш обоих игроков всегда равен 0). При этом вероятность того, что первый игрок выиграет X_i рублей, равна P_i. Тогда средний выигрыш первого игрока будет равен $E = X_1P_1 + X_2P_2 + \ldots + X_kP_k$.

Игра называется *справедливой*, если $E = 0$, т. е. если $X_1P_1 + X_2P_2 + \ldots + X_kP_k = 0$. Игра называется *выгодной* (не выгодной) для первого игрока, если $E > 0$ ($E < 0$).

Упражнения

151 (Устно.) Распределение в генеральной совокупности значений случайной величины X отражено в таблице:

X	5	7	9	11	12
M	25	60	80	45	15

Установить выборку, являющуюся репрезентативной для заданной генеральной совокупности:

1)

X	5	7	9	11	12
M	5	12	16	9	5

2)

X	5	7	11	12
M	5	12	9	3

3)

X	5	7	9	11	12
M	5	12	16	9	3

4)

X	5	7	8	9	11	12
M	5	12	14	16	9	3

152 Найти моду выборки:

1) 4, 15, 6, 7, 3, 6, 8; 2) 18, 9, 5, 3, 7, 9, 1;

3) 1, 3, 5, 1, 4, 3, 2; 4) 6, 8, 5, 4, 8, 3, 6.

153 Найти медиану выборки:

1) 17, 12, 34, 18, 6; 2) 24, 15, 13, 20, 21;

3) 4, 1, 8, 9, 13, 10; 4) 15, 6, 12, 8, 9, 14.

154 Найти среднее значение выборки:

1) 24, –5, 13, –8; 2) 7, 16, –9, –2, 10;

3) 0,3, 0,8, 0,2, 0,5, 0,8, 0,2;

4) 1,3, 1,4, 1,3, 0,9, 0,9, 1,4.

155 Найти моду, медиану и среднее выборки:

1) 3, –2, 1, 0, 2, –1; 2) 7, 4, –1, 3, –3, 0.

156 Найти среднее арифметическое выборки значений случайной величины X, распределение которых по частотам представлено в таблице:

1)

X	–2	0	1	3
M	5	6	7	2

2)

X	–1	2	3
M	4	5	2

3)

X	–1	4	6
M	5	1	2

4)

X	–3	2	3	4
Y	4	3	2	1

157 Найти моду, медиану и среднее выборки значений случайной величины X:

1)

X	–3	–1	0	5
M	2	3	5	2

2)

X	–2	–1	0	1	3
M	1	3	2	4	1

158 Найти математическое ожидание значений случайной величины X, распределение которых по вероятностям представлено в таблице:

1)

X	–3	–1	1	3
P	$\frac{2}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$

2)

X	–1	0	1	2	3
P	$\frac{3}{14}$	$\frac{4}{14}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{14}$

§ 14 Меры разброса

Не каждую выборку имеет смысл оценивать с помощью центральных тенденций. Например, если исследуется выборка

$$800,\ 800,\ 3200,\ 46000 \qquad (1)$$

годовых доходов (в тысячах рублей) четверых человек, то очевидно, что ни мода (800), ни медиана (2000), ни среднее (12700) не могут выступать в роли единой объективной характеристики данной выборки. Это объясняется тем, что наименьшие значения выборки (1) существенно отличаются от наибольшего — разность наибольшего и наименьшего значений соизмерима с наибольшим значением.

Определение. Разность наибольшего и наименьшего значений случайной величины выборки называется её *размахом* и обозначается R.

Так, для выборки (1) размах $R = 46000 - 800 = 45200$.

Размах показывает, как велик разброс значений случайной величины в выборке. Однако, зная только размах выборки, невозможно охарактеризовать отличие её элементов друг от друга, отличие каждого элемента от среднего значения. Возникает вопрос: как сравнить, например, две выборки, имеющие одинаковые размахи и одинаковые средние значения? Рассмотрим реальную ситуацию на примере.

На место токаря претендуют двое рабочих. Для каждого из них установили испытательный срок, в течение которого они должны были изготавливать одинаковые детали. Результаты работы претендентов представлены в таблице 12.

Каждый из рабочих за 5 дней изготовил 250 деталей, значит, средняя производительность труда за день у обоих рабочих одинаковая:

$$\bar{X} = \bar{Y} = \frac{250}{5} = 50 \text{ (дет./день).}$$

Таблица 12

День недели	Дневная выработка	
	первого рабочего (X)	второго рабочего (Y)
Понедельник	52	61
Вторник	54	40
Среда	50	55
Четверг	48	50
Пятница	46	44
	$\Sigma X = 250$	$\Sigma Y = 250$

Моды у предложенных совокупностей отсутствуют, а медианы одинаковые (50 и 50). Кого же из этих рабочих предпочтительнее взять на работу? В данном случае в качестве критерия сравнения совокупностей может выступать *стабильность* производительности труда рабочего. Её можно оценивать с помощью отклонений от среднего значения элементов совокупности.

Определение. *Отклонением от среднего* называют разность между рассматриваемым значением случайной величины и средним значением выборки.

