МАТЕМАТИКА

АЛГЕБРА

8 КЛАСС

Базовый уровень

УЧЕБНИК

Под редакцией С. А. ТЕЛЯКОВСКОГО

Допущено
Министерством просвещения
Российской Федерации

16-е издание, переработанное

Москва
«Просвещение»
2023

УДК 373.167.1:512+512(075.3)
ББК 22.14я721
М34

Учебник допущен к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ начального общего, основного общего, среднего общего образования организациями, осуществляющими образовательную деятельность, в соответствии с Приказом Министерства просвещения Российской Федерации № 858 от 21.09.2022 г.

Авторы:
Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешков, С. Б. Суворова

М34 **Математика. Алгебра** : 8-й класс : базовый уровень : учебник / Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешков, С. Б. Суворова ; под ред. С. А. Теляковского. — 16-е изд., перераб. — Москва : Просвещение, 2023. — 319, [1] с. : ил.
ISBN 978-5-09-102536-1.

Данный учебник является частью трёхлетнего курса алгебры для общеобразовательных школ. Новое издание учебника дополнено и доработано. Его математическое содержание позволяет достичь планируемых результатов обучения, предусмотренных ФГОС ООО, утверждённым Приказом Министерства просвещения РФ № 287 от 31.05.2021 г. В задачный материал включены задания для работы в парах и задачи-исследования. В конце учебника приводится список литературы, дополняющей его.

УДК 373.167.1:512+512(075.3)
ББК 22.14я721

ISBN 978-5-09-102536-1

Дорогие восьмиклассники!

В этом году вы продолжите изучение алгебры. Ваши представления о выражениях, числах, функциях, уравнениях и неравенствах пополнятся и расширятся. Если в 7 классе вы занимались преобразованием целых выражений, то теперь познакомитесь с преобразованием дробей. Вы встретитесь с иррациональными числами, изучите свойства новых функций: обратной пропорциональности $y=\frac{k}{x}$ и функции $y=\sqrt{x}$ — и научитесь строить их графики. Вы познакомитесь с некоторыми способами решения квадратных и дробных рациональных уравнений, неравенств с одной переменной и их систем.

Весь новый материал подробно разъясняется в объяснительных текстах учебника, приводятся решения различных задач. Правила и свойства, которые нужно запомнить, даны на цветном фоне, чтобы вы обратили на них внимание. Если вы забыли что-то из ранее изученного, то можете обратиться к разделу «Сведения из курса алгебры 7 класса». Контрольные вопросы и задания помогут вам проверить, как вы усвоили изученный материал.

В учебнике вам предлагаются разнообразные упражнения. Надеемся, что вы примете активное участие в выполнении упражнений под названием «задача-исследование», рассчитанных на коллективное обсуждение приёмов решения, а также в выполнении заданий, предназначенных для работы в парах. Выполняя такие задания, вы научитесь прислушиваться к мнению товарищей и отстаивать свою позицию.

Если вы интересуетесь математикой, то ваше внимание, безусловно, привлечёт материал под рубрикой «Для тех, кто хочет знать больше», помещённый в конце каждой главы. Специально для учащихся, находящих радость в решении непростых задач, в учебнике даны «Задачи повышенной трудности». Решение таких задач поможет не только расширить кругозор, но и подготовиться к участию в математических олимпиадах.

Конечно, многим из вас любопытно узнать, как и почему зарождался и затем развивался тот или иной раздел алгебры. Для ответов на эти вопросы в учебнике приведены «Исторические сведения».

Желаем вам успехов в изучении алгебры.

В учебнике используются следующие условные обозначения:

— текст, который нужно запомнить

— материал, который важно знать

▶ — начало решения задачи

◁ — окончание решения задачи

● — начало обоснования утверждения или вывода формулы

○ — окончание обоснования утверждения или вывода формулы

11. — задание обязательного уровня

19. — задание повышенной трудности

П — упражнения для повторения

Глава I РАЦИОНАЛЬНЫЕ ДРОБИ

В курсе алгебры 7 класса вы занимались преобразованиями целых выражений. Теперь будут рассматриваться преобразования дробных выражений — правила сложения, вычитания, умножения и деления рациональных дробей, а также правило возведения дроби в степень. Здесь вы познакомитесь с новой функцией, которая называется обратной пропорциональностью. Её свойства существенно отличаются от свойств изученных ранее функций.

§ 1 РАЦИОНАЛЬНЫЕ ДРОБИ И ИХ СВОЙСТВА

1. Рациональные выражения

Выражения, составленные из чисел и переменных с помощью действий сложения, вычитания и умножения, а также деления на число, отличное от нуля, называют *целыми выражениями*. Так, целыми являются выражения

$$7a^2b,\ m^3 + n^3,\ \ (x - y)(x^2 + y^2),$$

$$x^4y + 2x^2y^2 + 8y,\ \ m^8 + n^6 + m^2n^2,$$

$$b^{10} - \frac{b(3b+c)}{7},\ \frac{a+5}{8},\ 2x : 9.$$

В отличие от них выражения

$$4a - \frac{b}{2a+1},\ \ \frac{x+y}{x^2 - 3xy + y^2},$$

$$\frac{n}{3} - \frac{5}{n^2+1},\ 2p : q,$$

помимо действий сложения, вычитания и умножения, содержат деление на выражение с переменными. Такие выражения называют *дробными выражениями.*

Целые и дробные выражения называют *рациональными выражениями*.

Выражение вида $\frac{a}{b}$ называется, как известно, дробью.

Дробь, числитель и знаменатель которой многочлены, называют *рациональной (алгебраической) дробью.*

Примерами рациональных дробей служат дроби

$$\frac{5}{a},\ \frac{b-3}{10},\ \frac{x+y}{x^2-xy+y^2},\ \frac{3}{m^2-n^2}.$$

Целое выражение имеет смысл при любых значениях входящих в него переменных, так как для нахождения значения целого выражения нужно выполнить действия, которые всегда возможны.

Дробное выражение имеет смысл только при тех значениях переменных, при которых все знаменатели рациональных дробей, содержащихся в этом выражении, будут отличны от нуля. Например, выражение $10+\frac{1}{a}$ имеет смысл при всех значениях a, кроме нуля, так как при $a = 0$ знаменатель дроби $\frac{1}{a}$ обращается в нуль, а делить на нуль, как известно, нельзя. Выражение $x+\frac{y}{x-y}$ имеет смысл при тех значениях x и y, при которых $x \neq y$.

Значения переменных, при которых выражение имеет смысл, называют *допустимыми значениями переменных.*
В рациональной дроби допустимыми являются те значения переменных, при которых не обращается в нуль знаменатель дроби.

Пример 1. Найдём допустимые значения переменной в дроби

$$\frac{5}{a(a-9)}.$$

ИСААК НЬЮТОН (1643—1727) — английский физик, механик, математик и астроном. Сформулировал основные законы классической механики, открыл закон всемирного тяготения, разработал, независимо от Лейбница, основы математического анализа.

▶ Допустимыми значениями переменной будут те значения a, при которых знаменатель дроби не обращается в нуль, то есть выполнено условие:

$$a(a - 9) \neq 0.$$

Произведение в данном случае не равно нулю тогда и только тогда, когда каждый множитель не равен нулю, то есть

$$\begin{cases} a \neq 0, \\ a - 9 \neq 0. \end{cases}$$

Откуда получим

$$\begin{cases} a \neq 0, \\ a \neq 9. \end{cases}$$

Следовательно, допустимыми значениями переменной a являются все числа, кроме 0 и 9. ◁

Пример 2. Найдём область определения функции $y = \frac{x+3}{x-7}$.

▶ Область определения данной функции составляют те значения x, при которых выполнено условие $x - 7 \neq 0$, откуда $x \neq 7$. Значит, область определения функции составляют все числа, кроме числа 7. ◁

Пример 3. При каком значении x значение дроби $\frac{(x-2)^2 - 25}{2x+6}$ равно нулю?

▶ *Дробь $\frac{a}{b}$ равна нулю тогда и только тогда, когда $a = 0$ и $b \neq 0$.*

Числитель дроби $\frac{(x-2)^2 - 25}{2x+6}$ равен нулю, если

$$(x - 2)^2 = 25,$$

т. е.

$$x - 2 = 5 \text{ или } x - 2 = -5.$$

Итак, числитель дроби равен нулю при $x = 7$ и $x = -3$. Знаменатель данной дроби не равен нулю, если $x \neq -3$. Значит, данная дробь равна нулю при $x = 7$. ◁

Упражнения

1. Какие из выражений

$$\frac{1}{3}a^2b,\ (x - y)^2 - 4xy,\ \frac{m+3}{m-3},\ \frac{8}{x^2+y^2},\ \frac{a^2-2ab}{12},\ (c + 3)^2 + \frac{2}{c}$$

являются целыми, какие — дробными?

2. Из рациональных выражений $7x^2 - 2xy$, $\frac{a}{9}$, $\frac{12}{b}$, $a(a - b) - \frac{b}{3a}$, $\frac{1}{4}m^2 - \frac{1}{3}n^2$, $\frac{a}{a+3} - 8$ выпишите те, которые являются:

а) целыми выражениями; б) дробными выражениями.

3. Найдите значение дроби $\frac{y-1}{4}$ при $y = 3;\ 1;\ -5;\ \frac{1}{2};\ -1{,}6;\ 100$.

4. Найдите значение дроби:

а) $\frac{a-8}{2a+5}$ при $a = -2$; б) $\frac{b^2+6}{2b}$ при $b = 3$.

5. Чему равно значение дроби $\frac{(a+b)^2-1}{a^2+1}$ при:

а) $a = -3$, $b = -1$; б) $a = 1\frac{1}{2}$, $b = 0{,}5$?

6. Перечертите в тетрадь и заполните таблицу:

x	-13	-5	$-0{,}2$	0	$\frac{1}{17}$	1	$5\frac{2}{3}$	7
$\frac{x+5}{x-3}$								

7. а) Из формулы $v = \frac{s}{t}$ выразите: переменную s через v и t; переменную t через s и v.

б) Из формулы $\rho = \frac{m}{V}$ выразите переменную V через ρ и m.

8. Из городов A и B, расстояние между которыми s км, вышли в одно и то же время навстречу друг другу два поезда. Первый шёл со скоростью v_1 км/ч, а второй — со скоростью v_2 км/ч. Через t ч они встретились. Выразите переменную t через s, v_1 и v_2. Найдите значение t, если известно, что:
а) $s = 250$, $v_1 = 60$, $v_2 = 40$; б) $s = 310$, $v_1 = 75$, $v_2 = 80$.

9. а) Составьте дробь, числитель которой — произведение переменных x и y, а знаменатель — их сумма.
б) Составьте дробь, числитель которой — разность переменных a и b, а знаменатель — их произведение.
в) Составьте дробь, числитель которой — сумма переменных c и d, а знаменатель — их разность.

10. При каких значениях переменной имеет смысл рациональное выражение:

а) $\frac{x}{x-2}$; б) $\frac{b+4}{b^2+7}$; в) $\frac{y^2-1}{y} + \frac{y}{y-3}$; г) $\frac{a+10}{a(a-1)} - 1$?

11. Укажите допустимые значения переменной в выражении:

а) $x^2 - 8x + 9$; в) $\frac{3x-6}{7}$; д) $\frac{x-5}{x^2+25} - 3x$;

б) $\frac{1}{6x-3}$; г) $\frac{x^2-8}{4x(x+1)}$; е) $\frac{x}{x+8} + \frac{x-8}{x}$.

12. Найдите допустимые значения переменной в выражении:

а) $\frac{5y-8}{11}$; в) $\frac{y^2+1}{y^2-2y}$; д) $\frac{y}{y-6} + \frac{15}{y+6}$;

б) $\frac{25}{y-9}$; г) $\frac{y-10}{y^2+3}$; е) $\frac{32}{y} - \frac{y+1}{y+7}$.

13. Найдите область определения функции:

а) $y = \frac{1}{x-2}$; б) $y = \frac{2x+3}{x(x+1)}$; в) $y = x + \frac{1}{x+5}$.

14. При каком значении переменной значение дроби $\frac{x-3}{5}$ равно:
а) 1; б) 0; в) −1; г) 3?

15. При каких значениях переменной равно нулю значение дроби:

а) $\frac{y-5}{8}$; б) $\frac{2y+3}{10}$; в) $\frac{x(x-1)}{x+4}$; г) $\frac{x(x+3)}{2x+6}$?

16. Найдите значения переменной, при которых равно нулю значение дроби:

а) $\frac{m+4}{6}$; б) $\frac{7-5n}{11}$; в) $\frac{b^2-b}{b+2}$; г) $\frac{y^2-25}{3y-15}$.

17. Определите знак дроби $\frac{a}{b}$, если известно, что:
а) $a > 0$ и $b > 0$;
б) $a > 0$ и $b < 0$;
в) $a < 0$ и $b > 0$;
г) $a < 0$ и $b < 0$.

18. Докажите, что при любом значении переменной значение дроби:

а) $\frac{3}{x^2+1}$ положительно; в) $\frac{(a-1)^2}{a^2+10}$ неотрицательно;

б) $\frac{-5}{y^2+4}$ отрицательно; г) $\frac{(b-3)^2}{-b^2-1}$ неположительно.

19. При каком значении a принимает наибольшее значение дробь:

а) $\frac{4}{a^2+5}$; б) $\frac{10}{(a-3)^2+1}$?

20. При каком значении b принимает наименьшее значение дробь:

а) $\frac{b^2+7}{21}$; б) $\frac{(b-2)^2+16}{8}$?

21. Верно ли утверждение:

а) наибольшее значение дроби $\frac{18}{4x^2+9+y^2+4xy}$ равно 1;

б) наибольшее значение дроби $\frac{18}{4x^2+9+y^2+4xy}$ равно 2;

в) наименьшее значение дроби $\frac{18}{4x^2+9+y^2+4xy}$ равно 2?

П

22. Преобразуйте в многочлен:

а) $(2a+3)(2a-3)$; г) $(b+0{,}5)^2$;
б) $(y-5b)(y+5b)$; д) $(a-2x)^2$;
в) $(0{,}8x+y)(y-0{,}8x)$; е) $(ab-1)^2$.

23. Разложите на множители:

а) x^2-25; в) a^2-6a+9; д) a^3-8;
б) $16-c^2$; г) $x^2+8x+16$; е) b^3+27.

24. Анне Александровне в подарок необходимо купить пять одинаковых коробок конфет. В магазине «Сладость» одна коробка конфет стоит 350 р., но сейчас там проходит акция: три коробки по цене двух. В магазине «Джем» каждая коробка стоит 390 р., но при покупке больше четырёх коробок действует скидка 30% на всю покупку. В каком магазине покупка будет более выгодной? Сколько рублей при этом сможет сэкономить Анна Александровна?

2. Основное свойство дроби. Сокращение дробей

Мы знаем, что для обыкновенных дробей выполняется следующее свойство: если числитель и знаменатель дроби умножить на одно и то же натуральное число, то значение дроби не изменится. Иначе говоря, при любых натуральных значениях a, b и c верно равенство $\frac{a}{b}=\frac{ac}{bc}$.

Докажем, что это равенство верно не только при натуральных, но и при любых других значениях a, b и c, при которых знаменатели отличны от нуля, т. е. при $b \neq 0$ и $c \neq 0$.

● Пусть $\frac{a}{b} = m$. Тогда по определению частного $a = bm$. Умножим обе части этого равенства на c:

$$ac = (bm)c.$$

На основании сочетательного и переместительного свойств умножения имеем

$$ac = (bc)m.$$

Так как $bc \neq 0$, то по определению частного

$$\frac{ac}{bc} = m.$$

Значит,

$$\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}. \ ○$$

Мы показали, что для любых числовых значений переменных a, b и c, где $b \neq 0$ и $c \neq 0$, верно равенство

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}.} \qquad (1)$$

Равенство (1) сохраняет силу и в том случае, когда под буквами a, b и c понимают многочлены, причём b и c — *ненулевые многочлены*, т. е. многочлены, не равные тождественно нулю.

Равенство (1) выражает *основное свойство рациональной дроби*:

> если числитель и знаменатель рациональной дроби умножить на один и тот же ненулевой многочлен, то получится равная ей дробь.

Например,

$$\frac{x+2}{x-3} = \frac{(x+2)(x+y)}{(x-3)(x+y)}.$$

Это равенство верно при всех допустимых значениях переменных.

Такие равенства будем называть *тождествами*. Ранее тождествами мы называли равенства, верные при всех значениях переменных. Теперь мы расширяем понятие тождества.

> **Определение.** Тождеством называется равенство, верное при всех допустимых значениях входящих в него переменных.

Основное свойство рациональной дроби позволяет выполнять приведение дроби к новому знаменателю и сокращение дробей.

Приведём примеры.

П р и м е р 1. Приведём дробь $\frac{2x}{7y}$ к знаменателю $35y^3$.

▶ Так как

$$35y^3 = 7y \cdot 5y^2,$$

то, умножив числитель и знаменатель дроби $\frac{2x}{7y}$ на $5y^2$, получим

$$\frac{2x}{7y} = \frac{2x \cdot 5y^2}{7y \cdot 5y^2} = \frac{10xy^2}{35y^3}. \quad \triangleleft$$

Множитель $5y^2$ называют дополнительным множителем к числителю и знаменателю дроби $\frac{2x}{7y}$.

П р и м е р 2. Приведём дробь $\frac{5}{2y - x}$ к знаменателю $x - 2y$.

▶ Для этого числитель и знаменатель данной дроби умножим на -1:

$$\frac{5}{2y - x} = \frac{5 \cdot (-1)}{(2y - x) \cdot (-1)} = \frac{-5}{x - 2y}.$$

Дробь $\frac{-5}{x - 2y}$ можно заменить тождественно равным выражением $-\frac{5}{x - 2y}$, поставив знак «минус» перед дробью и изменив знак в числителе:

$$\frac{-5}{x - 2y} = -\frac{5}{x - 2y}. \quad \triangleleft$$

Вообще

> если изменить знак числителя (или знак знаменателя) дроби и знак перед дробью, то получим выражение, тождественно равное данному.

П р и м е р 3. Сократим дробь $\frac{a^2 - 9}{ab + 3b}$.

▶ Разложим числитель и знаменатель дроби на множители:

$$\frac{a^2 - 9}{ab + 3b} = \frac{(a + 3)(a - 3)}{b(a + 3)}.$$

Сократим полученную дробь на общий множитель $a + 3$:

$$\frac{(a + 3)(a - 3)}{b(a + 3)} = \frac{a - 3}{b}.$$

Итак,

$$\frac{a^2-9}{ab+3b}=\frac{a-3}{b}.$$

Это равенство верно при всех a и b, при которых обе его части имеют смысл. ◁

Пример 4. Сократим дробь $\frac{x-1}{x(1-x)}$.

▶ Вынесем в числителе множитель -1 за скобки:

$$\frac{-(1-x)}{x(1-x)}.$$

При этом говорят, что мы вынесли минус за скобки.
Сократим полученную дробь на общий множитель $1-x$:

$$\frac{-(1-x)}{x(1-x)}=\frac{-1}{x}=-\frac{1}{x}.$$

Таким образом, $\frac{x-1}{x(1-x)}=-\frac{1}{x}$ при всех значениях x, при которых обе его части имеют смысл. ◁

Пример 5. Построим график функции $y=\frac{x^2-16}{2x-8}$.

▶ Область определения функции $y=\frac{x^2-16}{2x-8}$ — множество всех чисел, кроме числа 4. Сократим дробь $\frac{x^2-16}{2x-8}$:

$$\frac{x^2-16}{2x-8}=\frac{(x-4)(x+4)}{2(x-4)}=\frac{x+4}{2}.$$

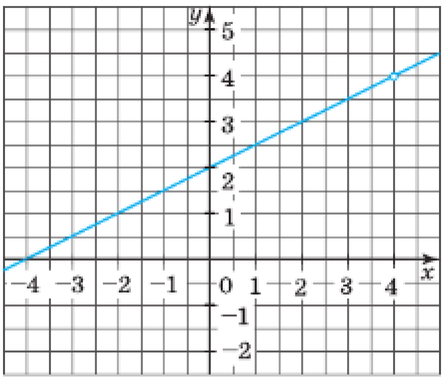


Рис. 1

Графиком функции $y=\frac{x+4}{2}$ является прямая, а графиком функции $y=\frac{x^2-16}{2x-8}$ — та же прямая, но с «выколотой» точкой (4; 4) (рис. 1). ◁

Упражнения

25. Укажите общий множитель числителя и знаменателя и сократите дробь:

а) $\frac{2x}{3x}$; б) $\frac{15x}{25y}$; в) $\frac{6a}{24a}$; г) $\frac{7ab}{21bc}$; д) $\frac{-2xy}{5x^2y}$; е) $\frac{8x^2y^2}{24xy}$.

26. Сократите дробь:

а) $\frac{10xz}{15yz}$; б) $\frac{6ab^2}{9bc^2}$; в) $\frac{2ay^3}{-4a^2b}$; г) $\frac{-6p^2q}{-2q^3}$; д) $\frac{24a^2c^2}{36ac}$; е) $\frac{63x^2y^3}{42x^6y^4}$.

27. Представьте частное в виде дроби и сократите её:

а) $4a^2b^3 : (2a^4b^2)$; г) $36m^2n : (18mn)$;
б) $3xy^2 : (6x^3y^3)$; д) $-32b^5c : (12b^4c^2)$;
в) $24p^4q^4 : (48p^2q^2)$; е) $-6ax : (-18ax)$.

28. Сократите дробь:

а) $\frac{4a^2}{6ac}$; б) $\frac{7x^2y}{21xy^2}$; в) $\frac{56m^2n^5}{35mn^5}$; г) $\frac{25p^4q}{100p^5q}$.

29. Найдите значение выражения:

а) $\frac{8^{16}}{16^{12}}$; б) $\frac{81^{25}}{27^{33}}$.

30. Сократите дробь:

а) $\frac{a(b-2)}{5(b-2)}$; б) $\frac{3(x+4)}{c(x+4)}$; в) $\frac{ab(y+3)}{a^2b(y+3)}$; г) $\frac{15a(a-b)}{20b(a-b)}$.

31. Разложите на множители числитель и знаменатель дроби и сократите её:

а) $\frac{3a+12b}{6ab}$; в) $\frac{2a-4}{3(a-2)}$; д) $\frac{a-3b}{a^2-3ab}$;

б) $\frac{15b-20c}{10b}$; г) $\frac{5x(y+2)}{6y+12}$; е) $\frac{3x^2+15xy}{x+5y}$.

32. Сократите дробь:

а) $\frac{y^2-16}{3y+12}$; в) $\frac{(c+2)^2}{7c^2+14c}$; д) $\frac{a^2+10a+25}{a^2-25}$;

б) $\frac{5x-15y}{x^2-9y^2}$; г) $\frac{6cd-18c}{(d-3)^2}$; е) $\frac{y^2-9}{y^2-6y+9}$.

33. Сократите дробь:

а) $\frac{a^2-ab+b^2}{a^3+b^3}$; б) $\frac{a^3-b^3}{a-b}$; в) $\frac{(a+b)^3}{a^3+b^3}$; г) $\frac{a^3-b^3}{a^2-b^2}$.

34. Найдите значение дроби:

а) $\dfrac{15a^2-10ab}{3ab-2b^2}$ при $a=-2$, $b=-0{,}1$;

б) $\dfrac{9c^2-4d^2}{18c^2d-12cd^2}$ при $c=\dfrac{2}{3}$, $d=\dfrac{1}{2}$;

в) $\dfrac{6x^2+12xy}{5xy+10y^2}$ при $x=\dfrac{2}{3}$, $y=-0{,}4$;

г) $\dfrac{x^2+6xy+9y^2}{4x^2+12xy}$ при $x=-0{,}2$, $y=-0{,}6$.

35. Сократите дробь:

а) $\dfrac{x^2-4x+4}{x^2-2x}$;

б) $\dfrac{3y^2+24y}{y^2+16y+64}$;

в) $\dfrac{a^2+a+1}{a^3-1}$;

г) $\dfrac{b+2}{b^3+8}$.

36. Представьте частное в виде дроби и сократите её:

а) $(9x^2-y^2):(3x+y)$;

б) $(2ab-a):(4b^2-4b+1)$;

в) $(x^2+2x+4):(x^3-8)$;

г) $(1+a^3):(1+a)$.

37. Сократите дробь:

а) $\dfrac{2x+bx-2y-by}{7x-7y}$;

б) $\dfrac{8a+4b}{2ab+b^2-2ad-bd}$;

в) $\dfrac{xy-x+y-y^2}{x^2-y^2}$;

г) $\dfrac{a^2+2ac+c^2}{a^2+ac-ax-cx}$.

38. *(Для работы в парах.)* Постройте график функции:

а) $y=\dfrac{x^2-25}{2x+10}$;

б) $y=\dfrac{x^3-9x}{x^2-9}$.

1) Обсудите, что общего у дробей, задающих функцию в заданиях а) и б). Как надо учитывать эту особенность при построении графиков?

2) Распределите, кто выполняет задание а), а кто — задание б), и выполните их.

3) Проверьте друг у друга, правильно ли выполнено задание. Исправьте замеченные ошибки.

39. Из выражений $\frac{-x}{-y}$, $\frac{-x}{y}$, $\frac{x}{-y}$, $-\frac{-x}{y}$ выпишите те, которые:

а) тождественно равны дроби $\frac{x}{y}$;

б) противоположны дроби $\frac{x}{y}$.

40. Упростите выражение:

а) $\frac{a-b}{b-a}$;

б) $\frac{(a-b)^2}{(b-a)^2}$;

в) $\frac{(a-b)^2}{b-a}$;

г) $\frac{a-b}{(b-a)^2}$;

д) $\frac{-a-b}{a+b}$;

е) $\frac{(a+b)^2}{(-a-b)^2}$;

ж) $\frac{(-a-b)^2}{a+b}$;

з) $\frac{a-b-c}{b+c-a}$.

41. Какой из графиков, изображённых на рисунке 2, является графиком функции $y = \frac{(1-x)^2}{x-1}$?

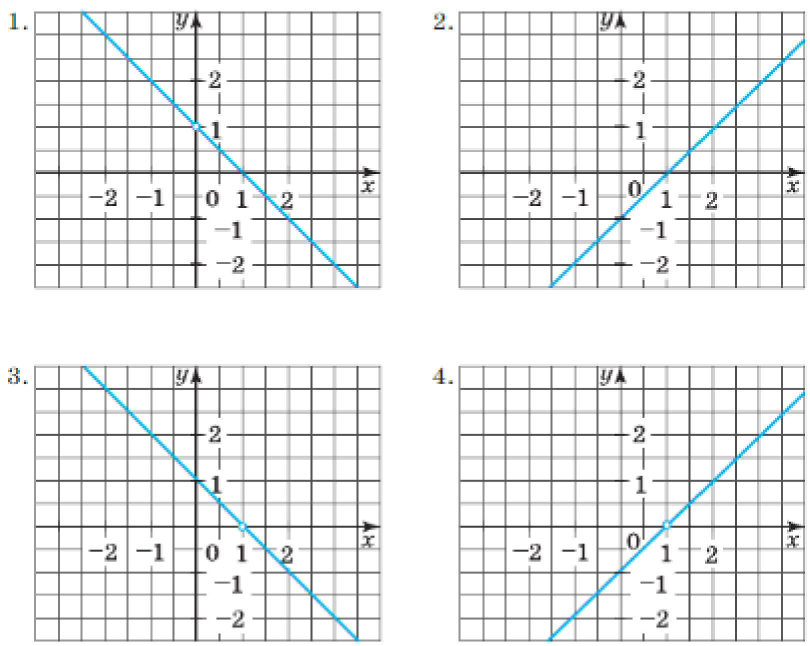


Рис. 2

42. Сократите дробь:

а) $\frac{a(x-2y)}{b(2y-x)}$; г) $\frac{7b-14b^2}{42b^2-21b}$; ж) $\frac{8b^2-8a^2}{a^2-2ab+b^2}$;

б) $\frac{5x(x-y)}{x^3(y-x)}$; д) $\frac{25-a^2}{3a-15}$; з) $\frac{(b-2)^3}{(2-b)^2}$.

в) $\frac{3a-36}{12b-ab}$; е) $\frac{3-3x}{x^2-2x+1}$;

43. Сократите дробь:

а) $\frac{ax+bx-ay-by}{bx-by}$; б) $\frac{ab-3b-2a+6}{15-5a}$.

44. Упростите выражение:

а) $\frac{x^6+x^4}{x^4+x^2}$; б) $\frac{y^6-y^8}{y^4-y^2}$; в) $\frac{b^7-b^{10}}{b^5-b^2}$; г) $\frac{c^6-c^4}{c^3-c^2}$.

45. Найдите значение выражения:

а) $\frac{a^8+a^5}{a^5+a^2}$ при $a=-\frac{1}{2}$; б) $\frac{b^{10}-b^8}{b^8-b^6}$ при $b=-0{,}1$.

46. Сократите дробь:

а) $\frac{(2a-2b)^2}{a-b}$; б) $\frac{(3c+9d)^2}{c+3d}$; в) $\frac{(3x+6y)^2}{5x+10y}$; г) $\frac{4x^2-y^2}{(10x+5y)^2}$.

47. *(Задача-исследование.)* Верно ли, что при всех значениях a, отличных от -2 и 2, значение дроби $\frac{a^2-4}{12+a^2-a^4}$ является отрицательным числом?

1) Выберите произвольное значение a, отличное от -2 и 2, и сравните с нулём соответствующее значение дроби.
2) Обсудите, какое преобразование дроби поможет найти ответ на вопрос задачи.
3) Выполните это преобразование и сделайте вывод.

48. Докажите, что значение дроби не зависит от n, где n — натуральное число:

а) $\frac{3^{n+2}-3^n}{3^{n+2}+3^{n+1}+3^n}$; б) $\frac{16^{n+1}-2^{n+4}}{4\cdot 2^n(2^{3n}-1)}$.

49. Приведите к знаменателю $24a^3b^2$ следующие дроби:

$$\frac{5b}{8a^3},\quad \frac{7a}{3b^2},\quad \frac{1}{2ab},\quad \frac{2}{a^2b^2}.$$

50. Представьте выражение $2a + b$ в виде дроби со знаменателем, равным:

а) b; б) 5; в) $3a$; г) $2a - b$.

51. Приведите дробь:

а) $\frac{x}{a-b}$ к знаменателю $(a-b)^2$;

б) $\frac{y}{x-a}$ к знаменателю $x^2 - a^2$;

в) $\frac{a}{a-10}$ к знаменателю $10 - a$;

г) $\frac{p}{p-2}$ к знаменателю $4 - p^2$;

д) $\frac{mn}{n-m}$ к знаменателю $m^2 - n^2$.

П

52. Решите уравнение:

а) $-5x = 16$; в) $\frac{1}{3}x = 4$; д) $0{,}6x = 3$;

б) $2x = \frac{1}{5}$; г) $4x = -2$; е) $-0{,}7x = 5$.

53. Разложите на множители:

а) $5bc - 5c$; г) $5y - 5x + y^2 - xy$; ж) $y^2 - 2y + 1$;

б) $10n + 15n^2$; д) $a^2 - 9$; з) $a^3 + 64$;

в) $8ab + 12bc$; е) $x^2 + 10x + 25$; и) $b^3 - 1$.

54. Расположите выражения:

а) $\frac{5}{16} : 6$, $\frac{5}{16} \cdot 0{,}1$, $\frac{5}{16} \cdot (-7)$ в порядке возрастания их значений;

б) $0{,}8 \cdot (-0{,}4)$, $0{,}8 : (-0{,}4)$, $0{,}8 - (-0{,}4)$, $0{,}8 + (-0{,}4)$ в порядке убывания их значений.

Контрольные вопросы и задания

1. Приведите примеры целых выражений; дробных выражений.
2. Какую дробь называют рациональной? Приведите пример.
3. Дайте определение тождества. Приведите пример.
4. Сформулируйте и докажите основное свойство дроби.
5. Сформулируйте правило об изменении знака перед дробью.

§ 2 СУММА И РАЗНОСТЬ ДРОБЕЙ

3. Сложение и вычитание дробей с одинаковыми знаменателями

При сложении обыкновенных дробей с одинаковыми знаменателями складывают их числители, а знаменатель оставляют прежним. Например:

$$\frac{2}{7}+\frac{3}{7}=\frac{2+3}{7}=\frac{5}{7}.$$

Таким же образом складывают любые рациональные дроби с одинаковыми знаменателями:

$$\boxed{\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c},}$$

где a, b и c — многочлены, причём c — ненулевой многочлен.

> Чтобы сложить рациональные дроби с одинаковыми знаменателями, надо сложить их числители, а знаменатель оставить тем же.

Вычитание рациональных дробей выполняется аналогично сложению:

$$\boxed{\frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}.}$$

> Чтобы выполнить вычитание рациональных дробей с одинаковыми знаменателями, надо из числителя первой дроби вычесть числитель второй дроби, а знаменатель оставить тем же.

Пример 1. Сложим дроби $\frac{3a-7b}{15ab}$ и $\frac{2a+2b}{15ab}$.

▶ $$\frac{3a-7b}{15ab}+\frac{2a+2b}{15ab}=\frac{3a-7b+2a+2b}{15ab}=$$

$$=\frac{5a-5b}{15ab}=\frac{5(a-b)}{15ab}=\frac{a-b}{3ab}.$$ ◁

Пример 2. Вычтем из дроби $\frac{a^2+9}{5a-15}$ дробь $\frac{6a}{5a-15}$.

▶ $\frac{a^2+9}{5a-15} - \frac{6a}{5a-15} = \frac{a^2+9-6a}{5a-15} = \frac{(a-3)^2}{5(a-3)} = \frac{a-3}{5}$. ◁

Пример 3. Упростим выражение

$$\frac{x^2-3}{x^2+2x} + \frac{2}{x^2+2x} - \frac{2x-1}{x^2+2x}.$$

▶ Здесь удобно сложение и вычитание дробей выполнять не последовательно, а совместно:

$$\frac{x^2-3}{x^2+2x} + \frac{2}{x^2+2x} - \frac{2x-1}{x^2+2x} = \frac{x^2-3+2-(2x-1)}{x^2+2x} =$$

$$= \frac{x^2-1-2x+1}{x^2+2x} = \frac{x^2-2x}{x^2+2x} = \frac{x(x-2)}{x(x+2)} = \frac{x-2}{x+2}. \triangleleft$$

Пример 4. Сложим дроби $\frac{3a}{2x-a}$ и $\frac{6x}{a-2x}$.

▶ Знаменатели дробей являются противоположными выражениями. Изменим знаки в знаменателе второй дроби и перед этой дробью. Получим

$$\frac{6x}{a-2x} = -\frac{6x}{2x-a}.$$

Теперь можно применить правило вычитания дробей с одинаковыми знаменателями:

$$\frac{3a}{2x-a} + \frac{6x}{a-2x} = \frac{3a}{2x-a} - \frac{6x}{2x-a} = \frac{3a-6x}{2x-a} = \frac{-3(2x-a)}{2x-a} = -3. \triangleleft$$

Упражнения

55. Выполните действие:

а) $\frac{x}{3} + \frac{y}{3}$; б) $\frac{5b^2}{a} - \frac{13b^2}{a}$; в) $\frac{x+y}{9} - \frac{x}{9}$; г) $\frac{2c-x}{b} + \frac{x}{b}$.

56. Представьте в виде дроби:

а) $\frac{m}{2p} - \frac{m-p}{2p}$; в) $\frac{7y-13}{10y} - \frac{2y+3}{10y}$;

б) $\frac{a+b}{6} - \frac{a-2b}{6}$; г) $\frac{8c+25}{6c} + \frac{5-2c}{6c}$.

57. Представьте выражение в виде дроби:

а) $\frac{2x-3y}{4xy}+\frac{11y-2x}{4xy}$; в) $\frac{a-2}{8a}+\frac{2a+5}{8a}-\frac{3-a}{8a}$;

б) $\frac{5a+b^5}{8b}-\frac{5a-7b^5}{8b}$; г) $\frac{11a-2b}{4a}+\frac{2a-3b}{4a}-\frac{a-b}{4a}$.

58. Представьте выражение в виде дроби:

а) $\frac{17-12x}{x}-\frac{10-x}{x}$; г) $\frac{3p-q}{5p}-\frac{2p+6q}{5p}+\frac{p-4q}{5p}$;

б) $\frac{12p-1}{3p^2}-\frac{1-3p}{3p^2}$; д) $\frac{5c-2d}{4c}-\frac{3d}{4c}+\frac{d-5c}{4c}$;

в) $\frac{6y-3}{5y}-\frac{y+2}{5y}$; е) $\frac{2a}{b}-\frac{1-6a}{b}+\frac{13-8a}{b}$.

59. Выполните действие:

а) $\frac{16}{x-4}-\frac{x^2}{x-4}$; в) $\frac{3a-1}{a^2-b^2}-\frac{3b-1}{a^2-b^2}$; д) $\frac{2a+b}{(a-b)^2}-\frac{2b-5a}{(a-b)^2}$;

б) $\frac{25}{a+5}-\frac{a^2}{a+5}$; г) $\frac{x-3}{x^2-64}+\frac{11}{x^2-64}$; е) $\frac{13x+6y}{(x+y)^2}-\frac{11x+4y}{(x+y)^2}$.

60. Докажите, что:

а) выражение $\frac{(a+b)^2}{ab}-\frac{(a-b)^2}{ab}$ тождественно равно 4;

б) выражение $\frac{(a+b)^2}{a^2+b^2}+\frac{(a-b)^2}{a^2+b^2}$ тождественно равно 2.

61. Найдите значение выражения:

а) $\frac{a^2-43}{a-6}+\frac{7}{a-6}$ при $a = 10{,}25$; б) $\frac{9b-1}{b^2-9}-\frac{6b-10}{b^2-9}$ при $b = 3{,}5$.

62. Найдите значение выражения $\frac{a^2-12b}{a^2-3ab}-\frac{3ab-4a}{a^2-3ab}$ при $a = -0{,}8$, $b = -1{,}75$. Нет ли в задаче лишних данных?

63. Выполните действие:

а) $\frac{x}{y-1}+\frac{5}{1-y}$; в) $\frac{2m}{m-n}+\frac{2n}{n-m}$; д) $\frac{a^2+16}{a-4}+\frac{8a}{4-a}$;

б) $\frac{a}{c-3}-\frac{6}{3-c}$; г) $\frac{5p}{2q-p}+\frac{10q}{p-2q}$; е) $\frac{x^2+9y^2}{x-3y}+\frac{6xy}{3y-x}$.

64. Выполните действие:

а) $\frac{10p}{p-q}+\frac{3p}{q-p}$; в) $\frac{x-3}{x-1}-\frac{2}{1-x}$; д) $\frac{a}{a^2-9}+\frac{3}{9-a^2}$;

б) $\frac{5a}{a-b}+\frac{5b}{b-a}$; г) $\frac{a}{2a-b}+\frac{3a-b}{b-2a}$; е) $\frac{y^2}{y-1}+\frac{1}{1-y}$.

65. Докажите, что при всех допустимых значениях x значение выражения не зависит от x:

а) $\frac{3x+5}{2x-1}+\frac{7x+3}{1-2x}$; б) $\frac{5x+1}{5x-20}+\frac{x+17}{20-5x}$.

66. Выполните действие:

а) $\frac{x^2}{(x-5)^2}-\frac{25}{(5-x)^2}$; б) $\frac{x^2+25}{(x-5)^3}+\frac{10x}{(5-x)^3}$.

67. Преобразуйте в дробь выражение:

а) $\frac{x^2}{x^2-16}-\frac{8(x-2)}{x^2-16}$; б) $\frac{64-2ab}{(a-8)^2}+\frac{2ab-a^2}{(8-a)^2}$.

68. Пользуясь тождеством $\frac{a+b}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}$, представьте дробь в виде суммы дробей:

а) $\frac{a+b}{x}$; б) $\frac{2a^2+a}{y}$; в) $\frac{x^2+6y^2}{2xy}$; г) $\frac{12a+y^2}{6ay}$.

69. Представьте дробь в виде суммы или разности дробей:

а) $\frac{x^2+y^2}{x^4}$; б) $\frac{2x-y}{b}$; в) $\frac{a^2+1}{2a}$; г) $\frac{a^2-3ab}{a^3}$.

70. Представьте дробь $\frac{5n^2+3n+6}{n}$ в виде суммы двучлена и дроби. Выясните, при каких натуральных n данная дробь принимает натуральные значения.

71. При каких целых значениях m дробь $\frac{(m-1)(m+1)-10}{m}$ принимает целые значения?

72. Решите уравнение:

а) $3(5x-4)-8x=4x+9$;

б) $19x-8(x-3)=66-3x$;

в) $0{,}2(0{,}7x-5)+0{,}02=1{,}4(x-1{,}6)$;

г) $2{,}7(0{,}1x+3{,}2)+0{,}6(1{,}3-x)=16{,}02$.

73. Разложите на множители:

а) $8x^4 - 16x^3y$; г) $18b^2 - 98a^2$; ж) $ab + 8a + 9b + 72$;
б) $15xy^5 + 10y^2$; д) $x^3 - 125$; з) $6m - 12 - 2n + mn$.
в) $8a^2 - 50y^2$; е) $y^3 + 8$;

74. Укажите допустимые значения переменной в выражении:

а) $\frac{3a}{2a+25}$; б) $\frac{2y}{9+y^2}$; в) $\frac{5x}{3x(x+12)}$; г) $\frac{7a}{(a+1)(a-4)}$.

4. Сложение и вычитание дробей с разными знаменателями

Сложение и вычитание рациональных дробей с разными знаменателями сводится к сложению и вычитанию рациональных дробей с одинаковыми знаменателями. Для этого данные дроби приводят к общему знаменателю.

Пример 1. Сложим дроби $\frac{x}{4a^3b}$ и $\frac{5}{6ab^4}$.

▶ Знаменатели дробей представляют собой одночлены. Наиболее простым общим знаменателем является одночлен $12a^3b^4$. Коэффициент этого одночлена равен наименьшему общему кратному коэффициентов знаменателей дробей, а каждая переменная взята с наибольшим показателем, с которым она входит в знаменатели дробей. Разделив общий знаменатель $12a^3b^4$ на знаменатели $4a^3b$ и $6ab^4$, получим, что дополнительные множители к числителям и знаменателям этих дробей соответственно равны $3b^3$ и $2a^2$.

Имеем

$$\frac{x}{4a^3b} + \frac{5}{6ab^4} = \frac{x \cdot 3b^3 + 5 \cdot 2a^2}{12a^3b^4} = \frac{3b^3x + 10a^2}{12a^3b^4}. \quad \triangleleft$$

Пример 2. Преобразуем разность $\frac{a+3}{a^2+ab} - \frac{b-3}{ab+b^2}$.

▶ Чтобы найти общий знаменатель, разложим знаменатель каждой дроби на множители:

$$\frac{a+3}{a^2+ab} - \frac{b-3}{ab+b^2} = \frac{a+3}{a(a+b)} - \frac{b-3}{b(a+b)}.$$

Простейшим общим знаменателем служит выражение $ab(a + b)$. Дополнительные множители к числителям и знаменателям этих дробей соответственно равны b и a.

Имеем

$$\frac{a+3}{a^2+ab}-\frac{b-3}{ab+b^2}=\frac{a+3}{a(a+b)}-\frac{b-3}{b(a+b)}=$$

$$=\frac{(a+3)b-(b-3)a}{ab(a+b)}=\frac{ab+3b-ab+3a}{ab(a+b)}=\frac{3(a+b)}{ab(a+b)}=\frac{3}{ab}. \quad ◁$$

Преобразование рационального выражения, которое является суммой или разностью целого выражения и дроби, сводится к преобразованию суммы или разности дробей.

Пример 3. Упростим выражение $a-1-\frac{a^2-3}{a+1}$.

▶ Представим выражение $a-1$ в виде дроби со знаменателем 1 и выполним вычитание дробей:

$$a-1-\frac{a^2-3}{a+1}=\frac{a-1}{1}-\frac{a^2-3}{a+1}=\frac{(a-1)(a+1)-(a^2-3)}{a+1}=$$

$$=\frac{a^2-1-a^2+3}{a+1}=\frac{2}{a+1}. \quad ◁$$

Пример 4. Докажем равенство $\frac{x+1}{x^2-x}-\frac{x-1}{x^2+x}=\frac{2}{x-1}-\frac{2}{x+1}$.

▶ Преобразуем левую часть равенства:

$$\frac{x+1}{x^2-x}-\frac{x-1}{x^2+x}=\frac{x+1}{x(x-1)}-\frac{x-1}{x(x+1)}=$$

$$=\frac{(x+1)(x+1)-(x-1)(x-1)}{x(x-1)(x+1)}=$$

$$=\frac{x^2+2x+1-x^2+2x-1}{x(x-1)(x+1)}=$$

$$=\frac{4x}{x(x-1)(x+1)}=\frac{4}{(x-1)(x+1)}=\frac{4}{x^2-1}.$$

Преобразуем также правую часть равенства:

$$\frac{2}{x-1}-\frac{2}{x+1}=\frac{2(x+1)-2(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\frac{2x+2-2x+2}{(x-1)(x+1)}=\frac{4}{x^2-1}.$$

В результате преобразований левой и правой частей равенства мы получили одно и то же выражение, следовательно, равенство верно. ◁

Упражнения

75. Представьте в виде дроби:

а) $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}$;   в) $\frac{a}{b}-\frac{b^2}{a}$;   д) $\frac{5x}{8y}+\frac{x}{4y}$;   ж) $\frac{1}{5a}-\frac{8}{25a}$;

б) $\frac{c}{4}-\frac{d}{12}$;   г) $\frac{3}{2x}-\frac{2}{3x}$;   е) $\frac{17y}{24c}-\frac{25y}{36c}$;   з) $\frac{3b}{4c}+\frac{c}{2b}$.

76. Выполните действие:

а) $\frac{5y-3}{6y}+\frac{y+2}{4y}$;   в) $\frac{b+2}{15b}-\frac{3c-5}{45c}$;

б) $\frac{3x+5}{35x}+\frac{x-3}{21x}$;   г) $\frac{8b+y}{40b}-\frac{6y+b}{30y}$.

77. Преобразуйте в дробь выражение:

а) $\frac{15a-b}{12a}-\frac{a-4b}{9a}$;   б) $\frac{7x+4}{8y}-\frac{3x-1}{6y}$.