Например, если значение величины $X_1 = 52$, а значение среднего $\bar{X} = 50$, то отклонение X_1 от среднего будет равно $X_1 - \bar{X} = 52 - 50 = 2$.

Очевидно, отклонение от среднего может быть как положительным, так и отрицательным числом. Нетрудно показать, что *сумма отклонений всех значений выборки от среднего значения равна нулю*. Поэтому характеристикой стабильности элементов совокупности может служить *сумма квадратов отклонений от среднего*.

Из предложенной ниже таблицы 13 видно, что у второго рабочего сумма квадратов отклонений от среднего больше, чем у первого рабочего:

$$\Sigma (X - \bar{X})^2 < \Sigma (Y - \bar{Y})^2.$$

Таблица 13

День недели	Значение случайной величины		Отклонение от среднего $\bar{X} = \bar{Y} = 50$		Квадраты отклонений	
	X	Y	$X - \bar{X}$	$Y - \bar{Y}$	$(X - \bar{X})^2$	$(Y - \bar{Y})^2$
Понедельник	48	50	–2	0	4	0
Вторник	54	40	4	–10	16	100
Среда	50	55	0	5	0	25
Четверг	52	61	2	11	4	121
Пятница	46	44	–4	–6	16	36
Сумма	**250**	**250**	**0**	**0**	**40**	**282**

На практике это означает, что второй рабочий имеет нестабильную производительность труда: в какие-то дни работает не в полную силу, а в какие-то наверстывает упущенное, что всегда сказывается на качестве продукции. Очевидно, что работодатель предпочтёт взять на место токаря первого рабочего (у которого сумма квадратов отклонений от средней производительности меньше).

Если бы рабочие работали разное количество дней и производили в среднем за день одинаковое число деталей, то стабильность работы каждого из них можно было бы оценить по величине *среднего арифметического квадратов отклонений*.

Такая величина называется *дисперсией* (от лат. *dispersio* — рассеяние) и обозначается буквой D.

Для случайной величины X, принимающей N различных значений и имеющей среднее значение $\bar{X}$, дисперсия находится по формуле

$$D = \frac{(X_1 - \bar{X})^2 + (X_2 - \bar{X})^2 + \ldots + (X_N - \bar{X})^2}{N}. \quad (2)$$

Задача 1 Два токаря вытачивали одинаковые детали, причём первый трудился полную рабочую неделю, а второй по распоряжению начальника — 4 дня. Сведения об их дневной выработке представлены в таблице 14. Сравнить стабильность работы токарей.

Таблица 14

День недели	Дневная выработка	
	первого токаря (X)	второго токаря (Y)
Понедельник	53	52
Вторник	54	46
Среда	49	53
Четверг	48	49
Пятница	46	—

▶ Найдём средние значения выборок данных величин X и Y:

$$\bar{X} = \frac{53+54+49+48+46}{5} = \frac{250}{5} = 50,$$

$$\bar{Y} = \frac{52+46+53+49}{4} = \frac{200}{4} = 50.$$

Очевидно, $\bar{X} = \bar{Y}$.

С помощью таблицы 15 найдём суммы квадратов отклонений от средних всех значений величин X и Y.

Таблица 15

День недели	Значение случайной величины		Отклонение от среднего		Квадрат отклонения от среднего	
	X	Y	$X-50$	$Y-50$	$(X-50)^2$	$(Y-50)^2$
Понедельник	53	52	3	2	9	4
Вторник	54	46	4	–4	16	16
Среда	49	53	–1	3	1	9
Четверг	48	49	–2	–1	4	1
Пятница	46	—	–4	—	16	—
				Сумма:	46	30

$$D_X = \frac{46}{5} = 9{,}2, \text{ а } D_Y = \frac{30}{4} = 7{,}5, \text{ т. е. } D_X > D_Y.$$

Ответ Второй токарь работает стабильнее первого. ◁

Если значения $X_1, X_2, \ldots, X_k$ случайной величины X повторяются с частотами $M_1, M_2, \ldots, M_k$ соответственно, то дисперсию величины X можно вычислить по формуле

$$D = \frac{\left(X_1 - \bar{X}\right)^2 M_1 + \left(X_1 - \bar{X}\right)^2 M_2 + \ldots + \left(X_k - \bar{X}\right)^2 M_k}{M_1 + M_2 + \ldots + M_k}, \qquad (3)$$

где $\bar{X} = \dfrac{X_1 M_1 + X_2 M_2 + \ldots + X_k M_k}{M_1 + M_2 + \ldots + M_k}$.

Используя знак суммы Σ, формулу (3) можно записать компактнее:

$$D = \frac{\Sigma\left(\left(X - \bar{X}\right)^2 M\right)}{\Sigma M}, \text{ где } \bar{X} = \frac{\Sigma(XM)}{\Sigma M}.$$

Пусть величина X имеет некоторую размерность (например, сантиметры). Тогда её среднее значение $\bar{X}$ и отклонение от среднего $X - \bar{X}$ имеют ту же размерность, что и сама величина (в сантиметрах). Квадрат же отклонения $(X - \bar{X})^2$ и дисперсия D имеют размерности квадрата этой величины (в квадратных сантиметрах).