78. Выполните действие:

а) $\frac{b}{a^2}-\frac{1}{a}$;   в) $\frac{1}{2a^7}+\frac{4-2a^3}{a^{10}}$;   д) $\frac{2a-3b}{a^2b}-\frac{4a-5b}{ab^2}$;

б) $\frac{1-x}{x^3}+\frac{1}{x^2}$;   г) $\frac{a+b}{a^2}+\frac{a-b}{ab}$;   е) $\frac{x-2y}{xy^2}-\frac{2y-x}{x^2y}$.

79. Представьте в виде дроби:

а) $\frac{2xy-1}{4x^3}-\frac{3y-x}{6x^2}$;   в) $\frac{1}{3a^3}-\frac{2}{5a^5}$;

б) $\frac{1-b^2}{3ab}+\frac{2b^3-1}{6ab^2}$;   г) $\frac{b^2}{6x^5}-\frac{b}{3x^6}$.

80. Преобразуйте в дробь выражение:

а) $\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc}$;   в) $\frac{b-a}{ab}+\frac{c-b}{bc}-\frac{c-a}{ac}$;

б) $\frac{ab-b}{a}-\frac{ab-a}{b}-\frac{a^2-b^2}{ab}$;   г) $\frac{3ab+2b^2}{ab}-\frac{a+2b}{a}+\frac{a-2b}{b}$.

81. Выполните вычитание дробей:

а) $\frac{x-y}{xy}-\frac{x-z}{xz}$;   в) $\frac{p-q}{p^3q^2}-\frac{p+q}{p^2q^3}$;

б) $\frac{a-2b}{3b}-\frac{b-2a}{3a}$;   г) $\frac{3m-n}{3m^2n}-\frac{2n-m}{2mn^2}$.

82. Преобразуйте в дробь выражение:

а) $x+\frac{1}{y}$; в) $3a-\frac{a}{4}$; д) $\frac{a^2+b}{a}-a$; ж) $\frac{(a-b)^2}{2a}+b$;

б) $\frac{1}{a}-a$; г) $5b-\frac{2}{b}$; е) $2p-\frac{4p^2+1}{2p}$; з) $c-\frac{(b+c)^2}{2b}$.

83. Преобразуйте в дробь выражение:

а) $5-\frac{c}{2}$; в) $a+b-\frac{a-3}{3}$;

б) $5y^2-\frac{15y^2-1}{3}$; г) $\frac{2b^2-1}{b}-b+5$.

84. Представьте в виде дроби:

а) $1-\frac{a}{5}-\frac{b}{4}$; г) $4a-\frac{a-1}{4}-\frac{a+2}{3}$;

б) $12-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$; д) $\frac{a+b}{4}-a+b$;

в) $\frac{a-2}{2}-1-\frac{a-3}{3}$; е) $a+b-\frac{a^2+b^2}{a}$.

85. Представьте выражение в виде дроби:

а) $x-\frac{x-y}{2}+\frac{x+y}{4}$; в) $3-\frac{2x-y}{4}+\frac{x+4y}{12}$;

б) $\frac{3}{x}-2-\frac{5}{x}$; г) $\frac{6a-4b}{5}-\frac{b+7a}{3}-2$.

86. Представьте выражение в виде дроби:

а) $\frac{b-c}{b}+\frac{b}{b+c}$; в) $\frac{m}{m-n}-\frac{n}{m+n}$; д) $\frac{a}{a+2}-\frac{a}{a-2}$;

б) $\frac{x+1}{x-2}-\frac{x+3}{x}$; г) $\frac{2a}{2a-1}-\frac{1}{2a+1}$; е) $\frac{p}{3p-1}-\frac{p}{1+3p}$.

87. Преобразуйте в дробь выражение:

а) $\frac{3x}{5(x+y)}-\frac{2y}{3(x+y)}$; в) $\frac{3}{ax-ay}+\frac{2}{by-bx}$;

б) $\frac{a^2}{5(a-b)}-\frac{b^2}{4(a-b)}$; г) $\frac{13c}{bm-bn}-\frac{12b}{cn-cm}$.

88. Выполните действие:

а) $\frac{p}{2x+1}-\frac{p}{3x-2}$; в) $\frac{a}{5x-10}+\frac{a}{6x-12}$;

б) $\frac{6a}{x-2y}+\frac{2a}{x+y}$; г) $\frac{5b}{12a-36}-\frac{b}{48-16a}$.

89. Докажите, что при всех допустимых значениях y значение выражения не зависит от y:

а) $\frac{5y+3}{2y+2} - \frac{7y+4}{3y+3}$; б) $\frac{11y+13}{3y-3} + \frac{15y+17}{4-4y}$.

90. Выполните действие:

а) $\frac{a^2}{ax-x^2} + \frac{x}{x-a}$; б) $\frac{b^2-4by}{2y^2-by} - \frac{4y}{b-2y}$.

91. Выполните действие:

а) $\frac{1}{a^2+ab} + \frac{1}{ab+b^2}$; б) $\frac{1}{b^2-ab} - \frac{1}{ab-a^2}$.

92. Преобразуйте в дробь выражение:

а) $1 - \frac{a+b}{a-b}$; в) $m-n+\frac{n^2}{m+n}$; д) $x - \frac{9}{x-3} - 3$;

б) $\frac{a^2+b^2}{a-b} - a$; г) $a+b-\frac{a^2+b^2}{a+b}$; е) $a^2 - \frac{a^4+1}{a^2-1} + 1$.

93. Выполните вычитание дробей:

а) $\frac{a^2+3a}{ab-5b+8a-40} - \frac{a}{b+8}$; б) $\frac{y}{3x-2} - \frac{3y}{6xy+9x-4y-6}$.

94. Выполните действие:

а) $\frac{c}{b-c} + \frac{b^2-3bc}{b^2-c^2}$; б) $\frac{a+3}{a^2-1} - \frac{1}{a^2+a}$.

95. Преобразуйте в дробь выражение:

а) $\frac{b-6}{4-b^2} + \frac{2}{2b-b^2}$; в) $\frac{x-12a}{x^2-16a^2} - \frac{4a}{4ax-x^2}$;

б) $\frac{b}{ab-5a^2} - \frac{15b-25a}{b^2-25a^2}$; г) $\frac{a-30y}{a^2-100y^2} - \frac{10y}{10ay-a^2}$.

96. Выполните действие:

а) $\frac{a+4}{a^2-2a} - \frac{a}{a^2-4}$; в) $\frac{(a+b)^2}{a^2+ab} + \frac{(a-b)^2}{a^2-ab}$;

б) $\frac{4-x^2}{16-x^2} - \frac{x+1}{x+4}$; г) $\frac{x^2-4}{5x-10} - \frac{x^2+4x+4}{5x+10}$.

97. Упростите выражение и найдите его значение при $x = -1,5$:

а) $\frac{x+1}{x^2-x} - \frac{x+2}{x^2-1}$; б) $\frac{x+2}{x^2+3x} - \frac{1+x}{x^2-9}$.

98. Представьте в виде дроби:

а) $\frac{4}{y+2} - \frac{3}{y-2} + \frac{12}{y^2-4}$; в) $\frac{x^2}{(x-y)^2} - \frac{x+y}{2x-2y}$;

б) $\frac{a}{a-6} - \frac{3}{a+6} + \frac{a^2}{36-a^2}$; г) $\frac{b}{(a-b)^2} - \frac{a+b}{b^2-ab}$.

99. Преобразуйте в дробь выражение:

а) $\frac{2a+b}{2a^2-ab} - \frac{16a}{4a^2-b^2} - \frac{2a-b}{2a^2+ab}$;

б) $\frac{1}{(a-3)^2} - \frac{2}{a^2-9} + \frac{1}{(a+3)^2}$;

в) $\frac{x-2}{x^2+2x+4} - \frac{6x}{x^3-8} + \frac{1}{x-2}$;

г) $\frac{2a^2+7a+3}{a^3-1} - \frac{1-2a}{a^2+a+1} - \frac{3}{a-1}$.

100. Выполните действие:

а) $\frac{1}{a-4b} - \frac{1}{a+4b} - \frac{2a}{16b^2-a^2}$;

б) $\frac{1}{2b-2a} + \frac{1}{2b+2a} + \frac{a^2}{a^2b-b^3}$.

101. Докажите, что тождественно равны выражения:

а) $\frac{3}{a^2-3a} + \frac{a^2}{a-3}$ и $a+3+\frac{9a+3}{a^2-3a}$;

б) $\frac{a^3}{a^2-4} - \frac{a}{a-2} - \frac{2}{a+2}$ и $a-1$.

102. *(Для работы в парах.)* Докажите, что при любых допустимых значениях переменной значение выражения:

а) $\frac{x^3+3x}{x+2} - \frac{3x^2-14x+16}{x^2-4} + 2x$ является положительным числом;

б) $y + \frac{2y^2+3y+1}{y^2-1} - \frac{y^3+2y}{y-1}$ является отрицательным числом.

1) Распределите, кто выполняет задание а), а кто — задание б), и выполните их.
2) Проверьте друг у друга, правильно ли выполнены преобразования.
3) Обсудите, для чего в условии указано, что рассматриваются допустимые значения переменных. Укажите допустимые значения переменной в заданиях а) и б).

103. Учащимся была поставлена задача: «Представить дробь $\frac{x^2+7x-25}{x-5}$ в виде суммы целого выражения и дроби». Были получены ответы:

1. $x+5+\frac{7x}{x-5}$ 2. $x+12+\frac{35}{x-5}$ 3. $-x+\frac{2x-25}{x-5}$ 4. $x+\frac{12x-25}{x-5}$

Укажите неверный ответ.

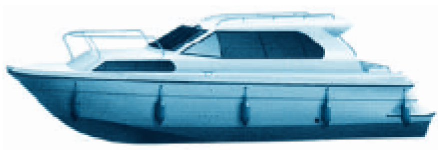
104. Докажите тождество

$$\frac{1}{x+n}-\frac{1}{x+n+1}=\frac{1}{(x+n)(x+n+1)}.$$

Используя это тождество, упростите выражение

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)}+\frac{1}{(x+3)(x+4)}.$$

105. Две речные пристани A и B расположены на расстоянии s км друг от друга. Между ними курсирует катер, скорость которого в стоячей воде равна v км/ч. Сколько времени t ч потребуется катеру на путь от A до B и обратно, если скорость течения реки равна 5 км/ч? Найдите t при:



а) $s = 50$, $v = 25$;
б) $s = 105$, $v = 40$.

106. Туристы прошли s км по шоссе со скоростью v км/ч и вдвое больший путь по просёлочной дороге. Сколько времени t ч затратили туристы, если известно, что по просёлочной дороге они шли со скоростью, на 2 км/ч меньшей, чем по шоссе? Найдите t при $s = 10$, $v = 6$.

П

107. Функция задана формулой $y=\frac{2x-5}{3}$. Найдите значение функции при x, равном -2; 0; 16. При каком x значение функции равно 3; 0; -9?

108. Постройте графики функций $y = -4x + 1$ и $y = 2x - 3$ и найдите координаты точки их пересечения. Ту же задачу решите без построения графиков. Сравните полученные ответы.

109. В одну силосную яму заложили 90 т силоса, а в другую — 75 т. Когда из первой ямы взяли силоса в 3 раза больше, чем из второй, в первой яме силоса осталось в 2 раза меньше, чем во второй. Сколько тонн силоса взяли из первой ямы?

Контрольные вопросы и задания

1. Сформулируйте правило сложения дробей с одинаковыми знаменателями.
2. Сформулируйте правило вычитания дробей с одинаковыми знаменателями.
3. Как выполняют сложение и вычитание дробей с разными знаменателями? Поясните свой ответ на примерах:

   а) $\frac{a+2}{a^2-ab}+\frac{b-2}{b^2-ab}$; б) $\frac{8}{a^2-16}-\frac{4}{a^2-4a}$.

§ 3 ПРОИЗВЕДЕНИЕ И ЧАСТНОЕ ДРОБЕЙ

5. Умножение дробей. Возведение дроби в степень

При умножении обыкновенных дробей перемножают отдельно их числители и их знаменатели и первое произведение записывают в числителе, а второе — в знаменателе дроби. Например:

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}=\frac{2\cdot4}{3\cdot5}=\frac{8}{15}.$$

Таким же образом перемножают любые рациональные дроби:

$$\boxed{\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd},}$$

где a, b, c и d — некоторые многочлены, причём b и d — ненулевые многочлены.

Чтобы умножить дробь на дробь, нужно перемножить их числители и перемножить их знаменатели и первое произведение записать в числителе, а второе — в знаменателе дроби.

Полученное выражение затем упрощают при возможности.

Пример 1. Умножим дробь $\frac{a^3}{4b^2}$ на дробь $\frac{6b}{a^2}$.

▶ Воспользуемся правилом умножения дробей:

$$\frac{a^3}{4b^2}\cdot\frac{6b}{a^2}=\frac{a^3\cdot6b}{4b^2\cdot a^2}=\frac{3a}{2b}.\ \triangleleft$$

Пример 2. Умножим дробь $\frac{pm+2p}{m}$ на дробь $\frac{pm^2}{m^2-4}$.

▶ Имеем $\frac{pm+2p}{m} \cdot \frac{pm^2}{m^2-4} = \frac{p(m+2) \cdot pm^2}{m \cdot (m-2)(m+2)} = \frac{p^2m}{m-2}$. ◁

Пример 3. Представим произведение $\frac{x-1}{x+2} \cdot \frac{x+1}{x}$ в виде рациональной дроби.

▶ Имеем $\frac{x-1}{x+2} \cdot \frac{x+1}{x} = \frac{(x-1) \cdot (x+1)}{(x+2) \cdot x} = \frac{x^2-1}{x^2+2x}$. ◁

Пример 4. Умножим дробь $\frac{x+a}{x-a}$ на многочлен $x^2 - a^2$.

▶ При умножении дроби на многочлен этот многочлен записывают в виде дроби со знаменателем 1 и затем применяют правило умножения дробей:

$$\frac{x+a}{x-a} \cdot (x^2 - a^2) = \frac{x+a}{x-a} \cdot \frac{x^2-a^2}{1} =$$

$$= \frac{(x+a)(x-a)(x+a)}{x-a} = (x+a)^2. \quad ◁$$

Правило умножения дробей распространяется на произведение трёх и более рациональных дробей.

Например:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{m}{n} = \frac{ac}{bd} \cdot \frac{m}{n} = \frac{acm}{bdn}.$$

Выясним теперь, как выполняется возведение рациональной дроби в степень.

Рассмотрим выражение $\left(\frac{a}{b}\right)^n$, являющееся n-й степенью рациональной дроби $\frac{a}{b}$, и докажем, что

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

● По определению степени имеем

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \ldots \cdot \frac{a}{b}}_{n \text{ раз}}.$$

Применяя правило умножения рациональных дробей и определение степени, получим

$$\underbrace{\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\ldots\cdot\frac{a}{b}}_{n\text{ раз}}=\frac{\overbrace{aa\cdot\ldots\cdot a}^{n\text{ раз}}}{\underbrace{bb\cdot\ldots\cdot b}_{n\text{ раз}}}=\frac{a^n}{b^n}.$$

Следовательно, $\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}.}$ ○

Чтобы возвести дробь в степень, надо возвести в эту степень числитель и знаменатель и первый результат записать в числителе, а второй — в знаменателе дроби.

Пример 5. Возведём дробь $\frac{2a^2}{b^4}$ в третью степень.

▶ Воспользуемся правилом возведения в степень:

$$\left(\frac{2a^2}{b^4}\right)^3=\frac{(2a^2)^3}{(b^4)^3}=\frac{8a^6}{b^{12}}. \quad ◁$$

Упражнения

110. Выполните умножение:

а) $\frac{5}{3a}\cdot\frac{2b}{3}$; б) $\frac{5a}{8y}\cdot\frac{7}{10}$; в) $\frac{b^2}{10}\cdot\frac{5}{b}$; г) $\frac{18}{c^4}\cdot\frac{c^3}{24}$.

111. Представьте в виде дроби:

а) $\frac{3x}{4y}\cdot\frac{10}{3x^2}$; б) $\frac{2,5}{2a^2}\cdot\frac{4a^3}{5b^2}$; в) $\frac{7a^3}{24b}\cdot 8b^2$; г) $14ab\cdot\frac{1}{21b^3}$.

112. Выполните умножение:

а) $\frac{12}{5x}\cdot\frac{x^3}{12a}$; б) $\frac{8c^2}{15m}\cdot\frac{1}{4c^2}$; в) $\frac{11a^4}{6}\cdot\frac{12b}{a^5}$; г) $\frac{4n^2}{3m^2}\cdot\frac{9m}{2}$.

113. Преобразуйте в дробь выражение:

а) $15x^2\cdot\frac{7}{6x^3}$; б) $\frac{25}{16y^2}\cdot 2y^2$; в) $6am^2\cdot\frac{4a}{3m^3}$; г) $\frac{2b}{5a^3}\cdot 10a^2$.

114. Упростите выражение:

а) $\frac{48x^5}{49y^4}\cdot\frac{7y^2}{16x^3}$; в) $\frac{72x^4}{25y^5}\cdot\left(-\frac{2,5y^4}{27x^5}\right)$;

б) $\frac{18m^3}{11n^3}\cdot\frac{22n^4}{9m^2}$; г) $-\frac{35ax^2}{12b^2y}\cdot\frac{8ab}{21xy}$.

115. Выполните умножение:

а) $-\frac{10x^2y^2}{9a^2}\cdot\frac{27a^3}{5xy}$; в) $\frac{13x}{12mn^2}\cdot 4m^2n$;

б) $\frac{2m^3}{35a^3b^2}\cdot\left(-\frac{7a^2b}{6m}\right)$; г) $-ab\cdot\left(-\frac{11x^2}{3a^2b^2}\right)$.

116. Упростите выражение:

а) $\frac{2a^2b}{3xy}\cdot\frac{3x^2y}{4ab^2}\cdot\frac{6ax}{15b^2}$; б) $\frac{6m^3n^2}{35p^3}\cdot\frac{49n^4}{m^5p^3}\cdot\frac{5m^4p^2}{42n^6}$.

117. Возведите в степень:

а) $\left(\frac{x}{2y}\right)^3$; б) $\left(\frac{3a}{c}\right)^4$; в) $\left(\frac{n^2}{10m}\right)^3$; г) $\left(\frac{9a^3}{2b^2}\right)^2$.

118. Возведите в степень:

а) $\left(\frac{2a}{p^2q^3}\right)^4$; б) $\left(\frac{3a^2b^3}{s^4}\right)^2$; в) $\left(-\frac{2a^2b}{3mn^3}\right)^2$; г) $\left(-\frac{3x^2}{2y^3}\right)^3$.

119. Представьте в виде дроби:

а) $\left(\frac{5a^3}{3b^2}\right)^4$; б) $\left(\frac{2x^2}{3y^3}\right)^5$; в) $\left(-\frac{10m^2}{n^2p}\right)^3$; г) $\left(-\frac{b^3c^2}{8a^3}\right)^2$.

120. Зная, что $a-\frac{5}{a}=2$, найдите значение выражения $a^2+\frac{25}{a^2}$.

121. Выполните умножение:

а) $\frac{x^2-xy}{y}\cdot\frac{y^2}{x}$; г) $\frac{4ab}{cx+dx}\cdot\frac{ax+bx}{2ab}$;

б) $\frac{3a}{b^2}\cdot\frac{ab+b^2}{9}$; д) $\frac{ma-mb}{3n^2}\cdot\frac{2m}{nb-na}$;

в) $\frac{m-n}{mn}\cdot\frac{2mn}{mn-m^2}$; е) $\frac{ax-ay}{5x^2y^2}\cdot\left(-\frac{5xy}{by-bx}\right)$.

122. Выполните умножение:

а) $(3a-15b)\cdot\frac{8}{a^2-25b^2}$; в) $\frac{y}{3y^2-12}\cdot(y^2-4y+4)$;

б) $(x^2-4)\cdot\frac{2x}{(x+2)^2}$; г) $\frac{2ab}{a^2-6ab+9b^2}\cdot(a^2-9b^2)$.

123. Представьте в виде дроби:

а) $\frac{xy}{a^2+a^3}\cdot\frac{a+a^2}{x^2y^2}$; б) $\frac{6a}{x^2-x}\cdot\frac{2x-2}{3ax}$.

124. Упростите выражение:

а) $\frac{y^2-16}{10xy}\cdot\frac{5y}{3y+12}$; б) $\frac{b-a}{a}\cdot\frac{3ab}{a^2-b^2}$.

125. Представьте в виде дроби:

а) $\frac{a^2-1}{a-b}\cdot\frac{7a-7b}{a^2+a}$; в) $\frac{(x+3)^2}{2x-4}\cdot\frac{x^2-4}{3x+9}$;

б) $\frac{b^2+2bc}{b+3}\cdot\frac{5b+15}{b^2-4c^2}$; г) $\frac{(5-y)^2}{2y+12}\cdot\frac{y^2-36}{2y-10}$.

126. Найдите значение выражения:

а) $\frac{5mn-m}{4m+n}\cdot\frac{16m^2-n^2}{5n-1}$, если $m=\frac{1}{4}$, $n=-3$;

б) $\frac{(x+2)^2}{3x+9}\cdot\frac{2x+6}{x^2-4}$, если $x=0{,}5; -1{,}5$.

127. Выполните умножение:

а) $\frac{a^2-b^2}{a^2-3a}\cdot\frac{2a-6}{b^2+2ab+a^2}$; б) $\frac{bx+3b}{x^2-25}\cdot\frac{25-10x+x^2}{ax+3a}$.

128. Представьте в виде дроби:

а) $\frac{mx^2-my^2}{2m+8}\cdot\frac{3m+12}{my+mx}$; в) $\frac{x^3-y^3}{x+y}\cdot\frac{x^2-y^2}{x^2+xy+y^2}$;

б) $\frac{ax+ay}{x^2-2xy+y^2}\cdot\frac{x^2-xy}{7x+7y}$; г) $\frac{a^2-1}{a^3+1}\cdot\frac{a^2-a+1}{a^2+2a+1}$.

129. Упростите выражение:

а) $\frac{x^2-10x+25}{3x+12}\cdot\frac{x^2-16}{2x-10}$; в) $\frac{y^2-25}{y^2+12y+36}\cdot\frac{3y+18}{2y+10}$;

б) $\frac{1-a^2}{4a+8b}\cdot\frac{a^2+4ab+4b^2}{3-3a}$; г) $\frac{b^3+8}{18b^2+27b}\cdot\frac{2b+3}{b^2-2b+4}$.

130. Докажите, что если дробь $\frac{a}{b}$ является квадратом дроби, то и произведение ab можно представить в виде квадрата некоторого выражения.

П

131. Упростите выражение

$$\frac{a^2-4ac+3bc}{a^2-ab+bc-ac}+\frac{a+3b}{b-a}+\frac{a+2c}{a-c}.$$

132. Первые 30 км велосипедист ехал со скоростью v км/ч, а остальные 17 км — со скоростью, на 2 км/ч большей. Сколько времени t ч затратил велосипедист на весь путь? Найдите t, если: а) $v = 15$; б) $v = 18$.

133. Выразите x через a и b:

а) $3x + b = a$; б) $b - 7x = a - b$; в) $\frac{x}{a} + 1 = b$; г) $b - \frac{x}{10} = a$.

6. Деление дробей

При делении обыкновенных дробей первую дробь умножают на дробь, обратную второй. Например:

$$\frac{3}{8} : \frac{2}{5} = \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{2} = \frac{15}{16}.$$

Так же поступают при делении любых рациональных дробей:

$$\boxed{\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c},}$$

где a, b, c и d — некоторые многочлены, причём b, c и d — ненулевые многочлены.

Это равенство выражает *правило деления рациональных дробей*:

> чтобы разделить одну дробь на другую, нужно первую дробь умножить на дробь, обратную второй.

Пример 1. Разделим дробь $\frac{7a^2}{b^3}$ на дробь $\frac{14a}{b}$.

▶ Воспользуемся правилом деления дробей:

$$\frac{7a^2}{b^3} : \frac{14a}{b} = \frac{7a^2}{b^3} \cdot \frac{b}{14a} = \frac{a}{2b^2}. \quad \triangleleft$$

Пример 2. Разделим дробь $\frac{x-2}{x}$ на дробь $\frac{x+1}{x+2}$.

▶ Имеем $\frac{x-2}{x} : \frac{x+1}{x+2} = \frac{x-2}{x} \cdot \frac{x+2}{x+1} = \frac{(x-2)(x+2)}{x(x+1)} = \frac{x^2-4}{x^2+x}$. ◁

Пример 3. Разделим дробь $\frac{a^2-9}{3y}$ на многочлен $a + 3$.

▶ При делении дроби на многочлен этот многочлен записывают в виде дроби, затем применяют правило деления дробей:

$$\frac{a^2-9}{3y}:(a+3)=\frac{a^2-9}{3y}:\frac{a+3}{1}=\frac{a^2-9}{3y}\cdot\frac{1}{a+3}=\frac{a-3}{3y}. \ \triangleleft$$

Упражнения

134. Выполните деление:

а) $\frac{5m}{6n}:\frac{15m^2}{8}$; в) $\frac{a^2}{12b}:\frac{ab}{36}$; д) $\frac{11x}{4y^2}:(22x^2)$; ж) $\frac{18c^4}{7d}:(9c^2d)$;

б) $\frac{14}{9x^3}:\frac{7x}{2y^2}$; г) $\frac{3x}{10a^3}:\frac{1}{5a^2}$; е) $27a^3:\frac{18a^4}{7b^2}$; з) $35x^5y:\frac{7x^3}{34}$.

135. Упростите выражение:

а) $\frac{6x^2}{5y}:\frac{3x}{10y^3}$; в) $\frac{3ab}{4xy}:\left(-\frac{21a^2b}{10x^2y}\right)$;

б) $\frac{8c}{21d^2}:\frac{6c^2}{7d}$; г) $-\frac{18a^2b^2}{5cd}:\left(-\frac{9ab^3}{5c^2d^4}\right)$.

136. Выполните деление:

а) $\frac{6x^2}{m^3n}:\frac{x}{3mn^2}$; в) $\frac{8mx^2}{3y^3}:(4m^2x)$;

б) $\frac{35x^2y}{12ab}:\frac{7xy}{8ab^2}$; г) $15a^2bx:\frac{a^3b^2}{30x^2}$.

137. Представьте в виде дроби:

а) $\frac{3x^2}{5y^3}:\frac{9x^3}{2y^2}\cdot\frac{5y}{3x}$; б) $\frac{7p^4}{10q^3}\cdot\frac{5q}{14p^2}:\frac{3p}{4q^4}$.

138. Упростите выражение:

а) $\frac{11m^4}{6n^2}\cdot\frac{5m}{6n^3}:\frac{11n^3}{12m^3}$; б) $\frac{8x^3}{7y^3}:\frac{4x^4}{49y^2}:\frac{7x}{y^2}$.

139. Представьте выражение в виде дроби и сократите её:

а) $(x + 3y) : (x^2 - 9y^2)$;
б) $(a^2 - 6ab + 9b^2) : (a^2 - 9b^2)$;
в) $(x^2 - 49y^2) : (49y^2 + 14xy + x^2)$;
г) $(m - 4n)^2 : (32n^2 - 2m^2)$.

140. Выполните деление:

а) $\dfrac{m^2-3m}{8x^2}:\dfrac{3m}{8x}$;

б) $\dfrac{5a^2}{6b^3}:\dfrac{a^3}{ab-b^2}$;

в) $\dfrac{x^2+x^3}{11a^2}:\dfrac{4+4x}{a^3}$;

г) $\dfrac{6ax}{m^2-2m}:\dfrac{8ax}{3m-6}$;

д) $\dfrac{a^2-3ab}{3b}:(7a-21b)$;

е) $(x^2-4y^2):\dfrac{5x-10y}{x}$;

ж) $(2a-b)^2:\dfrac{4a^3-ab^2}{3}$;

з) $(10m-15n):\dfrac{(2m-3n)^2}{2m}$.

141. Выполните действие:

а) $\dfrac{x^2-xy}{9y^2}:\dfrac{2x}{3y}$;

б) $\dfrac{2a^3-a^2b}{36b^2}:\dfrac{2a-b}{9b^3}$;

в) $(m^2-16n^2):\dfrac{3m+12n}{mn}$;

г) $\dfrac{9p^2-1}{pq-2q}:\dfrac{1-3p}{3p-6}$.

142. Найдите значение выражения:

а) $\dfrac{4x^2-4x}{x+3}:(2x-2)$, если $x=2{,}5;\ -1$;

б) $(3a+6b):\dfrac{2a^2-8b^2}{a+b}$, если $a=26$, $b=-12$.

143. Выполните деление:

а) $\dfrac{3x+6y}{x^2-y^2}:\dfrac{5x+10y}{x^2-2xy+y^2}$;

б) $\dfrac{a^2+4a+4}{16-b^4}:\dfrac{4-a^2}{4+b^2}$.

144. Выполните действие:

а) $\dfrac{a^2+ax+x^2}{x-1}:\dfrac{a^3-x^3}{x^2-1}$;

б) $\dfrac{ap^2-9a}{p^3-8}:\dfrac{p+3}{2p-4}$.

145. Из формулы $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{c}$ выразите:

а) переменную c через a и b;

б) переменную b через a и c.

П

146. Выполните действия:

а) $\dfrac{2b}{2b+3}-\dfrac{5}{3-2b}-\dfrac{4b^2+9}{4b^2-9}$;

б) $\dfrac{c+6b}{ac+2bc-6ab-3a^2}+\dfrac{2b}{a^2+2ab}-\dfrac{b}{ac-3a^2}$.

147. От пристани против течения реки отправилась моторная лодка, собственная скорость которой 10 км/ч. Через 45 мин после выхода лодки у неё испортился мотор, и её течением через 3 ч принесло обратно к пристани. Какова скорость течения реки?

148. Из формулы $y = \frac{ab}{2c}$ выразите:

а) переменную c через a, b и y;
б) переменную a через b, c и y.

149. В каких координатных четвертях расположен график функции $y = kx$, если $k > 0$? если $k < 0$?

7. Преобразование рациональных выражений

Рациональное выражение

$$\left(\frac{x-y}{x+y} + \frac{2y}{x-y}\right):(x^2 - 3y^2)$$

представляет собой частное от деления суммы рациональных дробей на многочлен. Деление на $x^2 - 3y^2$ можно заменить умножением на дробь $\frac{1}{x^2 - 3y^2}$. Поэтому преобразование данного выражения сводится к сложению дробей $\frac{x-y}{x+y}$, $\frac{2y}{x-y}$ и умножению результата на дробь $\frac{1}{x^2 - 3y^2}$. Вообще преобразование любого рационального выражения можно свести к сложению, вычитанию, умножению или делению рациональных дробей.

Из правил действий с дробями следует, что сумму, разность, произведение и частное рациональных дробей всегда можно представить в виде рациональной дроби. Значит, и всякое рациональное выражение можно представить в виде рациональной дроби.

Пример 1. Преобразуем в рациональную дробь выражение

$$x + 1 - \frac{1}{x+2} \cdot \frac{x^2-4}{x}.$$

▶ Сначала выполним умножение дробей, затем полученный результат вычтем из многочлена $x + 1$:

1) $\frac{1}{x+2} \cdot \frac{x^2-4}{x} = \frac{(x-2)(x+2)}{(x+2)x} = \frac{x-2}{x}$;

2) $x+1-\frac{x-2}{x}=\frac{x(x+1)-(x-2)}{x}=\frac{x^2+x-x+2}{x}=\frac{x^2+2}{x}$. ◁

Запись можно вести иначе:

$$x+1-\frac{1}{x+2}\cdot\frac{x^2-4}{x}=x+1-\frac{(x-2)(x+2)}{(x+2)x}=x+1-\frac{x-2}{x}=$$

$$=\frac{x^2+x-x+2}{x}=\frac{x^2+2}{x}.$$

Пример 2. Представим выражение

$$\left(\frac{b}{a^2-ab}+\frac{a}{ab-b^2}\right)\cdot\frac{a^2b+ab^2}{a^2+b^2}+1$$

в виде рациональной дроби.

▶ Сначала сложим дроби, заключённые в скобки, затем найденный результат умножим на дробь $\frac{a^2b+ab^2}{a^2+b^2}$ и, наконец, к полученному произведению прибавим 1:

1) $\frac{b}{a^2-ab}+\frac{a}{ab-b^2}=\frac{b}{a(a-b)}+\frac{a}{b(a-b)}=\frac{b^2+a^2}{ab(a-b)}$;

2) $\frac{b^2+a^2}{ab(a-b)}\cdot\frac{a^2b+ab^2}{a^2+b^2}=\frac{(a^2+b^2)\cdot ab(a+b)}{ab(a-b)\cdot(a^2+b^2)}=\frac{a+b}{a-b}$;

3) $\frac{a+b}{a-b}+1=\frac{a+b+a-b}{a-b}=\frac{2a}{a-b}$. ◁

Пример 3. Представим выражение $\dfrac{\frac{x}{y}-\frac{y}{x}}{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-2}$ в виде рациональной дроби.

▶ Преобразование можно вести по-разному. Можно представить в виде рациональных дробей отдельно числитель и знаменатель, а затем разделить первый результат на второй. А можно умножить числитель и знаменатель на xy, воспользовавшись основным свойством дроби:

$$\frac{\frac{x}{y}-\frac{y}{x}}{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-2}=\frac{\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right)xy}{\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-2\right)xy}=\frac{\frac{x}{y}\cdot xy-\frac{y}{x}\cdot xy}{\frac{x}{y}\cdot xy+\frac{y}{x}\cdot xy-2xy}=$$

$$=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2-2xy}=\frac{(x-y)(x+y)}{(x-y)^2}=\frac{x+y}{x-y}.\ ◁$$

Пример 4. Пешеход отправился из посёлка A на станцию B со скоростью v_1 км/ч. Придя на станцию, он обнаружил, что оставил дома необходимые документы, и возвратился обратно в посёлок со скоростью v_2 км/ч. Взяв документы, он снова пошёл на станцию со скоростью v_3 км/ч. Выясните, какой была средняя скорость пешехода на всём пройденном им пути.

▶ Пусть расстояние AB равно s км. Тогда на путь от A до B пешеход затратил сначала $\frac{s}{v_1}$ ч, на путь от B до A — $\frac{s}{v_2}$ ч, а на повторное прохождение пути от A до B — $\frac{s}{v_3}$ ч. На весь путь пешеход затратил $\frac{s}{v_1}+\frac{s}{v_2}+\frac{s}{v_3}$ ч. За это время он прошёл $3s$ км. Теперь можно найти среднюю скорость $v_{\text{ср}}$ пешехода на всём пути:

$$v_{\text{ср}} = \frac{3s}{\frac{s}{v_1}+\frac{s}{v_2}+\frac{s}{v_3}}.$$

Сократив данную дробь на s, найдём, что

$$v_{\text{ср}} = \frac{3}{\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}+\frac{1}{v_3}}. \quad \triangleleft$$

Мы получили формулу для вычисления средней скорости движения при условии, что известны скорости v_1, v_2, v_3 на каждом из трёх участков одинаковой длины. Из полученного равенства видно, что средняя скорость движения пешехода не равна среднему арифметическому скоростей v_1, v_2 и v_3. Она вычисляется по более сложной формуле, которую называют формулой *среднего гармонического* трёх чисел.

Средняя скорость движения на двух участках пути одинаковой длины вычисляется по формуле среднего гармонического двух чисел:

$$v_{\text{ср}} = \frac{2}{\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}},$$

где v_1 и v_2 — скорости на этих участках.

Средняя скорость движения на четырёх участках пути одинаковой длины вычисляется по формуле среднего гармонического четырёх чисел:

$$v_{\text{ср}} = \frac{4}{\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}+\frac{1}{v_3}+\frac{1}{v_4}},$$

где v_1, v_2, v_3, v_4 — скорости на этих участках.

Вообще если мы имеем некоторый ряд положительных чисел a_1, a_2, ..., a_n, то среднее гармоническое этого ряда вычисляется по формуле

$$a_{\text{ср}} = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}.$$

Эту формулу иногда записывают в другом виде:

$$\frac{1}{a_{\text{ср}}} = \frac{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}{n}.$$

Из этой записи видно, что величина, обратная среднему гармоническому нескольких положительных чисел, равна среднему арифметическому чисел, им обратных.

Упражнения

150. Выполните действия:

а) $\left(\frac{x}{y^2} - \frac{1}{x}\right) : \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{x}\right)$;

б) $\left(\frac{a}{m^2} + \frac{a^2}{m^3}\right) : \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{m}{a}\right)$;

в) $\frac{ab + b^2}{3} : \frac{b^3}{3a} + \frac{a + b}{b}$;

г) $\frac{x - y}{x} - \frac{5y}{x^2} \cdot \frac{x^2 - xy}{5y}$.

151. Выполните действия:

а) $\left(\frac{x}{x + 1} + 1\right) \cdot \frac{1 + x}{2x - 1}$;

б) $\left(\frac{5y^2}{1 - y^2}\right) : \left(1 - \frac{1}{1 - y}\right)$;

в) $\left(\frac{4a}{2 - a} - a\right) : \frac{a + 2}{a - 2}$;

г) $\frac{x - 2}{x - 3} \cdot \left(x + \frac{x}{2 - x}\right)$.

152. Упростите выражение:

а) $\left(\frac{2m + 1}{2m - 1} - \frac{2m - 1}{2m + 1}\right) : \frac{4m}{10m - 5}$;

б) $\frac{x + 3}{x^2 + 9} \cdot \left(\frac{x + 3}{x - 3} + \frac{x - 3}{x + 3}\right)$.

153. Выполните действия:

а) $\frac{a^2 - 9}{2a^2 + 1} \cdot \left(\frac{6a + 1}{a - 3} + \frac{6a - 1}{a + 3}\right)$;

б) $\left(\frac{5x + y}{x - 5y} + \frac{5x - y}{x + 5y}\right) : \frac{x^2 + y^2}{x^2 - 25y^2}$.

154. Выполните действия:

а) $\frac{a^2-25}{a+3}\cdot\frac{1}{a^2+5a}-\frac{a+5}{a^2-3a}$;

б) $\frac{1-2x}{2x+1}+\frac{x^2+3x}{4x^2-1}:\frac{3+x}{4x+2}$;

в) $\frac{b-c}{a+b}-\frac{ab-b^2}{a^2-ac}\cdot\frac{a^2-c^2}{a^2-b^2}$;

г) $\frac{a^2-4}{x^2-9}:\frac{a^2-2a}{xy+3y}+\frac{2-y}{x-3}$.

155. Упростите выражение:

а) $(a^2+2a+1)\cdot\left(\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a^2-1}-\frac{1}{a-1}\right)$;

б) $\left(1-\frac{9x^2+4}{12x}\right):\left(\frac{1}{3x}-\frac{1}{2}\right)+1$;

в) $1-\left(\frac{2}{a-2}-\frac{2}{a+2}\right)\cdot\left(a-\frac{3a+2}{4}\right)$;

г) $(y^2-4)\left(\frac{3}{y+2}-\frac{2}{y-2}\right)+5$.

156. Выполните действия:

а) $\left(\frac{1}{y}+\frac{2}{x-y}\right)\left(x-\frac{x^2+y^2}{x+y}\right)$;

б) $\left(a+b-\frac{2ab}{a+b}\right):\left(\frac{a-b}{a+b}+\frac{b}{a}\right)$;

в) $(x^2-1)\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}+1\right)$;

г) $\left(m+1-\frac{1}{1-m}\right):\left(m-\frac{m^2}{m-1}\right)$.

157. Упростите выражение:

а) $\frac{4xy}{y^2-x^2}:\left(\frac{1}{y^2-x^2}+\frac{1}{x^2+2xy+y^2}\right)$;

б) $\left(\frac{x-2y}{x^2+2xy}-\frac{1}{x^2-4y^2}:\frac{x+2y}{(2y-x)^2}\right)\cdot\frac{(x+2y)^2}{4y^2}$.

158. Представьте в виде дроби:

а) $\frac{x+2}{x^2-2x+1}\cdot\frac{3x-3}{x^2-4}-\frac{3}{x-2}$;

б) $\frac{a-2}{4a^2+16a+16}:\left(\frac{a}{2a-4}-\frac{a^2+4}{2a^2-8}-\frac{2}{a^2+2a}\right)$.

159. При каком значении a выражение

$$(0{,}5(a-1)^2-18)\left(\frac{a+5}{a-7}+\frac{a-7}{a+5}\right)$$

принимает наименьшее значение? Найдите это значение.

160. При каком значении b выражение $\dfrac{81}{(0{,}5b+9)^2+(0{,}5b-9)^2}$ принимает наибольшее значение? Найдите это значение.

161. Докажите тождество:

а) $\dfrac{2p-q}{pq}-\dfrac{1}{p+q}\cdot\left(\dfrac{p}{q}-\dfrac{q}{p}\right)=\dfrac{1}{q}$;

б) $\dfrac{a+b}{2(a-b)}-\dfrac{a-b}{2(a+b)}=\dfrac{b}{a-b}-\dfrac{b^2-ab}{a^2-b^2}$.

162. Докажите тождество:

а) $\dfrac{1{,}2x^2-xy}{0{,}36x^2-0{,}25y^2}=\dfrac{20x}{6x+5y}$; б) $\dfrac{4{,}5a+4x}{0{,}81a^2-0{,}64x^2}=\dfrac{50}{9a-8x}$.

163. Докажите, что при всех допустимых значениях переменных значение выражения не зависит от значений входящих в него переменных:

а) $\left(\dfrac{2ab}{a^2-b^2}+\dfrac{a-b}{2a+2b}\right)\cdot\dfrac{2a}{a+b}+\dfrac{b}{b-a}$;

б) $\dfrac{y}{x-y}-\dfrac{x^3-xy^2}{x^2+y^2}\cdot\left(\dfrac{x}{(x-y)^2}-\dfrac{y}{x^2-y^2}\right)$.

164. Докажите, что при любом натуральном n значение выражения $\left(\dfrac{9}{n^2}+\dfrac{n}{3}\right):\left(\dfrac{3}{n^2}-\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{3}\right)$ является натуральным числом.

165. Представьте в виде многочлена или рациональной дроби:

а) $\left(n+\dfrac{1}{n}\right)^2$; в) $\left(\dfrac{x}{y}+1\right)^2+\left(\dfrac{x}{y}-1\right)^2$;

б) $\left(\dfrac{a}{b}-\dfrac{b}{a}\right)^2$; г) $\left(\dfrac{p}{q}+\dfrac{q}{p}\right)^2-\left(\dfrac{p}{q}-\dfrac{q}{p}\right)^2$.

166. Упростите выражение:

а) $\dfrac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}$; б) $\dfrac{\frac{2a-b}{b}+1}{\frac{2a+b}{b}-1}$; в) $\dfrac{\frac{x}{y^2}+\frac{y}{x^2}}{\frac{x}{y^2}-\frac{y}{x^2}}$; г) $\dfrac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}}$.

167. Представьте в виде отношения многочленов дробь:

а) $\dfrac{2-\dfrac{a}{x}}{2+\dfrac{a}{x}}$; б) $\dfrac{\dfrac{a-b}{c}+3}{\dfrac{a+b}{c}-1}$; в) $\dfrac{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}}{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}}$; г) $\dfrac{x-y}{\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}}$.

168. Выполните подстановку и упростите полученное выражение:

а) $\dfrac{x-a}{x-b}$, если $x=\dfrac{ab}{a+b}$; б) $\dfrac{\dfrac{a}{b}-x}{\dfrac{b}{a}+x}$, если $x=\dfrac{a-b}{a+b}$.

169. Выполните подстановку и упростите полученное выражение:

а) $\dfrac{a+b}{a-b}$, если $a=\dfrac{1}{1-x}$, $b=\dfrac{1}{1+x}$;

б) $\dfrac{ax}{a+x}-\dfrac{bx}{b-x}$, если $x=\dfrac{ab}{a-b}$.

170. Найдите значение выражения:

а) $\dfrac{\dfrac{a^2}{4}-\dfrac{b^2}{9}}{\dfrac{a}{12}+\dfrac{b}{18}}$ при $a=\dfrac{2}{3}$, $b=-\dfrac{1}{2}$; б) $\dfrac{0{,}2a-b}{\dfrac{a^2}{25}-b^2}$ при $a=-8$, $b=0{,}6$.

171. *(Для работы в парах.)* При каких значениях x имеет смысл выражение:

а) $\dfrac{1}{3-\dfrac{1}{x-2}}$; б) $\dfrac{6x}{2+\dfrac{1}{x+8}}$?

1) Обсудите, о каких значениях переменной x в заданиях а) и б) можно сказать сразу, что они не являются допустимыми. Что надо сделать, чтобы найти другие значения x, которые не являются допустимыми?
2) Распределите, кто выполняет задание а), а кто — задание б), и выполните их.
3) Проверьте друг у друга, правильно ли выполнены преобразования. Исправьте замеченные ошибки.

172. Найдите среднее гармоническое чисел:

а) 3, 5; б) 2, 4, 8; в) 5, 10, 15, 20.

173. Из пункта A в пункт B автобус ехал со скоростью 90 км/ч. На обратном пути из-за непогоды он снизил скорость до 60 км/ч. Какова средняя скорость автобуса на всём пути следования?

174. Мастер может выполнить заказ на изготовление деталей за 4 ч, а его ученик — за 6 ч. За какое время они смогут выполнить два заказа, работая совместно?

175. Готовясь к соревнованиям, школьник трижды прошёл на лыжах одну и ту же дистанцию: сначала со скоростью 9 км/ч, затем со скоростью 12 км/ч и, наконец, со скоростью 10 км/ч. Какова была средняя скорость школьника на всём пути?

П

176. Найдите координаты точек пересечения с осью x и осью y графика функции: а) $y=\frac{1}{2}x-2$; б) $y = -0{,}4x + 2$. Постройте график этой функции.

177. Напишите уравнение прямой: а) проходящей через точку (0; 4) и параллельной прямой $y = 3x$; б) проходящей через начало координат и параллельной прямой $y=-\frac{1}{2}x-8$.

178. Изобразите схематически график функции, заданной формулой вида $y = kx + b$, если:

а) $k > 0$, $b > 0$;
б) $k < 0$, $b > 0$;
в) $k < 0$, $b < 0$;
г) $k = 0$, $b > 0$.