Для оценки степени отклонения от среднего значения удобно иметь дело с величиной той же размерности, что и сама величина X. С этой целью используют значения корня квадратного из дисперсии $\sqrt{D}$.

Определение. Корень квадратный из дисперсии называют средним квадратичным отклонением и обозначают σ, т. е. $\sigma = \sqrt{D}$.

Задача 2 Распределение по частотам значений величины X — числа забитых голов игроками футбольной команды за период соревнований показано в таблице 16. Найти среднее квадратичное отклонение от среднего значения числа всех забитых голов.

Таблица 16

X	0	1	2	3
M	4	2	3	1

▶ Результаты последовательных вычислений будем заносить в таблицу 17, при этом:

$$\Sigma M = 10,\ \bar{X} = \frac{\Sigma(X \cdot M)}{\Sigma M} = \frac{11}{10} = 1{,}1.$$

Таблица 17

X	0	1	2	3
M	4	2	3	1
$X-\bar{X}$	–1,1	–0,1	0,9	1,9
$(X-\bar{X})^2$	1,21	0,01	0,81	3,61
$(X-\bar{X})^2\cdot M$	4,84	0,02	2,43	3,61

$$D=\frac{\Sigma\left((X-\bar{X})^2\cdot M\right)}{\Sigma M}=\frac{4{,}84+0{,}02+2{,}43+3{,}61}{10}=$$

$$=\frac{10{,}9}{10}=1{,}09,$$

$$\sigma=\sqrt{D}=\sqrt{1{,}09}\approx 1{,}04.$$

Ответ $\sigma\approx 1{,}04$. ◁

Задача 3 Продавец обуви имеет возможность выбрать, в каком из двух мест (в точке A или точке B) ставить по рабочим дням торговую палатку. В первую очередь его интересует объём продаж, а во вторую — стабильность ежедневных продаж. Продавец провёл исследование: по рабочим дням в январе он торговал в точке A, а в феврале — в точке B. Результаты продаж фиксировались, после чего были составлены две таблицы распределения значений величины X_A и величины X_B — количества проданных за день пар обуви в точках A и B соответственно:

X_A	1	2	3	4	5
M_A	2	7	7	4	2

X_B	1	2	3	4	6
M_B	3	5	6	5	1

Какой торговой точке следует отдать предпочтение?

▶ Очевидно, в январе было 22 рабочих дня ($\Sigma M_A=22$), а в феврале было 20 рабочих дней ($\Sigma M_B=20$). Найдём величины среднесуточных продаж обуви в точках A и B:

$$\bar{X}_A=\frac{\Sigma(X_A\cdot M_A)}{\Sigma M_A}=\frac{1\cdot2+2\cdot7+3\cdot7+4\cdot4+5\cdot2}{22}=\frac{63}{22}\approx 2{,}86;$$

$$\bar{X}_B=\frac{\Sigma(X_B\cdot M_B)}{\Sigma M_B}=\frac{1\cdot3+2\cdot5+3\cdot6+4\cdot5+6\cdot1}{20}=\frac{57}{20}=2{,}85.$$

Средние значения суточных продаж оказались практически одинаковыми (примем $\bar{X}_A=\bar{X}_B=\bar{X}=2{,}9$), значит, предпочтение следует отдать точке с более стабильной торговлей. Для этого нужно сравнить средние квадратичные отклонения совокупностей значений X_A и X_B. Результаты вычислений будем заносить в таблицы:

X_A	1	2	3	4	5
M_A	2	7	7	4	2
$X_A - \bar{X}$	–1,9	–0,9	0,1	1,1	2,1
$(X_A - \bar{X})^2$	3,61	0,81	0,01	1,21	4,41
$(X_A - \bar{X})^2 \cdot M_A$	7,22	5,67	0,07	4,84	8,82

X_B	1	2	3	4	6
M_B	3	5	6	5	1
$X_B - \bar{X}$	–1,9	–0,9	0,1	1,1	3,1
$(X_B - \bar{X})^2$	3,61	0,81	0,01	1,21	9,61
$(X_B - \bar{X})^2 \cdot M_B$	10,83	4,05	0,06	6,05	9,61

$$D_A = \frac{\Sigma\left(\left(X_A - \bar{X}\right)^2 \cdot M_A\right)}{\Sigma M_A} = \frac{7{,}22 + 5{,}67 + 0{,}07 + 4{,}84 + 8{,}82}{22} =$$

$$= \frac{26{,}62}{22} = 1{,}21 \text{ (пар}^2\text{)},$$

$$\sigma_A = \sqrt{D_A} = \sqrt{1{,}21} = 1{,}1 \text{ (пар)};$$

$$D_B = \frac{\Sigma\left(\left(X_B - \bar{X}\right)^2 \cdot M_B\right)}{\Sigma M_B} = \frac{10{,}83 + 4{,}05 + 0{,}06 + 6{,}05 + 9{,}61}{20} =$$

$$= \frac{30{,}6}{20} = 1{,}53 \text{ (пар}^2\text{)},$$

$$\sigma_B = \sqrt{D_B} = \sqrt{1{,}53} \approx 1{,}24 \text{ (пар)}.$$

Так как $\sigma_A < \sigma_B$, то точка A предпочтительнее для организации в ней торговли, чем точка B. ◁

Замечание. Дисперсию и среднее квадратичное отклонение в статистике называют также *мерами рассеивания* значений случайной величины около среднего значения.

Упражнения

159 Найти размах выборки:

1) 15, -7, 13, -6, 8, 2, 1, -8, -2;
2) 21, 12, -1, 7, -3, 20, 14, 0, 1.

160 Найти дисперсию выборки:

1) 10 см, 12 см, 7 см, 11 см;
2) 16 г, 14 г, 13 г, 17 г;
3) 11 с, 14 с, 11 с, 12 с, 12 с;
4) 5 м, 13 м, 8 м, 12 м, 12 м.

161 Найти дисперсию совокупности значений случайной величины X, заданной частотным распределением:

1)

X	2	3	4	6
M	3	2	2	3

2)

X	-1	2	3	4	5
M	3	1	2	3	1

162 Найти среднее квадратичное отклонение от среднего значения элементов выборки:

1) 3 кг, 5 кг, 5 кг, 8 кг, 4 кг;
2) 12 м, 10 м, 7 м, 12 м, 9 м.

163 Сравнить дисперсии двух выборок, имеющих одинаковые средние значения:

1) 6, 10, 7, 8, 9 и 8, 9, 5, 10;

2) 5, 12, 7, 8, 18 и 17, 6, 11, 7, 9, 10.

164 Найти среднее квадратичное отклонение величины X, заданной частотным распределением:

1)

X	2	3	4	6
M	2	2	1	3

2)

X	-5	-2	2	3
M	2	3	4	2

165 Сравнить дисперсии выборок, имеющих разные средние значения:

1) 4, 6, 8, 9, 8 и 6, 8, 10, 12, 9;
2) 6, 3, 4, 8, 9 и 2, 6, 3, 7, 5, 7.

166 Двух футболистов, участвующих в играх пяти сезонов и забивших одинаковое количество голов (см. таблицу), сравнить по стабильности результатов.

Условный номер сезона	1	2	3	4	5
Число голов, забитых 1-м футболистом	18	23	19	17	23
Число голов, забитых 2-м футболистом	19	16	22	23	20

167 Двух футболистов, один из которых участвовал в пяти игровых сезонах, а другой — в шести (см. таблицу), сравнить по стабильности в забивании голов.

Условный номер сезона	1	2	3	4	5	6
Число голов, забитых 1-м футболистом	17	21	20	16	15	19
Число голов, забитых 2-м футболистом	—	17	20	18	21	14

Упражнения к главе III

168 Составить таблицу распределения по вероятностям P значений случайной величины X — числа очков, появившихся при бросании кубика: 1) на одной грани которого отмечено одно очко, а на остальных — 2 очка; 2) на двух гранях которого отмечено одно очко, а на остальных — 2 очка; 3) на одной грани которого отмечено одно очко, на двух — 2 очка, на остальных — 3 очка; 4) на одной грани которого отмечено одно очко, на другой — 2 очка, на двух — 3 очка, на остальных — 4 очка.

169 Имеются две монеты, у которых на одной из сторон записано число 1, а на другой — число 2. Составить таблицу распределения по вероятностям P значений случайной величины Y — суммы чисел, появившихся при бросании этих монет.

170 Дан набор случайно названных двузначных чисел:
1) 27, 31, 49, 25, 74, 99, 30, 12, 22, 58;
2) 19, 46, 54, 28, 67, 88, 37, 92, 71, 33.
Составить таблицу распределения по частотам M значений случайной величины X — цифр, встречающихся в наборе.

171 Построить полигон частот и полигон относительных частот значений случайной величины Z, распределение которых представлено в таблице:

1)

Z	3	4	5	6	7	8
M	1	3	4	5	3	2

2)

Z	10	11	12	13	14
M	4	6	9	7	3

Найти размах, моду, медиану и среднее выборки **(172—175)**:

172 1) 1, 5, 5, 8, 10;
2) 3, 10, 12, 12, 18;

173 1) –8, –8, –5, –5, 0, 2;
2) –4, –4, 0, 2, 9, 9;

174 1) –1, 12, –6, –7, 13, –2, 10, –2, –9;
2) 4, –10, 13, 8, –6, –3, –1, 13, –6;

175 1) –5, –15, 12, –7, 8, 13, –1, –7;
2) 16, –2, –8, 10, 14, –6, –2, 11.

176 Найти дисперсию и среднее квадратичное отклонение выборки:
1) 3, 8, 5, 6;
2) 4, 7, 3, 9;
3) 4, 1, 3, 2, 2;
4) 3, 2, 1, 1, 5;
5) 2, –1, 3, –2, 5;
6) –2, 4, –3, –1, 6.