179. Одна сторона прямоугольника на 20 см больше другой. Если меньшую сторону увеличить вдвое, а бо́льшую — втрое, то периметр нового прямоугольника окажется равным 240 см. Найдите стороны данного прямоугольника.

180. Скорый и пассажирский поезда идут навстречу друг другу с двух станций, расстояние между которыми 710 км. Скорый поезд вышел на час раньше пассажирского и идёт со скоростью 110 км/ч. Через сколько часов после своего отправления он встретится с пассажирским поездом, если скорость пассажирского поезда равна 90 км/ч?

8. Функция $y=\frac{k}{x}$ и её график

Пусть длина прямоугольника равна x, а ширина — y см. Известно, что площадь этого прямоугольника равна 24 см^2. Тогда $x \cdot y = 24$, откуда получаем $y=\frac{24}{x}$. Функцию, задаваемую формулой вида $y=\frac{k}{x}$, $k \neq 0$, называют *обратной пропорциональностью*.

В рассмотренном примере переменные x и y принимают лишь положительные значения. В дальнейшем, изучая функцию, задаваемую формулой вида $y=\frac{k}{x}$, $k \neq 0$, будем считать, что x и y могут принимать как положительные, так и отрицательные значения.

Определение. Обратной пропорциональностью называется функция, которую можно задать формулой вида $y = \frac{k}{x}$, где x — независимая переменная и k — не равное нулю число.

Областью определения функции $y = \frac{k}{x}$ является множество всех чисел, отличных от нуля. Это следует из того, что выражение $\frac{k}{x}$ имеет смысл при всех $x \neq 0$.

Рассмотрим свойство обратной пропорциональности. Пусть x_1 и x_2 — значения аргумента ($x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$), а y_1 и y_2 — соответствующие им значения функции. Так как $k \neq 0$, то $y_1 \neq 0$ и $y_2 \neq 0$.

Из формулы $y = \frac{k}{x}$ следует, что $x_1 y_1 = k$ и $x_2 y_2 = k$, и потому верна пропорция $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1}$, т. е. *отношение двух произвольных значений аргумента равно обратному отношению соответствующих значений функции*. С этим связано название функции — обратная пропорциональность.

В повседневной жизни мы часто встречаемся со случаями, когда зависимость между переменными является обратной пропорциональностью.

Например:

1) время t ч, которое автомобиль, двигаясь со скоростью v км/ч, затрачивает на путь, равный 450 км, вычисляется по формуле $t = \frac{450}{v}$, т. е. зависимость t от v является обратной пропорциональностью;

2) масса m кг муки, которую можно купить на 85 р. по цене n р. за килограмм, вычисляется по формуле $m = \frac{85}{n}$, т. е. зависимость m от n является обратной пропорциональностью.

Построим график функции $y = \frac{12}{x}$. Для этого найдём значения y, соответствующие некоторым положительным значениям и противоположным им отрицательным значениям x:

x	1	1,5	2	3	4	5	6	8	12
y	12	8	6	4	3	2,4	2	1,5	1

x	-1	$-1,5$	-2	-3	-4	-5	-6	-8	-12
y	-12	-8	-6	-4	-3	$-2,4$	-2	$-1,5$	-1

Отметим в координатной плоскости точки, координаты которых указаны в таблице (рис. 3).

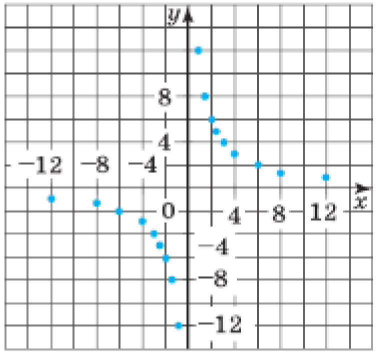


Рис. 3

Выясним некоторые особенности графика функции $y = \frac{12}{x}$. Так как число нуль не входит в область определения функции, то на графике нет точки с абсциссой 0, т. е. график не пересекает ось y. Так как ни при каком x значение y не равно нулю, то график не пересекает ось x. Положительным значениям x соответствуют положительные значения y. Чем больше положительное значение x, тем меньше соответствующее значение y. Например,

если $x = 10$, то $y = 1,2$;
если $x = 100$, то $y = 0,12$;
если $x = 1000$, то $y = 0,012$.

Значит, чем больше положительная абсцисса точки графика, тем ближе эта точка к оси абсцисс. Для достаточно больших значений x это расстояние может стать как угодно малым. Чем ближе положительная абсцисса точки графика к нулю, тем больше ордината этой точки. Например,

если $x = 0,03$, то $y = 400$;
если $x = 0,0001$, то $y = 120\ 000$.

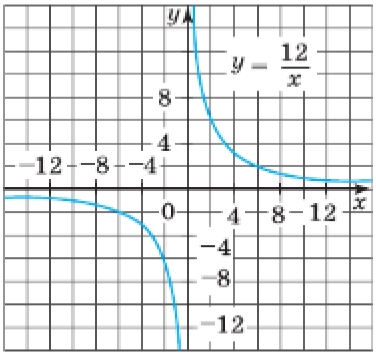


Рис. 4

Через отмеченные точки (рис. 3), проведём две плавные линии: сначала соединим плавной линией точки с положительными абсциссами, затем — точки с отрицательными абсциссами. Получим график функции $y = \frac{12}{x}$ (рис. 4).

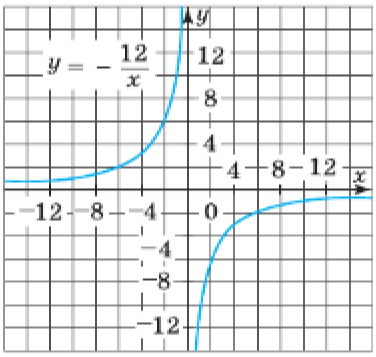


Рис. 5

Этот график состоит из двух ветвей, симметричных относительно начала координат. Одна из этих ветвей расположена в первой координатной четверти, а другая — в третьей. Такой же вид имеет график функции $y = \frac{k}{x}$ при любом $k > 0$.

На рисунке 5 на с. 47 построен график функции $y = -\frac{12}{x}$. Он так же, как и график функции $y = \frac{12}{x}$, представляет собой кривую, состоящую из двух ветвей, симметричных относительно начала координат. Однако в отличие от графика функции $y = \frac{12}{x}$ одна из них лежит во второй, а другая — в четвёртой координатной четверти.

График функции $y = \frac{k}{x}$ при любом $k < 0$ имеет такой же вид, что и график функции $y = -\frac{12}{x}$.

Кривую, являющуюся графиком обратной пропорциональности, называют *гиперболой*. Гипербола состоит из двух ветвей.

Упражнения

181. Функция задана формулой $y = \frac{8}{x}$. Перечертите в тетрадь таблицу и заполните её.

x	-4		$-0,25$	2	5	16	
y		-4					0,4

182. Обратная пропорциональность задана формулой $y = \frac{120}{x}$. Перечертите в тетрадь таблицу и заполните её.

x	-1200	-600			76	120		1000
y			$-0,5$	-1			0,4	

183. Двигаясь со скоростью v км/ч, поезд проходит расстояние между городами A и B, равное 600 км, за t ч. Запишите формулу, выражающую зависимость: а) v от t; б) t от v.

184. Обратная пропорциональность задана формулой $y = \frac{10}{x}$.

1) Найдите значение функции, соответствующее значению аргумента, равному 100; 1000; 0,1; 0,02.

2) Определите, принадлежит ли графику этой функции точка $A(-0,05; -200)$; $B(-0,1; 100)$; $C(400; 0,025)$; $D(500; -0,02)$.

185. Известно, что некоторая функция — обратная пропорциональность. Задайте её формулой, зная, что значению аргумента, равному 2, соответствует значение функции, равное 12.

186. На рисунке 6 построен график функции, заданной формулой $y = \frac{8}{x}$. Найдите по графику:

а) значение y, соответствующее значению x, равному 2; 4; −1; −4; −5;

б) значение x, которому соответствует значение y, равное −4; −2; 8.

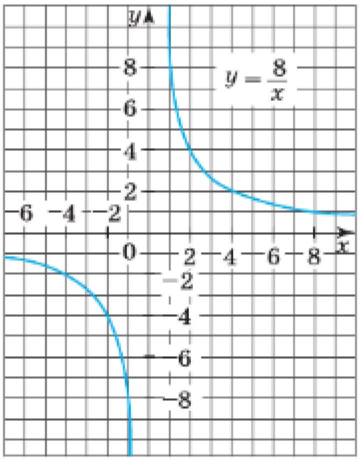


Рис. 6

187. Постройте график функции, заданной формулой $y = \frac{-8}{x}$. Найдите по графику:

а) значение y, соответствующее значению x, равному 4; 2,5; 1,5; −1; −2,5;

б) значение x, которому соответствует значение y, равное 8; −2.

188. Постройте график функции:

а) $y=\frac{2}{x}$; б) $y=-\frac{2}{x}$; в) $y=\frac{3}{x}$; г) $y=-\frac{4}{x}$; д) $y=\frac{1}{2x}$; е) $y=-\frac{2}{5x}$.

189. Постройте график функции $y=\frac{6}{x}$ и, используя его, решите уравнение: а) $\frac{6}{x}=x$; б) $\frac{6}{x}=-x+6$.

190. Решите графически уравнение: а) $\frac{8}{x}=x^2$; б) $\frac{8}{x}=x^3$.

191. *(Для работы в парах.)* Используя графические представления, выясните, сколько решений имеет уравнение:

а) $\frac{k}{x}=x^2$, где $k > 0$; в) $\frac{k}{x}=x^3$, где $k > 0$;

б) $\frac{k}{x}=x^2$, где $k < 0$; г) $\frac{k}{x}=x^3$, где $k < 0$.

1) Распределите, кто выполняет задания а) и г), а кто — задания б) и в), и выполните их.

2) Проверьте друг у друга, верно ли построены графики функций $y=\frac{k}{x}$.

3) Обсудите правильность сделанных выводов о числе решений уравнения.

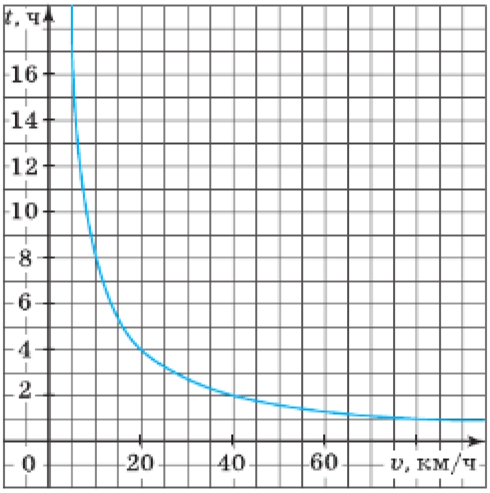


Рис. 7

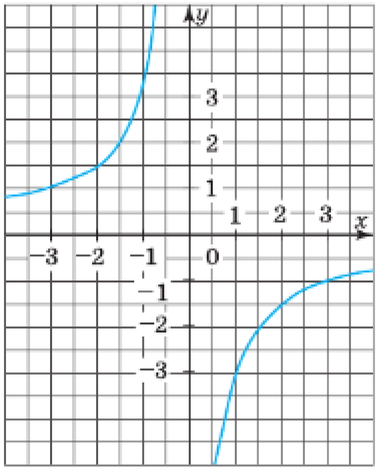


Рис. 8

192. Прямоугольный параллелепипед со сторонами основания a см и b см и высотой 20 см имеет объём, равный 120 см^3. Выразите формулой зависимость b от a. Является ли эта зависимость обратной пропорциональностью? Какова область определения этой функции? Постройте график.

193. Задайте формулой обратную пропорциональность, зная, что её график проходит через точку:

а) $A\ (8;\ 0{,}125)$; б) $B\left(\frac{2}{3};\ 1\frac{4}{5}\right)$; в) $C\ (-25;\ -0{,}2)$.

194. На рисунке 7 построен график зависимости времени, затрачиваемого на путь из пункта A в пункт B, от скорости движения. С помощью графика ответьте на вопросы:

а) Сколько времени потребуется на путь из A в B при скорости движения 80 км/ч? 25 км/ч? 40 км/ч?
б) С какой скоростью надо двигаться, чтобы добраться из пункта A в пункт B за 1 ч? за 4 ч? за 8 ч? за 16 ч?
в) Каково расстояние между пунктами A и B?

195. Определите знак числа k, зная, что график функции $y = \frac{k}{x}$ расположен:

а) в первой и третьей координатных четвертях;
б) во второй и четвёртой координатных четвертях.

196. На рисунке 8 построен график одной из следующих функций:

1. $y = -\frac{5}{x}$ 2. $y = -\frac{3}{x}$ 3. $y = \frac{3}{x}$ 4. $y = \frac{5}{x}$

Укажите эту функцию.

197. Установите соответствие между функциями и их графиками (рис. 9).

а) $y = \frac{6}{x}$; б) $y = \frac{1}{6x}$; в) $y = -\frac{6}{x}$; г) $y = -\frac{1}{6x}$.

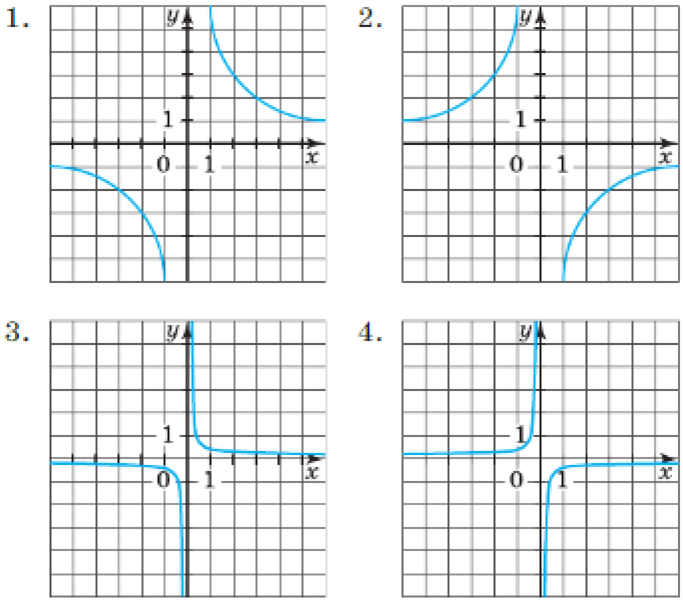


Рис. 9

198. Докажите, что при всех допустимых значениях переменных значение дроби не зависит от значений этих переменных:

а) $\frac{5(x-y)^2}{(3y-3x)^2}$; б) $\frac{(3x-6y)^2}{4(2y-x)^2}$.

199. *(Задача-исследование.)* При каких значениях a и b является тождеством равенство

$$\frac{5x+31}{(x-5)(x+2)} = \frac{a}{x-5} + \frac{b}{x+2}?$$

1) Обсудите, какие преобразования надо выполнить и каким условием воспользоваться, чтобы ответить на вопрос задачи.
2) Выполните необходимые преобразования, составьте систему уравнений и решите её.

3) Ответьте на вопрос задачи и проверьте полученный ответ.

200. Упростите выражение $\left(\frac{3}{x+2}-\frac{1}{x-2}-\frac{12}{4-x^2}\right):\frac{x+7}{x-2}$.

Контрольные вопросы и задания

1 Сформулируйте правила умножения и деления дробей.

2 Сформулируйте правило возведения дроби в степень.

3 Какая функция называется обратной пропорциональностью?

4 В каких координатных четвертях расположен график функции $y=\frac{k}{x}$ при $k>0$? при $k<0$?

Для тех, кто хочет знать больше

9. Представление дроби в виде суммы дробей

Сумму двух рациональных дробей, как известно, всегда можно представить в виде несократимой дроби, у которой числитель и знаменатель — многочлены с переменными или числа (в частности, число 1). Обратная задача — представление дроби в виде суммы двух дробей — неопределённая.

Так, например, дробь $\frac{4x^2-16x+1}{4x^2}$ можно представить в виде суммы (или разности) двух слагаемых разными способами:

$$\frac{4x^2-16x+1}{4x^2}=\frac{4x^2}{4x^2}+\frac{1-16x}{4x^2}=1+\frac{1-16x}{4x^2};$$

$$\frac{4x^2-16x+1}{4x^2}=\frac{4x^2+1}{4x^2}-\frac{16x}{4x^2}=\frac{4x^2+1}{4x^2}-\frac{4}{x}.$$

Вообще задача представления дроби в виде суммы дробей допускает сколь угодно много решений. Действительно, если требуется представить дробь $\frac{a}{b}$ в виде суммы двух дробей, то в качестве одного из слагаемых можно взять произвольную дробь $\frac{c}{d}$.

Тогда другая дробь будет равна разности $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}$, т. е. равна дроби

$$\frac{ad-bc}{bd}.$$

Для представления дроби в виде суммы дробей можно воспользоваться *методом неопределённых коэффициентов*. Разъясним на примере, в чём состоит этот метод.

Пример 1. Представим дробь $\frac{7x}{(x-3)(x+4)}$ в виде суммы дробей со знаменателями $x-3$ и $x+4$.

▶ Допустим, что

$$\frac{7x}{(x-3)(x+4)}=\frac{a}{x-3}+\frac{b}{x+4}.$$

Сложим дроби в правой части равенства:

$$\frac{a}{x-3}+\frac{b}{x+4}=\frac{a(x+4)+b(x-3)}{(x-3)(x+4)}=\frac{(a+b)x+(4a-3b)}{(x-3)(x+4)}.$$

Получаем, что

$$\frac{7x}{(x-3)(x+4)}=\frac{(a+b)x+(4a-3b)}{(x-3)(x+4)}.$$

Это равенство будет тождеством, если $a+b=7$ и $4a-3b=0$. Решив систему уравнений

$$\begin{cases}a+b=7,\\4a-3b=0,\end{cases}$$

найдём, что $a=3$, $b=4$.

Следовательно,

$$\frac{7x}{(x-3)(x+4)}=\frac{3}{x-3}+\frac{4}{x+4}.$$ ◁

Приведём теперь примеры задач, при решении которых используется представление дроби в виде суммы целого выражения и дроби.

Пример 2. Найдём все пары целых чисел, удовлетворяющие уравнению $x-xy+3y=5$.

▶ Выразим из уравнения переменную x через y:

$$x-xy=5-3y,\ x(1-y)=5-3y,\ x=\frac{5-3y}{1-y},\ x=\frac{3y-5}{y-1}.$$

Выделив из дроби $\frac{3y-5}{y-1}$ целую часть, получим

$$x = \frac{3y-3-2}{y-1} = \frac{3(y-1)-2}{y-1} = \frac{3(y-1)}{y-1} - \frac{2}{y-1} = 3 - \frac{2}{y-1}.$$

Значение дроби $\frac{2}{y-1}$ является целым числом тогда и только тогда, когда $y - 1 = -2$, $y - 1 = -1$, $y - 1 = 1$, $y - 1 = 2$.

Отсюда $y = -1; 0; 2; 3$. Вычисляя соответствующее значение x, получаем искомые пары целых чисел: (4; −1), (5; 0), (1; 2), (2; 3).◁

Пример 3. Найдём, при каких значениях n значение дроби $\frac{n^2-2n-10}{n-5}$ является целым числом.

▶ Представим дробь $\frac{n^2-2n-10}{n-5}$ в виде суммы многочлена и дроби.

Для этого многочлен $n^2 - 2n - 10$ разделим на двучлен $n - 5$. Деление выполним уголком аналогично тому, как выполняется деление натуральных чисел.

$$\begin{array}{r|l} n^2-2n-10 & n-5 \\ \cline{2-2} -\underline{n^2-5n} & n+3 \\ 3n-10 & \\ -\underline{3n-15} & \\ 5 & \end{array}$$

Получаем, что частное равно $n + 3$, а остаток равен 5. Значит,

$$n^2 - 2n - 10 = (n - 5)(n + 3) + 5.$$

Отсюда

$$\frac{n^2-2n-10}{n-5} = n+3+\frac{5}{n-5}.$$

Значение двучлена $n + 3$ при любом целом n является целым числом.

Значение дроби $\frac{5}{n-5}$ является целым числом тогда и только тогда, когда $n - 5$ равно 1, −1, 5 или −5.

Значит, дробь $\frac{n^2-2n-10}{n-5}$ принимает целые значения при n, равном 0, 4, 6 и 10. ◁

Упражнения

201. При каких значениях a и b равенство

$$\frac{6x}{(x-1)(x-2)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2}$$

является тождеством?

202. Представьте дробь $\frac{5x-1}{(x+4)(x-2)}$ в виде суммы двух дробей со знаменателями $x + 4$ и $x - 2$.

203. Представьте дробь $\frac{4x+3}{x^2-1}$ в виде суммы двух дробей со знаменателями $x - 1$ и $x + 1$.

204. Выясните, при каких целых a дробь $\frac{a^2-4a+1}{a-2}$ принимает целые значения, и найдите эти значения.

205. *(Для работы в парах.)* Зная, что m — целое число, найдите целые значения дроби:

а) $\frac{m^2-6m+10}{m-3}$; б) $\frac{(m-4)^2}{m-2}$.

1) Обсудите, какие преобразования надо выполнить, чтобы найти целые значения дроби.
2) Распределите, кто выполняет задание а), а кто — задание б), и выполните их.
3) Проверьте друг у друга, правильно ли выполнены преобразования и верно ли найдены целые значения дроби. Исправьте замеченные ошибки.

206. Найдите все пары целых чисел, удовлетворяющие уравнению:

а) $5x + y - xy = 2$; б) $xy - x + y = 8$.

207. Найдите все точки графика функции $y = \frac{x^2-6x+1}{x-3}$ с целочисленными координатами.

208. Докажите, что при любом целом a, отличном от нуля, значение дроби $\frac{5a^2+6}{a^2+1}$ не является целым числом.

209. Найдите все пары натуральных чисел a и b, если известно, что сумма обратных им чисел равна $\frac{1}{7}$.

210. Найдите значение дроби $\frac{3x^2 - xy + 6y^2}{y^2}$, если $\frac{x-y}{y} = 2$.

211. Зная, что $\frac{a+2b}{a} = 11$, найдите значение дроби $\frac{(a-3b)^2}{b^2}$.

Дополнительные упражнения к главе I

К параграфу 1

212. Найдите значение дроби:

а) $\frac{51+17^2}{10}$; б) $\frac{37^2+111}{40}$.

213. Расстояние между городами A и B равно 600 км. Первый поезд вышел из A в B и шёл со скоростью 60 км/ч. Второй поезд вышел из B в A на 3 ч позже, чем первый из A, и шёл со скоростью v км/ч. Поезда встретились через t ч после выхода первого поезда. Выразите v через t. Найдите скорость v при $t = 7$; при $t = 6$.

214. Найдите допустимые значения переменной в выражении:

а) $\frac{3x-8}{25}$; в) $\frac{9}{x^2-7x}$; д) $\frac{12}{|x|-3}$;

б) $\frac{37}{2y+7}$; г) $\frac{2y+5}{y^2+8}$; е) $\frac{45}{|y|+2}$.

215. Составьте какую-либо дробь с переменной x, которая имеет смысл при всех значениях переменной, кроме:

а) $x = 2$; в) $x = -3$ и $x = 3$;

б) $x = 0$ и $x = 3$; г) $x = -\frac{1}{2}$ и $x = \frac{1}{2}$.

216. Укажите область определения функции:

а) $y = \frac{1}{x-2}$; б) $y = \frac{3x}{x+5}$; в) $y = \frac{7x+1}{2x-6}$.

217. Сократите дробь:

а) $\frac{\overline{a0a0}}{101}$; б) $\frac{\overline{a00a}}{91}$.

218. Сократите дробь:

а) $\frac{(3a-3c)^2}{9a^2-9c^2}$; б) $\frac{(a^2-9)^2}{(3-a)^3}$; в) $\frac{8y^3-1}{y-4y^3}$; г) $\frac{5a^2-3ab}{a^2-0{,}36b^2}$.

219. Сократите дробь:

а) $\dfrac{a^2-4a+4}{a^2+ab-2a-2b}$; в) $\dfrac{a^2+4ab+4b^2}{a^3+8b^3}$;

б) $\dfrac{6x^2-3xy+4x-2y}{9x^2+12x+4}$; г) $\dfrac{27x^3-y^3}{18x^2+6xy+2y^2}$.

220. Выполните сокращение:

а) $\dfrac{b^{14}-b^7+1}{b^{21}+1}$; в) $\dfrac{x(y-z)-y(x-z)}{x(y-z)^2-y(x-z)^2}$;

б) $\dfrac{x^{33}-1}{x^{33}+x^{22}+x^{11}}$; г) $\dfrac{a(b+1)^2-b(a+1)^2}{a(b+1)-b(a+1)}$.

221. Докажите, что если в дроби $\dfrac{x^2-2y^2}{3y^2+5xy}$ переменные x и y заменить соответственно на kx и ky, где $k \neq 0$, то получится дробь, тождественно равная первоначальной.

222. Известно, что $a - b = 9$. Найдите значение дроби:

а) $\dfrac{36}{(a-b)^2}$; б) $\dfrac{108}{(b-a)^2}$; в) $\dfrac{(5a-5b)^2}{45}$; г) $\dfrac{a^2+ab+b^2}{a^3-b^3}$.

$\boxed{\textbf{223.}}$ Докажите, что если $\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{c}=\dfrac{c}{a}$, то $a = b = c$.

К параграфу 2

224. Упростите выражение:

а) $\dfrac{x^2-2x}{x-3}-\dfrac{4x-9}{x-3}$; в) $\dfrac{a^2}{a^2-b^2}+\dfrac{b^2}{b^2-a^2}$;

б) $\dfrac{y^2-10}{y-8}-\dfrac{54}{y-8}$; г) $\dfrac{x^2-2x}{x^2-y^2}-\dfrac{2y-y^2}{y^2-x^2}$.

225. Докажите, что данное выражение тождественно равно многочлену:

а) $\dfrac{(y-b)^2}{y-b+1}+\dfrac{y-b}{y-b+1}$; в) $\dfrac{x^2-y^2}{x-y-1}+\dfrac{x+y}{y-x+1}$;

б) $\dfrac{(a+x)^2}{a+x-2}-\dfrac{2a+2x}{a+x-2}$; г) $\dfrac{b^2-9c^2}{b+3c-2}+\dfrac{2(b-3c)}{2-b-3c}$.

$\boxed{\textbf{226.}}$ Докажите, что если правильная обыкновенная дробь $\dfrac{a}{b}$ несократима, то дробь, дополняющая её до единицы, также несократима.

227. При каких натуральных n является натуральным числом значение выражения:

а) $\frac{n+6}{n}$; б) $\frac{5n-12}{n}$; в) $\frac{36-n^2}{n^2}$?

228. Найдите значение выражения, зная, что $\frac{x}{y}=5$:

а) $\frac{x+y}{y}$; б) $\frac{x-y}{y}$; в) $\frac{y}{x}$; г) $\frac{x+2y}{x}$.

229. Зная, что $\frac{x+y}{y}=3$, найдите значение выражения:

а) $\frac{x}{y}$; б) $\frac{y}{x+y}$; в) $\frac{x-y}{y}$; г) $\frac{y}{x}$.

230. Выполните действие:

а) $\frac{3b^2-5b-1}{b^2y}+\frac{5b-3}{by}$; в) $\frac{1+c}{c^3y^4}-\frac{c^3+y^4}{c^2y^8}$;

б) $\frac{a^2-a+1}{a^3x}-\frac{x^2-1}{ax^3}$; г) $\frac{c^2+x^2}{c^2x^5}-\frac{c+x}{c^3x^3}$.

231. Представьте в виде дроби:

а) $x+y+\frac{x-y}{4}$; в) $a-\frac{ab+ac+bc}{a+b+c}$;

б) $m+n-\frac{1+mn}{n}$; г) $a^2-b^2-\frac{a^3-b^3}{a+b}$.

232. Упростите выражение:

а) $\frac{mn+1}{m+n}+\frac{mn-1}{m-n}$; б) $\frac{x+4a}{3a+3x}-\frac{a-4x}{3a-3x}$.

233. Упростите выражение:

а) $\frac{2y^2-y}{y^2-y+\frac{1}{4}}-\frac{2y^2+y}{y^2+y+\frac{1}{4}}-\frac{1}{y^2-\frac{1}{4}}$;

б) $\frac{6a}{2{,}5a^2-0{,}64}-\frac{8}{6a-3{,}2}$.

234. Докажите, что при всех допустимых значениях переменных значение выражения равно нулю:

$$\frac{1}{(a-b)(b-c)}+\frac{1}{(c-a)(a-b)}+\frac{1}{(b-c)(c-a)}.$$

235. Упростите выражение:

а) $\frac{5}{y-3}+\frac{1}{y+3}-\frac{4y-18}{y^2-9}$;

б) $\frac{2a}{2a+3}+\frac{5}{3-2a}-\frac{4a^2+9}{4a^2-9}$;

в) $\frac{4m}{4m^2-1}-\frac{2m+1}{6m-3}+\frac{2m-1}{4m+2}$;

г) $\frac{1}{(x+y)^2}-\frac{2}{x^2-y^2}+\frac{1}{(x-y)^2}$;

д) $\frac{4a^2+3a+2}{a^3-1}-\frac{1-2a}{a^2+a+1}$;

е) $\frac{x-y}{x^2+xy+y^2}-\frac{3xy}{x^3-y^3}+\frac{1}{x-y}$.

236. Докажите, что тождественно равны выражения

$$\frac{ax+by}{(a-b)(x+y)}-\frac{bx-ay}{(a+b)(x+y)} \quad \text{и} \quad \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}.$$

237. Упростите выражение:

а) $\frac{1}{a(a-b)(a-c)}+\frac{1}{b(b-c)(b-a)}+\frac{1}{c(c-a)(c-b)}$;

б) $\frac{x^2}{(x-y)(x-z)}+\frac{y^2}{(y-x)(y-z)}+\frac{z^2}{(z-x)(z-y)}$.

238. Представьте дробь в виде суммы или разности целого выражения и дроби:

а) $\frac{x^2-3x+6}{x-3}$; б) $\frac{y^2+5y-8}{y+5}$; в) $\frac{a^2+7a+2}{a+6}$; г) $\frac{3b^2-10b-1}{b-3}$.

239. При каком значении a тождественно равны выражения:

а) $\frac{2x}{x+3}$ и $2+\frac{a}{x+3}$;

б) $\frac{x}{x-5}$ и $1+\frac{a}{x-5}$;

в) $\frac{2x}{3-x}$ и $\frac{a}{3-x}-2$;

г) $\frac{x+2}{5-x}$ и $\frac{a}{5-x}-1$?

240. Представьте дробь в виде суммы или разности целого выражения и дроби:

а) $\frac{5x}{x+2}$; б) $\frac{-2x}{x-1}$; в) $\frac{2x}{5-x}$; г) $\frac{x-3}{2-x}$.

241. При каких целых n значение дроби является целым числом:

а) $\frac{5n^2+2n+3}{n}$; б) $\frac{(n-3)^2}{n}$; в) $\frac{3n}{n+2}$; г) $\frac{7n}{n-4}$?

242. Найдите такие значения a и b, при которых выполняется тождество:

а) $\frac{5x}{(x-2)(x+3)}=\frac{a}{x-2}+\frac{b}{x+3}$;

б) $\frac{5x+31}{(x-5)(x+2)}=\frac{a}{x-5}-\frac{b}{x+2}$.

К параграфу 3

243. Упростите выражение:

а) $\dfrac{a^2+ax+ab+bx}{a^2-ax-ab+bx}\cdot\dfrac{a^2-ax-bx+ab}{a^2+ax-bx-ab}$;

б) $\dfrac{x^2-bx+ax-ab}{x^2+bx-ax-ab}:\dfrac{x^2+bx+ax+ab}{x^2-bx-ax+ab}$.

244. Докажите, что если $m \neq n$, $m \neq 0$ и $n \neq 0$, то значение выражения $\dfrac{2}{mn}:\left(\dfrac{1}{m}-\dfrac{1}{n}\right)^2-\dfrac{m^2+n^2}{(m-n)^2}$ не зависит от значений переменных.

245. Докажите, что при любом целом a и дробном x значение выражения

$$\left(a-\frac{a^2+x^2}{a+x}\right)\cdot\left(\frac{2a}{x}+\frac{4a}{a-x}\right)$$

является чётным числом.

246. Докажите, что при любом значении x, большем 2, значение выражения

$$\left(\frac{x+1}{2x}+\frac{4}{x+3}-2\right):\frac{x+1}{x+3}-\frac{x^2-5x+3}{2x}$$

является отрицательным числом.

247. Упростите выражение:

а) $ab+\dfrac{ab}{a+b}\left(\dfrac{a+b}{a-b}-a-b\right)$;

б) $\left(\dfrac{y^2-xy}{x^2+xy}-xy+y^2\right)\cdot\dfrac{x}{x-y}+\dfrac{y}{x+y}$;

в) $\left(\dfrac{1}{(2a-b)^2}+\dfrac{2}{4a^2-b^2}+\dfrac{1}{(2a+b)^2}\right)\cdot\dfrac{4a^2+4ab+b^2}{16a}$;

г) $\dfrac{4c^2}{(c-2)^4}:\left(\dfrac{1}{(c+2)^2}+\dfrac{1}{(c-2)^2}+\dfrac{2}{c^2-4}\right)$.

248. Упростите выражение:

а) $\left(x-\dfrac{4xy}{x+y}+y\right)\cdot\left(x+\dfrac{4xy}{x-y}-y\right)$;

б) $\left(a-\dfrac{1-2a^2}{1-a}+1\right):\left(1-\dfrac{1}{1-a}\right)$.

249. Докажите тождество

$$\frac{1}{p-2q}+\frac{6q}{4q^2-p^2}-\frac{2}{p+2q}=-\frac{1}{2p}\cdot\left(\frac{p^2+4q^2}{p^2-4q^2}+1\right).$$

250. Одно из тождеств, приведённых знаменитым математиком XVIII в. Л. Эйлером, выглядит так:

$$a^3+b^3+\left(\frac{b(2a^3+b^3)}{a^3-b^3}\right)^3=\left(\frac{a(a^3+2b^3)}{a^3-b^3}\right)^3.$$

Докажите его.

251. Докажите, что при всех допустимых значениях переменных значение выражения

$$\frac{\frac{3}{2}a^2-2ab+\frac{2}{3}b^2}{\frac{1}{4}a^2-\frac{1}{9}b^2}+\frac{6b}{\frac{3}{4}a+\frac{1}{2}b}$$

не зависит от a и b.

252. Представьте в виде рациональной дроби:

а) $\dfrac{x-\dfrac{yz}{y-z}}{y-\dfrac{xz}{x-z}}$; б) $\dfrac{\dfrac{a-x}{a}+\dfrac{x}{a-x}}{\dfrac{a+x}{a}-\dfrac{x}{a+x}}$; в) $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}}$; г) $\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}}$.

253. При каких значениях x имеет смысл выражение:

а) $\dfrac{\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{x}{x+2}}{\dfrac{3x}{x^2-4}}$; б) $\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x}}}$?

254. Три вязальщицы получили одинаковые заказы на изготовление салфеток. Первая из них может выполнить заказ за 8 ч, вторая — за 9 ч, а их ученица — за 12 ч. Они объединили заказы и стали выполнять их совместно. Через сколько часов работа была закончена?

255. Автомобиль проехал от пункта A до пункта B. До пункта C, находящегося в середине пути, он ехал со скоростью 60 км/ч, а далее из C в B — со скоростью 80 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на всём пути следования.

256. Докажите, что если z является средним гармоническим положительных чисел a и b, причём $a \neq b$, то верно равенство

$$\frac{1}{z-a}+\frac{1}{z-b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}.$$

257. Известно, что точка $P(-9;\ 18)$ принадлежит графику функции, заданной формулой вида $y=\frac{k}{x}$. Найдите значение k.

258. Принадлежит ли графику функции $y=\frac{1}{x}$ точка:

а) $A(40;\ 0{,}025)$; в) $C\left(0{,}016;\ 6\frac{1}{4}\right)$;

б) $B(0{,}03125;\ 32)$; г) $D(0{,}125;\ 0{,}8)$?

259. Известно, что график функции $y=\frac{k}{x}$ проходит через точку $A(10;\ 2{,}4)$. Проходит ли график этой функции через точку:

а) $B(1;\ 24)$; в) $D(-2;\ 12)$; д) $K(5;\ -1{,}2)$;

б) $C\left(-\frac{1}{5};\ -120\right)$; г) $E(-10;\ -2{,}4)$; е) $M(-2{,}5;\ -0{,}6)$?

260. Найдите область определения функции и постройте её график:

а) $y=\frac{36}{(x+1)^2-(x-1)^2}$; в) $y=\frac{16}{(2-x)^2-(2+x)^2}$;

б) $y=\frac{18-12x}{x^2-3x}-\frac{6}{3-x}$; г) $y=\frac{3x(x+1)-3x^2+15}{x(x+5)}$.

261. Постройте график функции $y=-4-\frac{x+2}{x^2+2x}$. Определите, при каких значениях m прямая $y=m$ не имеет с графиком общих точек.

262. Постройте график функции:

а) $y=\frac{4}{|x|}$; в) $y=\frac{1}{|x|}$; д) $y=-\frac{6}{|x|}$;

б) $y=\frac{2{,}4}{|x|}$; г) $y=\frac{-1}{|x|}$; е) $y=\frac{-3{,}6}{|x|}$.

263. Постройте график функции:

а) $y=\frac{|2x-18|}{x-9}$; б) $y=\frac{|x+3|}{3x+9}$.

264. Постройте график функции:

а) $y=\frac{x^2-16}{|x-4|}$; б) $y=\frac{x^2-25}{5+|x|}$.

265. При каких значениях k и b гипербола $y=\frac{k}{x}$ и прямая $y = kx + b$ проходят через точку:

а) $P(2;\ 1)$; б) $Q(-2;\ 3)$; в) $R(-1;\ 1)$?

266. Могут ли графики функций $y=\frac{k}{x}$ $(k \neq 0)$ и $y = ax + b$ пересекаться:

а) только в одной точке;
б) только в двух точках;
в) в трёх точках?

267. Могут ли графики функций $y=\frac{k}{x}$ $(k \neq 0)$ и $y = ax + b$ пересекаться в двух точках, лежащих:

а) в одной четверти;
б) в первой и второй четвертях;
в) в первой и третьей четвертях?

Глава II КВАДРАТНЫЕ КОРНИ

При изучении этой главы вы узнаете, что кроме известных вам рациональных чисел существуют ещё и так называемые иррациональные числа. Эти числа вместе с рациональными числами образуют множество действительных чисел. Вы познакомитесь с понятием квадратного корня, изучите свойства арифметических квадратных корней, научитесь применять их в вычислениях и преобразованиях, а также рассмотрите свойства и график функции, которая задаётся формулой $y = \sqrt{x}$.

§ 4 АРИФМЕТИЧЕСКИЙ КВАДРАТНЫЙ КОРЕНЬ

10. Действительные числа

До сих пор при изучении алгебры вы имели дело только с рациональными числами. Известно, что всякое рациональное число может быть представлено в виде дроби $\frac{m}{n}$, где m — целое число, а n — натуральное число, причём одно и то же рациональное число можно представить в таком виде разными способами.

Например, $\frac{3}{5} = \frac{6}{10} = \frac{12}{20}$; $-1{,}2 = \frac{-12}{10} = \frac{-6}{5}$; $7 = \frac{7}{1} = \frac{14}{2}$.

Для рациональных чисел используют также десятичные представления. В 7 классе было показано, что *каждое рациональное число может быть представлено в виде бесконечной десятичной периодической дроби.*

Например, $\frac{5}{6} = 0{,}8333\ldots = 0{,}8(3)$; $\frac{4}{25} = 0{,}16 = 0{,}16(0)$; $-1{,}6 = -1{,}6(0)$.

Верно и обратное: *каждая бесконечная десятичная периодическая дробь представляет некоторое рациональное число.*

Например, $0,(7) = \frac{7}{9}$; $2,(36) = 2\frac{36}{99} = 2\frac{4}{11}$.

При этом дроби с периодом 9 не рассматриваются; их считают другой записью дробей с периодом 0.

Известно, что всякому рациональному числу соответствует некоторая точка на координатной прямой. Однако обратное неверно: оказывается, на координатной прямой есть точки, которые не имеют рациональной координаты. Этим точкам соответствуют новые числа, которые называют *иррациональными числами*.

Пример 1. Построим на координатной прямой какую-нибудь точку, координатой которой является иррациональное число.

▶ Пусть точка O — начальная точка координатной прямой и OE — единичный отрезок. Измерим длину отрезка OK — диагонали квадрата, стороной которого служит единичный отрезок (рис. 10, *а*).

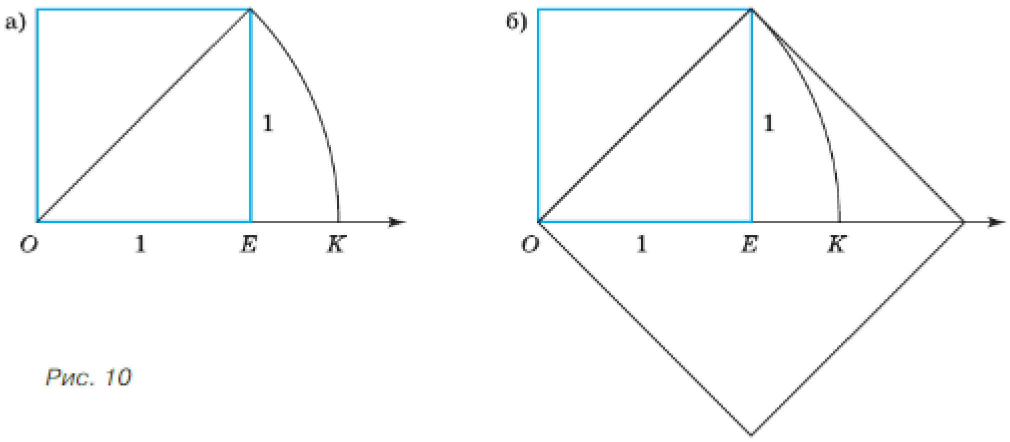


Рис. 10

Построим на диагонали единичного квадрата новый квадрат (рис. 10, *б*). Из рисунка видно, что площадь этого квадрата в два раза больше площади единичного квадрата. Значит, она равна 2. Так как отрезок OK равен стороне нового квадрата, то длина отрезка OK равна числу, квадрат которого равен 2. ◁

При десятичном измерении отрезка OK получится бесконечная десятичная дробь, которая не является периодической, так как

> среди рациональных чисел нет такого числа, квадрат которого равен 2.

Предположим, что число, квадрат которого равен 2, является рациональным. Тогда это число можно представить в виде несократимой дроби $\frac{m}{n}$, где m — целое число, n — натуральное. Так как $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$, то $\frac{m^2}{n^2} = 2$ и $m^2 = 2n^2$. Число $2n^2$ чётное, значит, и равное ему число m^2 чётное.

Но тогда и само число m является чётным (если бы число m было нечётным, то и число m^2 было бы нечётным). Поэтому число m можно представить в виде $m = 2k$, где k — целое число. Подставим $2k$ вместо m в равенство $m^2 = 2n^2$. Получим:

$$(2k)^2 = 2n^2,\ 4k^2 = 2n^2,\ 2k^2 = n^2.$$

Число $2k^2$ чётное, значит, число n^2 тоже чётное. Тогда и число n является чётным, т. е. числитель и знаменатель дроби $\frac{m}{n}$ — числа чётные. Это противоречит тому, что дробь $\frac{m}{n}$ несократима.

Значит, неверно предположение, что число, квадрат которого равен 2, является рациональным. ○

Итак, десятичное измерение длин отрезков каждой точке координатной прямой, лежащей справа от начальной точки O, ставит в соответствие положительную бесконечную десятичную дробь. Наоборот, взяв произвольную положительную бесконечную десятичную дробь, мы можем найти на координатной прямой справа от точки O единственную точку A, такую, что длина отрезка OA выражается этой дробью.

Если к положительным бесконечным десятичным дробям присоединить противоположные им числа и число нуль, то получим множество чисел, которые называют *действительными числами*.

Каждому действительному числу соответствует единственная точка координатной прямой, и каждой точке координатной прямой соответствует единственное действительное число. Говорят, что между множеством действительных чисел и множеством точек координатной прямой существует *взаимно однозначное соответствие*.

Множество действительных чисел принято обозначать буквой $\boldsymbol{R}$ (от первой буквы латинского слова *realis* — реальный, существующий в действительности).

Напомним, что существует формула, по которой можно найти длину отрезка на координатной прямой, зная координаты его концов. Так, если $A(x_1)$ и $B(x_2)$ — две точки координатной прямой, то расстояние между ними, т. е. длина отрезка AB, вычисляется по формуле

$$AB = |x_2 - x_1|.$$

Бесконечные десятичные дроби могут быть периодическими и непериодическими. Бесконечные десятичные периодические дроби представляют рациональные числа. Каждое такое число можно записать в виде отношения $\frac{m}{n}$, где m — целое число, а n — натуральное.

Бесконечные десятичные непериодические дроби представляют числа, не являющиеся рациональными. Их называют *иррациональными числами* (приставка «ир» означает отрицание). Иррациональные числа нельзя представить в виде отношения $\frac{m}{n}$, где m — целое число, а n — натуральное.

Таким образом,

> множество действительных чисел состоит из рациональных и иррациональных чисел.

Приведём примеры иррациональных чисел:

1) 8,0506070809010011... (нули разделяются цифрами, начиная с пяти и каждый раз увеличиваясь на единицу);

2) −3,14114111411114... (единицы разделяются четвёрками, при этом единицы увеличиваются на одну каждый раз);

3) число π = 3,14159265358979..., выражающее отношение длины окружности к диаметру.

Действительные числа, записанные с помощью бесконечных десятичных дробей, сравнивают по тем же правилам, что и конечные десятичные дроби.

Сравним, например, числа 2,46366... и 2,47011... . В этих положительных бесконечных десятичных дробях совпадают целые части и цифры десятых, а в разряде сотых у первой дроби число единиц меньше, чем у второй. Поэтому 2,46366... $<$ 2,47011... .