Проверь себя!

1 На стол бросают монету (на одной из сторон которой записано число 1, на другой — число 2) и игральный кубик (грани которого пронумерованы числами от 1 до 6). Составить вероятностную таблицу распределения значений случайной величины X — суммы чисел, появившихся на монете и на кубике.

2 Найти размах, моду, медиану и среднее выборки:
–5, 6, 3, 8, 3, –2, –4, 0, 3, –2.

3 Найти дисперсию выборки: –2, 3, 1, 0, 4.

177 Найти размах, моду, медиану и среднее выборки значений случайной величины X, распределение которых по часто там M задано таблицей:

1)

X	–1	0	1	3	5	6
M	2	3	4	1	1	1

2)

X	–2	–1	0	2	3	4
M	1	2	4	4	1	1

178 Рост каждой из 50 гимнасток одного спортивного клуба занесён в таблицу:

148	148	149	149	149	149	149	149	149	149
149	150	150	150	150	150	150	150	150	150
150	151	151	151	151	151	151	151	151	152
152	152	152	152	152	152	152	152	153	153
153	153	153	153	153	153	154	154	154	154

По имеющимся данным составить таблицу распределения значений случайной величины X — роста гимнасток клуба: 1) по частотам (M); 2) по относительным частотам (W). Построить полигон относительных частот значений величины X.

179 Найти дисперсию и среднее квадратичное отклонение значений случайной величины Z, заданных распределением по частотам M:

1)

Z	–2	–1	1	3
M	2	1	3	1

2)

Z	–4	–1	2	3
M	1	2	3	1

180 Сравнить дисперсии выборок:
1) 2, 3, 5, 3, 7 и 4, 7, 5, 6; 2) –1, 3, 4 и –2, 0, 2, 4, 5.

181 Сравнить стабильность производительности труда двух рабочих, первый из которых работал 5 дней, а второй — 6 дней, при этом они имели одинаковую среднюю производительность:

1)

Порядковый номер дня недели	1	2	3	4	5	6
Производительность труда 1-го рабочего (дет. / день)	8	11	9	12	10	—
Производительность труда 2-го рабочего (дет. / день)	8	12	11	8	12	9

2)

Порядковый номер дня недели	1	2	3	4	5	6
Производительность труда 1-го рабочего (дет. / день)	9	—	11	10	11	9
Производительность труда 2-го рабочего (дет. / день)	9	10	11	11	10	9

182 Были произведены замеры десяти диаметров d оснований цилиндров в партии стальных заготовок. Замеры производились дважды — двумя различными измерительными приборами. Результаты измерений (с точностью до 1 мм) первым прибором представлены в таблице слева, а вторым прибором — в таблице справа.

d_1	58	59	60	61	62
M_1	1	2	4	2	1

d_2	59	60	61	62
M_2	2	5	2	1

Сравнить дисперсии значений случайных величин d_1 и d_2.

183 Среди трёх совокупностей, представленных таблицами распределения, выявить ту совокупность, значения которой имеют меньший разброс данных около своего среднего.

X	1	2	4	5
M	2	1	3	2

Y	–2	0	1	2	3
M	2	3	2	2	1

Z	–5	–4	–2	3
M	1	3	3	1

184 Массы m пятидесяти детей до года, стоящих на учёте в некоторой районной поликлинике, попадают в промежуток [2; 12]. Распределение значений случайной величины m представлено в частотной таблице:

m	[2; 4)	[4; 6)	[6; 8)	[8; 10)	[10; 12]
M	2	3	13	26	6

Построить гистограмму распределения значений величины m.

185 Найти математическое ожидание значений случайной величины X, распределение которых по вероятностям представлено в таблице:

1)

X	–3	0	1	2
P	0,2	0,3	0,4	0,1

2)