Сравним числа 0,253... и −0,149... . Первое из этих чисел положительное, а второе — отрицательное. Поэтому 0,253... $>$ −0,149... .

Действительные числа можно складывать, вычитать, умножать и делить (при условии, что делитель отличен от нуля), причём действия над действительными числами обладают теми же свойствами, что и действия над рациональными числами. При выполнении действий над действительными числами в практических задачах их заменяют приближёнными значениями. Повышая точность, с которой берутся приближённые значения, получают более точное значение результата.

Пример 2. Найдём приближённое значение суммы чисел a и b, где $a=\frac{1}{3}$, b = 1,7132... .

▶ Возьмём приближённые значения слагаемых с точностью до 0,1: $a \approx 0{,}3$, $b \approx 1{,}7$. Получим $a + b \approx 0{,}3 + 1{,}7 = 2{,}0$.

Если взять приближённые значения слагаемых с точностью до 0,01, т. е. $a \approx 0{,}33$ и $b \approx 1{,}71$, то получим

$$a + b \approx 0{,}33 + 1{,}71 = 2{,}04. \triangleleft$$

Пример 3. Найдём длину окружности, радиус r которой равен 5 м.

▶ Длина окружности l вычисляется по формуле $l = 2\pi r$. Взяв $\pi \approx 3{,}14$, получим $l \approx 2 \cdot 3{,}14 \cdot 5 = 31{,}4$ (м). ◁

Упражнения

268. Приведите пример:
а) рационального числа; б) иррационального числа.

269. Верно ли, что:
а) каждое рациональное число является действительным;
б) каждое действительное число является рациональным;
в) каждое иррациональное число является действительным;
г) каждое действительное число является иррациональным?

270. Среди чисел $\frac{1}{7}$; 0; 0,25; −2,(3); 0,818118111... (число единиц, разделяющих восьмёрки, каждый раз увеличивается на одну); 4,2(51); 217; π укажите рациональные и иррациональные.

271. Верно ли, что:
а) $7{,}16 \in \boldsymbol{N}$; $7{,}16 \in \boldsymbol{Z}$; $7{,}16 \in \boldsymbol{Q}$; $7{,}16 \in \boldsymbol{R}$;
б) $409 \in \boldsymbol{N}$; $409 \in \boldsymbol{Z}$; $409 \in \boldsymbol{Q}$; $409 \in \boldsymbol{R}$;
в) $\pi \in \boldsymbol{N}$; $\pi \in \boldsymbol{Z}$; $\pi \in \boldsymbol{Q}$; $\pi \in \boldsymbol{R}$?

272. Сравните:
а) 7,653... и 7,563...; в) −48,075... и −48,275...;
б) 0,123... и 0,114...; г) −1,444... и −1,456... .

273. Какое из чисел больше:
а) 1,(56) или 1,56; в) $1\frac{2}{3}$ или 1,6668; д) π или 3,1415;
б) −4,(45) или −4,45; г) −0,228 или $-\frac{5}{22}$; е) 3,(14) или π?

КАРЛ ВЕЙЕРШТРАСС (1815—1897) — немецкий математик, почётный член Петербургской академии наук. Имеет многочисленные труды по математическому анализу и другим разделам математики. С его именем связано построение теории действительных чисел на основе десятичных дробей.

274. Сравните числа:

а) 9,835... и 9,847...;
б) −1,(27) и −1,272;
в) 0,06(3) и 0,0624;
г) $2\frac{1}{7}$ и 2,142;
д) 1,(375) и $1\frac{3}{8}$;
е) −3,(16) и $-3\frac{4}{25}$.

275. Какая из точек — C или D — координатной прямой ближе к точке M, если:
а) $C(4{,}514)$, $D(-1{,}9368...)$, $M(1{,}304)$;
б) $C(-2{,}4815...)$, $D(11{,}454)$, $M(4{,}586)$.

276. Расположите в порядке возрастания числа

4,62; 3,(3); −2,75...; −2,63... .

277. Расположите в порядке убывания числа

1,371...; 2,065; 2,056...; 1,(37); −0,078... .

278. Какие целые числа расположены между числами:
а) −3,168... и 2,734...;
б) −5,106... и −1,484...;
в) −4,06 и −1,601;
г) −1,29 и 0,11?

279. Найдите приближённое значение выражения $a + b$, где $a = 1{,}0539...$ и $b = 2{,}0610...$, округлив предварительно a и b:
а) до десятых; б) до сотых; в) до тысячных.

280. Найдите приближённое значение выражения $a - b$, где $a = 59{,}678...$ и $b = 43{,}123...$, округлив предварительно a и b:
а) до десятых; б) до сотых.

281. Найдите приближённое значение длины окружности, радиус которой равен 4,5 см (число π округлите до сотых).

282. Найдите приближённое значение площади круга, радиус которого равен 10 м (число π округлите до сотых).

283. Является ли рациональным или иррациональным числом сумма $a + b$, где $a = 1{,}323223222...$ (группы цифр, состоящие из одной, двух, трёх двоек и т. д., разделяются тройками) и $b = 2{,}313113111...$ (группы цифр, состоящие из одной, двух, трёх единиц и т. д., разделяются тройками)?

284. Известно, что a^2, b^2, $a - b$ — рациональные числа и $a \neq b$. Каким числом, рациональным или иррациональным, является сумма $a + b$?

П

285. Упростите выражение:

а) $\left(1-\frac{3x^2}{1-x^2}\right):\left(\frac{x}{x+1}+1\right)$;

б) $\left(\frac{a+b}{b}-\frac{a}{a+b}\right):\left(\frac{a+b}{a}-\frac{b}{a+b}\right)$;

в) $\frac{3a^2-a+3}{a^3-1}-\frac{a-1}{a^2+a+1}+\frac{2}{1-a}$;

г) $\left(\frac{2b}{1-b}-b\right):\frac{3b+3}{b-1}$;

д) $\left(a-x+\frac{x^2}{a+x}\right)\cdot\frac{a-x}{a}$.

286. Найдите значение выражения:

а) $|28x-8|$ при $x=-2{,}5;\ 0;\ 4;\ 5;\ 9{,}5$;
б) $|6-12x|$ при $x=-3;\ -1;\ 0;\ 1;\ 4$.
в) $|x|+|x-2|$ при $x=0{,}5;\ 1;\ 1{,}5;\ 2$;
г) $|y-3|+|y+3|$ при $y=-6;\ -5;\ 5;\ 6$.

287. Известно, что график функции $y=\frac{k}{x}$ проходит через точку $A(4;\ -0{,}5)$. Найдите k и постройте этот график.

288. При каких значениях a и b графики функций $y=x+b$ и $y=ax-2b$ пересекаются в точке $(3;\ 1)$?

11. Квадратные корни. Арифметический квадратный корень

Пусть площадь квадрата равна 64 см^2. Чему равна длина стороны этого квадрата?

Обозначим длину стороны квадрата (в сантиметрах) буквой x. Тогда площадь квадрата будет x^2 см^2. По условию площадь равна 64 см^2, значит, $x^2=64$.

Корнями уравнения $x^2=64$ являются числа 8 и -8. Действительно, $8^2=64$ и $(-8)^2=64$. Так как длина не может выражаться отрицательным числом, то условию задачи удовлетворяет только один из корней — число 8. Итак, длина стороны квадрата равна 8 см.

Корни уравнения $x^2 = 64$, т. е. числа, квадраты которых равны 64, называют *квадратными корнями* из числа 64.

Определение. Квадратным корнем из числа a называют число, квадрат которого равен a.

Число 8 — неотрицательный корень уравнения $x^2 = 64$ — называют *арифметическим квадратным корнем* из 64. Иначе говоря, арифметический квадратный корень из 64 — это неотрицательное число, квадрат которого равен 64.

Определение. Арифметическим квадратным корнем из числа a называется неотрицательное число, квадрат которого равен a.

Арифметический квадратный корень из числа a обозначают $\sqrt{a}$. Знак $\sqrt{}$ называют *знаком арифметического квадратного корня* или знаком радикала (от латинского слова *radex* — корень). Выражение, стоящее под знаком корня, называют *подкоренным выражением*. Запись $\sqrt{a}$ читают: квадратный корень из a (слово «арифметический» при чтении опускают).

Приведём примеры нахождения (или, как говорят иначе, извлечения) арифметических квадратных корней:

$\sqrt{4} = 2$, так как 2 — число неотрицательное и $2^2 = 4$;

$\sqrt{1{,}21} = 1{,}1$, так как 1,1 — число неотрицательное и $1{,}1^2 = 1{,}21$;

$\sqrt{0} = 0$, так как 0 — число неотрицательное и $0^2 = 0$.

Вообще

$\sqrt{a} = b$, если выполняются два условия: $b \geqslant 0$; $b^2 = a$.

При $a < 0$ выражение $\sqrt{a}$ не имеет смысла.

Выражение $\sqrt{-4}$ не имеет смысла, так как не существует такого числа, квадрат которого равен отрицательному числу.

Пользуясь определением арифметического квадратного корня, можно решать некоторые уравнения, содержащие квадратные корни.

Пример. Решим уравнение $\sqrt{5x-1}=7$.

▶ Из определения арифметического квадратного корня следует, что $5x-1=7^2$, т. е. $5x-1=49$. Отсюда $5x=50$; $x=10$. ◁

Упражнения

289. Докажите, что число:
а) 5 есть арифметический квадратный корень из 25;
б) 0,3 есть арифметический квадратный корень из 0,09;
в) −7 не является арифметическим квадратным корнем из 49;
г) 0,6 не является арифметическим квадратным корнем из 3,6.

290. Докажите, что:
а) $\sqrt{121}=11$; б) $\sqrt{169}=13$; в) $\sqrt{1,44}=1,2$; г) $\sqrt{0,49}=0,7$.

291. Найдите значение корня:
а) $\sqrt{81}$; в) $\sqrt{1600}$; д) $\sqrt{0,04}$; ж) $\sqrt{\frac{81}{4}}$;
б) $\sqrt{36}$; г) $\sqrt{10\,000}$; е) $\sqrt{0,81}$; з) $\sqrt{1\frac{24}{25}}$.

292. Вычислите:
а) $\sqrt{900}$; б) $\sqrt{0,01}$; в) $\sqrt{0,64}$; г) $\sqrt{\frac{121}{64}}$; д) $\sqrt{6\frac{1}{4}}$.

293. Найдите значение выражения:
а) $\sqrt{a+b}$ при $a=33$; $b=-8$; $a=0,65$; $b=0,16$;
б) $\sqrt{3x-5}$ при $x=23$; $1,83$;
в) $x+\sqrt{x}$ при $x=0$; $0,01$; $0,36$; $0,64$; 1; 25; 100; 3600.

294. Найдите значение выражения:
а) $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ при $x=\frac{9}{25}$, $y=0,36$; б) $\sqrt{4-2a}$ при $a=2$; $-22,5$.

295. Найдите значение выражения:
а) $\sqrt{0,09}+\sqrt{0,25}$; в) $3\sqrt{9}-16$; д) $0,1\sqrt{400}+0,2\sqrt{1600}$;
б) $\sqrt{0,04}-\sqrt{0,01}$; г) $-7\sqrt{0,36}+5,4$; е) $\frac{1}{3}\sqrt{0,36}+\frac{1}{5}\sqrt{900}$.

296. Найдите значение выражения:
а) $0,6\sqrt{36}$; г) $\sqrt{0,64}-\sqrt{0,04}$; ж) $\frac{1}{3}\sqrt{0,81}-1$;
б) $-2,5\sqrt{25}$; д) $-\sqrt{0,0036}+\sqrt{0,0025}$; з) $4-10\sqrt{0,01}$.
в) $\sqrt{0,49}+\sqrt{0,16}$; е) $\sqrt{0,01}-\sqrt{0,0001}$;

297. Пользуясь таблицей квадратов натуральных чисел, найдите:

а) $\sqrt{225}$, $\sqrt{169}$, $\sqrt{324}$, $\sqrt{361}$;

б) $\sqrt{1{,}44}$, $\sqrt{3{,}24}$, $\sqrt{2{,}56}$, $\sqrt{2{,}25}$;

в) $\sqrt{576}$, $\sqrt{1764}$, $\sqrt{3721}$, $\sqrt{7396}$;

г) $\sqrt{7{,}29}$, $\sqrt{13{,}69}$, $\sqrt{56{,}25}$, $\sqrt{77{,}44}$.

298. Какие из чисел $\sqrt{0{,}04}$; $\sqrt{0{,}025}$; $\sqrt{0{,}4}$; $\sqrt{1{,}21}$; $\sqrt{6{,}4}$; $\sqrt{0{,}0036}$; $\sqrt{0{,}256}$; $\sqrt{0{,}16}$; $\sqrt{0{,}000001}$; $\sqrt{52{,}9}$ являются рациональными, а какие — иррациональными?

299. Приведите контрпример для утверждения:

а) при любом натуральном значения n значение выражения $\sqrt{11-n}$ является иррациональным числом;

б) при любом натуральном значения n значение выражения $\sqrt{25-n}$ является иррациональным числом.

300. Какая из точек — A или B — координатной прямой ближе к точке с координатой нуль, если:

а) $A(\sqrt{15{,}21})$, $B(-\sqrt{16})$; б) $A\left(\sqrt{2\frac{7}{9}}\right)$, $B\left(-\sqrt{1\frac{13}{36}}\right)$?

301. Имеет ли смысл выражение:

а) $\sqrt{100}$; в) $-\sqrt{100}$; д) $\sqrt{(-25)\cdot(-4)}$;

б) $\sqrt{-100}$; г) $\sqrt{(-10)^2}$; е) $\sqrt{-25\cdot 4}$?

302. Найдите число, арифметический квадратный корень из которого равен 0; 1; 3; 10; 0,6.

303. Найдите значение переменной x, при котором:

а) $\sqrt{x}=4$; в) $2\sqrt{x}=0$; д) $\sqrt{x}-8=0$;

б) $\sqrt{x}=0{,}5$; г) $4\sqrt{x}=1$; е) $3\sqrt{x}-2=0$.

304. Существует ли значение переменной x, при котором:

а) $\sqrt{x}=0{,}1$; б) $\sqrt{x}=-10$; в) $\sqrt{x}+1=0$; г) $\sqrt{x}-3=0$?

305. *(Для работы в парах.)* При каком значении переменной x верно равенство:

а) $\sqrt{x}=11$; в) $\sqrt{x}=-20$; д) $5-\sqrt{x}=0$;

б) $10\sqrt{x}=3$; г) $2\sqrt{x}-1=0$; е) $2+\sqrt{x}=0$?

1) Обсудите, о каких равенствах можно сразу сказать, что они не являются верными ни при каких значениях x. Исключите их из рассмотрения.
2) Распределите, кто выполняет оставшиеся задания из первой строки, а кто — из второй строки, и выполните их.
3) Проверьте друг у друга, правильно ли выполнены задания. Исправьте замеченные ошибки.

306. Найдите значение переменной x, при котором верно равенство:

а) $\sqrt{3+5x}=7$; б) $\sqrt{10x-14}=11$; в) $\sqrt{\frac{1}{3}x-\frac{1}{2}}=0$.

307. Решите уравнение:

а) $\sqrt{3x-1}=1$; б) $\sqrt{6x+4}=2$; в) $\sqrt{12-x}=6$; г) $\sqrt{8x-1}=1$.

308. Найдите корни уравнения:

а) $\sqrt{12+x}-7=3$; в) $16-\sqrt{x-2}=7$;
б) $\sqrt{5x-1}-4=6$; г) $12-\sqrt{3-6x}=-2$.

309. Найдите значение выражения $1{,}5x^3y^2 \cdot 6{,}2xy$, если $x = 1{,}25$, $y = 4$.

310. Найдите:
а) $|x|$, если $x = 10; 0{,}3; 0; -2{,}7; -9$;
б) x, если $|x| = 6; 3{,}2; 0$.

311. Запишите без знака модуля:
а) $|a|$, где $a > 0$; в) $|a^2|$; д) $|a^3|$, где $a < 0$.
б) $|c|$, где $c < 0$; г) $|a^3|$, где $a > 0$;

12. Уравнение $x^2 = a$

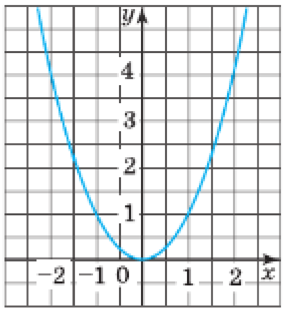


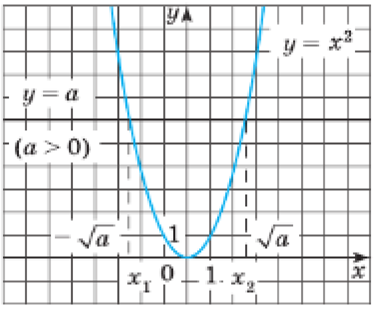
Рис. 11

Вы уже знакомы с графиком функции $y = x^2$ (рис. 11). Рассмотрим некоторые его особенности.

1. **Если $x = 0$, то $y = 0$.** Поэтому график функции проходит через начало координат.

2. **Если $x \neq 0$, то $y > 0$.** Значит, все точки графика функции, кроме точки (0; 0), расположены выше оси x.

3. **Противоположным значениям x соответствует одно и то же значение y.** Значит, точки графика, имеющие противоположные абсциссы, симметричны относительно оси y.

а) 

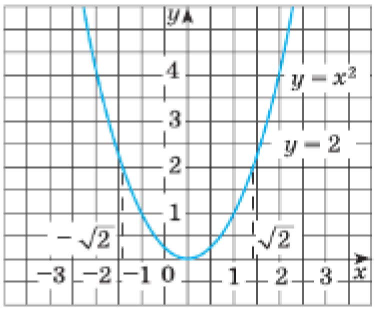
б) 

Рис. 12

С помощью графика функции $y = x^2$ можно находить корни некоторых уравнений. Рассмотрим уравнение $x^2 = a$, где a — произвольное число. В зависимости от числа a при решении этого уравнения возможны три случая.

Если $a < 0$, то уравнение $x^2 = a$ корней не имеет. Действительно, не существует числа, квадрат которого был бы равен отрицательному числу.

Если $a = 0$, то уравнение имеет единственный корень, равный нулю, так как существует единственное число 0, квадрат которого равен нулю.

Если $a > 0$, то уравнение имеет два корня. Чтобы убедиться в этом, обратимся к графику функции $y = x^2$ (рис. 12, *а*). Прямая $y = a$ при $a > 0$ пересекает параболу $y = x^2$ в двух точках. Обозначим абсциссы точек пересечения x_1 и x_2. Тогда $x_1^2 = a$ и $x_2^2 = a$, значит, числа x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 = a$. Так как x_2 есть положительное число, квадрат которого равен a, то x_2 является арифметическим квадратным корнем из a, т. е. $x_2 = \sqrt{a}$. Так как x_1 есть число, противоположное x_2, то $x_1 = -\sqrt{a}$.

Например, уравнение $x^2 = 6{,}25$ имеет корни $x_1 = -\sqrt{6{,}25}$ и $x_2 = \sqrt{6{,}25}$, т. е. $x_1 = -2{,}5$ и $x_2 = 2{,}5$; уравнение $x^2 = \frac{4}{9}$ имеет корни $x_1 = -\sqrt{\frac{4}{9}}$ и $x_2 = \sqrt{\frac{4}{9}}$, т. е. $x_1 = -\frac{2}{3}$ и $x_2 = \frac{2}{3}$.

Уравнение $x^2 = 2$ имеет корни $x_1 = -\sqrt{2}$ и $x_2 = \sqrt{2}$. Эти корни являются иррациональными числами, так как не существует рационального числа, квадрат которого равен 2. С помощью графика функции $y = x^2$ легко найти приближённые значения этих корней: $\sqrt{2} \approx 1{,}4$ и $-\sqrt{2} \approx -1{,}4$ (рис. 12, *б*). Уравнения $x^2 = 3$, $x^2 = 5$, $x^2 = 6{,}5$ имеют соответственно корни $-\sqrt{3}$ и $\sqrt{3}$, $-\sqrt{5}$ и $\sqrt{5}$, $-\sqrt{6{,}5}$ и $\sqrt{6{,}5}$. Эти корни также являются иррациональными числами.

Вообще при любом $a \geqslant 0$ уравнение $x^2 = a$ имеет неотрицательный корень $\sqrt{a}$; иными словами, какое бы число $a \geqslant 0$ мы ни взяли, найдётся неотрицательное число, квадрат которого равен a. Это означает, что

> выражение $\sqrt{a}$ имеет смысл при любом $a \geqslant 0$.
> При любом a, при котором выражение $\sqrt{a}$ имеет смысл, верно равенство $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$.

Упражнения

312. Имеет ли корни уравнение:
а) $x^2 = 81$; б) $x^2 = 18$; в) $x^2 = 0$; г) $x^2 = -25$?

313. Решите уравнение:
а) $x^2 = 36$; в) $x^2 = 121$; д) $x^2 = 8$;
б) $x^2 = 0{,}49$; г) $x^2 = 11$; е) $x^2 = 2{,}5$.

314. Решите уравнение и с помощью графика функции $y = x^2$ найдите приближённые значения его корней:
а) $x^2 = 3$; б) $x^2 = 5$; в) $x^2 = 4{,}5$; г) $x^2 = 8{,}5$.

315. Решите уравнение:
а) $80 + y^2 = 81$; в) $20 - b^2 = -5$; д) $\frac{1}{4}a^2 = 10$;
б) $19 + c^2 = 10$; г) $3x^2 = 1{,}47$; е) $-5y^2 = 1{,}8$.

316. Найдите корни уравнения:
а) $16 + x^2 = 0$; в) $0{,}5x^2 = 30$; д) $x^3 - 3x = 0$;
б) $0{,}3x^2 = 0{,}027$; г) $-5x^2 = \frac{1}{20}$; е) $x^3 - 11x = 0$.

317. Решите уравнение:
а) $(x - 3)^2 = 25$; в) $(x - 6)^2 = 7$;
б) $(x + 4)^2 = 9$; г) $(x + 2)^2 = 6$.

318. Имеет ли смысл выражение $\sqrt{8 - 5x}$ при $x = -3{,}4$; 0; $1{,}2$; $1{,}6$; $2{,}4$?

319. При каких значениях переменной имеет смысл выражение:
а) $3\sqrt{a}$; б) $-5\sqrt{x}$; в) $\sqrt{8c}$; г) $\sqrt{-10b}$?

320. При каких значениях переменной x имеет смысл выражение:

а) $\sqrt{2x}$; б) $\sqrt{-x}$?

321. Найдите квадрат числа:

$$\sqrt{25};\quad \sqrt{81};\quad \sqrt{2};\quad \sqrt{3};\quad -\sqrt{4};\quad \sqrt{5};\quad -\sqrt{6};\quad \sqrt{\frac{1}{2}};\quad \sqrt{1{,}3}.$$

322. Найдите значение выражения:

а) $(\sqrt{7})^2$; в) $-2\sqrt{14}\cdot\sqrt{14}$; д) $0{,}5(-\sqrt{8})^2$; ж) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$;

б) $(-\sqrt{26})^2$; г) $(3\sqrt{5})^2$; е) $(-2\sqrt{15})^2$; з) $\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}\right)^2$.

323. Вычислите:

а) $0{,}49+2(\sqrt{0{,}4})^2$; в) $(2\sqrt{6})^2+(-3\sqrt{2})^2$;

б) $(3\sqrt{11})^2-\sqrt{6400}$; г) $-0{,}1(\sqrt{120})^2-\left(\frac{1}{2}\sqrt{20}\right)^2$.

324. Вычислите:

а) $(2-\sqrt{5})^2+4\sqrt{5}$; в) $(2-\sqrt{5})^2+(2+\sqrt{5})^2$;

б) $(5+\sqrt{3})^2-10\sqrt{3}$; г) $(5+\sqrt{3})^2+(5-\sqrt{3})^2$.

325. Найдите значение выражения:

а) $2\sqrt{6}\cdot(-\sqrt{6})$; в) $\sqrt{1{,}44}-2(\sqrt{0{,}6})^2$;

б) $-(3\sqrt{5})^2$; г) $(0{,}1\sqrt{70})^2+\sqrt{1{,}69}$.

326. Найдите значение выражения:

а) $\dfrac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}$ при $x = -0{,}5$; б) $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\frac{1}{x}}}$ при $x = -0{,}4$.

П

327. Найдите значение выражения:

а) $\dfrac{x-|x-1|}{x+2}$ при x, равном 4; 38; −42;

б) $\dfrac{2|3-x|-1}{4}$ при x, равном 2; 11; −6.

328. Изобразите схематически в одной и той же системе координат графики функций $y = \frac{10}{x}$ и $y = 10x$. Имеют ли эти графики общие точки, и если имеют, то сколько?

13. Нахождение приближённых значений квадратного корня

Рассмотрим, как можно находить приближённые значения арифметического квадратного корня.

Найдём, например, приближённое значение $\sqrt{2}$ с тремя знаками после запятой.

Так как 1^2 меньше 2, а 2^2 больше 2, то число $\sqrt{2}$ заключено между целыми числами 1 и 2 (рис. 13, *а*). Значит, десятичная запись числа $\sqrt{2}$ начинается так:

$$\sqrt{2} = 1,\ldots\ .$$

Найдём теперь цифру десятых. Для этого будем возводить в квадрат десятичные дроби 1,1; 1,2; 1,3; ... , пока не получим число, большее двух. Имеем

$$1{,}1^2 = 1{,}21;\ 1{,}2^2 = 1{,}44;\ 1{,}3^2 = 1{,}69;$$
$$1{,}4^2 = 1{,}96;\ 1{,}5^2 = 2{,}25.$$

Так как $1{,}4^2$ меньше 2, а $1{,}5^2$ больше 2, то число $\sqrt{2}$ больше 1,4, но меньше 1,5 (рис. 13, *б*). Значит,

$$\sqrt{2} = 1{,}4\ldots\ .$$

Чтобы найти цифру сотых, будем последовательно возводить в квадрат десятичные дроби 1,41; 1,42; ... . Так как $1{,}41^2 = 1{,}9881$, а $1{,}42^2 = 2{,}0164$, то число $\sqrt{2}$ больше 1,41 и меньше 1,42 (рис. 13, *в*).

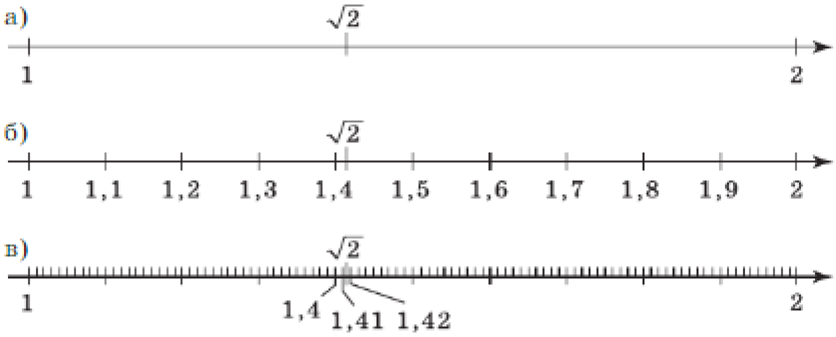


Рис. 13

Значит,

$$\sqrt{2} = 1{,}41\ldots .$$

Продолжая этот процесс, найдём, что десятичная запись числа $\sqrt{2}$ начинается так: 1,414... . Поэтому

$$\sqrt{2} \approx 1{,}414.$$

Рассмотренный приём позволяет извлекать арифметический квадратный корень из числа с любой точностью.

В практических расчётах для нахождения приближённых значений квадратных корней используют специальные таблицы или вычислительную технику.

Для извлечения квадратных корней с помощью калькулятора используют клавишу, на которой помещён знак $\sqrt{\ }$.

Упражнения

329. Подберите два последовательных целых числа, между которыми заключено число:

а) $\sqrt{27}$; в) $\sqrt{120}$; д) $\sqrt{0{,}4}$; ж) $\sqrt{167}$;

б) $\sqrt{40}$; г) $\sqrt{9{,}2}$; е) $\sqrt{15}$; з) $\sqrt{288}$.

330. Найдите цифры разрядов единиц, десятых, сотых в десятичной записи иррациональных чисел $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$.

331. Верно ли утверждение:

а) число $\sqrt{5}$ больше 2;

б) число $\sqrt{5{,}2}$ меньше 2;

в) число $\sqrt{170}$ меньше 13;

г) число $\sqrt{39}$ больше числа $\sqrt{38}$?

332. Какое из чисел $\sqrt{1{,}4}$; $\sqrt{2}$; $\sqrt{7}$ $\sqrt{5{,}2}$ отмечено на координатной прямой точкой A; точкой B (рис. 14)?

333. Какое из чисел 0,6; $\frac{142}{29}$; 3; $\sqrt{33}$ отмечено на координатной прямой точкой A (рис. 15)?

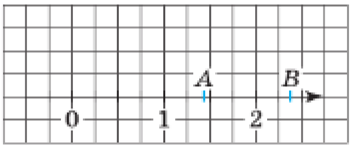


Рис. 14

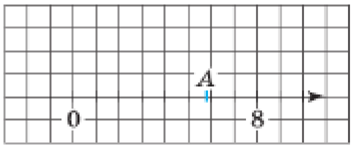


Рис. 15

334. Выберите из отмеченных точек те, которые соответствуют числам $\sqrt{159}$ и $\sqrt{127}$ (рис. 16).

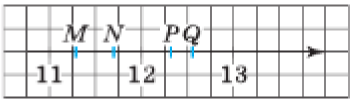


Рис. 16

335. Сравните с нулём значение выражения:

а) $\sqrt{7} - 3$; в) $\sqrt{85} - 4$; д) $15 - \sqrt{225}$;

б) $11 - \sqrt{107}$; г) $19 - \sqrt{326}$; е) $\sqrt{625} - 25$.

336. Имеет ли смысл выражение:

а) $\sqrt{\sqrt{5} - 3}$; б) $\sqrt{4 - \sqrt{12}}$?

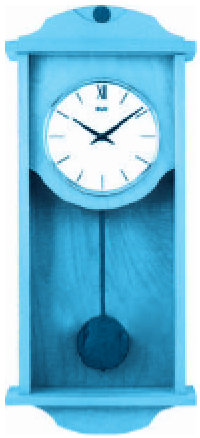
337. Площадь квадрата равна 18 см^2. Найдите с помощью калькулятора его сторону с точностью до 0,1 см.

338. Длина стороны a_8 правильного восьмиугольника, вписанного в круг радиуса R, вычисляется по формуле $a_8 = R\sqrt{2 - \sqrt{2}}$. Найдите a_8 с помощью калькулятора (с точностью до 0,1), если:
а) $R = 9{,}4$ см; б) $R = 10{,}5$ см.

339. Свободно падающее тело в безвоздушном пространстве проходит s см за t с, где $t = \sqrt{\frac{2s}{g}}$, g — ускорение свободного падения, $g \approx 10$ м/с^2. Пользуясь калькулятором, вычислите t с точностью до 0,1 с, если:
а) $s = 175$; б) $s = 225$.

340. Время t (с) полного колебания маятника вычисляется по формуле $t = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, где l (см) — длина маятника, $g \approx 10$ м/с^2, $\pi \approx 3{,}14$. Найдите t с помощью калькулятора с точностью до 0,1 с, если l равно:

а) 22; б) 126.



341. Решите данные уравнения и укажите те из них, у которых оба корня не превосходят числа 2:

а) $x^2 = 30$; в) $0{,}2x^2 = 3$.
б) $7x^2 = 10$;

342. Вычислите:

а) $3\sqrt{0,16} - 0,1\sqrt{225}$;   в) $0,3\sqrt{1,21} \cdot \sqrt{400}$;

б) $0,2\sqrt{900} + 1,8\sqrt{\frac{1}{9}}$;   г) $5 : \sqrt{0,25} \cdot \sqrt{0,81}$.

343. Найдите значение выражения $x + |x|$, если $x = 7$; 10; 0; -3; -8. Упростите выражение $x + |x|$, если: а) $x \geqslant 0$; б) $x < 0$.

344. Сократите дробь:

а) $\dfrac{4a^2 - 20a + 25}{25 - 4a^2}$;   б) $\dfrac{9x^2 + 4y^2 - 12xy}{4y^2 - 9x^2}$.

14. Функция $y = \sqrt{x}$ и её график

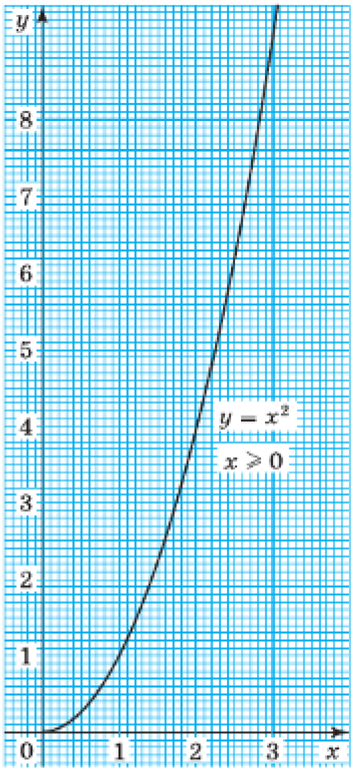


Рис. 17

Пусть длина стороны квадрата равна a см, а его площадь равна S см^2. Каждому значению длины a стороны квадрата соответствует единственное значение его площади S. Зависимость площади квадрата от длины его стороны выражается формулой $S = a^2$, где $a \geqslant 0$.

Наоборот, для каждого значения площади квадрата S можно указать соответствующее ему единственное значение длины стороны a. Зависимость длины стороны квадрата от его площади выражается формулой $a = \sqrt{S}$.

Формулами

$$S = a^2, \text{ где } a \geqslant 0, \text{ и } a = \sqrt{S}$$

задаются функциональные зависимости между одними и теми же переменными, однако в первом случае независимой переменной является длина a стороны квадрата, а во втором — площадь S.

Если в каждом случае обозначить независимую переменную буквой x, а зависимую переменную буквой y, то получим формулы

$$y = x^2, \text{ где } x \geqslant 0,$$

и

$$y = \sqrt{x}.$$

Мы знаем, что графиком функции $y = x^2$, где $x \geqslant 0$, является часть параболы — её правая ветвь (рис. 17). Построим теперь график функции $y = \sqrt{x}$.

Так как выражение $\sqrt{x}$ имеет смысл при $x \geqslant 0$, то областью определения функции $y = \sqrt{x}$ служит множество неотрицательных чисел.

Составим таблицу значений функции $y = \sqrt{x}$ (приближённые значения y для значений x, не являющихся квадратами целых чисел, можно найти с помощью калькулятора).

x	0	0,5	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	0	0,7	1	1,4	1,7	2	2,2	2,4	2,6	2,8	3

Построим в координатной плоскости точки, координаты которых указаны в таблице. Проведя от начала координат через эти точки плавную линию так, как это показано на рисунке 18, получим график функции $y = \sqrt{x}$.

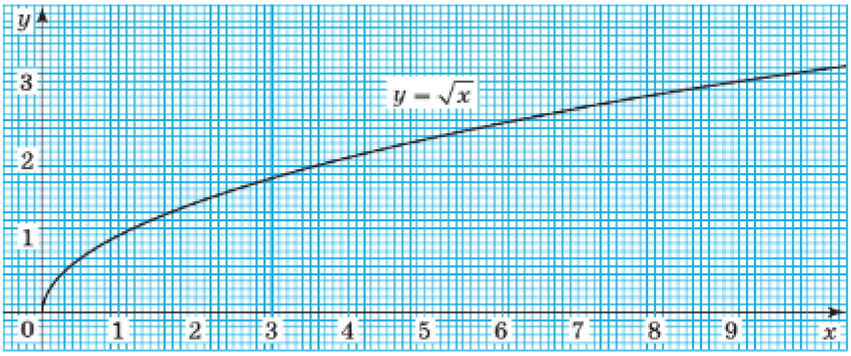


Рис. 18

Сформулируем некоторые *свойства* функции $y = \sqrt{x}$.

1. **Если $x = 0$, то $y = 0$,** поэтому начало координат принадлежит графику функции.
2. **Если $x > 0$, то $y > 0$;** график расположен в первой координатной четверти.
3. **Большему значению аргумента соответствует большее значение функции;** график функции идёт вверх.

Например: $\sqrt{2{,}6} > \sqrt{1{,}5}$; $\sqrt{6} > \sqrt{3}$.

График функции $y=\sqrt{x}$, как и график функции $y = x^2$, где $x \geqslant 0$, представляет собой ветвь параболы. Эти графики симметричны относительно прямой $y = x$ (рис. 19). Доказательство симметрии графиков основано на том, что точки с координатами $(a; b)$ и $(b; a)$ симметричны относительно прямой $y = x$.

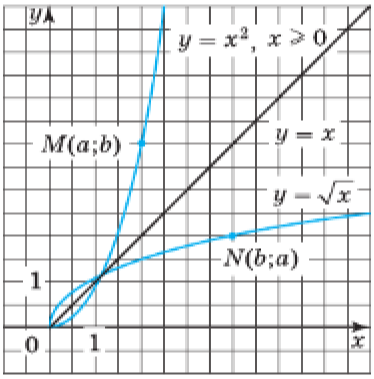


Рис. 19

● Пусть точка $M(a; b)$ принадлежит графику функции $y = x^2$, где $x \geqslant 0$. Тогда верно равенство $b = a^2$. По условию a — неотрицательное число, поэтому $a=\sqrt{b}$. Значит, при подстановке координат точки $N(b; a)$ в формулу $y=\sqrt{x}$ получается верное равенство, т. е. точка $N(b; a)$ принадлежит графику функции $y=\sqrt{x}$. Верно и обратное: если некоторая точка принадлежит второму графику, то точка, у которой координатами являются те же числа, но взятые в другом порядке, принадлежит первому графику.

Таким образом, каждой точке $M(a; b)$ графика функции $y = x^2$, где $x \geqslant 0$, соответствует точка $N(b; a)$ графика функции $y=\sqrt{x}$, и наоборот. Так как точки $M(a; b)$ и $N(b; a)$ симметричны относительно прямой $y = x$, то и сами графики симметричны относительно этой прямой. ○

Упражнения

345. Площадь круга может быть вычислена по формуле $S = \pi r^2$, где r — радиус круга, или по формуле $S=\frac{\pi d^2}{4}$, где d — диаметр круга. Задайте формулой зависимость:

а) r от S; б) d от S.

346. Задайте формулой зависимость:

а) площади поверхности куба S от длины его ребра a;

б) длины ребра куба a от площади его поверхности S.

347. Площадь поверхности шара радиуса R вычисляется по формуле $S = 4\pi R^2$. Задайте формулой зависимость R от S.

348. Пользуясь графиком функции $y=\sqrt{x}$, найдите:

а) значение $\sqrt{x}$ при $x = 2{,}5$; $5{,}5$; $8{,}4$;

б) значение x, которому соответствует $\sqrt{x} = 1{,}2$; $1{,}7$; $2{,}5$.

349. С помощью графика функции $y = \sqrt{x}$ найдите:
а) значение функции при $x = 0{,}5;\ 1{,}5;\ 6{,}5;\ 7{,}2$;
б) значение аргумента, которому соответствует значение $y = 0{,}5;\ 1{,}5;\ 1{,}8;\ 2{,}3$.

350. Принадлежит ли графику функции $y = \sqrt{x}$ точка $A(64;\ 8)$? точка $B(10\ 000;\ 100)$? точка $C(-81;\ 9)$? точка $D(25;\ -5)$?

351. Пересекает ли график функции $y = \sqrt{x}$ прямая:
а) $y = 1$;　　в) $y = 100$;
б) $y = 10$;　　г) $y = -100$?
Если пересекает, то в какой точке?

352. Докажите, что графики функций $y = \sqrt{x}$ и $y = x + 0{,}5$ не имеют общих точек.

353. *(Для работы в парах.)* Имеют ли общие точки графики функций:
а) $y = \sqrt{x}$ и $y = x$;　　в) $y = \sqrt{x}$ и $y = x + 10$;
б) $y = \sqrt{x}$ и $y = 1000$;　　г) $y = \sqrt{x}$ и $y = -x + 1{,}5$?
При положительном ответе укажите координаты этих точек.
1) Распределите, кто выполняет задания а) и в), а кто — задания б) и г), и выполните их.
2) Проверьте друг у друга, верно ли выполнены задания. Исправьте замеченные ошибки.
3) Приведите примеры линейных функций, графики которых: не пересекают график функции $y = \sqrt{x}$; пересекают его в одной точке; пересекают его в двух точках. Обсудите правильность этих примеров.

354. Какой из графиков линейных функций не пересекает графика функции $y = \sqrt{x}$?
1. $y = -x + 2$　　2. $y = -x$
3. $y = -x + 0{,}1$　　4. $y = -x - 0{,}1$

355. Решите графически уравнение:
а) $\sqrt{x} = 6 - x$;　　б) $\sqrt{x} = \frac{4}{x}$;　　в) $-x - 5 = \sqrt{x}$.

356. Что больше:
а) $\sqrt{10}$ или $\sqrt{11}$;　　г) 7 или $\sqrt{50}$;　　ж) $\sqrt{3}$ или 1,8;
б) $\sqrt{0{,}12}$ или $\sqrt{0{,}15}$;　　д) $\sqrt{60}$ или 8;　　з) $\sqrt{28}$ или 5,2;
в) $\sqrt{50}$ или $\sqrt{60}$;　　е) $\sqrt{2}$ или 1,4;　　и) 9 или $\sqrt{95}$?

357. Сравните числа:

а) $\sqrt{27}$ и $\sqrt{28}$; г) $\sqrt{6{,}25}$ и 2,5; ж) $\sqrt{0{,}18}$ и 0,4;

б) $\sqrt{1{,}3}$ и $\sqrt{1{,}5}$; д) $\sqrt{\frac{1}{5}}$ и $\sqrt{\frac{1}{6}}$; з) $\sqrt{\frac{4}{5}}$ и $\sqrt{\frac{5}{6}}$;

в) $\sqrt{7}$ и 3; е) $\sqrt{0{,}8}$ и 1; и) $\sqrt{3{,}5}$ и $\sqrt{3\frac{2}{3}}$.

358. Расположите в порядке возрастания числа:

а) $\sqrt{2{,}3}$, $\sqrt{16{,}4}$, $\sqrt{19{,}5}$, $\sqrt{0{,}6}$, $\sqrt{0{,}07}$;

б) $\sqrt{0{,}5}$, $\frac{1}{9}$, $\sqrt{\frac{1}{3}}$, $2\frac{1}{7}$, $\sqrt{2\frac{1}{9}}$.

П

359. Найдите значение выражения:

а) $0{,}5\sqrt{121}+3\sqrt{0{,}81}$; г) $\sqrt{144}\cdot\sqrt{900}\cdot\sqrt{0{,}01}$;

б) $\left(-3\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^2-10\sqrt{0{,}64}$; д) $\left(-\sqrt{\frac{1}{11}}\right)^2-5\sqrt{0{,}16}$;

в) $\sqrt{400}-(4\sqrt{0{,}5})^2$; е) $\left(-6\sqrt{\frac{1}{6}}\right)^2-4\sqrt{0{,}36}$.

360. Имеет ли смысл выражение:

а) $\sqrt{(-9)^2}$; б) $(\sqrt{-9})^2$; в) $-\sqrt{9^2}$; г) $-\sqrt{(-9)^2}$?

361. Решите уравнения:

а) $x^2 = 11$ и $\sqrt{x}=11$; б) $2x^2=\frac{1}{2}$ и $2\sqrt{x}=\frac{1}{2}$.

Контрольные вопросы и задания

1. Какие числа образуют множество действительных чисел?
2. Какие действительные числа можно и какие нельзя представить в виде отношения целого числа к натуральному?
3. Приведите пример бесконечной десятичной дроби, которая является: а) рациональным числом; б) иррациональным числом.
4. Сформулируйте определение арифметического квадратного корня. При каких значениях a выражение $\sqrt{a}$ имеет смысл?
5. Имеет ли уравнение $x^2 = a$ корни при $a > 0$, $a = 0$, $a < 0$, и если имеет, то сколько?
6. Какова область определения функции $y=\sqrt{x}$?
7. Как расположен график функции $y=\sqrt{x}$ в координатной плоскости? Пересекает ли этот график прямую $y = 25$; $y = 100$; $y = 10\ 000$?

§ 5 СВОЙСТВА АРИФМЕТИЧЕСКОГО КВАДРАТНОГО КОРНЯ

15. Квадратный корень из произведения и дроби

Сравним значения выражений $\sqrt{81 \cdot 4}$ и $\sqrt{81} \cdot \sqrt{4}$:

$$\sqrt{81 \cdot 4} = \sqrt{324} = 18, \quad \sqrt{81} \cdot \sqrt{4} = 9 \cdot 2 = 18.$$

Мы видим, что $\sqrt{81 \cdot 4} = \sqrt{81} \cdot \sqrt{4}$. Аналогичным свойством обладает корень из произведения любых двух неотрицательных чисел.

ТЕОРЕМА 1

Если $a \geqslant 0$ и $b \geqslant 0$, то $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$.

● Каждое из выражений $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ и $\sqrt{ab}$ имеет смысл, так как $a \geqslant 0$ и $b \geqslant 0$. Покажем, что выполняются два условия:

$$1)\ \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \geqslant 0; \qquad 2)\ (\sqrt{a} \cdot \sqrt{b})^2 = ab.$$

Так как выражения $\sqrt{a}$ и $\sqrt{b}$ принимают лишь неотрицательные значения, то произведение $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ неотрицательно.

Используя свойство степени произведения, получим

$$(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 \cdot (\sqrt{b})^2 = ab.$$

Мы показали, что условия 1 и 2 выполняются. Значит, по определению арифметического квадратного корня при любых неотрицательных значениях a и b верно равенство

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}. \quad ○$$

Доказанная теорема распространяется на случай, когда число множителей под знаком корня больше двух.

Например, если $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $c \geqslant 0$, то $\sqrt{abc} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{c}$. Действительно, $\sqrt{abc} = \sqrt{(ab)c} = \sqrt{ab} \cdot \sqrt{c} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{c}$.

Таким образом, арифметический квадратный корень обладает следующим свойством:

> корень из произведения неотрицательных множителей равен произведению корней из этих множителей.

Рассмотрим теперь арифметический квадратный корень из дроби.

ТЕОРЕМА 2

Если $a \geqslant 0$ и $b > 0$, то $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 1. Проведите доказательство самостоятельно.

Итак, справедливо ещё одно свойство арифметического квадратного корня:

> корень из дроби, числитель которой неотрицателен, а знаменатель положителен, равен корню из числителя, делённому на корень из знаменателя.

Пример 1. Найдём значение выражения $\sqrt{64 \cdot 0{,}04}$.

▶ Воспользуемся теоремой о корне из произведения:

$$\sqrt{64 \cdot 0{,}04} = \sqrt{64} \cdot \sqrt{0{,}04} = 8 \cdot 0{,}2 = 1{,}6. \triangleleft$$

Пример 2. Вычислим значение выражения $\sqrt{32 \cdot 98}$.

▶ Представим подкоренное выражение в виде произведения множителей, каждый из которых является квадратом целого числа, и применим теорему о корне из произведения:

$$\sqrt{32 \cdot 98} = \sqrt{(16 \cdot 2) \cdot (49 \cdot 2)} = \sqrt{16 \cdot 49 \cdot 4} = 4 \cdot 7 \cdot 2 = 56. \triangleleft$$

Пример 3. Найдём значение выражения $\sqrt{\frac{36}{169}}$.

▶ По теореме о корне из дроби имеем

$$\sqrt{\frac{36}{169}} = \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{169}} = \frac{6}{13}. \quad \triangleleft$$

Поменяв в тождествах $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ и $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ местами их левые и правые части, получим

$$\boxed{\sqrt{\boldsymbol{a}} \cdot \sqrt{\boldsymbol{b}} = \sqrt{\boldsymbol{ab}} \text{ и } \frac{\sqrt{\boldsymbol{a}}}{\sqrt{\boldsymbol{b}}} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}}.}$$

Этими тождествами пользуются при умножении и делении арифметических квадратных корней.

П р и м е р 4. Найдём значение произведения $\sqrt{20} \cdot \sqrt{5}$.

▶ Имеем
$$\sqrt{20} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{20 \cdot 5} = \sqrt{100} = 10. \quad \triangleleft$$

П р и м е р 5. Найдём значение частного $\frac{\sqrt{80}}{\sqrt{5}}$.

▶ Имеем
$$\frac{\sqrt{80}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{80}{5}} = \sqrt{16} = 4. \quad \triangleleft$$

П р и м е р 6. Найдём значение выражения $\sqrt{11025}$.

▶ Разложим на простые множители число 11 025:
$$\sqrt{11\,025} = \sqrt{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{25} \cdot \sqrt{49} = 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105. \quad \triangleleft$$

П р и м е р 7. Найдём значение выражения $\sqrt{3\frac{13}{36}}$.

▶ Имеем
$$\sqrt{3\frac{13}{36}} = \sqrt{\frac{121}{36}} = \sqrt{\left(\frac{11}{6}\right)^2} = \frac{11}{6} = 1\frac{5}{6}. \quad \triangleleft$$

Упражнения

362. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{100 \cdot 49}$; в) $\sqrt{64 \cdot 121}$; д) $\sqrt{0{,}01 \cdot 169}$;

б) $\sqrt{81 \cdot 400}$; г) $\sqrt{144 \cdot 0{,}25}$; е) $\sqrt{2{,}25 \cdot 0{,}04}$.

363. Вычислите значение корня:

а) $\sqrt{\frac{9}{64}}$; в) $\sqrt{\frac{121}{25}}$; д) $\sqrt{2\frac{7}{81}}$;

б) $\sqrt{\frac{36}{25}}$; г) $\sqrt{1\frac{9}{16}}$; е) $\sqrt{5\frac{1}{16}}$.

364. Найдите значение корня:

а) $\sqrt{81 \cdot 900}$; б) $\sqrt{0{,}36 \cdot 49}$; в) $\sqrt{12\frac{1}{4}}$; г) $\sqrt{10\frac{9}{16}}$.

365. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{9 \cdot 64 \cdot 0{,}25}$; в) $\sqrt{\frac{25}{81} \cdot \frac{16}{49} \cdot \frac{196}{9}}$;

б) $\sqrt{1{,}21 \cdot 0{,}09 \cdot 0{,}0001}$; г) $\sqrt{5\frac{1}{16} \cdot 2\frac{34}{81}}$.

366. Найдите значение корня:

а) $\sqrt{0{,}04 \cdot 81 \cdot 25}$; в) $\sqrt{1\frac{7}{9} \cdot \frac{4}{25}}$;

б) $\sqrt{0{,}09 \cdot 16 \cdot 0{,}04}$; г) $\sqrt{\frac{121}{144} \cdot 2\frac{1}{4}}$.

367. Вычислите значение корня:

а) $\sqrt{810 \cdot 40}$; в) $\sqrt{72 \cdot 32}$; д) $\sqrt{50 \cdot 18}$; ж) $\sqrt{90 \cdot 6{,}4}$;

б) $\sqrt{10 \cdot 250}$; г) $\sqrt{8 \cdot 98}$; е) $\sqrt{2{,}5 \cdot 14{,}4}$; з) $\sqrt{16{,}9 \cdot 0{,}4}$.

368. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{75 \cdot 48}$; б) $\sqrt{45 \cdot 80}$; в) $\sqrt{4{,}9 \cdot 360}$; г) $\sqrt{160 \cdot 6{,}4}$.

369. Вычислите значение выражения:

а) $\sqrt{13^2 - 12^2}$; в) $\sqrt{313^2 - 312^2}$; д) $\sqrt{45{,}8^2 - 44{,}2^2}$;

б) $\sqrt{8^2 + 6^2}$; г) $\sqrt{122^2 - 22^2}$; е) $\sqrt{21{,}8^2 - 18{,}2^2}$.

370. Извлеките корень:

а) $\sqrt{17^2 - 8^2}$; в) $\sqrt{82^2 - 18^2}$; д) $\sqrt{6{,}8^2 - 3{,}2^2}$;

б) $\sqrt{3^2 + 4^2}$; г) $\sqrt{117^2 - 108^2}$; е) $\sqrt{\left(1\frac{1}{16}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}$.

371. Представьте выражение в виде произведения корней:

а) $\sqrt{15}$; б) $\sqrt{21}$; в) $\sqrt{7a}$; г) $\sqrt{3c}$.

372. Представьте выражение в виде частного корней:

а) $\sqrt{\frac{2}{7}}$; б) $\sqrt{\frac{3}{10}}$; в) $\sqrt{\frac{5}{a}}$; г) $\sqrt{\frac{b}{3}}$.

373. Докажите, что при любом неотрицательном a:

а) $10\sqrt{\frac{a}{100}} = \sqrt{a}$; б) $\sqrt{a} = \frac{1}{10}\sqrt{100a}$.

374. Укажите натуральные значения n, при которых $\sqrt{n^2 - 75}$ является натуральным числом.

375. Используя приближённое равенство $\sqrt{75} \approx 8{,}7$, найдите приближённое значение выражения:

а) $\sqrt{7500}$; б) $\sqrt{750\,000}$; в) $\sqrt{0{,}75}$; г) $\sqrt{0{,}0075}$.

376. Используя свойства квадратного корня и таблицу квадратов на с. 299, найдите значение выражения:

а) $\sqrt{57\,600}$; в) $\sqrt{152\,100}$; д) $\sqrt{20{,}25}$; ж) $\sqrt{0{,}0484}$;

б) $\sqrt{230\,400}$; г) $\sqrt{129\,600}$; е) $\sqrt{9{,}61}$; з) $\sqrt{0{,}3364}$.

377. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{44\,100}$; б) $\sqrt{435\,600}$; в) $\sqrt{0{,}0729}$; г) $\sqrt{15{,}21}$.

378. Найдите значение произведения:

а) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}$; в) $\sqrt{28}\cdot\sqrt{7}$; д) $\sqrt{13}\cdot\sqrt{52}$; ж) $\sqrt{50}\cdot\sqrt{4{,}5}$;

б) $\sqrt{27}\cdot\sqrt{3}$; г) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{32}$; е) $\sqrt{63}\cdot\sqrt{7}$; з) $\sqrt{1{,}2}\cdot\sqrt{3\frac{1}{3}}$.

379. Найдите значение частного:

а) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{18}}$; б) $\frac{\sqrt{23}}{\sqrt{2300}}$; в) $\frac{\sqrt{52}}{\sqrt{117}}$; г) $\frac{\sqrt{12\,500}}{\sqrt{500}}$; д) $\frac{\sqrt{7{,}5}}{\sqrt{0{,}3}}$.

380. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{10}\cdot\sqrt{40}$; в) $\sqrt{162}\cdot\sqrt{2}$; д) $\sqrt{110}\cdot\sqrt{4{,}4}$; ж) $\frac{\sqrt{999}}{\sqrt{111}}$;

б) $\sqrt{12}\cdot\sqrt{3}$; г) $\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{\frac{3}{8}}$; е) $\sqrt{1\frac{4}{5}}\cdot\sqrt{0{,}2}$; з) $\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{735}}$.

381. Значение выражения $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$ с помощью калькулятора можно вычислить двумя способами: найти значения $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$ и результаты перемножить или заменить произведение $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$ выражением $\sqrt{6}$ и затем найти его значение. Каким из этих способов удобнее пользоваться? Выполните вычисления.

П

382. Найдите значение выражения $\sqrt{x^2}$, если $x = -4$; -3; 0; 9; 20. При каких значениях x выражение $\sqrt{x^2}$ имеет смысл?

383. Представьте в виде квадрата некоторого выражения:

а) a^4; б) a^6; в) a^{18}; г) $\frac{1}{a^{10}}$; д) a^2b^8; е) $\frac{a^6}{b^{12}}$.

384. Основанием прямоугольного параллелепипеда является квадрат со стороной a см, высота параллелепипеда равна b см, а его объём равен V см^3. Выразите переменную a через b и V.

385. Решите уравнение:

а) $\frac{2x}{5}-\frac{x+18}{6}=23+\frac{x}{30}$; б) $\frac{x-1}{3}+\frac{2x+1}{5}=\frac{3x-1}{4}$.

16. Квадратный корень из степени

Найдём значение выражения $\sqrt{x^2}$ при $x = 5$ и при $x = -6$:

$$\sqrt{5^2}=\sqrt{25}=5,\quad \sqrt{(-6)^2}=\sqrt{36}=6.$$

В каждом из рассмотренных примеров корень из квадрата числа равен модулю этого числа:

$$\sqrt{5^2}=|5|,\quad \sqrt{(-6)^2}=|-6|.$$

ТЕОРЕМА

При любом значении x верно равенство

$$\sqrt{x^2}=|x|. \qquad (1)$$

● Рассмотрим два случая: $x \geqslant 0$ и $x < 0$.

Если $x \geqslant 0$, то по определению арифметического квадратного корня $\sqrt{x^2}=x$.

Если $x < 0$, то $-x > 0$, поэтому $\sqrt{x^2}=\sqrt{(-x)^2}=-x$.

Мы знаем, что $|x| = x$, если $x \geqslant 0$, и $|x| = -x$, если $x < 0$. Значит, при любом x значение выражения $\sqrt{x^2}$ совпадает со значением выражения $|x|$. ○

Равенство (1) является тождеством. Это тождество применяется при извлечении квадратного корня из степени с чётным показателем. Чтобы извлечь корень из степени с чётным показателем, достаточно представить подкоренное выражение в виде квадрата некоторого выражения и воспользоваться тождеством (1).

Пример 1. Упростим выражение $\sqrt{a^{16}}$.

▶ Представим степень a^{16} в виде $(a^8)^2$ и воспользуемся тождеством (1):

$$\sqrt{a^{16}}=\sqrt{(a^8)^2}=|a^8|.$$

Так как $a^8 \geqslant 0$ при любом a, то $|a^8| = a^8$. Итак, $\sqrt{a^{16}}=a^8$. ◁

Пример 2. Преобразуем выражение $\sqrt{x^{10}}$, где $x < 0$.

▶ Представим x^{10} в виде $(x^5)^2$, получим

$$\sqrt{x^{10}} = \sqrt{(x^5)^2} = |x^5|.$$

Так как $x < 0$, то $x^5 < 0$, поэтому

$$|x^5| = -x^5.$$

Значит, при $x < 0$

$$\sqrt{x^{10}} = -x^5. \quad ◁$$

Пример 3. Найдём значение выражения $\sqrt{893\,025}$.

▶ Представим число 893 025 в виде произведения простых множителей, получим

$$\sqrt{893\,025} = \sqrt{3^6 \cdot 5^2 \cdot 7^2} = \sqrt{3^6} \cdot \sqrt{5^2} \cdot \sqrt{7^2} =$$

$$= \sqrt{(3^3)^2} \cdot 5 \cdot 7 = 3^3 \cdot 35 = 27 \cdot 35 = 945. \quad ◁$$

Пример 4. Упростим выражение $\sqrt{(\sqrt{7}-12)^2} + \sqrt{7}$.

▶ Имеем $\sqrt{(\sqrt{7}-12)^2} + \sqrt{7} = |\sqrt{7} - 12| + \sqrt{7} = 12 - \sqrt{7} + \sqrt{7} = 12.$ ◁

Упражнения

386. Вычислите:

а) $\sqrt{(0,1)^2}$; г) $\sqrt{(1,7)^2}$; ж) $2\sqrt{(-23)^2}$;

б) $\sqrt{(-0,4)^2}$; д) $\sqrt{(-19)^2}$; з) $5\sqrt{52^2}$;

в) $\sqrt{(-0,8)^2}$; е) $\sqrt{24^2}$; и) $0,2\sqrt{(-61)^2}$.

387. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{x^2}$ при $x = 22;\ -35;\ -1\frac{2}{3};\ 0$;

б) $2\sqrt{a^2}$ при $a = -7;\ 12$;

в) $0,1\sqrt{y^2}$ при $y = -15;\ 27$.

388. Замените выражение тождественно равным:

а) $\sqrt{p^8}$; б) $\sqrt{y^2}$; в) $3\sqrt{b^2}$; г) $-0,2\sqrt{x^2}$; д) $\sqrt{25a^2}$.

389. Упростите выражение:

а) $\sqrt{a^2}$, если $a > 0$;
б) $\sqrt{n^2}$, если $n < 0$;
в) $3\sqrt{c^2}$, если $c \geqslant 0$;
г) $-5\sqrt{y^2}$, если $y > 0$;
д) $\sqrt{36x^2}$, если $x \leqslant 0$;
е) $-\sqrt{9y^2}$, если $y < 0$;
ж) $-5\sqrt{4x^2}$, если $x \geqslant 0$;
з) $0{,}5\sqrt{16a^2}$, если $a < 0$.

390. Упростите выражение $\sqrt{a^2-4a+4}$, зная, что:

а) $0 \leqslant a < 2$; б) $a \geqslant 2$.

391. *(Для работы в парах.)* Пользуясь калькулятором, найдите значение выражения $\sqrt{9-6\sqrt{x}+x}$ при x, равном: а) 2,71; б) 12,62.

1) Обсудите, как можно упростить выражение, и выполните намеченное преобразование.
2) Распределите, кто вычисляет значение выражения для случая а), а кто — для случая б), и выполните вычисления.
3) Проверьте друг у друга правильность выполненных преобразований и вычислений.

392. Верно ли равенство:

а) $\sqrt{4-2\sqrt{3}}=\sqrt{3}-1$; б) $\sqrt{9-4\sqrt{5}}=2-\sqrt{5}$?

393. Упростите выражение:

а) $\sqrt{7+4\sqrt{3}}$; б) $\sqrt{6-2\sqrt{5}}$; в) $\sqrt{5+2\sqrt{6}}$; г) $\sqrt{3-\sqrt{8}}$.

394. Найдите значение корня:

а) $\sqrt{2^4}$; б) $\sqrt{3^4}$; в) $\sqrt{2^6}$; г) $\sqrt{10^8}$; д) $\sqrt{(-5)^4}$; е) $\sqrt{(-2)^8}$; ж) $\sqrt{3^4\cdot 5^2}$; з) $\sqrt{2^6\cdot 7^4}$.

395. Вычислите:

а) $\sqrt{11^4}$; б) $\sqrt{4^6}$; в) $\sqrt{(-3)^6}$; г) $\sqrt{(-6)^4}$; д) $\sqrt{2^8\cdot 3^2}$; е) $\sqrt{3^4\cdot 5^6}$; ж) $\sqrt{7^2\cdot 2^8}$; з) $\sqrt{3^6\cdot 5^4}$; и) $\sqrt{8^4\cdot 5^6}$.

396. Извлеките корень, представив подкоренное выражение в виде произведения простых множителей:

а) $\sqrt{20\,736}$; б) $\sqrt{50\,625}$; в) $\sqrt{28\,224}$; г) $\sqrt{680\,625}$.

397. Вычислите:

а) $\sqrt{2304}$; б) $\sqrt{18\,225}$; в) $\sqrt{254\,016}$.

П

398. На рисунке 20 изображены графики функций $y = 2x + 2$, $y = -\frac{x}{4} - 3$ и $y = -2x + 2$. Для каждой функции укажите её график.

399. Объём цилиндра вычисляется по формуле $V = \pi R^2 H$, где R — радиус основания, H — высота цилиндра. Выразите переменную R через V и H.

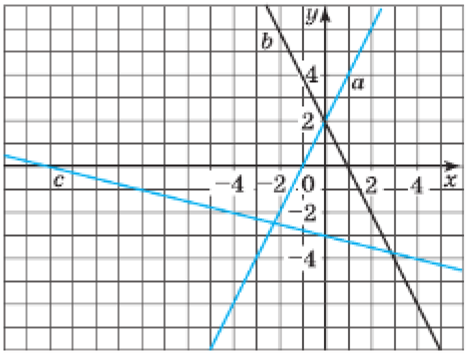


Рис. 20

Контрольные вопросы и задания

1 Сформулируйте и докажите теорему о квадратном корне из произведения.

2 Сформулируйте и докажите теорему о квадратном корне из дроби.

3 Докажите тождество $\sqrt{x^2} = |x|$.

4 Покажите на примере выражения $\sqrt{a^{12}}$, как извлекается квадратный корень из степени с чётным показателем.

§ 6 ПРИМЕНЕНИЕ СВОЙСТВ АРИФМЕТИЧЕСКОГО КВАДРАТНОГО КОРНЯ

17. Вынесение множителя из-под знака корня. Внесение множителя под знак корня

Сравним значения выражений $\sqrt{50}$ и $6\sqrt{2}$. Для этого преобразуем $\sqrt{50}$. Представим число 50 в виде произведения $25 \cdot 2$ и применим теорему о корне из произведения. Получим

$$\sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{2} = 5\sqrt{2}.$$

Так как $5\sqrt{2} < 6\sqrt{2}$, то $\sqrt{50} < 6\sqrt{2}$.

Чтобы сравнить значения выражений $\sqrt{50}$ и $6\sqrt{2}$, мы заменили $\sqrt{50}$ произведением $5\sqrt{2}$. Такое преобразование называют *вынесением множителя из-под знака корня*.

Значения выражений $\sqrt{50}$ и $6\sqrt{2}$ можно сравнить иначе, представив произведение $6\sqrt{2}$ в виде арифметического квадратного корня. Для этого число 6 заменим $\sqrt{36}$ и выполним умножение корней.

Получим

$$6\sqrt{2} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{72}.$$

Так как $50 < 72$, то $\sqrt{50} < \sqrt{72}$. Значит,

$$\sqrt{50} < 6\sqrt{2}.$$

При решении задачи вторым способом мы заменили $6\sqrt{2}$ выражением $\sqrt{72}$. Такое преобразование называют *внесением множителя под знак корня*.

Пример 1. Вынесем множитель из-под знака корня в выражении $\sqrt{a^7}$.

▶ Выражение $\sqrt{a^7}$ имеет смысл лишь при $a \geqslant 0$, так как если $a < 0$, то $a^7 < 0$.
Представим подкоренное выражение a^7 в виде произведения $a^6 \cdot a$, в котором множитель a^6 является степенью с чётным показателем.
Тогда

$$\sqrt{a^7} = \sqrt{a^6 \cdot a} = \sqrt{a^6} \cdot \sqrt{a} =$$
$$= \sqrt{(a^3)^2} \cdot \sqrt{a} = |a^3| \cdot \sqrt{a} = a^3\sqrt{a}. \quad \triangleleft$$

Пример 2. Внесём множитель под знак корня в выражении $-4\sqrt{x}$.

▶ Отрицательный множитель -4 нельзя представить в виде арифметического квадратного корня, и поэтому множитель -4 нельзя внести под знак корня.
Однако выражение $-4\sqrt{x}$ можно преобразовать, внеся под знак корня положительный множитель 4:

$$-4\sqrt{x} = -1 \cdot 4\sqrt{x} = -1 \cdot \sqrt{16} \cdot \sqrt{x} = -\sqrt{16x}. \quad \triangleleft$$

Пример 3. Внесём множитель под знак корня в выражении $a\sqrt{2}$.

Множитель a может быть любым числом (положительным, нулём или отрицательным). Поэтому рассмотрим два случая:

если $a \geqslant 0$, то $a\sqrt{2} = |a|\sqrt{2} = \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2a^2}$;

если $a < 0$, то $a\sqrt{2} = -|a|\sqrt{2} = -\sqrt{a^2} \cdot \sqrt{2} = -\sqrt{2a^2}$.

Упражнения

400. Вынесите множитель из-под знака корня:

а) $\sqrt{12}$; в) $\sqrt{80}$; д) $\sqrt{125}$; ж) $\sqrt{363}$;

б) $\sqrt{18}$; г) $\sqrt{48}$; е) $\sqrt{108}$; з) $\sqrt{84\,500}$.

401. Вынесите множитель из-под знака корня и упростите полученное выражение:

а) $\frac{1}{2}\sqrt{24}$; в) $-\frac{1}{7}\sqrt{147}$; д) $0{,}1\sqrt{20\,000}$;

б) $\frac{2}{3}\sqrt{45}$; г) $-\frac{1}{5}\sqrt{275}$; е) $-0{,}05\sqrt{28\,800}$.

402. Вынесите множитель из-под знака корня:

а) $\sqrt{20}$; в) $\sqrt{200}$; д) $0{,}2\sqrt{75}$; ж) $-0{,}125\sqrt{192}$;

б) $\sqrt{98}$; г) $\sqrt{160}$; е) $0{,}7\sqrt{300}$; з) $-\frac{1}{3}\sqrt{450}$.

403. Внесите множитель под знак корня:

а) $7\sqrt{10}$; г) $10\sqrt{y}$; ж) $a\sqrt{x^2}$;

б) $5\sqrt{3}$; д) $3\sqrt{2a}$; з) $m^2\sqrt{m^3}$;

в) $6\sqrt{x}$; е) $5\sqrt{3b}$; и) $3xy^2\sqrt{y}$.

404. Какие из выражений не имеют смысла:

а) $\sqrt{2\sqrt{17}-4}$; д) $\sqrt{\sqrt{11}-3\sqrt{2}}$; и) $\sqrt{-\sqrt{186}+5\sqrt{7}}$;

б) $\sqrt{9-\sqrt{80}}$; е) $\sqrt{2\sqrt{2}-\sqrt{7}}$; к) $\sqrt{\sqrt{56}-4\sqrt{2}}$;

в) $\sqrt{8\sqrt{3}-14}$; ж) $\sqrt{6\sqrt{3}-7\sqrt{2}}$; л) $\sqrt{\sqrt{42}-6\sqrt{5}}$;

г) $\sqrt{15-2\sqrt{56}}$; з) $\sqrt{\sqrt{186}-5\sqrt{13}}$; м) $\sqrt{\sqrt{72}-6\sqrt{2}}$?

405. Представьте выражение в виде арифметического квадратного корня или выражения, ему противоположного:

а) $3\sqrt{\frac{1}{3}}$; г) $-10\sqrt{0,02}$; ж) $-0,1\sqrt{1,2a}$;

б) $2\sqrt{\frac{3}{4}}$; д) $5\sqrt{\frac{a}{5}}$; з) $-\frac{1}{3}\sqrt{0,9a}$;

в) $\frac{1}{3}\sqrt{18}$; е) $-\frac{1}{2}\sqrt{12x}$; и) $-6\sqrt{6b}$.

406. Замените выражение арифметическим квадратным корнем или выражением, ему противоположным:

а) $2\sqrt{2}$; б) $5\sqrt{y}$; в) $-7\sqrt{3}$; г) $-6\sqrt{2a}$; д) $\frac{1}{3}\sqrt{18b}$; е) $-0,1\sqrt{200c}$.

407. Сравните значения выражений:

а) $3\sqrt{3}$ и $\sqrt{12}$; в) $5\sqrt{4}$ и $4\sqrt{5}$; д) $-\sqrt{14}$ и $-3\sqrt{2}$;

б) $\sqrt{20}$ и $3\sqrt{5}$; г) $2\sqrt{5}$ и $3\sqrt{2}$; е) $-7\sqrt{0,17}$ и $-11\sqrt{0,05}$.

408. Сравните значения выражений:

а) $\frac{1}{3}\sqrt{351}$ и $\frac{1}{2}\sqrt{188}$; в) $\sqrt{24}$ и $\frac{1}{3}\sqrt{216}$;

б) $\frac{1}{3}\sqrt{54}$ и $\frac{1}{5}\sqrt{150}$; г) $\frac{2}{3}\sqrt{72}$ и $7\sqrt{\frac{2}{3}}$.

409. Расположите в порядке возрастания числа:

а) $3\sqrt{3}$, $2\sqrt{6}$, $\sqrt{29}$, $4\sqrt{2}$, $2\sqrt{11}$;

б) $6\sqrt{2}$, $\sqrt{58}$, $3\sqrt{7}$, $2\sqrt{14}$, $5\sqrt{3}$;

в) $-\sqrt{11}$, $-2\sqrt{5}$, $\sqrt{2}$, $-2\sqrt{6}$, $-\sqrt{51}$;

г) $-\sqrt{83}$, $-9\sqrt{2}$, $-\sqrt{17}$, $-5\sqrt{8}$, $-\frac{1}{3}\sqrt{18}$.

410. *(Задача-исследование.)* Проверьте, верны ли равенства

$$\sqrt{2\frac{2}{3}} = 2\sqrt{\frac{2}{3}},\quad \sqrt{3\frac{2}{3}} = 3\sqrt{\frac{3}{8}},\quad \sqrt{4\frac{4}{15}} = 4\sqrt{\frac{4}{15}}.$$

Выясните, каким должно быть соотношение между числами a и b, чтобы было верно равенство $\sqrt{a+\frac{a}{b}} = a\sqrt{\frac{a}{b}}$, где $a \in \boldsymbol{N}$ и $b \in \boldsymbol{N}$.

1) Возведите в квадрат обе части равенства.
2) Установите, каким должно быть соотношение между числами a и b.
3) Проиллюстрируйте правильность вашего вывода на примерах.

411. *(Для работы в парах.)* Площадь треугольника S см^2 со сторонами a см, b см и c см можно вычислить по формуле Герона:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

где p — полупериметр треугольника.
Найдите площадь треугольника, стороны которого равны:
а) 12 см, 16 см, 24 см; б) 18 см, 22 см, 26 см.
(Можете воспользоваться калькулятором.)
1) Распределите, кто выполняет задание а), а кто — задание б), и выполните вычисления.
2) Проверьте друг у друга правильность вычислений.
3) Обсудите, как изменится площадь треугольника, если каждую из его сторон увеличить в 2 раза. Выскажите предположение и выполните необходимые преобразования.

П

412. В школьной мастерской учащиеся за три дня переплели 144 книги. Сколько книг было переплетено в каждый из трёх дней, если известно, что во второй день учащиеся переплели на 12 книг больше, чем в первый, а в третий — $\frac{5}{7}$ числа книг, переплетённых в первый и во второй дни вместе?

413. Решите уравнение:

а) $\frac{4x-1}{12} + \frac{7}{4} = \frac{5-x}{9}$; б) $\frac{2x-9}{6} - \frac{2(5x+3)}{15} = \frac{1}{2}$.

18. Преобразование выражений, содержащих квадратные корни

Мы рассмотрели ряд преобразований выражений, содержащих квадратные корни. К ним относятся преобразования корней из произведения, дроби и степени, умножение и деление корней, вынесение множителя из-под знака корня, внесение множителя под знак корня. Рассмотрим другие примеры преобразований выражений, содержащих квадратные корни.

Пример 1. Упростим выражение $3\sqrt{5a} - \sqrt{20a} + 4\sqrt{45a}$.

▶ Вынесем из-под знака корня в выражении $\sqrt{20a}$ число 2, а в выражении $\sqrt{45a}$ число 3. Получим

$$3\sqrt{5a} - \sqrt{20a} + 4\sqrt{45a} = 3\sqrt{5a} - 2\sqrt{5a} + 12\sqrt{5a} =$$

$$= \sqrt{5a}(3 - 2 + 12) = 13\sqrt{5a}. \triangleleft$$

Заменив сумму $3\sqrt{5a}-2\sqrt{5a}+12\sqrt{5a}$ выражением $13\sqrt{5a}$, мы выполнили приведение подобных слагаемых. Запись можно вести короче, не выписывая промежуточный результат.

Пример 2. Сократим дробь $\frac{x^2-3}{x+\sqrt{3}}$.

▶ Так как $3=(\sqrt{3})^2$, то числитель данной дроби можно представить в виде разности квадратов двух выражений. Поэтому

$$\frac{x^2-3}{x+\sqrt{3}}=\frac{x^2-(\sqrt{3})^2}{x+\sqrt{3}}=\frac{(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})}{x+\sqrt{3}}=x-\sqrt{3}. \triangleleft$$

Пример 3. Преобразуем дробь $\frac{c}{\sqrt{2}}$ так, чтобы знаменатель не содержал квадратного корня.

▶ Умножив числитель и знаменатель дроби на $\sqrt{2}$, получим

$$\frac{c}{\sqrt{2}}=\frac{c\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2}=\frac{c\sqrt{2}}{2}. \triangleleft$$

Мы заменили дробь $\frac{c}{\sqrt{2}}$ тождественно равной дробью $\frac{c\sqrt{2}}{2}$, не содержащей в знаменателе знака корня. В таких случаях говорят, что мы *освободились от иррациональности* в знаменателе дроби.

Пример 4. Выясним, между какими последовательными целыми числами заключено значение выражения $\frac{4-3\sqrt{6}}{\sqrt{6}-1}$.

▶ Освободимся от иррациональности в знаменателе дроби. Для этого умножим числитель и знаменатель дроби на сумму $\sqrt{6}+1$. Получим

$$\frac{4-3\sqrt{6}}{\sqrt{6}-1}=\frac{(4-3\sqrt{6})(\sqrt{6}+1)}{(\sqrt{6}-1)(\sqrt{6}+1)}=\frac{4\sqrt{6}-3(\sqrt{6})^2+4-3\sqrt{6}}{(\sqrt{6})^2-1}=$$

$$=\frac{\sqrt{6}-3\cdot 6+4}{6-1}=\frac{\sqrt{6}-14}{5}.$$

Так как $2<\sqrt{6}<3$, то $-12<\sqrt{6}-14<-11$, значит,

$$-2{,}4<\frac{\sqrt{6}-14}{5}<-2{,}2.$$

Получаем

$$-3<\frac{\sqrt{6}-14}{5}<-2. \triangleleft$$

Упражнения

414. Упростите выражение:

а) $\sqrt{75}+\sqrt{48}-\sqrt{300}$;
б) $3\sqrt{8}-\sqrt{50}+2\sqrt{18}$;
в) $\sqrt{242}-\sqrt{200}+\sqrt{8}$;
г) $\sqrt{75}-0{,}1\sqrt{300}-\sqrt{27}$;
д) $\sqrt{98}-\sqrt{72}+0{,}5\sqrt{8}$.

415. Упростите выражение:

а) $\sqrt{8p}-\sqrt{2p}+\sqrt{18p}$;
б) $\sqrt{160c}+2\sqrt{40c}-3\sqrt{90c}$;
в) $5\sqrt{27m}-4\sqrt{48m}-2\sqrt{12m}$;
г) $\sqrt{54}-\sqrt{24}+\sqrt{150}$;
д) $3\sqrt{2}+\sqrt{32}-\sqrt{200}$;
е) $2\sqrt{72}-\sqrt{50}-2\sqrt{8}$.

416. Выполните действия, используя формулы сокращённого умножения:

а) $(x+\sqrt{y})(x-\sqrt{y})$;
б) $(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})$;
в) $(\sqrt{11}-3)(\sqrt{11}+3)$;
г) $(\sqrt{10}+\sqrt{7})(\sqrt{7}-\sqrt{10})$;
д) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$;
е) $(\sqrt{m}-\sqrt{n})^2$;
ж) $(\sqrt{2}+3)^2$;
з) $(\sqrt{5}-\sqrt{2})^2$.

417. Выполните действия:

а) $(2\sqrt{5}+1)(2\sqrt{5}-1)$;
б) $(5\sqrt{7}-\sqrt{13})(\sqrt{13}+5\sqrt{7})$;
в) $(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})(2\sqrt{3}+3\sqrt{2})$;
г) $(1+3\sqrt{5})^2$;
д) $(2\sqrt{3}-7)^2$;
е) $(2\sqrt{10}-\sqrt{2})^2$.

418. Выполните действия:

а) $\left(\sqrt{4+\sqrt{7}}+\sqrt{4-\sqrt{7}}\right)^2$;
б) $\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}-\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^2$.

419. Преобразуйте выражение:

а) $(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)$;
б) $(\sqrt{x}-\sqrt{a})(\sqrt{x}+\sqrt{a})$;
в) $(\sqrt{m}+\sqrt{2})^2$;
г) $(\sqrt{3}-\sqrt{x})^2$;
д) $(5\sqrt{7}-13)(5\sqrt{7}+13)$;
е) $(2\sqrt{2}+3\sqrt{3})(2\sqrt{2}-3\sqrt{3})$;
ж) $(6-\sqrt{2})^2+3\sqrt{32}$;
з) $(\sqrt{2}+\sqrt{18})^2-30$.

420. Разложите на множители, используя формулу разности квадратов:

а) x^2-7;
б) $5-c^2$;
в) $4a^2-3$;
г) $11-16b^2$;
д) $y-3$, где $y \geqslant 0$;
е) $x-y$, где $x>0$ и $y>0$.

421. Разложите на множители выражение:

а) $3+\sqrt{3}$; г) $a-5\sqrt{a}$; ж) $\sqrt{14}-\sqrt{7}$;

б) $10-2\sqrt{10}$; д) $\sqrt{a}-\sqrt{2a}$; з) $\sqrt{33}+\sqrt{22}$.

в) $\sqrt{x}+x$; е) $\sqrt{3m}+\sqrt{5m}$;

422. Сократите дробь:

а) $\frac{b^2-5}{b-\sqrt{5}}$; в) $\frac{2-\sqrt{x}}{x-4}$; д) $\frac{a-b}{\sqrt{b}+\sqrt{a}}$;

б) $\frac{m+\sqrt{6}}{6-m^2}$; г) $\frac{b-9}{\sqrt{b}+3}$; е) $\frac{2\sqrt{x}-3\sqrt{y}}{4x-9y}$.

423. Сократите дробь:

а) $\frac{x^2-2}{x+\sqrt{2}}$; в) $\frac{\sqrt{x}-5}{25-x}$; д) $\frac{5+\sqrt{10}}{\sqrt{10}}$;

б) $\frac{\sqrt{5}-a}{5-a^2}$; г) $\frac{\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}}$; е) $\frac{2\sqrt{3}-3}{5\sqrt{3}}$.

424. Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби:

а) $\frac{x}{\sqrt{5}}$; г) $\frac{a}{b\sqrt{b}}$; ж) $\frac{5}{2\sqrt{3}}$;

б) $\frac{3}{\sqrt{b}}$; д) $\frac{4}{\sqrt{a+b}}$; з) $\frac{8}{3\sqrt{2}}$;

в) $\frac{2}{7\sqrt{y}}$; е) $\frac{1}{\sqrt{a-b}}$; и) $\frac{3\sqrt{5}}{5\sqrt{2}}$.

425. Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби:

а) $\frac{m}{\sqrt{x}}$; в) $\frac{3}{5\sqrt{c}}$; д) $\frac{3}{2\sqrt{3}}$;

б) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; г) $\frac{a}{2\sqrt{3}}$; е) $\frac{5}{4\sqrt{15}}$.

426. Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби:

а) $\frac{4}{\sqrt{3}+1}$; в) $\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$; д) $\frac{33}{7-3\sqrt{3}}$;

б) $\frac{1}{1-\sqrt{2}}$; г) $\frac{a}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$; е) $\frac{15}{2\sqrt{5}+5}$.

427. Докажите, что значение выражения:

а) $\dfrac{1}{3\sqrt{3}-4}-\dfrac{1}{3\sqrt{3}+4}$ есть число рациональное;

б) $\dfrac{1}{5-2\sqrt{6}}-\dfrac{1}{5+2\sqrt{6}}$ есть число иррациональное.

428. Между какими последовательными целыми числами заключено значение выражения:

а) $\dfrac{1}{\sqrt{5}-2}$; б) $\dfrac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$; в) $\dfrac{3}{\sqrt{10}+\sqrt{7}}$; г) $\dfrac{5+3\sqrt{3}}{\sqrt{3}+2}$?

429. Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби:

а) $\dfrac{x}{x+\sqrt{y}}$; в) $\dfrac{4}{\sqrt{10}-\sqrt{2}}$; д) $\dfrac{9}{3-2\sqrt{2}}$;

б) $\dfrac{b}{a-\sqrt{b}}$; г) $\dfrac{12}{\sqrt{3}+\sqrt{6}}$; е) $\dfrac{14}{1+5\sqrt{2}}$.

430. Докажите, что:

а) $\sqrt{\dfrac{3}{5}}=0{,}2\sqrt{15}$; б) $\sqrt{\dfrac{2}{a}}=\dfrac{1}{a}\sqrt{2a}$.

431. Докажите, что числа $2-\sqrt{3}$ и $2+\sqrt{3}$ являются взаимно обратными, а числа $2\sqrt{6}-5$ и $\dfrac{1}{2\sqrt{6}+5}$ — противоположными.

432. Среди чисел $15\sqrt{3}-4\sqrt{2}$, $6-\sqrt{12}$, $\sqrt{80}-5\sqrt{3}$, $\sqrt{75}-4\sqrt{5}$, $\dfrac{1}{2\sqrt{3}-6}$, $\dfrac{1}{\sqrt{675}-\sqrt{32}}$ есть пара взаимно обратных чисел и пара противоположных чисел. Найдите эти пары.

П

433. Упростите выражение $\dfrac{9-x^2}{4x}\cdot\dfrac{8x}{x^2+6x+9}-2$ и найдите его значение при $x=-2{,}5$.

434. Решите уравнение:

а) $\dfrac{3x-1}{2}+\dfrac{2-x}{3}+1=0$; б) $\dfrac{y-10}{6}-\dfrac{5-2y}{4}=2{,}5$.

П

435. Площадь кольца вычисляется по формуле $S = \pi(R^2 - r^2)$, где R — радиус внешнего круга, а r — радиус внутреннего круга. Выразите R через S и r.

436. Напишите для каждой прямой, изображённой на рисунке 21, уравнение, графиком которого является эта прямая.

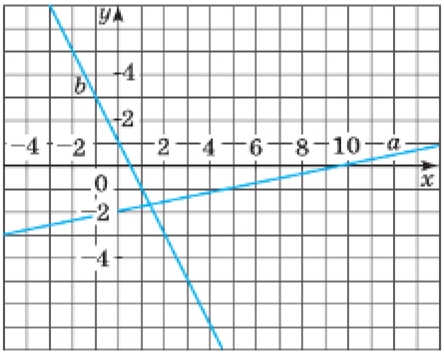


Рис. 21

Контрольные вопросы и задания

1 На примере выражения $3\sqrt{a}$ покажите, как можно внести множитель под знак корня.

2 На примере выражения $\sqrt{8a}$ покажите, как можно вынести множитель из-под знака корня.

3 На примере выражений $\frac{1}{\sqrt{a}}$ и $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ покажите, как можно освободиться от иррациональности в знаменателе дроби.

Для тех, кто хочет знать больше

19. Преобразование двойных радикалов

Сторона a_5 правильного пятиугольника, вписанного в круг радиуса R, вычисляется по формуле

$$a_5 = \frac{1}{2}R\sqrt{10-2\sqrt{5}}.$$

Выражение $\sqrt{10-2\sqrt{5}}$, входящее в эту формулу, имеет вид

$$\sqrt{a+b\sqrt{c}},$$

где a, b, c — некоторые рациональные числа. Выражение такого вида называют *двойным радикалом*.

В преобразованиях выражений, содержащих двойные радикалы, стремятся освободиться от внешнего радикала. Это нетрудно сделать, когда выражение, стоящее под знаком радикала, можно представить в виде квадрата суммы или квадрата разности.

Пример 1. Освободимся от внешнего радикала в выражении $\sqrt{41-12\sqrt{5}}$.

▶ Попытаемся представить выражение $41-12\sqrt{5}$ в виде квадрата разности двух выражений. Для этого $12\sqrt{5}$ будем рассматривать как удвоенное произведение двух выражений, а 41 — как сумму их квадратов. Выражение $12\sqrt{5}$ можно представить, например, как $2\cdot 6\cdot\sqrt{5}$ или как $2\cdot 3\cdot 2\sqrt{5}$. Проверка убеждает нас, что именно в первом случае сумма квадратов множителей 6 и $\sqrt{5}$ равна 41. Значит,

$$\sqrt{41-12\sqrt{5}}=\sqrt{36-2\cdot 6\cdot\sqrt{5}+5}=\sqrt{(6-\sqrt{5})^2}=|6-\sqrt{5}|=6-\sqrt{5}.$$ ◁

Пример 2. Освободимся от внешнего радикала в выражении $\sqrt{61+28\sqrt{3}}$.

Покажем, как можно решить эту задачу, используя *метод неопределённых коэффициентов*.

▶ Пусть $\sqrt{61+28\sqrt{3}}=a+b\sqrt{3}$, где a и b — некоторые числа.

Тогда $(a+b\sqrt{3})^2=61+28\sqrt{3}$ и $a+b\sqrt{3}\geqslant 0$. Значит,

$$a^2+2ab\sqrt{3}+3b^2=61+28\sqrt{3}.$$

Отсюда

$$\begin{cases}a^2+3b^2=61,\\2ab=28,\end{cases}\quad\text{т. е.}\quad\begin{cases}a^2+3b^2=61,\\ab=14.\end{cases}$$

Выпишем все пары целых чисел $(a;\ b)$, для которых $ab=14$: $(-14;\ -1)$, $(-7;\ -2)$, $(-2;\ -7)$, $(-1;\ -14)$, $(1;\ 14)$, $(2;\ 7)$, $(7;\ 2)$, $(14;\ 1)$. Из этих пар выберем те, которые удовлетворяют условиям

$$a^2+3b^2=61 \text{ и } a+b\sqrt{3}\geqslant 0.$$

Нетрудно убедиться, что такая пара единственная — это пара $(7;\ 2)$. Значит,

$$\sqrt{61+28\sqrt{3}}=7+2\sqrt{3}.$$ ◁

В тех случаях, когда $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$ и разность a^2-b равна квадрату рационального числа, освободиться от внешнего радикала в выражении $\sqrt{a\pm\sqrt{b}}$ можно с помощью *формулы двойного радикала*:

$$\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}.$$

В правой части этой формулы записано неотрицательное число. Покажем, что его квадрат равен $a \pm \sqrt{b}$:

$$\left(\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}\right)^2 =$$

$$= \frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2} \pm \frac{2\sqrt{a^2-(a^2-b)}}{2} + \frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2} = a \pm \sqrt{b}.$$

Пример 3. Освободимся от внешнего радикала в выражении $\sqrt{57-\sqrt{2024}}$.

▶ По формуле двойного радикала имеем

$$\sqrt{57-\sqrt{2024}} = \sqrt{\frac{57+\sqrt{57^2-2024}}{2}} - \sqrt{\frac{57-\sqrt{57^2-2024}}{2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{57+\sqrt{1225}}{2}} - \sqrt{\frac{57-\sqrt{1225}}{2}} = \sqrt{\frac{57+35}{2}} - \sqrt{\frac{57-35}{2}} = \sqrt{46} - \sqrt{11}. \ \triangleleft$$

Освобождение от внешнего радикала используется в преобразованиях выражений с переменными, содержащих двойные радикалы.

Пример 4. Упростим выражение

$$\sqrt{2a-2\sqrt{a^2-4}} + \sqrt{a-2}, \text{ где } a > 2.$$

▶ Представим в двойном радикале подкоренное выражение в виде

$$(a+2) - 2\sqrt{a^2-4} + (a-2).$$

Получим

$$\sqrt{(a+2)-2\sqrt{a^2-4}+(a-2)} + \sqrt{a-2} = \sqrt{(\sqrt{a+2}-\sqrt{a-2})^2} + \sqrt{a-2} =$$

$$= |\sqrt{a+2}-\sqrt{a-2}| + \sqrt{a-2} = \sqrt{a+2} - \sqrt{a-2} + \sqrt{a-2} = \sqrt{a+2}. \ \triangleleft$$

Упражнения

437. Освободитесь от внешнего радикала, представив подкоренное выражение в виде квадрата:

а) $\sqrt{6+2\sqrt{5}}$;   б) $\sqrt{11-4\sqrt{7}}$.

438. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{11+6\sqrt{2}} - \sqrt{2}$;   б) $\sqrt{27-5\sqrt{8}} + \sqrt{2}$.

439. Освободитесь от внешнего радикала, пользуясь формулой двойного радикала:

а) $\sqrt{55+\sqrt{216}}$; в) $\sqrt{17+\sqrt{288}}$;

б) $\sqrt{86-\sqrt{5460}}$; г) $\sqrt{32-\sqrt{1008}}$.

440. Упростите выражение, вычислив предварительно значение a^2, если:

а) $a=\sqrt{11+\sqrt{85}}-\sqrt{11-\sqrt{85}}$;

б) $a=\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}}$.

441. Является ли рациональным или иррациональным числом значение выражения:

а) $\sqrt{13+4\sqrt{3}}-\sqrt{13-4\sqrt{3}}$; б) $\sqrt{19-2\sqrt{34}}+\sqrt{19+2\sqrt{34}}$?

442. Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби:

а) $\dfrac{\sqrt{4-\sqrt{11}}}{\sqrt{4+\sqrt{11}}}$; б) $\dfrac{\sqrt{\sqrt{5}+\sqrt{3}}}{\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3}}}$; в) $\dfrac{\sqrt{\sqrt{5}-2}}{\sqrt{\sqrt{5}+2}}$.

443. Найдите значение выражения:

$$\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}.$$

444. Докажите, что верно равенство:

а) $\sqrt{10+\sqrt{24}+\sqrt{40}+\sqrt{60}}=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$;

б) $\sqrt{9+\sqrt{12}-\sqrt{20}-\sqrt{60}}=1+\sqrt{3}-\sqrt{5}$.

445. Упростите выражение:

а) $\sqrt{\dfrac{b+1}{2}-\sqrt{b}}-\sqrt{\dfrac{b+1}{2}+\sqrt{b}}$, где $b \geqslant 1$;

б) $\sqrt{\dfrac{c+4}{4}+\sqrt{c}}-\sqrt{\dfrac{c+4}{4}-\sqrt{c}}$, где $c \geqslant 4$.

446. Освободитесь от внешнего радикала в выражении:

а) $\sqrt{a+2\sqrt{a-1}}$, если $a \geqslant 1$;

б) $\sqrt{a+b+1+2\sqrt{a+b}}-\sqrt{a+b+1-2\sqrt{a+b}}$, если $a+b \geqslant 1$.

Дополнительные упражнения к главе II

К параграфу 4

447. Известно, что числа a и b натуральные. Является ли натуральным число:

а) $a + b$; б) $a - b$; в) ab; г) $\frac{a}{b}$?

448. Известно, что числа a и b целые. Является ли целым число:

а) $a + b$; б) $a - b$; в) ab; г) $\frac{a}{b}$ $(b \neq 0)$?

449. Известно, что числа a и b рациональные. Является ли рациональным число:

а) $a + b$; б) $a - b$; в) ab; г) $\frac{a}{b}$ $(b \neq 0)$?

450. Докажите, что если числа x и y чётные, то чётным будет число:

а) $x - y$; б) xy; в) $3x + y$.

451. Известно, что числа x и y нечётные. Будет ли чётным или нечётным числом:

а) сумма $x + y$;
б) разность $x - y$;
в) произведение xy?

452. Назовите:

а) пять положительных чисел, меньших 0,002;

б) пять отрицательных чисел, больших $-\frac{1}{11}$;

в) пять чисел, больших $\frac{1}{3}$ и меньших $\frac{1}{2}$.

453. Представьте в виде бесконечной десятичной периодической дроби число:

а) $\frac{23}{64}$; в) $\frac{11}{13}$; д) $\frac{2}{35}$; ж) $\frac{23}{30}$;

б) $-\frac{7}{25}$; г) $\frac{1}{27}$; е) $-\frac{7}{22}$; з) $\frac{12}{55}$.

454. Назовите два рациональных и два иррациональных числа, заключённых между числами 10 и 10,1.

455. Известно, что число a рациональное, а число b иррациональное. Будет ли рациональным или иррациональным число:

а) $a + b$; б) $a - b$?

456. Найдите значение выражения:

а) $0,3\sqrt{289}$; в) $\sqrt{\frac{9}{49}}-1$; д) $2\sqrt{0,0121}+\sqrt{100}$;

б) $-4\sqrt{0,81}$; г) $\frac{4}{\sqrt{256}}-\frac{1}{\sqrt{64}}$; е) $\frac{\sqrt{144}}{6}+\sqrt{2,89}$.

457. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{5x-10}$ при $x = 2;\ 2,2;\ 5,2;\ 22$;

б) $\sqrt{6-2y}$ при $y = 1;\ -1,5;\ -15;\ -37,5$;

в) $\frac{3+\sqrt{x}}{3-\sqrt{x}}$ при $x = 0;\ 1;\ 16;\ 0,25$;

г) $\sqrt{2a-b}$ при $a = 0$, $b = 0$; при $a = 4$, $b = 7$.

458. Решите уравнение:

а) $5\sqrt{x}=3$; в) $\frac{1}{4\sqrt{x}}=2$; д) $1+\sqrt{2x}=10$;

б) $\frac{1}{\sqrt{3x}}=1$; г) $\sqrt{x-5}=4$; е) $3\sqrt{x}-5=4$.

459. Решите уравнение $\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{x}}}=2$.

460. Может ли:
а) сумма двух иррациональных чисел быть рациональным числом;
б) произведение рационального и иррационального чисел быть рациональным числом?

461. Приведите пример уравнения вида $x^2 = a$, которое:
а) имеет два рациональных корня;
б) имеет два иррациональных корня;
в) не имеет корней.

462. Укажите допустимые значения переменной x в выражении:

а) $\sqrt{x^3}$; в) $\sqrt{x^2+1}$; д) $\sqrt{-x^2}$;

б) $\sqrt{x^4}$; г) $\sqrt{(4-x)^2}$; е) $\sqrt{-x^3}$.

463. При каких значениях a и b имеет смысл выражение:

а) $\sqrt{ab}$; в) $\sqrt{a^2b}$; д) $\sqrt{-ab^2}$;

б) $\sqrt{-ab}$; г) $\sqrt{a^2b^2}$; е) $\sqrt{-a^2b^2}$?

464. При каких значениях переменной x имеет смысл выражение:

а) $\frac{4}{\sqrt{x}}$; б) $\frac{1}{\sqrt{x}+2}$; в) $\frac{5}{\sqrt{x}-1}$?

465. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{0{,}16}+(2\sqrt{0{,}1})^2$;

б) $(0{,}2\sqrt{10})^2+0{,}5\sqrt{16}$;

в) $\sqrt{144}-0{,}5(\sqrt{12})^2$;

г) $(3\sqrt{3})^2+(-3\sqrt{3})^2$;

д) $(5\sqrt{2})^2-(2\sqrt{5})^2$;

е) $(-3\sqrt{6})^2-3(\sqrt{6})^2$.

466. Расстояние между двумя точками координатной плоскости $A(x_1;\ y_1)$ и $B(x_2;\ y_2)$ вычисляется по формуле

$$d=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}.$$

Вычислите расстояние между точками $A(-3{,}5;\ 4{,}3)$ и $B(7{,}8;\ 0{,}4)$ с помощью калькулятора.

467. Сравните числа:

а) $\sqrt{7{,}5}$ и $\sqrt{7{,}6}$;

б) $\sqrt{0{,}1}$ и $\sqrt{0{,}01}$;

в) $\sqrt{\frac{1}{3}}$ и $\sqrt{0{,}3}$;

г) $\sqrt{2{,}16}$ и $\sqrt{2\frac{1}{6}}$;

д) $\sqrt{\frac{5}{9}}$ и $\sqrt{\frac{6}{11}}$;

е) $\sqrt{\frac{1}{3}}$ и $\sqrt{0{,}(3)}$;

ж) $\sqrt{7}$ и $2{,}6$;

з) $3{,}2$ и $\sqrt{9{,}8}$;

и) $\sqrt{1{,}23}$ и $1{,}1$.

468. С помощью графиков выясните, сколько корней может иметь при различных значениях b уравнение:

а) $\sqrt{x}=x+b$; б) $\sqrt{x}=-x+b$.

К параграфу 5

469. Вычислите:

а) $\sqrt{196\cdot 0{,}81\cdot 0{,}36}$;

б) $\sqrt{1\frac{9}{16}\cdot 5\frac{4}{9}\cdot 0{,}01}$;

в) $\sqrt{0{,}87\cdot 49+0{,}82\cdot 49}$;

г) $\sqrt{1{,}44\cdot 1{,}21-1{,}44\cdot 0{,}4}$.

470. Найдите значение корня:

а) $\sqrt{\frac{165^2-124^2}{164}}$;

б) $\sqrt{\frac{98}{176^2-112^2}}$;

в) $\sqrt{\frac{149^2-76^2}{457^2-384^2}}$;

г) $\sqrt{\frac{145{,}5^2-96{,}5^2}{193{,}5^2-31{,}5^2}}$.

471. Вычислите:

а) $15\sqrt{20}\cdot 0{,}1\sqrt{45}$; в) $\dfrac{8\sqrt{5}}{0{,}4\sqrt{0{,}2}}$;

б) $0{,}3\sqrt{10}\cdot 0{,}2\sqrt{15}\cdot 0{,}5\sqrt{6}$; г) $\dfrac{\sqrt{0{,}48}}{5\sqrt{12}}$.

472. Известно, что $a < 0$ и $b < 0$. Представьте выражение:

а) $\sqrt{ab}$ в виде произведения корней;

б) $\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ в виде частного корней.

473. Найдите значение выражения (если оно имеет смысл):

а) $\sqrt{(-12)^2}$; в) $\sqrt{-10^2}$; д) $\sqrt{-(-15)^2}$;

б) $-\sqrt{10^2}$; г) $-\sqrt{(-11)^2}$; е) $-\sqrt{(-25)^2}$.

474. Вычислите:

а) $3\sqrt{(-2)^6}$; г) $0{,}1\sqrt{2^{10}}$; ж) $-\sqrt{(-2)^{12}}$;

б) $-2\sqrt{10^4}$; д) $0{,}1\sqrt{(-3)^8}$; з) $2{,}5\sqrt{(-0{,}1)^4}$.

в) $-3\sqrt{5^4}$; е) $100\sqrt{0{,}1^{10}}$;

475. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{4^3}$; г) $\sqrt{25^3}$; ж) $\sqrt{750\cdot 270}$;

б) $\sqrt{9^5}$; д) $\sqrt{8\cdot 162}$; з) $\sqrt{194\cdot 776}$.

в) $\sqrt{16^5}$; е) $\sqrt{96\cdot 486}$;

476. При каких значениях x верно равенство $\sqrt{x^2}=(\sqrt{x})^2$?

477. При каких значениях переменной верно равенство:

а) $\sqrt{y^4}=y^2$; в) $\sqrt{x^6}=x^3$; д) $\sqrt{a^{14}}=-a^7$;

б) $\sqrt{x^{12}}=x^6$; г) $\sqrt{c^{10}}=-c^5$; е) $\sqrt{b^8}=b^4$?

478. Постройте график функции, заданной формулой:

а) $y=\dfrac{\sqrt{x^2}}{x}$; в) $y=x\sqrt{x^2}$;

б) $y=\dfrac{-2\sqrt{x^2}}{x}$; г) $y=-x\sqrt{x^2}$.

479. Постройте график функции $y = \sqrt{|x|}$.

480. Преобразуйте выражение:

а) $\sqrt{a^4b^4}$;

б) $\sqrt{b^6c^8}$, где $b \geqslant 0$;

в) $\sqrt{16x^4y^{12}}$;

г) $\sqrt{0{,}25p^2y^6}$, где $p \geqslant 0$, $y \leqslant 0$;

д) $\sqrt{\frac{p^4}{a^8}}$;

е) $\sqrt{\frac{16a^{12}}{b^{10}}}$, где $b > 0$;

ж) $\sqrt{\frac{4x^2}{y^6}}$, где $x < 0$, $y < 0$;

з) $\sqrt{\frac{c^6}{9a^2}}$, где $c < 0$, $a > 0$.

481. *(Задача-исследование.)* Верно ли, что при любом натуральном n значение выражения $\sqrt{n(n+1)(n+2)(n+3)+1}$ является натуральным числом?

1) Выберите произвольное значение n и проверьте, является ли натуральным числом соответствующее значение корня.

2) Подумайте, как удобно сгруппировать множители в произведении $n(n+1)(n+2)(n+3)$, чтобы представить подкоренное выражение в виде квадрата.

3) Выполните преобразования и дайте ответ на вопрос задачи.

482. Упростите выражение:

а) $\sqrt{(-a)^2}$; б) $\sqrt{(-a)^2(-b)^4}$.

К параграфу 6

483. Вынесите множитель из-под знака корня:

а) $0{,}5\sqrt{60a^2}$; в) $0{,}1\sqrt{150x^3}$; д) $a\sqrt{18a^2b}$;

б) $2{,}1\sqrt{300x^4}$; г) $0{,}2\sqrt{225a^5}$; е) $-m\sqrt{48am^4}$.

484. Сравните числа:

а) $0{,}2\sqrt{200}$ и $10\sqrt{8}$; в) $0{,}5\sqrt{108}$ и $9\sqrt{3}$;

б) $7\sqrt{\frac{32}{49}}$ и $0{,}8\sqrt{50}$; г) $\frac{5}{2}\sqrt{63}$ и $4{,}5\sqrt{28}$.

485. Расположите в порядке возрастания числа:

а) $\frac{2}{3}\sqrt{72}$, $\sqrt{30}$ и $7\sqrt{2}$; в) $8\sqrt{0{,}2}$, $\sqrt{41}$ и $\frac{2}{5}\sqrt{250}$;

б) $5\sqrt{\frac{7}{2}}$, $\sqrt{17}$ и $\frac{1}{2}\sqrt{62}$; г) $12\sqrt{0{,}5}$, $\sqrt{89}$ и $\frac{3}{4}\sqrt{160}$.

486. Выполните умножение:

а) $\sqrt{x}(\sqrt{a}-\sqrt{b})$;

б) $(\sqrt{x}+\sqrt{y})\sqrt{x}$;

в) $\sqrt{ab}(\sqrt{a}+\sqrt{b})$;

г) $(\sqrt{m}-\sqrt{n})\sqrt{mn}$;

д) $(\sqrt{x}+\sqrt{y})(2\sqrt{x}-\sqrt{y})$;

е) $(\sqrt{a}-\sqrt{b})(3\sqrt{a}+2\sqrt{b})$;

ж) $(2\sqrt{a}+\sqrt{b})(3\sqrt{a}-2\sqrt{b})$;

з) $(4\sqrt{x}-\sqrt{2x})(\sqrt{x}-\sqrt{2x})$.

487. Упростите выражение:

а) $(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x}+x)$;

б) $(\sqrt{a}+2)(a-2\sqrt{a}+4)$;

в) $(\sqrt{m}-\sqrt{n})(m+n+\sqrt{mn})$;

г) $(x+\sqrt{y})(x^2+y-x\sqrt{y})$.

488. Представьте в виде квадрата суммы или квадрата разности выражение:

а) $x-4\sqrt{x-1}+3$;

б) $y+2\sqrt{y+2}+3$.

489. Докажите, что:

а) $\sqrt{6+4\sqrt{2}}=2+\sqrt{2}$;

б) $\sqrt{8\sqrt{3}+19}=\sqrt{3}+4$.

490. Найдите значение выражения:

а) x^2-6 при $x=1+\sqrt{5}$;

б) x^2-6x при $x=3-\sqrt{3}$;

в) x^2-4x+3 при $x=2+\sqrt{3}$;

г) x^2-3x+5 при $x=\frac{3+\sqrt{2}}{2}$.

491. Докажите, что значения выражений

$$\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}} \text{ и } \sqrt{7+4\sqrt{3}}\cdot\sqrt{7-4\sqrt{3}}$$

являются натуральными числами.

492. Докажите, что значение выражения есть число рациональное:

а) $\frac{1}{3\sqrt{2}-5}-\frac{1}{3\sqrt{2}+5}$;

б) $\frac{1}{7+2\sqrt{6}}+\frac{1}{7-2\sqrt{6}}$.

493. Найдите значение выражения:

а) $\frac{1}{11-2\sqrt{30}}-\frac{1}{11+2\sqrt{30}}$;

б) $\frac{5}{3+2\sqrt{2}}+\frac{5}{3-2\sqrt{2}}$;

в) $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$;

г) $\frac{11+\sqrt{21}}{11-\sqrt{21}}+\frac{11-\sqrt{21}}{11+\sqrt{21}}$.

494. Найдите значение дроби $\frac{x^2-3xy+y^2}{x+y+2}$ при $x=3+\sqrt{5}$ и $y=3-\sqrt{5}$.

495. Сократите дробь:

а) $\dfrac{x\sqrt{x}-y\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$; б) $\dfrac{2\sqrt{2}-x\sqrt{x}}{2+\sqrt{2x}+x}$.

496. Сократите дробь:

а) $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}$; б) $\dfrac{a-\sqrt{3a}+3}{a\sqrt{a}+3\sqrt{3}}$.

497. Сократите дробь:

а) $\dfrac{\sqrt{70}-\sqrt{30}}{\sqrt{35}-\sqrt{15}}$; в) $\dfrac{9-2\sqrt{3}}{3\sqrt{6}-2\sqrt{2}}$;

б) $\dfrac{\sqrt{15}-5}{\sqrt{6}-\sqrt{10}}$; г) $\dfrac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2+\sqrt{6}-\sqrt{2}}$.

498. Сократите дробь:

а) $\dfrac{2\sqrt{10}-5}{4-\sqrt{10}}$; б) $\dfrac{(\sqrt{10}-1)^2-3}{\sqrt{10}+\sqrt{3}-1}$.

499. Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби:

а) $\dfrac{1+\sqrt{a}}{\sqrt{a}}$; б) $\dfrac{x-\sqrt{ax}}{a\sqrt{x}}$; в) $\dfrac{2\sqrt{3}-3}{5\sqrt{3}}$.

500. Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби:

а) $\dfrac{y+b\sqrt{y}}{b\sqrt{y}}$; б) $\dfrac{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}}{\sqrt{ab}}$; в) $\dfrac{2-3\sqrt{2}}{4\sqrt{2}}$.

501. Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби:

а) $\dfrac{x-\sqrt{xy}+y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$; в) $\dfrac{1-2\sqrt{x}+4x}{1-2\sqrt{x}}$;

б) $\dfrac{9+3\sqrt{a}+a}{3+\sqrt{a}}$; г) $\dfrac{a^2b+2a\sqrt{b}+4}{a\sqrt{b}+2}$.

502. Освободитесь от иррациональности в числителе дроби:

а) $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$; в) $\dfrac{7-\sqrt{a}}{49-7\sqrt{a}+a}$;

б) $\dfrac{a+\sqrt{b}}{a\sqrt{b}}$; г) $\dfrac{\sqrt{mn}+1}{mn+\sqrt{mn}+1}$.

503. Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби:

а) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+1}$; б) $\dfrac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}+2}$.

504. При каком значении x дробь $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}$ принимает наибольшее значение?

505. Упростите выражение:

а) $15\sqrt{\dfrac{2}{5}}-\sqrt{160}$; в) $6\sqrt{1\dfrac{1}{3}}-\sqrt{27}$;

б) $\sqrt{135}+10\sqrt{0,6}$; г) $0,5\sqrt{24}+10\sqrt{\dfrac{3}{8}}$.

506. Упростите выражение:

а) $\left(\dfrac{1}{x+x\sqrt{y}}+\dfrac{1}{x-x\sqrt{y}}\right)\cdot\dfrac{y-1}{2}$;

б) $\left(\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)\cdot\dfrac{(b-a)^2}{2}$.

507. Докажите, что значение выражения

$$\sqrt{b+49-14\sqrt{b}}+\sqrt{b+49+14\sqrt{b}}$$

при $0 \leqslant b \leqslant 49$ не зависит от b.

508. Постройте графики функций:

$y=\sqrt{x}$;

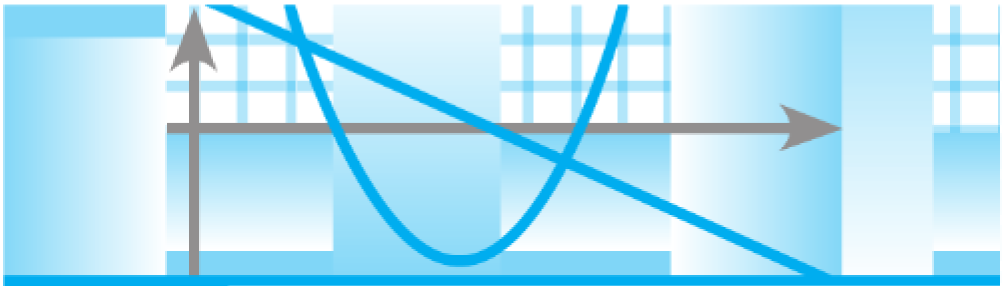
$y=\sqrt{x}-3$;

$y=\sqrt{x}+3$;

$y=\sqrt{x-3}$;

$y=\sqrt{x+3}$.

509. Постройте график функции $y=\dfrac{x-4}{\sqrt{x}+2}$.



Глава III УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

В этой главе вы сделаете новый шаг в изучении алгебры. Вы будете решать новые виды уравнений с одной переменной и прежде всего научитесь решать квадратные уравнения. Вы узнаете формулу корней квадратного уравнения, которая позволяет вычислять корни уравнения по его коэффициентам. Эту формулу вы сможете применять не только на уроках алгебры, но и на уроках геометрии, физики, информатики. Вы узнаете о существовании зависимости между корнями квадратного уравнения и его коэффициентами. Формулы, выражающие эту зависимость, вывел в конце XVI в. французский математик Франсуа Виет. Вы детально познакомитесь с квадратным трёхчленом: узнаете, в каких случаях и каким образом квадратный трёхчлен можно разложить на множители. Вы будете решать несложные дробные рациональные уравнения и узнаете о возможном появлении при их решении так называемых посторонних корней. Знакомство с новыми видами уравнений позволит вам решать более разнообразные текстовые задачи. Вы продолжите изучение уравнений с двумя переменными и их систем; при этом будут рассматриваться как графические, так и алгебраические способы их решения.

§ 7 КВАДРАТНОЕ УРАВНЕНИЕ И ЕГО КОРНИ

20. Неполные квадратные уравнения

Каждое из уравнений

$$-x^2 + 6x + 1{,}4 = 0, \quad 8x^2 - 7x = 0, \quad x^2 - \frac{4}{9} = 0$$

имеет вид

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

где x — переменная, a, b и c — числа.

В первом уравнении $a = -1$, $b = 6$ и $c = 1{,}4$, во втором — $a = 8$, $b = -7$ и $c = 0$, в третьем — $a = 1$, $b = 0$ и $c = -\frac{4}{9}$. Такие уравнения называют *квадратными уравнениями*.

Определение. Квадратным уравнением называется уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, где x — переменная, a, b и c — некоторые числа, причём $a \neq 0$.

Числа a, b и c — коэффициенты квадратного уравнения. Число a называют первым коэффициентом, число b — вторым коэффициентом и число c — свободным членом.

В каждом из уравнений вида $ax^2 + bx + c = 0$, где $a \neq 0$, наибольшая степень переменной x — квадрат. Отсюда и название: квадратное уравнение.

Заметим, что квадратное уравнение называют ещё уравнением второй степени, так как его левая часть есть многочлен второй степени.

Квадратное уравнение, в котором коэффициент при x^2 равен 1, называют *приведённым квадратным уравнением*. Например, приведёнными квадратными уравнениями являются уравнения

$$x^2 - 11x + 30 = 0, \quad x^2 - 6x = 0, \quad x^2 - 8 = 0.$$

Если в квадратном уравнении $ax^2 + bx + c = 0$ хотя бы один из коэффициентов b или c равен нулю, то такое уравнение называют *неполным квадратным уравнением*. Так, уравнения $-2x^2 + 7 = 0$, $3x^2 - 10x = 0$ и $-4x^2 = 0$ — неполные квадратные уравнения. В первом из них $b = 0$, во втором — $c = 0$, в третьем — $b = 0$ и $c = 0$.

Неполные квадратные уравнения бывают трёх видов:

1) $ax^2 + c = 0$, где $c \neq 0$;
2) $ax^2 + bx = 0$, где $b \neq 0$;
3) $ax^2 = 0$.

Рассмотрим решение уравнений каждого из этих видов.

Пример 1. Решим уравнение $-3x^2 + 15 = 0$.

▶ Перенесём свободный член в правую часть уравнения и разделим обе части получившегося уравнения на -3:

$$-3x^2 = -15,$$
$$x^2 = 5.$$

Отсюда

$$x = \sqrt{5} \text{ или } x = -\sqrt{5}.$$

Ответ: $\sqrt{5}$; $-\sqrt{5}$. ◁

П р и м е р 2. Решим уравнение $4x^2 + 3 = 0$.

▶ Перенесём свободный член в правую часть уравнения и обе части получившегося уравнения разделим на 4:

$$4x^2 = -3$$

$$x^2 = -\frac{3}{4}.$$

Так как квадрат числа не может быть отрицательным числом, то получившееся уравнение не имеет корней. А следовательно, не имеет корней и равносильное ему уравнение $4x^2 + 3 = 0$.

О т в е т: корней нет. ◁

Вообще для решения неполного квадратного уравнения вида $ax^2 + c = 0$ при $c \neq 0$ переносят его свободный член в правую часть и делят обе части уравнения на a. Получают уравнение $x^2 = -\frac{c}{a}$, равносильное уравнению $ax^2 + c = 0$.

Так как $c \neq 0$, то $-\frac{c}{a} \neq 0$.

Если $-\frac{c}{a} > 0$, то уравнение имеет два корня:

$$x_1 = -\sqrt{-\frac{c}{a}} \text{ и } x_2 = \sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

Если $-\frac{c}{a} < 0$, то уравнение не имеет корней.

П р и м е р 3. Решим уравнение $4x^2 + 9x = 0$.

▶ Разложим левую часть уравнения на множители:

$$x(4x + 9) = 0.$$

Отсюда

$$x = 0 \text{ или } 4x + 9 = 0.$$

Решим уравнение $4x + 9 = 0$:

$$4x = -9,$$

$$x = -2\frac{1}{4}.$$

О т в е т: 0; $-2\frac{1}{4}$. ◁

Вообще для решения неполного квадратного уравнения вида $ax^2 + bx = 0$ при $b \neq 0$ раскладывают его левую часть на множители и получают уравнение

$$x(ax + b) = 0.$$

Произведение $x(ax + b)$ равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из множителей равен нулю:

$$x = 0 \text{ или } ax + b = 0.$$

Решая уравнение $ax + b = 0$, в котором $a \neq 0$, находим

$$ax = -b, \quad x = -\frac{b}{a}.$$

Следовательно, произведение $x(ax + b)$ обращается в нуль при $x = 0$ и при $x = -\frac{b}{a}$. Корнями уравнения $ax^2 + bx = 0$ являются числа 0 и $-\frac{b}{a}$.

Значит, неполное квадратное уравнение вида $ax^2 + bx = 0$ при $b \neq 0$ всегда имеет два корня.

Неполное квадратное уравнение вида $ax^2 = 0$ равносильно уравнению $x^2 = 0$ и поэтому имеет единственный корень 0.

Упражнения

510. Является ли квадратным уравнение:

а) $3{,}7x^2 - 5x + 1 = 0$; в) $2{,}1x^2 + 2x - \frac{2}{3} = 0$; д) $7x^2 - 13 = 0$;

б) $48x^2 - x^3 - 9 = 0$; г) $x + x^2 - 1 = 0$; е) $-x^2 = 0$?

511. Выпишите коэффициенты квадратного уравнения:

а) $5x^2 - 9x + 4 = 0$; г) $x^2 + 5x = 0$;

б) $x^2 + 3x - 10 = 0$; д) $6x^2 - 30 = 0$;

в) $-x^2 - 8x + 1 = 0$; е) $9x^2 = 0$.

Какие из данных уравнений являются приведёнными квадратными уравнениями?

512. Приведите примеры неполных квадратных уравнений различных видов.

513. Найдите корни уравнения:

а) $4x^2 - 9 = 0$; в) $-0{,}1x^2 + 10 = 0$; д) $6v^2 + 24 = 0$;

б) $-x^2 + 3 = 0$; г) $y^2 - \frac{1}{9} = 0$; е) $3m^2 - 1 = 0$.

514. Решите уравнение и укажите приближённые значения корней с точностью до 0,1 (воспользуйтесь калькулятором):

а) $2x^2 - 17 = 0$; б) $3t^2 - 7{,}2 = 0$; в) $-p^2 + 12{,}6 = 0$.

515. Решите уравнение:

а) $3x^2 - 4x = 0$; в) $10x^2 + 7x = 0$; д) $6z^2 - z = 0$;

б) $-5x^2 + 6x = 0$; г) $4a^2 - 3a = 0$; е) $2y + y^2 = 0$.

516. Решите уравнение:

а) $2x^2 + 3x = 0$; в) $5u^2 - 4u = 0$; д) $1 - 4y^2 = 0$;
б) $3x^2 - 2 = 0$; г) $7a - 14a^2 = 0$; е) $2x^2 - 6 = 0$.

517. Верно ли утверждение:

а) неполное квадратное уравнение $x^2 - 19 = 0$ не имеет корней;
б) неполное квадратное уравнение $x^2 + 19 = 0$ не имеет корней;
в) неполное квадратное уравнение $x^2 + 19x = 0$ не имеет корней?

518. Найдите значения переменной a, при которых:

а) значение выражения $5a^2 + 5a - 6$ равно 24;
б) значение выражения $a(a - 4)$ равно 60.

519. Решите уравнение:

а) $4x^2 - 3x + 7 = 2x^2 + x + 7$; в) $10 - 3x^2 = x^2 + 10 - x$;
б) $-5y^2 + 8y + 8 = 8y + 3$; г) $1 - 2y + 3y^2 = y^2 - 2y + 1$.

520. Найдите корни уравнения:

а) $(x + 3)(x - 4) = -12$; в) $3x(2x + 3) = 2x(x + 4{,}5) + 2$;
б) $1\frac{2}{3}t + (2t + 1)\left(\frac{1}{3}t - 1\right) = 0$; г) $(x - 1)(x + 1) = 2(x^2 - 3)$.

521. Решите уравнение:

а) $x^2 - 5 = (x + 5)(2x - 1)$; в) $6a^2 - (a + 2)^2 = -4(a - 4)$;
б) $2x - (x + 1)^2 = 3x^2 - 6$; г) $(5y + 2)(y - 3) = -13(2 + y)$.

522. Произведение двух последовательных целых чисел в 1,5 раза больше квадрата меньшего из них. Найдите эти числа.

523. Теннисный корт представляет собой прямоугольную площадку, длина которой вдвое больше ширины, а площадь равна 800 м^2. Найдите длину и ширину корта.

524. Если от квадрата отрезать треугольник площадью 59 см^2, то площадь оставшейся части будет равна 85 см^2. Найдите сторону квадрата.

525. Две группы туристов отправились одновременно из одного пункта — одна на север со скоростью 4 км/ч, а другая на запад со скоростью 5 км/ч. Через какое время расстояние между туристами окажется равным 16 км?

526. Путь свободно падающего тела вычисляется по формуле $s = \frac{gt^2}{2}$, где t (с) — время, $g \approx 10$ м/с^2, s (м) — пройденный путь. Через сколько секунд от начала падения камень достигнет дна шахты глубиной 80 м?

527. Ширина земельного участка, имеющего форму прямоугольника, составляет 75% его длины, а его площадь равна 4800 м^2. Найдите длину забора, ограждающего этот участок.

528. Телевизор имеет плоский экран прямоугольной формы. В паспорте к телевизору указано, что длина экрана относится к ширине как 4 : 3, а диагональ равна 25 дюймам. Найдите длину и ширину экрана в дюймах; в сантиметрах (1 дюйм = 2,54 см).

П

529. В каких координатных четвертях расположен график функции:

а) $y = (1 - \sqrt{2})x$; б) $y = (4 - \sqrt{15})x$; в) $y = (\sqrt{35} - 5{,}7)x$?

530. Найдите значение выражения $\frac{9 + 6x + x^2}{x + 3} + \sqrt{x}$ при $x = 0{,}36$ и при $x = 49$.

21. Формула корней квадратного уравнения

Рассмотрим теперь, как решают квадратные уравнения, в которых оба коэффициента при неизвестных и свободный член отличны от нуля.

Начнём с примера. Решим уравнение

$$7x^2 - 6x - 1 = 0.$$

Разделив обе части этого уравнения на 7, получим равносильное ему приведённое квадратное уравнение

$$x^2 - \frac{6}{7}x - \frac{1}{7} = 0.$$

Выделим из трёхчлена $x^2 - \frac{6}{7}x - \frac{1}{7}$ квадрат двучлена. Для этого разность $x^2 - \frac{6}{7}x$ представим в виде $x^2 - 2 \cdot \frac{3}{7}x$, прибавим к ней выражение $\left(\frac{3}{7}\right)^2$ и вычтем его.

Получим

$$x^2 - 2 \cdot \frac{3}{7}x + \left(\frac{3}{7}\right)^2 - \left(\frac{3}{7}\right)^2 - \frac{1}{7} = 0.$$

Отсюда

$$x^2 - 2 \cdot \frac{3}{7}x + \left(\frac{3}{7}\right)^2 = \left(\frac{3}{7}\right)^2 + \frac{1}{7},$$

$$\left(x - \frac{3}{7}\right)^2 = \frac{16}{49}.$$

Следовательно,

$$x - \frac{3}{7} = -\sqrt{\frac{16}{49}} \quad \text{или} \quad x - \frac{3}{7} = \sqrt{\frac{16}{49}},$$

$$x - \frac{3}{7} = -\frac{4}{7} \quad \text{или} \quad x - \frac{3}{7} = \frac{4}{7},$$

$$x = -\frac{1}{7} \quad \text{или} \quad x = 1.$$

Уравнение имеет два корня: $-\frac{1}{7}$ и 1.

Способ, с помощью которого мы решили уравнение, называют *выделением квадрата двучлена*.

Решение квадратных уравнений выделением квадрата двучлена часто приводит к громоздким преобразованиям. Поэтому поступают иначе. Решают уравнение в общем виде и в результате получают формулу корней. Затем эту формулу применяют при решении любого квадратного уравнения.

Решим квадратное уравнение

$$\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0.} \qquad (1)$$

Разделив обе его части на a, получим равносильное ему приведённое квадратное уравнение

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

Преобразуем это уравнение, используя преобразования, аналогичные тем, которые применялись в рассмотренном выше примере:

$$x^2 + 2x \cdot \frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0,$$

$$x^2 + 2x \cdot \frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a},$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a},$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}. \qquad (2)$$

Уравнение (2) равносильно уравнению (1). Число его корней зависит от знака дроби $\frac{b^2-4ac}{4a^2}$. Так как $a \neq 0$, то $4a^2$ — положительное число, поэтому знак этой дроби определяется знаком её числителя, т. е. выражения $b^2 - 4ac$. Это выражение называют *дискриминантом квадратного уравнения* $ax^2 + bx + c = 0$ («дискриминант» по-латыни — различитель). Его обозначают буквой D, т. е.

$$D = b^2 - 4ac.$$

Запишем уравнение (2) в виде

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{D}{4a^2}.$$

Рассмотрим теперь различные возможные случаи в зависимости от значения D.

1) Если $D > 0$, то

$$x+\frac{b}{2a}=-\frac{\sqrt{D}}{2a} \quad \text{или} \quad x+\frac{b}{2a}=\frac{\sqrt{D}}{2a},$$

$$x=-\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{D}}{2a} \quad \text{или} \quad x=-\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{D}}{2a},$$

$$x=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a} \quad \text{или} \quad x=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}.$$

Таким образом, в этом случае уравнение (1) имеет два корня:

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a} \quad \text{и} \quad x_2=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}.$$

Принята следующая краткая запись, которую называют *формулой корней квадратного уравнения*:

$$\boldsymbol{x=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a},} \ \textbf{где}\ \boldsymbol{D = b^2 - 4ac.} \qquad \text{(I)}$$

2) Если $D = 0$, то уравнение (2) примет вид

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0.$$

Отсюда

$$x + \frac{b}{2a} = 0,$$

$$x = -\frac{b}{2a}.$$

В этом случае уравнение (1) имеет один корень $-\frac{b}{2a}$.

Формулой корней квадратного уравнения можно пользоваться и в этом случае. Действительно, при $D = 0$ формула (I) принимает вид

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{0}}{2a},$$

откуда

$$x = -\frac{b}{2a}.$$

3) Если $D < 0$, то значение дроби $\frac{D}{4a^2}$ отрицательно и поэтому уравнение

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{D}{4a^2},$$

а следовательно, и уравнение (1) не имеют корней.

Таким образом, в зависимости от значения дискриминанта квадратное уравнение может иметь два корня (при $D > 0$), один корень (при $D = 0$) или не иметь корней (при $D < 0$). ○

При решении квадратного уравнения по формуле (I) целесообразно поступать следующим образом:
1) вычислить дискриминант и сравнить его с нулём;
2) если дискриминант положителен или равен нулю, то воспользоваться формулой корней, если дискриминант отрицателен, то записать, что корней нет.

Пример 1. Решим уравнение $12x^2 + 7x + 1 = 0$.

▶ Найдём дискриминант:

$$D = 7^2 - 4 \cdot 12 \cdot 1 = 1, \ D > 0.$$

Применим формулу корней квадратного уравнения:

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{1}}{24}, \quad x = \frac{-7 \pm 1}{24}.$$

Ответ: $-\frac{1}{3}$; $-\frac{1}{4}$. ◁

П р и м е р 2. Решим уравнение $x^2 - 12x + 36 = 0$.

▶ Имеем

$$D = (-12)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 36 = 0,$$

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{0}}{2}, \quad x = \frac{12 \pm 0}{2}.$$

О т в е т: 6. ◁

П р и м е р 3. Решим уравнение $7x^2 - 25x + 23 = 0$.

▶ Имеем

$$D = (-25)^2 - 4 \cdot 7 \cdot 23 = 625 - 644,\ D < 0.$$

О т в е т: корней нет. ◁

Из формулы (I) можно получить другую формулу, которой удобно пользоваться при решении квадратных уравнений с чётным вторым коэффициентом.

● Рассмотрим квадратное уравнение

$$ax^2 + 2kx + c = 0.$$

Найдём его дискриминант: $D = 4k^2 - 4ac = 4(k^2 - ac)$. Очевидно, что число корней уравнения зависит от знака выражения $k^2 - ac$. Обозначим это выражение через D_1.

Если $D_1 \geqslant 0$, то по формуле корней квадратного уравнения получим

$$x = \frac{-2k \pm \sqrt{4D_1}}{2a} = \frac{-2k \pm 2\sqrt{D_1}}{2a} = \frac{-k \pm \sqrt{D_1}}{a},$$

$$\text{т. е. } x = \frac{-k \pm \sqrt{D_1}}{a}, \text{ где } D_1 = k^2 - ac.$$

Значит, если квадратное уравнение имеет вид

$$\mathbf{a}\boldsymbol{x^2 + 2kx + c = 0},$$

то при $D_1 \geqslant 0$ его корни могут быть найдены по формуле

$$\boldsymbol{x = \frac{-k \pm \sqrt{D_1}}{a}}, \textbf{ где } \boldsymbol{D_1 = k^2 - ac}. \qquad \text{(II)}$$

Если $D_1 < 0$, то уравнение корней не имеет. ○

П р и м е р 4. Решим уравнение $9x^2 - 14x + 5 = 0$.

▶ Имеем $D_1 = (-7)^2 - 9 \cdot 5 = 4$,

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{4}}{9}, \quad x = \frac{7 \pm 2}{9}.$$

О т в е т: $\frac{5}{9}$; 1. ◁

Упражнения

531. Вычислите дискриминант квадратного уравнения и укажите число его корней:

а) $2x^2 + 3x + 1 = 0$; в) $9x^2 + 6x + 1 = 0$;
б) $2x^2 + x + 2 = 0$; г) $x^2 + 5x - 6 = 0$.

532. Решите уравнение:

а) $3x^2 - 7x + 4 = 0$; д) $5y^2 - 6y + 1 = 0$;
б) $5x^2 - 8x + 3 = 0$; е) $4x^2 + x - 33 = 0$;
в) $3x^2 - 13x + 14 = 0$; ж) $y^2 - 10y - 24 = 0$;
г) $2y^2 - 9y + 10 = 0$; з) $p^2 + p - 90 = 0$.

533. Решите уравнение:

а) $14x^2 - 5x - 1 = 0$; г) $1 - 18p + 81p^2 = 0$;
б) $-y^2 + 3y + 5 = 0$; д) $-11y + y^2 - 152 = 0$;
в) $2x^2 + x + 67 = 0$; е) $18 + 3x^2 - x = 0$.

534. Найдите корни уравнения:

а) $5x^2 - 11x + 2 = 0$; г) $35x^2 + 2x - 1 = 0$;
б) $2p^2 + 7p - 30 = 0$; д) $2y^2 - y - 5 = 0$;
в) $9y^2 - 30y + 25 = 0$; е) $16x^2 - 8x + 1 = 0$.

535. При каких значениях x:

а) трёхчлен $x^2 - 11x + 31$ принимает значение, равное 1;
б) значения многочленов $x^2 - 5x - 3$ и $2x - 5$ равны;
в) двучлен $7x + 1$ равен трёхчлену $3x^2 - 2x + 1$;
г) трёхчлен $-2x^2 + 5x + 6$ равен двучлену $4x^2 + 5x$?

536. При каких значениях x принимают равные значения:

а) двучлены $x^2 - 6x$ и $5x - 18$;
б) трёхчлены $3x^2 - 4x + 3$ и $x^2 + x + 1$?

537. Решите уравнение, используя формулу (II):

а) $3x^2 - 14x + 16 = 0$; д) $4t^2 - 36t + 77 = 0$;
б) $5p^2 - 16p + 3 = 0$; е) $15y^2 - 22y - 37 = 0$;
в) $d^2 + 2d - 80 = 0$; ж) $7z^2 - 20z + 14 = 0$;
г) $x^2 - 22x - 23 = 0$; з) $y^2 - 10y - 25 = 0$.

538. Решите уравнение:

а) $8x^2 - 14x + 5 = 0$; д) $m^2 + 6m - 19 = 0$;
б) $12t^2 + 16t - 3 = 0$; е) $5y^2 + 26y - 24 = 0$;
в) $4p^2 + 4p + 1 = 0$; ж) $z^2 - 34z + 289 = 0$;
г) $x^2 - 8x - 84 = 0$; з) $3x^2 + 32x + 80 = 0$.

539. Решите уравнение:

а) $2x^2 - 5x - 3 = 0$; д) $3t^2 - 3t + 1 = 0$;
б) $3x^2 - 8x + 5 = 0$; е) $x^2 + 9x - 22 = 0$;
в) $5x^2 + 9x + 4 = 0$; ж) $y^2 - 12y + 32 = 0$;
г) $36y^2 - 12y + 1 = 0$; з) $100x^2 - 160x + 63 = 0$.

540. Решите уравнение:

а) $5x^2 = 9x + 2$;
б) $-t^2 = 5t - 14$;
в) $6x + 9 = x^2$;
г) $z - 5 = z^2 - 25$;
д) $y^2 = 52y - 576$;
е) $15y^2 - 30 = 22y + 7$;
ж) $25p^2 = 10p - 1$;
з) $299x^2 + 100x = 500 - 101x^2$.

541. Решите уравнение:

а) $25 = 26x - x^2$;
б) $3t^2 = 10 - 29t$;
в) $y^2 = 4y + 96$;
г) $3p^2 + 3 = 10p$;
д) $x^2 - 20x = 20x + 100$;
е) $25x^2 - 13x = 10x^2 - 7$.

542. Найдите корни уравнения:

а) $(2x - 3)(5x + 1) = 2x + \frac{2}{5}$;
б) $(3y - 1)(y + 3) = y(1 + 6y)$;
в) $(t - 1)(t + 1) = 2\left(5t - 10\frac{1}{2}\right)$;
г) $-z(z + 7) = (z - 2)(z + 2)$.

543. Решите уравнение:

а) $(x + 4)^2 = 3x + 40$;
б) $(2p - 3)^2 = 11p - 19$;
в) $3(x + 4)^2 = 10x + 32$;
г) $15y^2 + 17 = 15(y + 1)^2$;
д) $(x + 1)^2 = 7918 - 2x$;
е) $(m + 2)^2 = 3131 - 2m$;
ж) $(x + 1)^2 = (2x - 1)^2$;
з) $(n - 2)^2 + 48 = (2 - 3n)^2$.

544. Решите уравнение:

а) $\frac{x^2 - 1}{2} - 11x = 11$;
б) $\frac{x^2 + x}{2} = \frac{8x - 7}{3}$;
в) $\frac{4x^2 - 1}{3} = x(10x - 9)$;
г) $\frac{3}{4}x^2 - \frac{2}{5}x = \frac{4}{5}x^2 + \frac{3}{4}$.

545. Найдите корни уравнения и укажите их приближённые значения в виде десятичных дробей с точностью до 0,01:

а) $5x^2 - x - 1 = 0$;
б) $2x^2 + 7x + 4 = 0$;
в) $3(y^2 - 2) - y = 0$;
г) $y^2 + 8(y - 1) = 3$.

546. *(Для работы в парах.)* Решите графически уравнение:

а) $x^2 - 2x - 1 = 0$;　　б) $x^2 - 4x + 2 = 0$.

1) Обсудите друг с другом, в каком виде удобно представить уравнение.

2) Распределите, кто выполняет задание а), а кто — задание б), и выполните их.

3) Найдите корни каждого из уравнений с помощью формулы корней квадратного уравнения и сравните их со значениями, найденными при графическом решении.

547. Решите уравнение $x^2 = 0{,}5x + 3$ сначала графически, а затем с помощью формулы корней.

548. Найдите корни уравнения и укажите их приближённые значения в виде десятичных дробей с точностью до 0,01 (воспользуйтесь калькулятором):

а) $x^2 - 8x + 9 = 0$; б) $2y^2 - 8y + 5 = 0$.

549. Решите уравнение:

а) $0{,}7x^2 = 1{,}3x + 2$;
б) $7 = 0{,}4y + \frac{1}{5}y^2$;
в) $x^2 - 1{,}6x - 0{,}36 = 0$;
г) $z^2 - 2z + 2{,}91 = 0$;
д) $0{,}2y^2 - 10y + 125 = 0$;
е) $\frac{1}{3}x^2 + 2x - 9 = 0$.

550. При каких значениях x верно равенство:

а) $\frac{1}{7}x^2 = 2x - 7$;
б) $x^2 + \frac{6}{5} = 2{,}6x$;
в) $4x^2 = 7x + 7{,}5$;
г) $6x^2 - 2 = x$?

551. Существует ли такое значение a, при котором верно равенство (если существует, то найдите его):

а) $3a + 0{,}6 = 9a^2 + 0{,}36$;
б) $0{,}4a + 1{,}2 = 0{,}16a^2 + 1{,}44$?

552. *(Задача-исследование.)* Решите уравнения:

а) $x^2 - 5x + 6 = 0$ и $6x^2 - 5x + 1 = 0$;
б) $2x^2 - 13x + 6 = 0$ и $6x^2 - 13x + 2 = 0$.