X	–2	–1	1	2	4
P	0,2	0,2	0,3	0,2	0,1

Ответы и указания

Глава I

1. 2) 6; 4) 12; 6) 9. **2.** 2) 8; 4) 4. **3.** 2) 6; 4) 24. **4.** 2) 16; 4) 81. **5.** 12. **6.** 8. **7.** 2) 240 способами. **8.** 120 способами. **9.** 720 способами. **10.** 120 способами. **11.** 4896 способами. **12.** 6840 способами. **13.** 2) 80 000. **14.** 64 800. **15.** 648 000. **16.** 2) 144. **17.** 2) 5040; 4) 40 320. **18.** 24. **19.** 120. **20.** 2) 362 880. **21.** 2) 24; 4) 6; 6) 12. **22.** 2) 11!; 4) 12!; 6) k!; 8) k!; 10) $(k-1)!$. **23.** 2) 32; 4) 182; 6) $\frac{3}{7}$; 8) 55. **24.** 2) $n+2$; 4) $m+3$. **25.** 2) $n=3$; 4) $n=3$. **26.** P_{11}. **27.** P_5. **28.** P_5. **29.** 2) $P_6 \cdot P_3$. **30.** 2) 5; 4) 12; 6) 720; 8) 336. **31.** 2) 20 160. **32.** 2) 120. **33.** 6840. **34.** 2) 81; 4) $\frac{10}{21}$. **35.** 2) $m=8$; 4) $m=6$; 6) $m=8$; 8) $m_1=7$, $m_2=15$. **36.** 2) $\frac{1}{182-13n}$. **37.** 2) 336. **38.** 2) 6; 4) 21; 6) 56; 8) 10; 10) 1; 12) 1; 14) 780; 16) 1770. **39.** 2) 126. **40.** 2) 220. **41.** 2) 120. **42.** 2) 78. **43.** 2) 220. **44.** 2) 70. **45.** 2) 324. **46.** 2) 200. **47.** 2) 140. **48.** 2) 105; 4) 190; 6) 54 740. **49.** 2) $x=6$; 4) $x_1=3$, $x_2=14$; 6) $x=4$. **50.** 2) $x^7+7x^6+21x^5+35x^4+35x^3+21x^2+7x+1$; 4) $y^{10}-10y^9+45y^8-120y^7+210y^6-252y^5+210y^4-120y^3+$ $+45y^2-10y+1$; 6) $x^6+12x^5+60x^4+160x^3++240x^2+192x+64$; 8) $32a^5+240a^4+720a^3+1080a^2+810a+243$; 10) $81x^4-36x^3+6x^2-$ $-\frac{4}{9}x+\frac{1}{81}$. **51.** 2) $1+5\sqrt{3}+30+30\sqrt{3}+45+9\sqrt{3}$; 4) $b^6-3b^4+\frac{15}{4}b^2-$ $-\frac{5}{2}+\frac{15}{16}b^{-2}-\frac{3}{16}b^{-4}+\frac{1}{64}b^{-6}$. **52.** 2) $-364x^{\frac{25}{2}}$; 4) $165x^{-5}$; 6) $56b^{2,7}$. **53.** 2) 64; 4) 126; 6) 1024. **54.** 2) $8008x^3$. **55.** 2) $5\frac{4}{5}$; 4) 132; 6) 12. **56.** 2) $n(n+1)(n+2)$; 4) $\frac{n}{n+1}$; 6) $\frac{n^2+3n+3}{n+2}$. **57.** 2) 5; 4) $42\frac{1}{2}$. **58.** 2) $x=7$; 4) $x=13$; 6) $x=9$; 8) $n_1=4$, $n_2=9$. **59.** 2) 5040. **60.** 2) 84. **61.** 2) 336. **62.** 2) 6840. **63.** 2) 66; 4) 330. **64.** 2) $x^4-8x^3+24x^2-$ $-32x+16$; 4) $243+405a+270a^2+90a^3+15a^4+a^5$; 6) $1-7x+$ $+21x^2-35x^3+35x^4-21x^5+7x^6-x^7$; 8) $64a^6+96a^5+60a^4+20a^3+$ $+\frac{15}{4}a^2+\frac{3}{8}a+\frac{1}{64}$. **65.** 2) 15 015. **66.** 2) 20. **67.** 2) 30; 4) 64; 6) 924; 8) 735 471; 10) 495. **68.** 2) 36. **69.** 1 000 000. **70.** 13 800 000.

71. 2) $x^6+18x^5+135x^4+540x^3+1215x^2+2430x+729$;
4) $\frac{a^5}{243}-\frac{5a^4}{81}+\frac{10a^3}{27}-\frac{10a^2}{9}+\frac{5a}{3}-1$; 6) $\frac{1}{10\,000\,000}b^7-\frac{7}{100\,000}b^6+$ $+\frac{21}{1000}b^5-\frac{35}{10}b^4+350b^3-21\,000b^2+700\,000b-10\,000\,000$;
8) $\frac{256}{c^8}-\frac{512}{c^6}+\frac{448}{c^4}-\frac{224}{c^2}+70+14c^2+\frac{7}{4}c^4+\frac{7}{64}c^6+\frac{1}{256}c^8$.
72. 2) $C_{14}^9x^2$; 4) $C_{13}^6x^{-0,6}$.