1) Пусть одна группа учащихся выполнит задание а), а другая — задание б).

2) Сравните результаты и выскажите предположение о соотношении между корнями уравнений $ax^2 + bx + c = 0$ и $cx^2 + bx + a = 0$.

3) Докажите, что ваше предположение верно.

553. Существует ли такое значение a, при котором уравнение

$$x^2 - ax + a - 4 = 0:$$

а) не имеет корней;
б) имеет один корень;
в) имеет два корня?

554. Найдите значение выражения:

$$\frac{a-\frac{2a-1}{a}}{\frac{1-a}{3a}} \text{ при } a = -1{,}5.$$

555. Упростите выражение:

а) $(\sqrt{21}+\sqrt{14}-2\sqrt{35})\cdot\frac{\sqrt{7}}{7}+\sqrt{20};$

б) $(\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{15})(\sqrt{5}-\sqrt{3})+\sqrt{75}.$

556. Не выполняя построения, найдите координаты точки пересечения графиков линейных функций:

а) $y = 7x - 1$ и $y = 2x$;

б) $y = 3x - 11$ и $y = 4$;

в) $y = 5x + 8$ и $y = 3x + 2$;

г) $y = 4 - x$ и $y = 3x$.

22. Решение задач

Многие задачи в математике, физике, технике решаются с помощью квадратных уравнений.

Рассмотрим геометрическую задачу.

Задача 1. Найдём катеты прямоугольного треугольника, если известно, что один из них на 4 см меньше другого, а гипотенуза равна 20 см.

▶ Пусть меньший катет равен x см. Тогда больший катет равен $(x + 4)$ см. По теореме Пифагора квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов, т. е.

$$x^2 + (x + 4)^2 = 20^2.$$

Упростим это уравнение:

$$x^2 + x^2 + 8x + 16 = 400,$$
$$2x^2 + 8x - 384 = 0,$$
$$x^2 + 4x - 192 = 0.$$

Решив полученное квадратное уравнение, найдём, что

$$x_1 = -16, \quad x_2 = 12.$$

По смыслу задачи значение x должно быть положительным числом. Этому условию удовлетворяет только второй корень, т. е. число 12.

Ответ: 12 см, 16 см. ◁

Задача 2. Тело брошено вертикально вверх с начальной скоростью 40 м/с. Через сколько секунд оно окажется на высоте 60 м?

▶ Из курса физики известно, что если не учитывать сопротивление воздуха, то высота h (м), на которой брошенное вертикально вверх тело окажется через t (с), может быть найдена по формуле

$$h = v_0 t - \frac{gt^2}{2},$$

где v_0 (м/с) — начальная скорость, g — ускорение свободного падения, приближённо равное 10 м/с^2.

Подставив значения h и v_0 в формулу, получим

$$60 = 40t - 5t^2.$$

Отсюда

$$5t^2 - 40t + 60 = 0,$$
$$t^2 - 8t + 12 = 0.$$

Решив полученное квадратное уравнение, найдём, что $t_1 = 2$, $t_2 = 6$.

На рисунке 22 дан график зависимости h от t, где $h = 40t - 5t^2$. Из графика видно, что тело, брошенное вертикально вверх, в течение первых 4 с поднимается вверх до высоты 80 м, а затем начинает падать. На высоте 60 м от земли оно оказывается дважды: через 2 с и через 6 с после бросания.

Условию задачи удовлетворяют оба найденных корня. Значит, ответ на вопрос задачи таков: на высоте 60 м тело окажется через 2 с и через 6 с. ◁

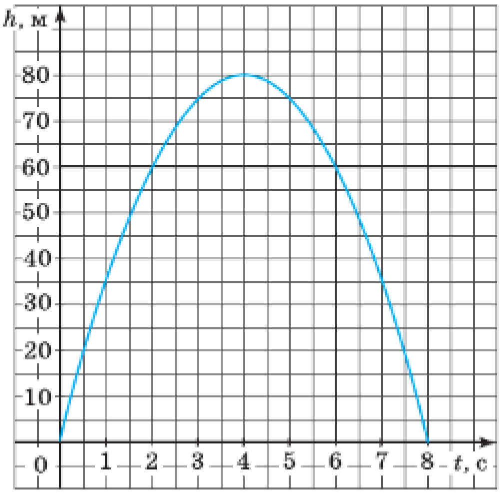


Рис. 22

Упражнения

557. Произведение двух натуральных чисел, одно из которых на 6 больше другого, равно 187. Найдите эти числа.

558. Найдите периметр прямоугольника, длина которого на 4 см больше ширины, а площадь равна 60 см^2.

559. Огородный участок, имеющий форму прямоугольника, одна сторона которого на 10 м больше другой, требуется обнести изгородью. Определите длину изгороди, если известно, что площадь участка равна 1200 м^2.

560. Периметр прямоугольника равен 62 м. Найдите его стороны, если площадь прямоугольника равна 210 м^2.

561. Найдите катеты прямоугольного треугольника, если известно, что их сумма равна 23 см, а площадь данного треугольника равна 60 см^2.

562. Произведение двух последовательных натуральных чисел больше их суммы на 109. Найдите эти числа.

563. Площадь доски прямоугольной формы равна 4500 см^2. Доску распилили на две части, одна из которых представляет собой квадрат, а другая — прямоугольник. Найдите сторону получившегося квадрата, если длина отпиленного прямоугольника равна 120 см.

564. От прямоугольного листа картона длиной 26 см отрезали с двух сторон квадраты, сторона каждого из которых равна ширине листа. Площадь оставшейся части равна 80 см^2. Найдите ширину листа картона. Покажите, что задача имеет два решения, и для каждого случая сделайте чертёж (в масштабе 1 : 2).

565. В прямоугольном треугольнике один из катетов на 3 см меньше гипотенузы, а другой на 6 см меньше гипотенузы. Найдите гипотенузу.

566. В кинотеатре число мест в ряду на 8 больше числа рядов. Сколько рядов в кинотеатре, если всего в нём имеется 884 места?

567. *Старинная задача.* Стая обезьян забавляется. Восьмая часть их в квадрате резвится в лесу. Остальные двенадцать кричат на вершине холма. Скажи мне, сколько всего обезьян?

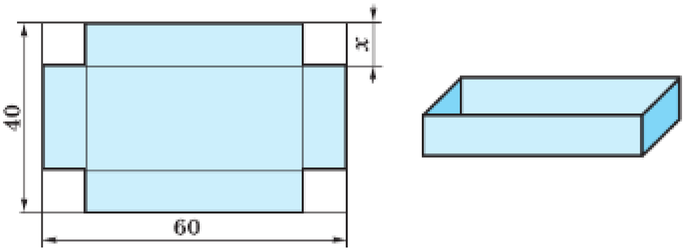
568. *Старинная задача.* Квадрат пятой части обезьян, уменьшенной на 3, спрятался в гроте. Одна обезьяна, влезшая на дерево, была видна. Сколько было обезьян?

569. Число диагоналей p выпуклого многоугольника вычисляется по формуле $p = \frac{n(n-3)}{2}$, где n — число сторон. В каком выпуклом многоугольнике диагоналей на 25 больше, чем сторон?

570. При розыгрыше первенства школы по футболу было сыграно 36 матчей, причём каждая команда сыграла с каждой по одному разу. Сколько команд участвовало в розыгрыше?

571. В шахматном турнире было сыграно 45 партий. Определите число участников турнира, если известно, что каждый участник сыграл с каждым по одной партии.

572. От прямоугольного листа картона, длина которого равна 60 см, а ширина — 40 см, отрезали по углам равные квадраты и из оставшейся части склеили открытую коробку. Найдите сторону квадрата, если известно, что площадь основания коробки равна 800 см^2.



573. Найдите три последовательных целых числа, сумма квадратов которых равна 869.

П

574. Сократите дробь:

а) $\dfrac{8a^3-27}{9-12a+4a^2}$; б) $\dfrac{ax-2x-4a+8}{3a-6-ax+2x}$.

575. Найдите значение выражения:

$$\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-b}{2\sqrt{ab}+2b+1} \text{ при } a=5,\ b=2.$$

576. Решите уравнение:

а) $\dfrac{x(x-3)}{6}-\dfrac{x}{2}=0$; в) $\dfrac{2}{5}x+\dfrac{9-x}{4}+\dfrac{9-x}{6}=3\dfrac{41}{60}$;

б) $\dfrac{x(x+1)}{3}+\dfrac{8+x}{4}=2$; г) $1+\dfrac{x-3,5}{5}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{x}{3,5}-1$.

577. Не выполняя построения, найдите координаты точек пересечения графика функции $y=13x-2,6$ с осью x и осью y.

23. Теорема Виета

Приведённое квадратное уравнение $x^2 - 7x + 10 = 0$ имеет корни 2 и 5. Сумма корней равна 7, а произведение равно 10. Мы видим, что сумма корней равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение корней равно свободному члену. Докажем, что таким свойством обладает любое приведённое квадратное уравнение, имеющее корни.

ТЕОРЕМА

Сумма корней приведённого квадратного уравнения равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение корней равно свободному члену.

● Рассмотрим приведённое квадратное уравнение. Обозначим второй коэффициент буквой p, а свободный член буквой q:

$$x^2 + px + q = 0.$$

Дискриминант этого уравнения D равен $p^2 - 4q$.
Пусть $D > 0$. Тогда это уравнение имеет два корня:

$$x_1 = \frac{-p - \sqrt{D}}{2} \quad \text{и} \quad x_2 = \frac{-p + \sqrt{D}}{2}.$$

Найдём сумму и произведение корней:

$$x_1 + x_2 = \frac{-p - \sqrt{D}}{2} + \frac{-p + \sqrt{D}}{2} = \frac{-2p}{2} = -p;$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-p - \sqrt{D}}{2} \cdot \frac{-p + \sqrt{D}}{2} = \frac{(-p)^2 - (\sqrt{D})^2}{4} = \frac{p^2 - (p^2 - 4q)}{4} = \frac{4q}{4} = q.$$

Итак,

$$\boldsymbol{x_1 + x_2 = -p,\ x_1 \cdot x_2 = q.}$$

Теорема доказана. ○

При $D = 0$ квадратное уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет один корень. Если условиться считать, что при $D = 0$ квадратное уравнение имеет два равных корня, то теорема будет верна и в этом случае. Это следует из того, что при $D = 0$ корни уравнения также можно вычислять по формуле

$$x = \frac{-p \pm \sqrt{D}}{2}.$$

Доказанная теорема называется теоремой Виета по имени знаменитого французского математика Франсуа Виета.

Используя теорему Виета, можно выразить сумму и произведение корней произвольного квадратного уравнения через его коэффициенты.

Пусть квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет корни x_1 и x_2. Равносильное ему приведённое квадратное уравнение имеет вид

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

По теореме Виета

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

Справедливо утверждение, обратное теореме Виета:

ТЕОРЕМА

Если числа m и n таковы, что их сумма равна $-p$, а произведение равно q, то эти числа являются корнями уравнения $x^2 + px + q = 0$.

● По условию $m + n = -p$, а $mn = q$. Значит, уравнение $x^2 + px + q = 0$ можно записать в виде

$$x^2 - (m + n)x + mn = 0.$$

Подставив в это уравнение вместо переменной x число m, получим

$$m^2 - (m + n)m + mn = m^2 - m^2 - mn + mn = 0.$$

Значит, число m является корнем уравнения.

Аналогично можно показать, что число n также является корнем уравнения. ○

Рассмотрим примеры применения теоремы Виета и теоремы, обратной теореме Виета.

ФРАНСУА ВИЕТ (1540—1603) — французский математик, ввёл систему алгебраических символов, разработал основы элементарной алгебры. Он был одним из первых, кто числа стал обозначать буквами, что существенно развило теорию уравнений.

Пример 1. Найдём сумму и произведение корней уравнения

$$3x^2 - 5x + 2 = 0.$$

▶ Дискриминант $D = 25 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 1$ — положительное число. Значит, уравнение имеет корни. Эти же корни имеет приведённое квадратное уравнение $x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{2}{3} = 0$. Значит, по теореме Виета сумма корней уравнения $3x^2 - 5x + 2 = 0$ равна $\frac{5}{3}$, а произведение корней равно $\frac{2}{3}$. ◁

По теореме, обратной теореме Виета, можно проверять, правильно ли найдены корни квадратного уравнения.

Пример 2. Решим уравнение $x^2 + 3x - 40 = 0$ и выполним проверку по теореме, обратной теореме Виета.

▶ Найдём дискриминант:

$$D = 3^2 + 4 \cdot 40 = 169.$$

По формуле корней квадратного уравнения получаем

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{169}}{2}, \quad x = \frac{-3 \pm 13}{2}.$$

Отсюда

$$x_1 = -8, \; x_2 = 5.$$

Покажем, что корни уравнения найдены правильно. В уравнении $x^2 + 3x - 40 = 0$ коэффициент p равен 3, а свободный член q равен -40. Сумма найденных чисел -8 и 5 равна -3, а их произведение равно -40. Значит, по теореме, обратной теореме Виета, эти числа являются корнями уравнения $x^2 + 3x - 40 = 0$. ◁

Пример 3. Найдём подбором корни уравнения

$$x^2 - x - 12 = 0.$$

▶ Дискриминант $D = 1 - 4 \cdot 1 \cdot (-12)$ — положительное число. Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения. Тогда

$$x_1 + x_2 = 1 \text{ и } x_1 \cdot x_2 = -12.$$

Если x_1 и x_2 — целые числа, то они являются делителями числа -12. Учитывая также, что сумма этих чисел равна 1, нетрудно догадаться, что $x_1 = -3$ и $x_2 = 4$. ◁

Упражнения

578. Найдите сумму и произведение корней уравнения:
а) $x^2 - 37x + 27 = 0$;
б) $y^2 + 41y - 371 = 0$;
в) $x^2 - 210x = 0$;
г) $y^2 - 19 = 0$;
д) $2x^2 - 9x - 10 = 0$;
е) $5x^2 + 12x + 7 = 0$;
ж) $-z^2 + z = 0$;
з) $3x^2 - 10 = 0$.

579. Решите уравнение и выполните проверку по теореме, обратной теореме Виета:
а) $x^2 - 2x - 9 = 0$;
б) $3t^2 - 4t - 4 = 0$;
в) $2z^2 + 7z - 6 = 0$;
г) $2t^2 + 9t + 8 = 0$.

580. Найдите корни уравнения и выполните проверку по теореме, обратной теореме Виета:
а) $x^2 - 15x - 16 = 0$;
б) $m^2 - 6m - 11 = 0$;
в) $12x^2 - 4x - 1 = 0$;
г) $t^2 - 6 = 0$;
д) $5x^2 - 18x = 0$;
е) $2y^2 - 41 = 0$.

581. Найдите подбором корни уравнения:
а) $x^2 - 9x + 20 = 0$;
б) $y^2 + 11y - 12 = 0$;
в) $y^2 + y - 56 = 0$;
г) $z^2 - 19z + 88 = 0$.

582. Найдите подбором корни уравнения:
а) $x^2 + 16x + 63 = 0$;
б) $z^2 + 2z - 48 = 0$.

583. В уравнении $x^2 + px - 35 = 0$ один из корней равен 7. Найдите другой корень и коэффициент p.

584. Один из корней уравнения $x^2 - 13x + q = 0$ равен 12,5. Найдите другой корень и коэффициент q.

585. Один из корней уравнения $5x^2 + bx + 24 = 0$ равен 8. Найдите другой корень и коэффициент b.

586. Один из корней уравнения $10x^2 - 33x + c = 0$ равен 5,3. Найдите другой корень и коэффициент c.

587. Разность корней квадратного уравнения $x^2 - 12x + q = 0$ равна 2. Найдите q.

588. Разность корней квадратного уравнения $x^2 + x + c = 0$ равна 6. Найдите c.

589. Разность квадратов корней уравнения $x^2 + 2x + q = 0$ равна 12. Найдите q.

590. Известно, что сумма квадратов корней уравнения $x^2 - 3x + a = 0$ равна 65. Найдите a.

591. *(Для работы в парах.)* Не решая уравнения, выясните, имеет ли оно корни, и если имеет, то определите их знаки:

а) $x^2 + 7x - 1 = 0$;
б) $x^2 - 7x + 1 = 0$;
в) $5x^2 + 17x + 16 = 0$;
г) $19x^2 - 23x + 5 = 0$;
д) $2x^2 + 5\sqrt{3}x + 11 = 0$;
е) $11x^2 - 9x + 7 - 5\sqrt{2} = 0$.

1) Сформулируйте теорему, на основании которой можно определить знаки корней.
2) Распределите, кто выполняет задания а), в), д), а кто — задания б), г), е), и выполните их.
3) Проверьте друг у друга, правильно ли выполнены задания. Исправьте ошибки, если они допущены.

592. Докажите, что уравнение не может иметь корни одинаковых знаков:

а) $3x^2 + 113x - 7 = 0$;
б) $5x^2 - 291x - 16 = 0$.

593. *(Для работы в парах.)* Уравнение $x^2 + 5x + m = 0$ имеет корни x_1 и x_2. Найдите, при каком значении m:
а) сумма квадратов корней равна 35;
б) сумма кубов корней равна 40.
1) Обсудите подходы к выполнению задания а) и задания б).
2) Распределите, кто выполняет задание а), а кто — задание б), и выполните их.
3) Проверьте друг у друга правильность полученных ответов. Исправьте замеченные ошибки.

П

594. При каких значениях x верно равенство:

а) $(3x + 1)^2 = 3x + 1$;
б) $(3x + 1)^2 = 3(x + 1)$;
в) $(3x + 1)^2 = (2x - 5)^2$;
г) $(3x + 4)^2 = 4(x + 3)$;
д) $4(x + 3)^2 = (2x + 6)^2$;
е) $(6x + 3)^2 = (x - 4)^2$?

595. Катеты прямоугольного треугольника относятся как 8 : 15, а гипотенуза равна 6,8 м. Найдите площадь треугольника.

596. Отношение гипотенузы прямоугольного треугольника к одному из катетов равно $\frac{13}{12}$, другой катет равен 15 см. Найдите периметр треугольника.

597. Найдите стороны прямоугольника, если известно, что одна из них на 14 см больше другой, а диагональ прямоугольника равна 34 см.

Контрольные вопросы и задания

1. Что называют дискриминантом квадратного уравнения? Сколько корней может иметь квадратное уравнение?
2. Напишите формулу корней квадратного уравнения.
3. Напишите формулу корней квадратного уравнения, в котором второй коэффициент является чётным числом.
4. Сформулируйте и докажите теорему Виета. Чему равны сумма и произведение корней квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$?
5. Сформулируйте и докажите теорему, обратную теореме Виета.

§ 8 КВАДРАТНЫЙ ТРЁХЧЛЕН

24. Квадратный трёхчлен и его корни

Каждое из выражений $x^5 - 2x^4 + 3x^3 - 7x + 2$, $2y^4 - y^3 + 5y^2 - 3y + 18$, $7z^6 - 6z^4 + z^2 - 2z + 3$ является многочленом с одной переменной.

Значение переменной, при котором многочлен обращается в нуль, называют *корнем многочлена*.

Найдём, например, корни многочлена $x^3 - x$. Для этого решим уравнение $x^3 - x = 0$. Разложив левую часть уравнения на множители, получим

$$x\ (x - 1)\ (x + 1) = 0,$$

отсюда $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$.

Таким образом, числа 0, 1, −1 — корни многочлена $x^3 - x$. Многочлен второй степени с одной переменной называют квадратным трёхчленом.

Определение. Квадратным трёхчленом называется многочлен вида $ax^2 + bx + c$, где x — переменная, a, b и c — некоторые числа, причём $a \neq 0$.

Коэффициент a называют старшим коэффициентом, а c — свободным членом квадратного трёхчлена.

Примерами квадратных трёхчленов являются многочлены

$$3x^2 - 2x - 5, \qquad x^2 + 7x - 8, \qquad -x^2 + 2x + 5.$$

В первом из них $a = 3$, $b = -2$, $c = -5$, во втором — $a = 1$, $b = 7$, $c = -8$, в третьем — $a = -1$, $b = 2$, $c = 5$.

К квадратным трёхчленам относятся также и такие многочлены второй степени, у которых один из коэффициентов b либо c или даже оба равны нулю. Так, многочлен $7x^2 - x$ считают квадратным трёхчленом. У него $a = 7$, $b = -1$, $c = 0$.

Для того чтобы найти корни квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$, надо решить квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$.

Пример 1. Найдём корни квадратного трёхчлена $3x^2 - 2x - 5$.

▶ Решим уравнение

$$3x^2 - 2x - 5 = 0.$$

Имеем

$$D = (-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-5) = 64;$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{64}}{6};$$

$$x_1 = 1\frac{2}{3},\ x_2 = -1.$$

Значит, квадратный трёхчлен $3x^2 - 2x - 5$ имеет два корня: $1\frac{2}{3}$, и -1. ◁

Так как квадратный трёхчлен $ax^2 + bx + c$ имеет те же корни, что и квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$, то он может, как и квадратное уравнение, иметь два корня, один корень или не иметь корней. Это зависит от значения дискриминанта квадратного уравнения $D = b^2 - 4ac$, который называют также *дискриминантом квадратного трёхчлена*. Если $D > 0$, то квадратный трёхчлен имеет два корня; если $D = 0$, то квадратный трёхчлен имеет один корень; если $D < 0$, то квадратный трёхчлен не имеет корней.

При решении задач иногда бывает удобно представить квадратный трёхчлен $ax^2 + bx + c$ в виде $a(x - m)^2 + n$, где m и n — некоторые числа. Такое преобразование называется выделением квадрата двучлена из квадратного трёхчлена. Покажем на примере, как выполняется это преобразование.

Пример 2. Выделим из трёхчлена $3x^2 - 36x + 140$ квадрат двучлена.

▶ Вынесем за скобки множитель 3:

$$3x^2 - 36x + 140 = 3\left(x^2 - 12x + \frac{140}{3}\right).$$

Преобразуем выражение в скобках. Для этого представим $12x$ в виде произведения $2 \cdot 6 \cdot x$, а затем прибавим и вычтем 6^2. Получим

$$3x^2 - 36x + 140 = 3\left(x^2 - 12x + \frac{140}{3}\right) =$$

$$= 3\left(x^2 - 2 \cdot 6 \cdot x + 6^2 - 6^2 + \frac{140}{3}\right) =$$

$$= 3\left((x-6)^2 + \frac{32}{3}\right) = 3(x - 6)^2 + 32.$$

Значит,

$$3x^2 - 36x + 140 = 3(x - 6)^2 + 32. \triangleleft$$

Рассмотрим задачу, при решении которой применяется выделение квадрата двучлена из квадратного трёхчлена.

Пример 3. Докажем, что из всех прямоугольников с периметром 20 см наибольшую площадь имеет квадрат.

▶ Пусть одна сторона прямоугольника равна x см. Тогда другая сторона равна $10 - x$ см, а площадь прямоугольника равна $x(10 - x)$ см^2.

Раскрыв скобки в выражении $x(10 - x)$, получим $10x - x^2$. Выражение $-x^2 + 10x$ представляет собой квадратный трёхчлен, в котором $a = -1$, $b = 10$, $c = 0$. Выделим квадрат двучлена:

$$-x^2 + 10x = -(x^2 - 10x) =$$
$$= -(x^2 - 10x + 25 - 25) = -(x - 5)^2 + 25.$$

Так как выражение $-(x - 5)^2$ при любом $x \neq 5$ отрицательно, то сумма $-(x - 5)^2 + 25$ принимает наибольшее значение при $x = 5$. Значит, площадь будет наибольшей, когда одна из сторон прямоугольника равна 5 см. В этом случае другая сторона также равна 5 см, т. е. прямоугольник является квадратом. ◁

Упражнения

598. Какие из чисел $-2, -1, 0, 2, 3$ являются корнями многочлена $x^3 - 3x^2 - 4x + 12$?

599. Найдите корни многочлена:
а) $x^2 - 7x$; б) $2x - 5$; в) $y^3 - 4y$; г) $y^4 - 16$.

600. Имеет ли корни многочлен:
а) $x^2 + 1$; б) $x^3 - 27$; в) $-2y^6 - 1$; г) $y^4 + 3y^2 + 7$?

601. Какие из чисел $1, 2, 3 - \sqrt{2}, -7 + \sqrt{2}$ являются корнями квадратного трёхчлена $x^2 - 6x + 7$?

602. Найдите корни квадратного трёхчлена:
а) $x^2 + x - 6$; г) $-2x^2 - x - 0{,}125$;
б) $9x^2 - 9x + 2$; д) $0{,}1x^2 + 0{,}4$;
в) $0{,}2x^2 + 3x - 20$; е) $-0{,}3x^2 + 1{,}5x$.

603. Найдите корни квадратного трёхчлена:
а) $10x^2 + 5x - 5$; в) $x^2 - 2x - 4$;
б) $-2x^2 + 12x - 18$; г) $12x^2 - 12$.

604. Имеет ли квадратный трёхчлен корни и если имеет, то сколько:

а) $5x^2 - 8x + 3$;
б) $9x^2 + 6x + 1$;
в) $-7x^2 + 6x - 2$;
г) $-x^2 + 5x - 3$?

605. Имеет ли квадратный трёхчлен корни и если имеет, то сколько:

а) $-4x^2 - 4x + 3$;
б) $4x^2 - 4x + 3$;
в) $9x^2 - 12x + 4$;
г) $9x^2 - 12x - 4$?

606. Сумма коэффициентов квадратного трёхчлена равна нулю, а его свободный член в 4 раза больше старшего коэффициента. Найдите корни этого трёхчлена.

607. Выделите квадрат двучлена из квадратного трёхчлена:

а) $x^2 - 6x - 2$;
б) $x^2 + 5x + 20$;
в) $2x^2 - 4x + 10$;
г) $\frac{1}{2}x^2 + x - 6$.

608. Выделите квадрат двучлена из квадратного трёхчлена:

а) $x^2 - 10x + 10$;
б) $x^2 + 3x - 1$;
в) $3x^2 + 6x - 3$;
г) $\frac{1}{4}x^2 - x + 2$.

609. (*Для работы в парах.*) Докажите, что при любом значении x квадратный трёхчлен:

а) $x^2 - 6x + 10$ принимает положительное значение;
б) $5x^2 - 10x + 5$ принимает неотрицательное значение;
в) $-x^2 + 20x - 100$ принимает неположительное значение;
г) $-2x^2 + 16x - 33$ принимает отрицательное значение;
д) $x^2 - 0{,}32x + 0{,}0256$ принимает неотрицательное значение;
е) $4x^2 + 0{,}8x + 2$ принимает положительное значение.

1) Обсудите, какие преобразования трёхчленов надо выполнить для доказательства высказанных утверждений.
2) Распределите, кто выполняет задания а), в) и д), а кто — задания б), г) и е), и выполните их.
3) Проверьте друг у друга правильность проведённых доказательств и исправьте ошибки, если они допущены.

610. Даны квадратные трёхчлены

$$x^2 - 6x + 11 \quad \text{и} \quad -x^2 + 6x - 11.$$

Докажите, что первый из них не принимает отрицательных значений, а второй — положительных.

611. При каком значении x трёхчлен $2x^2 - 4x + 6$ принимает наименьшее значение? Найдите это значение.

612. Дан квадратный трёхчлен $\frac{1}{3}x^2 + 2x + 4$. Выясните, при каком значении x он принимает наименьшее значение и чему равно это значение трёхчлена.

613. (*Задача-исследование.*) Выясните, какой из прямоугольных треугольников с суммой катетов, равной 6 см, имеет наибольшую площадь. Вычислите эту площадь.

1) Обозначьте длину одного из катетов через x см и составьте выражение для вычисления площади треугольника.
2) Исследуйте, при каких значениях переменной составленное выражение принимает наибольшее значение.
3) Вычислите, чему равно значение площади треугольника при указанных значениях переменной.

614. С башни выпустили вверх стрелу из лука. Если начальная скорость стрелы равна 50 м/с, высота башни 20 м и t (с) — время полёта стрелы, то расстояние h (м) стрелы от поверхности земли в момент времени t (с) можно найти по формуле $h = -5t^2 + 50t + 20$ (приближённое значение ускорения свободного падения считается равным 10 м/с^2). Какой наибольшей высоты достигнет стрела?

П

615. Решите уравнение:
а) $3(x + 4)^2 = 10x + 32$; б) $31x + 77 = 15(x + 1)^2$.

616. Разложите на множители многочлен:
а) $ab + 3b - 5a - 15$; б) $2xy - y + 8x - 4$.

25. Разложение квадратного трёхчлена на множители

Пусть требуется разложить на множители квадратный трёхчлен

$$3x^2 - 21x + 30.$$

Вынесем сначала за скобки старший коэффициент 3. Получим

$$3x^2 - 21x + 30 = 3(x^2 - 7x + 10).$$

Для того чтобы разложить на множители трёхчлен

$$x^2 - 7x + 10,$$

представим $-7x$ в виде суммы одночленов $-2x$ и $-5x$ и применим способ группировки:

$$x^2 - 7x + 10 = x^2 - 2x - 5x + 10 =$$
$$= x(x - 2) - 5(x - 2) = (x - 2)(x - 5).$$

Значит,

$$3x^2 - 21x + 30 = 3(x - 2)(x - 5).$$

При $x = 2$ и $x = 5$ произведение $3(x - 2)(x - 5)$, а следовательно, и трёхчлен $3x^2 - 21x + 30$ обращаются в нуль. Значит, числа 2 и 5 являются его корнями.

Итак, мы представили квадратный трёхчлен

$$3x^2 - 21x + 30$$

в виде произведения числа 3, т. е. старшего коэффициента, и двух линейных множителей. Первый из них представляет собой разность между переменной x и одним корнем трёхчлена, а второй — разность между переменной x и другим корнем.

Такое разложение можно получить для любого квадратного трёхчлена, имеющего корни. При этом считают, что если дискриминант квадратного трёхчлена равен нулю, то этот трёхчлен имеет два равных корня.

ТЕОРЕМА

Если x_1 и x_2 — корни квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$, то

$$ax^2 + bx + c = a\,(x - x_1)(x - x_2).$$

● Вынесем за скобки в многочлене $ax^2 + bx + c$ множитель a. Получим

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right).$$

Так как корни квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$ являются корнями квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, то по теореме Виета

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a},\; x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Отсюда

$$\frac{b}{a} = -(x_1 + x_2),\; \frac{c}{a} = x_1 \cdot x_2.$$

Поэтому

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 =$$
$$= x^2 - x_1x - x_2x + x_1x_2 = x(x - x_1) - x_2(x - x_1) =$$
$$= (x - x_1)(x - x_2).$$

Итак,

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).\ ○$$

Покажем, что

если квадратный трёхчлен не имеет корней, то его нельзя разложить на множители, являющиеся многочленами первой степени.

● Пусть квадратный трёхчлен $ax^2 + bx + c$ не имеет корней. Предположим, что его можно представить в виде произведения многочленов первой степени:

$$ax^2 + bx + c = (kx + m)(px + q),$$

где k, m, p и q — некоторые числа, причём $k \neq 0$ и $p \neq 0$. Произведение $(kx + m)(px + q)$ обращается в нуль при $x = -\frac{m}{k}$ и $x = -\frac{q}{p}$. Следовательно, при этих значениях x обращается в нуль и трёхчлен $ax^2 + bx + c$, т. е. числа $-\frac{m}{k}$ и $-\frac{q}{p}$ являются его корнями. Мы пришли к противоречию, так как по условию этот трёхчлен корней не имеет. ○

Пример 1. Разложим на множители квадратный трёхчлен

$$2x^2 + 7x - 4.$$

▶ Решив уравнение $2x^2 + 7x - 4 = 0$, найдём корни трёхчлена:

$$x_1 = \frac{1}{2},\ x_2 = -4.$$

По теореме о разложении квадратного трёхчлена на множители имеем

$$2x^2 + 7x - 4 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x + 4).$$

Полученный результат можно записать иначе, умножив число 2 на двучлен $x - \frac{1}{2}$. Получим

$$2x^2 + 7x - 4 = (2x - 1)(x + 4).$$ ◁

Пример 2. Разложим на множители квадратный трёхчлен

$$-4x^2 + 24x - 36.$$

▶ Решив уравнение $-4x^2 + 24x - 36 = 0$, найдём корни трёхчлена: $x_1 = x_2 = 3$.
Значит,

$$-4x^2 + 24x - 36 = -4(x - 3)(x - 3),$$

или иначе

$$-4x^2 + 24x - 36 = -4(x - 3)^2.$$ ◁

Пример 3. Сократим дробь $\frac{3x+2}{3x^2-13x-10}$.

▶ Разложим на множители квадратный трёхчлен $3x^2 - 13x - 10$.

Его корни равны $-\frac{2}{3}$ и 5. Поэтому

$$3x^2 - 13x - 10 = 3\left(x + \frac{2}{3}\right)(x - 5) = (3x + 2)(x - 5).$$

Значит,
$$\frac{3x+2}{3x^2-13x-10}=\frac{3x+2}{(3x+2)(x-5)}=\frac{1}{x-5}.$$
◁

Упражнения

617. Разложите на множители квадратный трёхчлен:

а) $3x^2-24x+21$; г) $x^2-12x+20$; ж) $2x^2-5x+3$;
б) $5z^2+10z-15$; д) $-y^2+16y-15$; з) $5y^2+2y-3$;
в) $\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}$; е) $-t^2-8t+9$; и) $-2n^2+5n+7$.

618. Разложите на множители квадратный трёхчлен:

а) $2x^2-2x+\frac{1}{2}$; в) $16a^2+24a+9$;
б) $-9x^2+12x-4$; г) $0{,}25m^2-2m+4$.

619. Разложите на множители квадратный трёхчлен:

а) $2x^2+12x-14$; в) $3x^2+5x-2$;
б) $-m^2+5m-6$; г) $6x^2-13x+6$.

620. Докажите тождество:

а) $10x^2+19x-2=10(x-0{,}1)(x+2)$;
б) $0{,}5(x-6)(x-5)=0{,}5x^2-5{,}5x+15$.

621. Можно ли представить квадратный трёхчлен в виде произведения многочленов первой степени:

а) $-3y^2+3y+11$; в) $x^2-7x+11$;
б) $4b^2-9b+7$; г) $3y^2-12y+12$?

622. Можно ли разложить на множители квадратный трёхчлен, коэффициенты которого равные, отличные от нуля числа?

623. Покажите, что существует квадратный трёхчлен, имеющий корни, коэффициенты которого — натуральные числа вида n, $2n$, $3n$ (расположенные в произвольном порядке). Разложите этот трёхчлен на множители.

624. Сократите дробь:

а) $\frac{4x+4}{3x^2+2x-1}$; в) $\frac{16-b^2}{b^2-b-12}$; д) $\frac{p^2-11p+10}{20+8p-p^2}$;

б) $\frac{2a^2-5a-3}{3a-9}$; г) $\frac{2y^2+7y+3}{y^2-9}$; е) $\frac{3x^2+16x-12}{10-13x-3x^2}$.

625. Сократите дробь:

а) $\frac{x^2-11x+24}{x^2-64}$; б) $\frac{2y^2+9y-5}{4y^2-1}$.

626. Найдите значение дроби:

а) $\frac{36-x^2}{6-7x+x^2}$ при $x = -9; -99; -999;$

б) $\frac{4x^2+8x-32}{4x^2-16}$ при $x = -1; 5; 10.$

627. Чем различаются графики функций $y = x - 4$ и $y = \frac{x^2-6x+8}{x-2}$?

П

628. Решите уравнение:

а) $\frac{x^2-1}{2}-11x=11;$ в) $x-3=\frac{1-x^2}{3};$

б) $\frac{x^2+x}{2}=\frac{8x-7}{3};$ г) $\frac{2-x^2}{7}=\frac{x}{2}.$

629. Разложите на множители многочлен:

а) $4x^2 - 6x + 2xy - 3y;$ б) $4a^3 + 2b^3 - 2a^2b - 4ab^2.$

630. В какой координатной четверти расположена точка пересечения графиков функций $f(x) = 0{,}8x + 2{,}1$ и $g(x) = -0{,}9x + 3$?

Контрольные вопросы и задания

1. Дайте определение квадратного трёхчлена. Сколько корней может иметь квадратный трёхчлен?
2. Покажите на примере выражения $3x^2 - 12x + 32$, как можно выделить квадрат двучлена из квадратного трёхчлена.
3. Сформулируйте и докажите теорему о разложении на множители квадратного трёхчлена, имеющего корни.

§ 9 ДРОБНЫЕ РАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

26. Решение дробных рациональных уравнений

В уравнениях

$$2x + 5 = 3(8 - x),$$

$$x-\frac{5}{x}=-3x+19,$$

$$\frac{x-4}{2x+1}=\frac{x-9}{x}$$

левая и правая части являются рациональными выражениями. Такие уравнения называют *рациональными уравнениями*.

Рациональное уравнение, в котором и левая, и правая части являются целыми выражениями, называют *целым*. Рациональное уравнение, в котором левая или правая часть является дробным выражением, называют *дробным*.

Так, уравнение

$$2x + 5 = 3(8 - x)$$

целое, а уравнения

$$x - \frac{5}{x} = -3x + 19 \quad \text{и} \quad \frac{x-4}{2x+1} = \frac{x-9}{x}$$

дробные рациональные.

Пример 1. Решим целое уравнение

$$\frac{x-1}{2} + \frac{2x}{3} = \frac{5x}{6}.$$

▶ Умножим обе части уравнения на наименьший общий знаменатель входящих в него дробей, т. е. на число 6. Получим уравнение, равносильное данному, не содержащее дробей:

$$3(x - 1) + 4x = 5x.$$

Решив его, найдём, что $x = 1{,}5$. ◁

Пример 2. Решим дробное рациональное уравнение

$$\frac{x-3}{x-5} + \frac{1}{x} = \frac{x+5}{x(x-5)}. \qquad (1)$$

▶ По аналогии с предыдущим примером умножим обе части уравнения на общий знаменатель дробей, т. е. на выражение $x(x - 5)$. Получим целое уравнение

$$x(x - 3) + x - 5 = x + 5. \qquad (2)$$

Понятно, что каждый корень уравнения (1) является корнем уравнения (2). Но уравнение (2) может быть не равносильно исходному, так как мы умножили обе его части не на число, отличное от нуля, а на выражение, содержащее переменную, которое может обращаться в нуль. Поэтому не каждый корень уравнения (2) обязательно окажется корнем уравнения (1).

Упростив уравнение (2), получим квадратное уравнение

$$x^2 - 3x - 10 = 0.$$

Его корни — числа -2 и 5.

Проверим, являются ли числа -2 и 5 корнями уравнения (1).

При $x = -2$ общий знаменатель $x(x - 5)$ не обращается в нуль. Значит, число -2 — корень уравнения (1).

При $x = 5$ общий знаменатель обращается в нуль и выражения $\frac{x-3}{x-5}$ и $\frac{x+5}{x(x-5)}$ теряют смысл. Поэтому число 5 не является корнем уравнения (1).

Итак, корнем уравнения (1) служит только число −2. ◁

Вообще при решении дробных рациональных уравнений целесообразно поступать следующим образом:

1) найти общий знаменатель дробей, входящих в уравнение;
2) умножить обе части уравнения на общий знаменатель;
3) решить получившееся целое уравнение;
4) исключить из его корней те, которые обращают в нуль общий знаменатель.

П р и м е р 3. Решим уравнение $\frac{2}{x^2-4} - \frac{1}{x^2-2x} = \frac{4-x}{x^2+2x}$.

▶ Имеем $\frac{2}{(x-2)(x+2)} - \frac{1}{x(x-2)} = \frac{4-x}{x(x+2)}$.

Общий знаменатель дробей равен $x(x-2)(x+2)$.
Умножив обе части уравнения на общий знаменатель дробей, получим

$$2x - (x+2) = (4-x)(x-2).$$

Отсюда

$$2x - x - 2 = 4x - x^2 - 8 + 2x,$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0,$$

$$D = 25 - 24 = 1,$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2},$$

$$x = \frac{5 \pm 1}{2},$$

$$x_1 = 2, \ x_2 = 3.$$

Если $x = 2$, то $x(x-2)(x+2) = 0$;
если $x = 3$, то $x(x-2)(x+2) \neq 0$.

Значит, корнем исходного уравнения является число 3.

О т в е т: 3. ◁

Упражнения

631. Найдите корни уравнения:

а) $\frac{y^2}{y+3}=\frac{y}{y+3}$;

б) $\frac{x^2}{x^2-4}=\frac{5x-6}{x^2-4}$;

в) $\frac{2x^2}{x-2}=\frac{-7x+6}{2-x}$;

г) $\frac{y^2-6y}{y-5}=\frac{5}{5-y}$;

д) $\frac{2x-1}{x+7}=\frac{3x+4}{x-1}$;

е) $\frac{2y+3}{2y-1}=\frac{y-5}{y+3}$;

ж) $\frac{5y+1}{y+1}=\frac{y+2}{y}$;

з) $\frac{1+3x}{1-2x}=\frac{5-3x}{1+2x}$;

и) $\frac{x-1}{2x+3}-\frac{2x-1}{3-2x}=0$.

632. Решите уравнение:

а) $\frac{2x-5}{x+5}-4=0$;

б) $\frac{12}{7-x}=x$;

в) $\frac{x^2-4}{4x}=\frac{3x-2}{2x}$;

г) $\frac{10}{2x-3}=x-1$;

д) $\frac{8}{x}=3x+2$;

е) $\frac{x^2+4x}{x+2}=\frac{2x}{3}$;

ж) $\frac{2x^2-5x+3}{10x-5}=0$;

з) $\frac{4x^3-9x}{x+1{,}5}=0$.

633. Найдите корни уравнения:

а) $\frac{x^2}{x^2+1}=\frac{7x}{x^2+1}$;

б) $\frac{y^2}{y^2-6y}=\frac{4(3-2y)}{y(6-y)}$;

в) $\frac{x-2}{x+2}=\frac{x+3}{x-4}$;

г) $\frac{8y-5}{y}=\frac{9y}{y+2}$;

д) $\frac{x^2+3}{x^2+1}=2$;

е) $\frac{3}{x^2+2}=\frac{1}{x}$;

ж) $x+2=\frac{15}{4x+1}$;

з) $\frac{x^2-5}{x-1}=\frac{7x+10}{9}$.

634. Решите уравнение:

а) $\frac{3x+1}{x+2}-\frac{x-1}{x-2}=1;$

б) $\frac{2y-2}{y+3}+\frac{y+3}{y-3}=5;$

в) $\frac{4}{9y^2-1}-\frac{4}{3y+1}=\frac{5}{1-3y};$

г) $\frac{4}{x+3}-\frac{5}{3-x}=\frac{1}{x-3}-1;$

д) $\frac{3}{x}+\frac{4}{x-1}=\frac{5-x}{x^2-x};$

е) $\frac{3y-2}{y}-\frac{1}{y-2}=\frac{3y+4}{y^2-2y}.$

635. При каком значении x:

а) значение функции $y=\frac{2x-1}{x+6}$ равно 5; −3; 0; 2;

б) значение функции $y=\frac{x^2+x-2}{x+3}$ равно −10; 0; −5?

636. Найдите корни уравнения:

а) $\frac{x-4}{x-5}+\frac{x-6}{x+5}=2;$

б) $\frac{1}{2-x}-1=\frac{1}{x-2}-\frac{6-x}{3x^2-12};$

в) $\frac{7y-3}{y-y^2}=\frac{1}{y-1}-\frac{5}{y(y-1)};$

г) $\frac{3}{y-2}+\frac{7}{y+2}=\frac{10}{y};$

д) $\frac{x+3}{x-3}+\frac{x-3}{x+3}=3\frac{1}{3};$

е) $\frac{5x+7}{x-2}-\frac{2x+21}{x+2}=8\frac{2}{3}.$

637. Найдите значение переменной y, при котором:

а) сумма дробей $\frac{3y+9}{3y-1}$ и $\frac{2y-13}{2y+5}$ равна 2;

б) разность дробей $\frac{5y+13}{5y+4}$ и $\frac{4-6y}{3y-1}$ равна 3;

в) сумма дробей $\frac{y+1}{y-5}$ и $\frac{10}{y+5}$ равна их произведению;

г) разность дробей $\frac{6}{y-4}$ и $\frac{y}{y+2}$ равна их произведению.

638. Решите уравнение:

а) $\frac{5}{y-2}-\frac{4}{y-3}=\frac{1}{y};$

б) $\frac{1}{2(x+1)}+\frac{1}{x+2}=\frac{3}{x+3};$

в) $\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x^2-2x}=\frac{8}{x^3-4x};$

г) $\frac{10}{y^3-y}+\frac{1}{y-y^2}=\frac{1}{1+y};$

д) $1+\frac{45}{x^2-8x+16}=\frac{14}{x-4};$

е) $\frac{5}{x-1}-\frac{4}{3-6x+3x^2}=3.$

639. Решите уравнение:

а) $\frac{10}{(x-5)(x+1)}+\frac{x}{x+1}=\frac{3}{x-5}$;

б) $\frac{17}{(x-3)(x+4)}-\frac{1}{x-3}=\frac{x}{x+4}$;

в) $\frac{4}{(x+1)^2}-\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{x^2-1}=0$;

г) $\frac{4}{9x^2-1}+\frac{1}{3x^2-x}=\frac{4}{9x^2-6x+1}$.

640. Найдите корни уравнения:

а) $\frac{21}{x+1}=\frac{16}{x-2}-\frac{6}{x}$;

б) $\frac{2}{y^2-3y}-\frac{1}{y-3}=\frac{5}{y^3-9y}$;

в) $\frac{18}{4x^2+4x+1}-\frac{1}{2x^2-x}=\frac{6}{4x^2-1}$;

г) $\frac{3(4y^2+10y-7)}{16y^2-9}=\frac{3y-7}{3-4y}+\frac{6y+5}{3+4y}$.

641. *(Для работы в парах.)* Решите уравнение:

а) $1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{5-x^2}}}=1\frac{7}{24}$; б) $1-\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{10-x^2}}}=\frac{3}{5}$.

1) Обсудите, какие преобразования и в какой последовательности надо выполнить, чтобы найти корни уравнения.

2) Распределите, кто выполняет задание а), а кто — задание б), и выполните их.