Глава II

73. 2) Невозможным; 4) достоверным; 6) случайным. **74.** 2) Появилось число 1; число 2; число 3; число 4 — события равновозможные; 4) круг; отрезок — в общем случае события не являются равновозможными; 6) пять элементарных событий, определяемых цветом каждого из шаров, — события равновозможные. **75.** 2) Не являются; 4) являются. **76.** Изъятие либо карты с картинкой, либо карты червовой масти; изъятие карты с картинкой червовой масти. **77.** Выбрана карточка с одним из чисел 4, 6, 8, 12, 16, 18, 20; выбрана карточка с числом 12. **78.** Попадание по мишени хотя бы при одном из двух выстрелов; попадание по мишени при обоих выстрелах. **79.** На первой кости выпало число 5, а на второй — любое число, или на первой кости выпало любое число, а на второй — одно из чисел 5 или 6; на первой кости выпало 5 очков, а на второй — одно из чисел 5 или 6. **80.** 2) Выпало одно из чисел 1, 3, 4, 5, 6 (не выпало число 2); 4) выпало одно из чисел 4, 5, 6 (выпало число, большее трёх); 6) извлечена карта, отличная от шестёрки (извлечена не шестёрка); 8) число 6 не появилось ни на одной из костей; 10) студент получил оценку, отличающуюся от оценки «отлично». **81.** 2) $C\overline{D}$; 4) $\overline{CD}$; 6) $C\overline{D}+\overline{C}D$.
82. 2) $\frac{1}{6}$. **83.** 2) $\frac{1}{36}$; 4) $\frac{1}{18}$; 6) $\frac{1}{9}$; 8) $\frac{2}{9}$; 10) $\frac{5}{36}$; 12) $\frac{8}{9}$. **84.** 2) $\frac{1}{31}$; 4) 0; 6) $\frac{3}{31}$; 8) $\frac{13}{31}$. **85.** 2) $\frac{1}{3}$; 4) $\frac{5}{9}$; 6) $\frac{7}{9}$; 8) 0. **86.** 2) $\frac{1}{20}$. **87.** 2) $\frac{1}{36}$; 4) $\frac{1}{36}$; 6) $\frac{1}{12}$; 8) $\frac{1}{6}$; 10) $\frac{2}{9}$; 12) $\frac{1}{12}$; 14) $\frac{1}{6}$; 16) $\frac{1}{18}$; 18) $\frac{1}{12}$.
88. 2) $\frac{51}{190}$; 3) $\frac{68}{95}$. **89.** 1) $\frac{2}{35}$; 2) $\frac{44}{105}$. **90.** 2) $\frac{1}{36}$; 4) $\frac{1}{72}$. **91.** 2) $\frac{1}{18}$.
92. 2) $\frac{2}{9}$; 4) $\frac{11}{36}$. **93.** 2) $\frac{2}{3}$. **94.** 2) $\frac{7}{13}$. **95.** $\frac{5}{6}$. **96.** $\frac{3}{4}$. **97.** 0,6.

98. 0,99999. **99.** $\frac{21}{22}$. **100.** 2) $\frac{21}{22}$. **101.** 2) $\frac{784244}{784245}$. **102.** 2) $\frac{501}{506}$. **103.** 2) Являются; 4) не являются. **104.** 2) Не являются.

106. 1) 0,09; 2) 0,49; 3) 0,51. **107.** 2) 0,0015; 4) 0,0785. **108.** 2) $\frac{7}{12}$; 4) $\frac{5}{12}$. **109.** 2) $\frac{27}{140}$; 4) $\frac{3}{4}$. **110.** 0,8. **111.** $\frac{2}{9}$. **112.** 2) 0,992. **113.** 2) 0,504; 4) 0,496. **114.** 2) 2,2%. **115.** 0,49; 0,177; 0,93; 0,245. **116.** 0,8; 0,68; 0,73; 0,69; 0,71; 0,70; $P \approx 0{,}7$. **118.** 2) Любое натуральное число от 1 до 30 — равновозможные элементарные события; 4) орёл — орёл, орёл — решка, решка — орёл, решка — решка — равновозможные элементарные события; 6) ППП, ППН, ПНП, НПП, ПНН, НПН, ННП, ННН — равновозможные элементарные события. **119.** 1) Вынут дубль; вынута костяшка «два – два»; 2) вынута карта с картинкой; вынут король. **120.** 2) Вынута карточка с одним из чисел 1, 2, 3, 6, 12; вынута карточка с числом 6; 4) вынута карточка с любым числом; вынута карточка с числом 8; 6) вынута карточка с числом, кратным трём; вынута карточка с числом, кратным шести. **121.** 2) Выпало число, не кратное 5 (т. е. одно из чисел 1, 2, 3, 4, 6); 4) ни на одном из кубиков не появилось число 1; 6) шашка легла не на чёрную клетку. **123.** 2) $\frac{1}{3}$; 4) $\frac{5}{6}$. **124.** 2) $\frac{5}{8}$; 4) $\frac{7}{8}$; 6) $\frac{3}{4}$. **125.** 2) $\frac{1}{18}$; 4) $\frac{1}{9}$; 6) $\frac{5}{9}$; 8) $\frac{5}{36}$; 10) $\frac{8}{9}$. **126.** 2) 0,99997. **127.** 2) Не являются. **128.** 2) Являются. **129.** 2) 0,93; 4) 0,48. **130.** 2) 0,49; 4) 0,91. **131.** 2) 0,055; 4) 0,115. **133.** 2) РРО, РОР, ОРР, РРР. **134.** 2) РРР. **135.** 2) $\frac{1}{12}$; 4) $\frac{1}{9}$; 6) $\frac{5}{18}$. **136.** 2) $\frac{3}{11}$; 4) $\frac{8}{11}$. **137.** 2) $\frac{7}{26}$; 4) $\frac{19}{26}$. **138.** 2) $\frac{7}{44}$; 4) $\frac{7}{22}$. **139.** 2) $\frac{1}{1\,157\,625}$. **140.** 2) $\frac{45}{187}$; 4) $\frac{54}{187}$; 6) $\frac{139}{187}$. **141.** $\frac{1}{36}$.

Глава III

142. 2)

X	2	3	4	5
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

143.

X	2	3	4	5	6	7	8
P	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$

144.

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
P	$\frac{1}{48}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{48}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{48}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{48}$

145. 2)

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
M	2	4	3	6	3	2	2	1	2	3

147.

X	97	98	99	100	101	102
M	2	3	3	6	4	2
W	0,1	0,15	0,15	0,3	0,2	0,1

148.

Y	158	159	160	161	162	163	164	165	166
M	1	2	2	3	4	6	5	4	3
W	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{10}$

151. 3). **152.** 2) 9; 4) 6 и 8. **153.** 2) 20; 4) 10,5. **154.** 2) 4,4; 4) 1,2. **155.** 2) Моды выборка не имеет; 1,5; $1\frac{2}{3}$. **156.** 2) $1\frac{1}{11}$; 4) 0,4. **157.** 2) 1; 0; $\frac{2}{11}$. **158.** 1) $-\frac{5}{7}$; 2) $\frac{1}{2}$. **159.** 2) 24. **160.** 2) 2,5 г^2; 4) 9,2 м^2. **161.** 2) 4,96. **162.** 2) $\sigma \approx 1,9$ м. **163.** 2) $D_1 > D_2$. **164.** 2) $\sigma \approx 2,9$. **165.** 2) $D_1 > D_2$. **166.** Второй игрок более стабилен. **167.** Первый футболист более стабилен.

168. 2)

X	1	2
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

4)

X	1	2	3	4
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

169.

Y	2	3	4
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

170.

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9
M	2	2	3	2	1	2	3	3	2

172. 2) 15; 12; 12; 11. **173.** 2) 13; –4 и 9; 1; 2. **174.** 2) 23; –6 и 13; –1; $1\frac{1}{3}$. **175.** 2) 24; –2; 4; 4,125. **176.** 2) $D \approx 5,69$, $\sigma \approx 2,38$; 4) $D = 2,24$, $\sigma \approx 1,50$; 6) $D = 12,56$, $\sigma \approx 3,54$. **177.** 2) 6; 0 и 2; 0; $\frac{11}{13}$.

178.

X	148	149	150	151	152	153	154
M	2	9	10	8	9	8	4
W	0,04	0,18	0,2	0,16	0,18	0,16	0,08

179. 2) $D \approx 5{,}4$, $\sigma \approx 2{,}3$. **180.** 2) $D_1 = 4\frac{2}{3}$, $D_2 = 6{,}56$, $D_1 < D_2$.

181. 2) $D_{\mathrm{I}} = 0{,}8$, $D_{\mathrm{II}} = \frac{2}{3}$; так как $D_{\mathrm{I}} > D_{\mathrm{II}}$, то второй рабочий имеет более стабильную производительность труда. **182.** $D_2 < D_1$. **183.** $D_X \approx 2{,}44$, $D_Y = 2{,}45$, $D_Z = 5{,}5$; меньший разброс имеет совокупность значений величины X. **185.** 2) 0,5.

Ответы к заданиям «Проверь себя!»

Глава I. 1. 21. **2.** 720 способами. **3.** 9240. **4.** 48. **5.** $1 - 6x + 15x^2 - 20x^3 + 15x^4 - 6x^5 + x^6$.

Глава II. 1. 1) Названо одно из чисел 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18; 2) названо одно из чисел 6, 12, 18; 3) названо одно из чисел 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17; 4) названо одно из чисел 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 14, 16, 17. **2.** $\frac{1}{12}$. **3.** 0,88.

Глава III. 1.

1.

X	2	3	4	5	6	7	8
P	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$

2. 13; 3; 1,5; 1. **3.** 4,56.

Оглавление

Для заметок

Для заметок

Учебное издание

Ткачёва Мария Владимировна

МАТЕМАТИКА
ВЕРОЯТНОСТЬ И СТАТИСТИКА

10–11 классы

Углублённый уровень

Задачник

Учебное пособие, разработанное в комплекте с учебником

Центр математики
Ответственный редактор *Н. В. Маркова*
Редактор *Н. В. Маркова*
Художественный редактор *Т. В. Глушкова*
Технический редактор *Е. А. Урвачева*
Вёрстка *О. С. Ивановой*
Корректор *О. Н. Леонова*

Подписано в печать 14.04.2023. Формат 70×90/16.
Усл. печ. л. 5,83. Уч.-изд. л. 2,87. Тираж экз. Заказ № .

Акционерное общество «Издательство «Просвещение». Российская Федерация, 127473, г. Москва, ул. Краснопролетарская, д. 16, стр. 3, этаж 4, помещение I.

Адрес электронной почты «Горячей линии» — **vopros@prosv.ru**.