3) Проверьте друг у друга, правильно ли решено уравнение.

642. Решите графически уравнение:

а) $\frac{6}{x}=x$; б) $\frac{6}{x}=-x+6$.

643. С помощью графиков выясните, сколько корней может иметь уравнение $\frac{1}{x}=ax+b$, где a и b — некоторые числа. Для каждого случая укажите, каким условиям должны удовлетворять числа a и b.

644. Найдите значение выражения $x^2 - 2xy + y^2$ при $x = 3 + \sqrt{5}$, $y = 3 - \sqrt{5}$.

645. Определите, принадлежат ли графику функции $y = x^2 + 2x + 5$ точки $A(1{,}5;\ 7{,}25)$, $B(-3{,}2;\ 9)$ и $C(\sqrt{3} - 1;\ 7)$.

646. Упростите выражение:

а) $\frac{x - y}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} - \sqrt{x}$;

б) $\sqrt{x} - \frac{x - y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$.

647. Сравните с нулём значение выражения:

а) $\frac{3ab}{a^2 + b^2}$, где $a > 0$, $b < 0$;

б) $\frac{5a^3b^2}{a + b}$, где $a < 0$, $b < 0$.

27. Решение задач

Решение многих задач приводит к дробным рациональным уравнениям.

З а д а ч а 1. Моторная лодка прошла 25 км по течению реки и 3 км против течения, затратив на весь путь 2 ч. Какова скорость лодки в стоячей воде, если скорость течения реки равна 3 км/ч?

▶ Пусть x км/ч — скорость лодки в стоячей воде. Тогда скорость лодки по течению $(x + 3)$ км/ч, а против течения $(x - 3)$ км/ч. По течению реки 25 км лодка прошла за $\frac{25}{x+3}$ ч, а против течения 3 км — за $\frac{3}{x-3}$ ч. Значит, время, затраченное на весь путь, равно

$$\left(\frac{25}{x+3} + \frac{3}{x-3}\right) \text{ ч.}$$

По условию задачи на весь путь лодка затратила 2 ч. Следовательно,

$$\frac{25}{x+3} + \frac{3}{x-3} = 2.$$

Решив это уравнение, найдём его корни: $x_1 = 2$ и $x_2 = 12$.

По смыслу задачи скорость лодки в стоячей воде должна быть больше скорости течения. Этому условию удовлетворяет второй корень — число 12 и не удовлетворяет первый.

Ответ: 12 км/ч. ◁

Задача 2. К сплаву меди и цинка, содержащему 10 кг цинка, добавили 20 кг цинка. В результате содержание меди в сплаве уменьшилось на 25%. Какова была первоначальная масса сплава?

▶ Пусть первоначальная масса сплава была равна x кг. Тогда меди в нём было $(x - 10)$ кг и она составляла

$$\frac{x-10}{x} \cdot 100\%$$

от массы сплава. Масса нового сплава, полученного после добавления 20 кг цинка, оказалась равной $(x + 20)$ кг, а медь в нём составила

$$\frac{x-10}{x+20} \cdot 100\%.$$

По условию задачи содержание меди уменьшилось на 25%. Следовательно,

$$\frac{x-10}{x} \cdot 100\% - \frac{x-10}{x+20} \cdot 100\% = 25\%.$$

Отсюда

$$\frac{(x-10) \cdot 4}{x} - \frac{(x-10) \cdot 4}{x+20} = 1.$$

Решив это уравнение, найдём, что оно имеет два корня: $x_1 = 20$ и $x_2 = 40$. Оба корня удовлетворяют условию задачи.

Ответ: 20 кг или 40 кг. ◁

Упражнения

648. Знаменатель обыкновенной дроби больше её числителя на 3. Если к числителю этой дроби прибавить 7, а к знаменателю — 5, то она увеличится на $\frac{1}{2}$. Найдите эту дробь.

649. Из города в село, находящееся от него на расстоянии 120 км, выехали одновременно два автомобиля. Скорость одного была на 20 км/ч больше скорости другого, и поэтому он пришёл к месту назначения на 1 ч раньше. Найдите скорость каждого автомобиля.

650. Один из лыжников прошёл расстояние в 20 км на 20 мин быстрее, чем другой. Найдите скорость каждого лыжника, зная, что один из них двигался со скоростью, на 2 км/ч большей, чем другой.

651. Два автомобиля выезжают одновременно из одного города в другой. Скорость первого автомобиля на 10 км/ч больше скорости второго, и поэтому первый автомобиль приезжает на место на 1 ч раньше второго. Найдите скорость каждого автомобиля, зная, что расстояние между городами равно 560 км.

652. Чтобы ликвидировать опоздание на 1 ч, поезд на перегоне в 720 км увеличил скорость, с которой шёл по расписанию, на 10 км/ч. Какова скорость поезда по расписанию?

653. В прошлом году в фермерском хозяйстве собрали 192 ц пшеницы. В этом году благодаря использованию новых технологий удалось повысить урожайность пшеницы на 2 ц с гектара. В результате такой же урожай собрали с площади, на 0,4 га меньшей. Какова была урожайность пшеницы в хозяйстве в прошлом году?

654. На молодёжном карнавале Андрей купил билеты лотереи «Надежда» на 240 р. Если бы он потратил эти деньги на билеты лотереи «Удача», то смог бы купить на 4 билета больше, так как они были на 5 р. дешевле. Сколько стоил билет лотереи «Надежда»?

655. Предприниматель приобрёл акции одинаковой стоимости на 110 000 р. Если бы он отложил покупку на год, то сумел бы приобрести на эту сумму на 20 акций меньше, так как цена одной акции данного вида возросла за этот год на 50 р. Сколько акций приобрёл предприниматель?

656. *Старинная задача.* Несколько человек обедали вместе и по счёту должны были уплатить 175 шиллингов. Оказалось, что у двоих не было при себе денег. Поэтому каждому из остальных пришлось уплатить на 10 шиллингов больше, чем приходилось на его долю. Сколько человек обедало?

657. Сотрудники отдела решили совместно приобрести однокамерный холодильник за 14 400 р. Однако трое отказались участвовать в покупке, и остальным пришлось уплатить на 400 р. больше, чем предполагалось. Сколько сотрудников работает в отделе?

658. Турист проплыл на лодке против течения реки 6 км и по озеру 15 км, затратив на путь по озеру на 1 ч больше, чем на путь по реке. Зная, что скорость течения реки равна 2 км/ч, найдите скорость лодки при движении по озеру.

659. Моторная лодка, скорость которой в стоячей воде 15 км/ч, прошла по течению реки 35 км, а против течения — 25 км. По течению она шла столько же времени, сколько против течения. Какова скорость течения реки?

660. Катер, развивающий в стоячей воде скорость 20 км/ч, прошёл 36 км против течения и 22 км по течению, затратив на весь путь 3 ч. Найдите скорость течения реки.

661. В водный раствор соли добавили 100 г воды. В результате концентрация соли в растворе понизилась на 1%. Определите первоначальную массу раствора, если известно, что в нём содержалось 30 г соли.

662. Сплав золота и серебра содержал 40 г золота. После того как к нему добавили 50 г золота, получили новый сплав, в котором содержание золота возросло на 20%. Сколько серебра было в сплаве?

663. При совместной работе двух кранов разгрузку баржи закончили за 6 ч. Сколько времени потребовалось бы каждому крану отдельно для разгрузки баржи, если известно, что первому крану для этого требуется на 5 ч больше, чем второму?

664. Два 3D-принтера разной мощности изготовили за 2 ч 55 мин некоторое количество деталей. За какое время это количество деталей мог бы изготовить первый 3D-принтер, если известно, что ему для этого потребуется на 2 ч больше, чем второму 3D-принтеру?

665. Велосипедист проехал из посёлка до станции с некоторой постоянной скоростью, а возвращался со скоростью, на 5 км/ч большей. Какова была первоначальная скорость велосипедиста, если известно, что его средняя скорость на всём пути следования составляла 12 км/ч?

666. Мотоциклист половину пути проехал с некоторой постоянной скоростью, а затем снизил скорость на 20 км/ч. Какова была скорость мотоциклиста на первой половине пути, если известно, что средняя скорость на всём пути составила 37,5 км/ч?

П

667. Докажите, что:

а) $\frac{1}{11+2\sqrt{30}} + \frac{1}{11-2\sqrt{30}} = 22;$ б) $\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-2} + \frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2} = 18.$

П

668. Найдите значение выражения:

а) $\frac{xy}{x+y}$ при $x = 5 + 2\sqrt{6}$, $y = 5 - 2\sqrt{6}$;

б) $\frac{x^2+y^2}{xy}$ при $x = \sqrt{11} + \sqrt{3}$, $y = \sqrt{11} - \sqrt{3}$.

669. Найдите значение q, при котором разность корней уравнения $x^2 - 10x + q = 0$ равна 6.

670. Составьте квадратное уравнение, зная его корни:

а) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ и $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$; б) $2 - \sqrt{3}$ и $\frac{1}{2-\sqrt{3}}$.

Контрольные вопросы и задания

1. Приведите пример целого уравнения и пример дробного рационального уравнения.
2. На примере уравнения $\frac{6}{x^2-1} - 1 = \frac{2}{x-1} - \frac{3}{x+1}$ объясните, как решают дробные рациональные уравнения.

§ 10 УРАВНЕНИЯ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ И ИХ СИСТЕМЫ

28. Уравнение с двумя переменными и его график

В 7 классе рассматривались уравнения с двумя переменными, имеющие вид $ax + by = c$, где a, b и c — некоторые числа. Такие уравнения, как известно, называются *линейными*. Но уравнения с двумя переменными могут быть и нелинейными. Так, уравнения $x^2 = 4 - y^2$, $xy - 6 = 0$, $5x^3 + y^2 = 9$ линейными не являются.

Решение уравнения с двумя переменными в общем случае определяется так же, как и решение линейного уравнения.

Решением уравнения с двумя переменными называется пара значений переменных, обращающая это уравнение в верное равенство.

Так, если в уравнение $5x^3 + y^2 = 9$ подставить вместо переменной x число 1, а вместо переменной y число 2, то получится верное равенство $5 \cdot 1^3 + 2^2 = 9$. Пара чисел (1; 2), в которой на первом месте указано значение переменной x, а на втором — значение переменной y, является решением уравнения $5x^3 + y^2 = 9$. Заметим, что уравнение с двумя переменными имеет, как правило, бесконечное множество решений.

Два уравнения, имеющие одно и то же множество решений, называют *равносильными уравнениями*.

Степень целого уравнения с двумя переменными определяется так же, как и степень целого уравнения с одной переменной: если левая часть уравнения с двумя переменными есть многочлен стандартного вида, а правая — число 0, то степень уравнения считают равной степени этого многочлена.

Для того чтобы выяснить, какова степень уравнения с двумя переменными, его заменяют равносильным уравнением, левая часть которого — многочлен стандартного вида, а правая — число 0. Например, уравнение

$$(x^3 + y)^2 = x^6 - 1$$

равносильно уравнению

$$2x^3y + y^2 + 1 = 0$$

и, значит, является уравнением четвёртой степени.

Графиком уравнения с двумя переменными называется множество точек координатной плоскости, координаты которых обращают уравнение в верное равенство.

Из курса алгебры 7 класса известно, что графиком линейного уравнения $ax + by = c$, в котором $a \neq 0$ или $b \neq 0$, является прямая. Например, графики линейных уравнений

$$y + 3{,}5 = 0, \quad y = 0{,}5x + 2{,}5$$

изображены на рисунке 23.

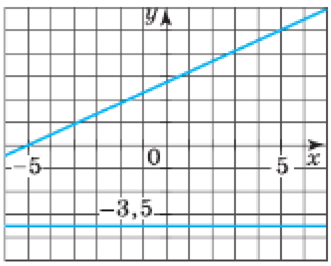


Рис. 23

Вам известны также графики некоторых уравнений второй степени. Например, графиком уравнения $x^2 - 2y = 0$ является парабола, графиком уравнения $xy - 12 = 0$ — гипербола. Эти графики изображены на рисунках 24, *а* и *б*.

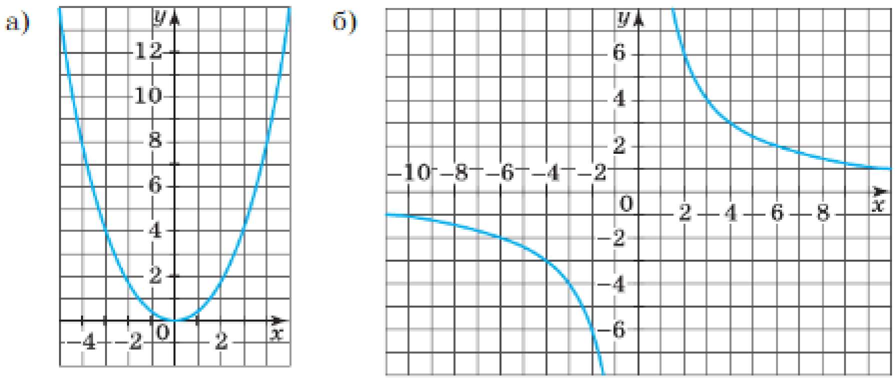


Рис. 24

Вообще графики уравнений с двумя переменными весьма разнообразны. На рисунке 25 изображены кривые, которые названы в честь европейских математиков XVII века Якоба Бернулли и Рене Декарта: лемниската Бернулли (рис. 25, *а*) и декартов лист (рис. 25, *б*).

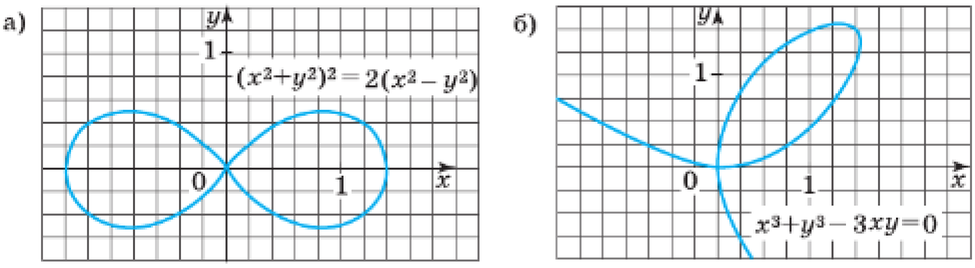


Рис. 25

Упражнения

671. Является ли пара чисел (−1; 3) решением уравнения:

а) $x^2 - y + 2 = 0$; в) $x^2 + y^2 = 10$;

б) $xy + y = 6$; г) $x^2 - y^2 + 8 = 0$?

672. Найдите три каких-нибудь решения уравнения:

а) $x - 2y = 8$; в) $x - xy = 12$;

б) $x + 0y = 10$; г) $(x + y)(y - 2) = 0$.

673. Определите степень уравнения:

а) $x + 4xy = 5$; в) $8x^6 - y^2 = 2x^4(4x^2 - y)$;

б) $x^5 + 8x^3y^3 = 1$; г) $(x - 2y)^2 - x^2 = 4y(y - x) + 5x$.

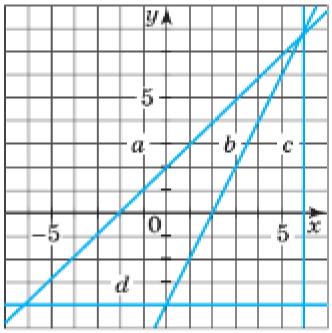


Рис. 26

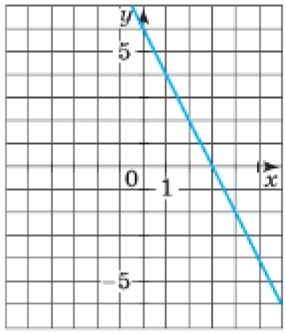


Рис. 27

674. Графики линейных уравнений $2x - y = 4$, $x - y = -2$, $y + 4 = 0$, $x - 6 = 0$ изображены на рисунке 26. Для каждой из прямых, изображённых на этом рисунке, укажите её уравнение.

675. Постройте график уравнения:

а) $3x + 0y = 12$;
б) $0x + y = 1$;
в) $x = 5$;
г) $y = 1{,}5$;
д) $(x - 2)(y - 3) = 0$;
е) $(x + 3)(y + 1) = 0$;
ж) $|x| = 2$;
з) $|y| = 3$.

676. Объясните, почему графиком уравнения $x^2 - y^2 = 0$ является пара прямых $y = x$ и $y = -x$.

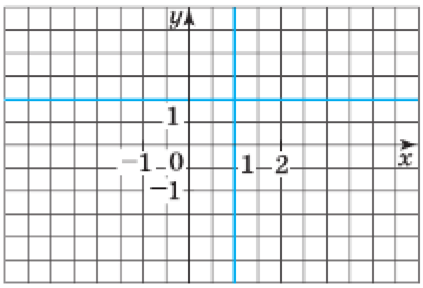
677. Постройте на координатной плоскости график линейного уравнения:

а) $3x - 2y = 5$; б) $x + 2y - 3 = 0$; в) $3x - 4y = -1$.

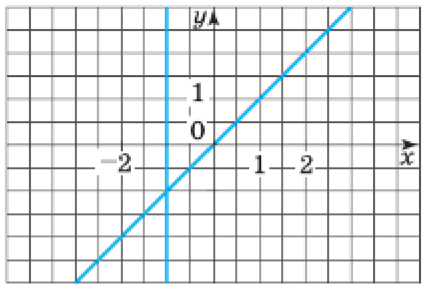
678. На рис. 27 изображён график одного из следующих линейных уравнений: $x - y = -7$, $x - y = 4$, $2x + y = 6$, $x + y = 5$. Укажите это уравнение.

679. Составьте уравнение, графиком которого является пара прямых, изображённых на рисунке 28.

а)



б)



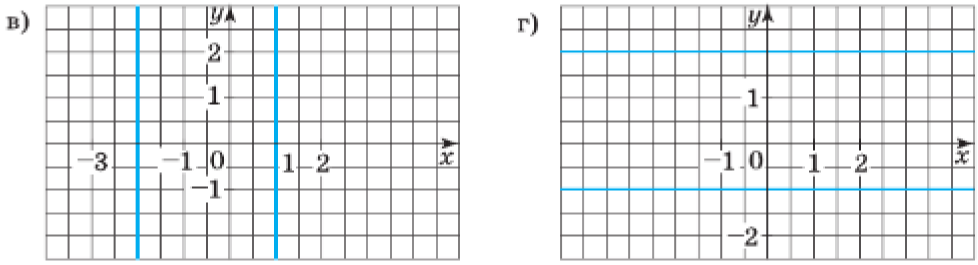


Рис. 28

680. Составьте уравнение с двумя переменными, график которого изображён на рисунке 29.

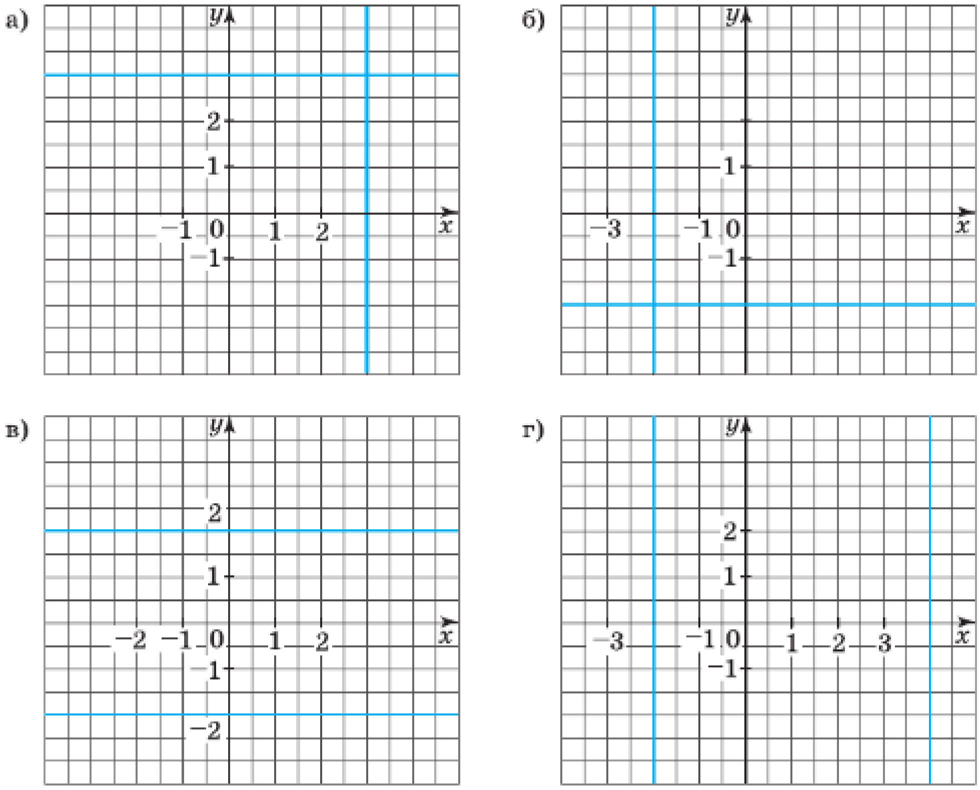


Рис. 29

681. Постройте график уравнения:

а) $y - x^2 = 0$; в) $0{,}5xy + 1{,}5 = 0$;

б) $y - x^3 = 0$; г) $y + x^3 = 0$.

682. (*Для работы в парах.*) Постройте график уравнения:

а) $(x-5)(y+6)=0$; б) $(x-4)(x+2)=0$.

1) Обсудите, какая фигура является графиком уравнения в каждом случае.

2) Распределите, кто выполняет задание а), а кто — задание б), и выполните их.

3) Проверьте друг у друга, правильно ли построены графики уравнений.

683. Найдите все целые решения уравнения:

а) $xy=2$; б) $x^2-y^2=3$.

П

684. Автомобиль двигался 1 ч 20 мин со скоростью a км/ч и 45 мин со скоростью b км/ч. Какой путь проехал автомобиль?

685. Решите уравнение:

а) $\frac{(2x+1)(2x-3)}{4}=x^2-1$; б) $x^2-\frac{(2x-1)x}{2}=2$.

686. Упростите выражение:

а) $\frac{x^2-1}{6x^2}:\frac{x^2+x}{3}$; б) $\frac{16n^2-1}{n^2-2n}:\frac{8n}{3n-6}$; в) $\frac{x-4}{y^2-xy}:\frac{5x-20}{x^2-xy}$.

29. Исследование систем двух линейных уравнений с двумя переменными

В 7 классе вам приходилось решать системы двух линейных уравнений с двумя переменными, например:

$$\begin{cases} x-2y=5, \\ x+y=3; \end{cases} \quad \begin{cases} 7y+x=6, \\ 4x-y=0; \end{cases} \quad \begin{cases} y=0{,}5x-0{,}65, \\ 2+y=0{,}11x. \end{cases}$$

Такие системы решались разными способами: алгебраически — методами подстановки и сложения, а также графически.

При графическом способе решения на координатной плоскости строят две прямые — графики уравнений системы. Возможны три случая взаимного расположения двух прямых на плоскости: прямые пересекаются; прямые параллельны; прямые совпадают. Значит, при решении систем двух линейных уравнений с двумя переменными возможны три случая: система имеет единственное решение; система не имеет решений; система имеет бесконечно много решений.

Система двух линейных уравнений с двумя переменными может быть представлена в виде

$$\begin{cases} y = k_1x + b_1, \\ y = k_2x + b_2. \end{cases}$$

Если $k_1 \neq k_2$, то прямые пересекаются, и система имеет единственное решение; если $k_1 = k_2$, но $b_1 \neq b_2$, то прямые параллельны и система не имеет решений; если $k_1 = k_2$ и $b_1 = b_2$, то прямые совпадают, и система имеет бесконечно много решений (это решения уравнения системы).

Сделанный вывод позволяет, рассмотрев уравнения данной системы, не решая её, сказать, имеет ли эта система решение, и если имеет, то сколько.

Например, система уравнений $\begin{cases} 3x - 2y = 4, \\ 0,5x + y = 2 \end{cases}$ имеет единственное решение. В самом деле, выразив в каждом уравнении y через x, получим систему $\begin{cases} y = 1,5x - 2, \\ y = -0,5x + 2. \end{cases}$

Так как угловые коэффициенты прямых графиков уравнений системы различны ($k_1 = 1,5$, $k_2 = -0,5$), то прямые пересекаются, и система имеет единственное решение.

Аналогичными рассуждениями можно показать, что система $\begin{cases} 2x + y = 3, \\ 4x + 2y = 1 \end{cases}$ не имеет решений, а система $\begin{cases} 2x - 3y = 5, \\ 4x - 6y = 10 \end{cases}$ имеет бесконечно много решений (решения системы — это решения уравнения $2x - 3y = 5$).

Упражнения

687. Выясните, имеет ли система решения и сколько:

а) $\begin{cases} 2x - 6y = 10, \\ 8y = 7 - 2x; \end{cases}$ в) $\begin{cases} y = 4x, \\ x - 8 = -6y; \end{cases}$ д) $\begin{cases} 3 - 3y = 4x, \\ -8x = 6y - 6; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3x - 12 = 8y, \\ 1,5x - 4y = 6; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x + y = 5, \\ 3x - 2y = 8; \end{cases}$ е) $\begin{cases} x + 4y = 5, \\ x - y + 3 = 0. \end{cases}$

688. (*Для работы в парах.*) Имеет ли решения система уравнений и сколько:

а) $\begin{cases} 7x + y = 8, \\ x - y + 3 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 6y - 4x = 7, \\ 8x - 12y = -14; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x - 2y = 6, \\ y = -4x? \end{cases}$

1) Обсудите друг с другом, от чего зависит ответ на вопрос задачи.

2) Выполните совместно задание а).
3) Распределите, кто выполняет задание б), а кто — задание в), и выполните их.
4) Проверьте друг у друга правильность выполнения заданий и исправьте ошибки, если они допущены.

689. Выясните, каково взаимное расположение в координатной плоскости графиков уравнений данной системы и сделайте вывод о том, имеет ли система решение, и, если имеет, то сколько:

а) $\begin{cases} 3x-y=5, \\ 3x+2y=8; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2y-x=4, \\ y-2x=0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} y=0{,}5x+2, \\ y=0{,}5x-4. \end{cases}$

690. Прямая a задана уравнением $x + 2y = 5$. Среди уравнений прямых: $x + y = 5$; $\frac{1}{4}y - 4x = 0$; $6y + 3x = 10$; $0{,}6x - 3 = -1{,}2$; $2x + 4y = 10$; $2x + 4y = 9$; $15 - 3x = 6y$; $0{,}5y + 0{,}25x = 4{,}8$ найдите те, которые вместе с уравнением прямой a образуют систему: 1) имеющую единственное решение; 2) не имеющую решений; 3) имеющую бесконечно много решений.

691. Используя графики уравнений, изображённые на рисунке 30, объясните графический смысл равносильности систем уравнений

$$\begin{cases} 2x-y=5, \\ x+y=1 \end{cases}$$

и $\begin{cases} (2x-y)+(x+y)=5+1, \\ x+y=1. \end{cases}$

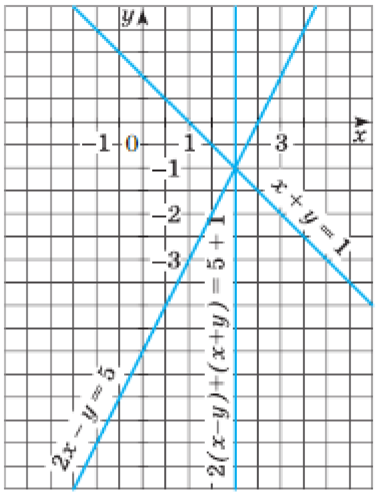


Рис. 30

692. В системе двух уравнений с двумя переменными первым является уравнение $y - |x| = 0$, а вторым — уравнение вида $y = kx + b$, где k и b — некоторые числа. Известно, что прямая — график второго уравнения пересекает ось x в точке $(-3; 0)$. Подберите в уравнении $y = kx + b$ коэффициенты k и b так, чтобы система:
1) имела два решения;
2) имела одно решение;
3) не имела решений.

П

693. Из города A в город B автомобиль ехал со скоростью 80 км/ч, а обратно — со скоростью 90 км/ч. При этом путь из города B в город A занял на 1 ч меньше, чем путь из города A в город B. Найдите расстояние между городами A и B.

694. Улитка ползёт по стволу дерева в течение получаса со скоростью 0,25 м/мин. Постройте график движения улитки.

695. Разложите на множители:
а) $16m^2 - 25n^4$; в) $(2a + 3)^2 - 4$;
б) $0{,}09a^4 - 9b^2$; г) $36 - (1 - 5x)^2$.

30. Графический способ решения систем уравнений

Графический способ решения систем двух уравнений с двумя переменными состоит в следующем: строят графики уравнений, входящих в систему; находят точки пересечения графиков или устанавливают, что таких точек нет; находят координаты точек пересечения графиков. Найденные пары чисел и являются решениями системы.

Таким образом, *решить графически систему уравнений — это значит найти координаты общих точек графиков уравнений*. В этом пункте графический способ будет применяться для решения систем уравнений, в которых одно или оба уравнения не являются линейными.

Пример. Решим с помощью графиков систему уравнений

$$\begin{cases} xy - 6 = 0, \\ x^2 + 7x = 2y. \end{cases}$$

▶ Построим в одной системе координат графики уравнений, входящих в систему. Для этого выразим из каждого уравнения переменную y через переменную x. Получим систему:

$$\begin{cases} y = \dfrac{6}{x}, \\ y = 0{,}5x^2 + 3{,}5x. \end{cases}$$

Графиком первого уравнения является гипербола, а графиком второго — парабола. Координаты любой точки гиперболы являются решением уравнения $y = \frac{6}{x}$, а координаты любой точки параболы — решением уравнения $y = 0{,}5x^2 + 3{,}5x$.

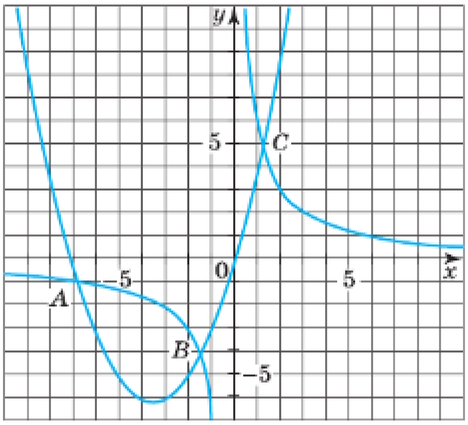


Рис. 31

Значит, координаты любой точки пересечения гиперболы и параболы удовлетворяют как первому уравнению системы, так и второму, т. е. являются решением рассматриваемой системы.

Мы видим, что гипербола и парабола пересекаются в трёх точках (рис. 31). Это означает, что рассматриваемая система имеет три решения.

С помощью рисунка найдём приближённые значения координат точек A, B и C. Получим: $A(-6{,}8;\ -1)$, $B(-1{,}5;\ -4)$; $C(1{,}2;\ 5)$.

Следовательно, решениями системы являются следующие пары чисел: $x_1 \simeq -6{,}8$, $y_1 \simeq -1$; $x_2 \simeq -1{,}5$, $y_2 \simeq -4$; $x_3 \simeq 1{,}2$, $y_3 \simeq 5$. Найденные решения данной системы являются приближёнными. ◁

Упражнения

696. Является ли решением системы уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ 6x + 5y = -4 \end{cases}$$

пара чисел: а) (−2; 1); б) (1; −2)?

697. Решите графически систему уравнений

$$\begin{cases} y - x^2 = 0, \\ 2x - y + 3 = 0. \end{cases}$$

698. Изобразив схематически графики уравнений, выясните, имеет ли решения система уравнений и если имеет, то сколько:

а) $\begin{cases} y = x^3, \\ xy = -12; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y = x^2 + 8, \\ y = -x^2 + 12; \end{cases}$ в) $\begin{cases} y = x^2 + 1, \\ xy = 3. \end{cases}$

699. Решите графически систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 - 4 = 0, \\ y^2 - 9 = 0. \end{cases}$$

700. Среди данных уравнений найдите уравнения параболы, гиперболы, прямой:

а) $xy = -3$; в) $\frac{1}{4}y - x^2 = -1$; д) $1 + 2x = 0$;

б) $6y - 2 = 0$; г) $10 + 5xy = 0$; е) $2x - 2y = 5$.

Постройте график каждого уравнения.

701. Упростите выражение:

а) $\frac{c-1}{12c} + \frac{2c+7}{12c} - \frac{6-3c}{12c}$;

б) $\frac{a-4b}{2ab} - \frac{2a-6b}{2ab} - \frac{3a-b}{2ab}$;

в) $\frac{17x-4y}{21xy} + \frac{8x+9y}{21xy} - \frac{11x-16y}{21xy}$.

31. Алгебраический способ решения систем уравнений

Основным способом решения систем уравнений с двумя переменными является алгебраический способ.

Рассмотрим сначала систему уравнений с двумя переменными, составленную из одного уравнения второй степени и одного уравнения первой степени. Такую систему всегда можно решить способом подстановки. Для этого поступают следующим образом:

1) выражают из уравнения первой степени одну переменную через другую;
2) подставляют полученное выражение в уравнение второй степени, в результате чего приходят к уравнению с одной переменной;
3) решают получившееся уравнение с одной переменной;
4) находят соответствующие значения второй переменной.

Пример 1. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 3xy - 2y^2 = 2, \\ x + 2y = 1. \end{cases}$$

▶ Выразим из второго уравнения переменную x через y:

$$x = 1 - 2y.$$

Подставим в первое уравнение вместо x выражение $1 - 2y$, получим уравнение с переменной y:

$$(1 - 2y)^2 - 3(1 - 2y)y - 2y^2 = 2.$$

После упрощения получим равносильное уравнение

$$8y^2 - 7y - 1 = 0.$$

Решив его, найдём, что $y_1 = -\frac{1}{8}$, $y_2 = 1$.

Соответствующие значения x можно найти, воспользовавшись формулой $x = 1 - 2y$.

Подставив в формулу $x = 1 - 2y$ значение $y_1 = -\frac{1}{8}$, получим $x_1 = 1\frac{1}{4}$.

Подставив в формулу $x = 1 - 2y$ значение $y_2 = 1$, получим $x_2 = -1$.

Итак, система имеет два решения:

$$x_1 = 1\frac{1}{4},\ y_1 = -\frac{1}{8} \text{ и } x_2 = -1,\ y_2 = 1.$$

Ответ можно записать также в виде пар: $\left(1\frac{1}{4}; -\frac{1}{8}\right)$, $(-1; 1)$. ◁

Если система состоит из двух уравнений второй степени с двумя переменными, то найти её решения обычно бывает трудно. В отдельных случаях такие системы удаётся решить, используя способ подстановки или способ сложения.

Пример 2. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 5, \\ xy = 6. \end{cases}$$

▶ Воспользовавшись тем, что $x \neq 0$, выразим из второго уравнения переменную y через x:

$$y = \frac{6}{x}$$

Подставим в первое уравнение вместо y выражение $\frac{6}{x}$. Получим уравнение

$$x^2 - \left(\frac{6}{x}\right)^2 = 5.$$

Решив его, найдём, что $x_1 = -3$, $x_2 = 3$.

По формуле $y = \frac{6}{x}$ находим соответствующие значения y:

$$y_1 = -2,\ y_2 = 2.$$

Значит, система имеет два решения:

$$x_1 = -3,\ y_1 = -2 \text{ и } x_2 = 3,\ y_2 = 2.$$

Ответ: $(-3; -2)$, $(3; 2)$. ◁

Пример 3. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} x^2-2y^2+x=-6, \\ x^2-3y^2=-11. \end{cases}$$

▶ С помощью почленного сложения левых и правых частей уравнений можно исключить слагаемые, содержащие переменную y. Для этого надо уравнять коэффициенты членов, содержащие y^2. Умножим обе части первого уравнения на 3, а второго — на −2. Получим систему, равносильную данной:

$$\begin{cases} 3x^2-6y^2+3x=-18, \\ -2x^2+6y^2=22. \end{cases}$$

Складывая левые и правые части уравнений системы, получаем уравнение с одной переменной $x^2 + 3x = 4$. Решив его, найдём: $x_1 = -4$, $x_2 = 1$.
Соответствующие значения y вычислим, используя второе уравнение исходной системы $3y^2 = x^2 + 11$: если $x = -4$, то $y = -3$ или $y = 3$; если $x = 1$, то $y = -2$ или $y = 2$.

Ответ: (−4; 3), (−4; −3), (1; 2), (1; −2). ◁

Упражнения

702. Решите способом подстановки систему уравнений:

а) $\begin{cases} y^2-x=-1, \\ x=y+3; \end{cases}$ в) $\begin{cases} xy+x=-4, \\ x-y=6; \end{cases}$

б) $\begin{cases} y=x-1, \\ x^2-2y=26; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x+y=9, \\ y^2+x=29. \end{cases}$

703. Решите систему уравнений, используя способ подстановки:

а) $\begin{cases} x=3-y, \\ y^2-x=39; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2+y=14, \\ y-x=8; \end{cases}$

б) $\begin{cases} y=1+x, \\ x+y^2=-1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x+y=4, \\ y+xy=6. \end{cases}$

704. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x-y=3, \\ xy=-2; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x+y=-1, \\ x^2+y^2=1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x+y=2{,}5, \\ xy=1{,}5; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x-y=2, \\ x^2-y^2=17. \end{cases}$

705. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x + y = 8, \\ xy = -20; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 8, \\ x - y = 4; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x - y = 0,8, \\ xy = 2,4; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ x + y = -3. \end{cases}$

706. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} y - 2x = 2, \\ 5x^2 - y = 1; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 3x^2 - 2y = 1, \\ 2x^2 - y^2 = 1; \end{cases}$ д) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 100, \\ 3x = 4y; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x - 2y^2 = 2, \\ 3x + y = 7; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3x^2 + 2y^2 = 11, \\ x + 2y = 3; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 2x^2 - y^2 = 32, \\ 2x - y = 8. \end{cases}$

707. Решите систему уравнений, используя способ сложения или подстановки:

а) $\begin{cases} 2x^2 + y^2 = 9, \\ x^2 - y^2 = 3; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 3x^2 - 2y = 1, \\ 2x^2 - y^2 = 1; \end{cases}$ д) $\begin{cases} x^2 + 4y = 10, \\ x - 2y = -5; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x^2 - xy = 33, \\ 4x - y = 17; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x - y - 4 = 0, \\ x^2 + y^2 = 8,5; \end{cases}$ е) $\begin{cases} x - 2y + 1 = 0, \\ 5xy + y^2 = 16. \end{cases}$

708. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 2x + 4y = 5(x - y), \\ x^2 - y^2 = 6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} u - v = 6(u + v), \\ u^2 - v^2 = 6. \end{cases}$

709. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y = 0,5x^2 - 2, \\ y - x = 2 \end{cases}$$

сначала графическим способом, а затем аналитическим.

710. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x^2 + y^2 + 3xy = -1, \\ x + 2y = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} u + 2v = 4, \\ u^2 + uv - v = -5. \end{cases}$

711. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x - y = 5, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{6}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x + y = 1, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = -2,5; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x + y = 6, \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{4}; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \frac{1}{y} - \frac{1}{x} = \frac{1}{3}, \\ x - 2y = 2. \end{cases}$

712. Не выполняя построения:

а) определите, пересекает ли парабола $y = x^2 - 8x + 16$ прямую $2x - 3y = 0$ и если да, то в каких точках;

б) найдите координаты точек пересечения с осями координат графика функции $y = 2x^2 + 9x - 5$.

713. Докажите, что прямая $x - y = 4$ имеет одну общую точку с параболой $y = x^2 - 5x + 5$, и найдите координаты этой общей точки.

714. Докажите, что парабола $y = 2x^2 - 5x + 1$ и прямая $2x + y + 3 = 0$ не пересекаются.

715. При каких значениях k парабола $y = x^2 + 1$ и прямая $y = kx$ имеют только одну общую точку?

П

716. Построив схематически графики уравнений, выясните, сколько решений имеет система уравнений:

а) $\begin{cases} y = x^3, \\ y = 15x; \end{cases}$ б) $\begin{cases} xy = 10, \\ y = x. \end{cases}$

717. Найдите корни уравнения:

а) $9x^2 - 100 = 0$;
б) $2 = 7c^2$;
в) $9m^2 - 4 = 0$;
г) $-0{,}8y^2 + 3y = 0$.

718. При каких значениях x:

а) трёхчлен $-x^2 - 2x + 168$ принимает положительные значения;

б) трёхчлен $15x^2 + x - 2$ принимает отрицательные значения;

в) дробь $\dfrac{x + 14}{3 - 2x}$ принимает отрицательные значения;

г) дробь $\dfrac{6 - 5x}{x + 25}$ принимает положительные значения?

32. Решение задач

Алгебраический способ решения текстовых задач часто сводится к решению систем двух линейных уравнений с двумя переменными.

Задача 1. У Лены были купюры по 500 р. и по 2000 р. Она утверждает, что купила велосипед за 25 500 р., отдав за него 20 купюр, а Катя говорит, что такого не может быть. Кто прав?

▶ Пусть у Лены было x купюр по 500 р. и y купюр по 2000 р. Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 20, \\ 500x + 2000y = 25\,500. \end{cases}$$

Решением этой системы является пара чисел (x; y), в которой $y = 10\frac{1}{3}$. Но это не соответствует смыслу задачи, так как количество купюр может выражаться только натуральным числом.

Ответ: права Катя. ◁

Задача 2. Чашка и блюдце стоили вместе 680 р. После того как чашка подешевела на 20%, а блюдце подорожало на 10%, они стали стоить вместе 580 р. Найдите первоначальную цену чашки и первоначальную цену блюдца.

▶ Пусть первоначальная цена чашки составляла x р., а блюдца — y р. Тогда по условию $x + y = 680$.

Новая цена чашки составляет 80% первоначальной и равна $0{,}8x$ р. Новая цена блюдца составляет 110% первоначальной и равна $1{,}1y$ р. Тогда

$$0{,}8x + 1{,}1y = 580.$$

Получили систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 680, \\ 0{,}8x + 1{,}1y = 580. \end{cases}$$

Решением этой системы является пара $x = 560$, $y = 120$. Следовательно, первоначальная цена чашки была 560 р., а блюдца 120 р.

Ответ: 560 р., 120 р. ◁

Упражнения

719. Было продано 42 л брусничного и грушевого сока. Брусничного сока было продано в 2,5 раза меньше, чем грушевого. Сколько литров грушевого сока было продано?

720. Существуют ли два таких натуральных числа, что сумма первого числа и утроенного второго равна 10, а разность первого и утроенного второго равна 2?

721. В мастерской сшили 65 курток и спортивных костюмов. Сколько сшили курток и сколько спортивных костюмов, если курток сшили в 1,6 раза больше, чем спортивных костюмов?

722. Коля сказал, что в его группе по изучению английского языка 18 мальчиков и девочек, и мальчиков на три меньше, чем девочек. Правильно ли сосчитал Коля?

723. Теплоход проходит за 4 ч по течению такое же расстояние, какое за 5 часов против течения. Найдите скорость течения, если она меньше собственной скорости теплохода на 40 км/ч.

724. В кошельке лежало 92 рубля мелочи — пятирублёвые и двухрублёвые монеты. Сколько пятирублёвых и сколько двухрублёвых монет было в кошельке, если всего было 28 монет?

725. В десяти лодках может разместиться 44 человека. Часть этих лодок пятиместные, а остальные — трёхместные. Сколько пятиместных лодок?

726. Дачник проделал путь длиной 46 км. Он шёл 2 ч пешком и 3 ч ехал на велосипеде. На велосипеде он двигался в 2,4 раза быстрее, чем пешком. С какой скоростью дачник шёл и с какой скоростью он ехал на велосипеде?

727. Найти все двузначные числа, которые в два раза больше суммы своих цифр.

728. Периметр прямоугольника равен 66 см. Его длина в 10 раз больше ширины. Найдите стороны прямоугольника.

729. Три гантели и две гири весят 47 кг. Найдите, сколько весит гиря и сколько — гантель, если известно, что три гири тяжелее шести гантелей на 18 кг.

730. В спортзале в двух ящиках было 120 мячей. В первый ящик положили ещё 40% от числа мячей, которые там были, а из второго вынули 10% того, что было. После этого в первом ящике стало на 30 мячей больше, чем во втором. Сколько мячей было в каждом ящике первоначально?

П

731. Представьте в виде квадрата двучлена:
а) $4x^2 - 12x + 9$; б) $1 - 14a + 49a^2$; в) $25 + 4c^2 + 20c$.

732. Найдите значение выражения:
а) $(20 - 3)(20 + 3)$; в) $102 \cdot 98$; д) $4\frac{3}{4} \cdot 5\frac{1}{4}$;
б) $\left(10 + \frac{1}{2}\right)\left(10 - \frac{1}{2}\right)$; г) $8{,}6 \cdot 7{,}4$; е) $2{,}7 \cdot 3{,}3$.

Контрольные вопросы и задания

1. Что является решением уравнения с двумя переменными?
2. Можно ли, не решая систему линейных уравнений, сказать, сколько она имеет решений?
3. Какие существуют способы решения систем уравнений?

33. Уравнения с параметром

Каждое из уравнений

$$7x = 5,\ -3x = 5,\ 0x = 5$$

имеет вид $ax = 5$, где a — некоторое число.

Первое уравнение, в котором $a = 7$, имеет корень $\frac{5}{7}$. Второе уравнение, в котором $a = -3$, имеет корень $\frac{5}{-3}$. Третье уравнение, в котором $a = 0$, не имеет корней.

Вообще уравнение вида $ax = 5$ при $a \neq 0$ имеет единственный корень $\frac{5}{a}$, а при $a = 0$ не имеет корней.

Рассматривая уравнение $ax = 5$, мы придавали буквам a и x различный смысл, считая, что буквой x обозначено неизвестное число, а буквой a — некоторое фиксированное число. В таких случаях говорят, что a является *параметром*, а $ax = 5$ — уравнение с параметром.

Для уравнения $ax = 5$ мы выяснили, что при любом значении параметра a, не равном нулю, корень уравнения можно найти по формуле $x = \frac{5}{a}$, а при $a = 0$ это уравнение корней не имеет. В таких случаях говорят, что мы *решили уравнение с параметром*.

Вообще решить уравнение с параметром — это значит показать, каким образом для любого значения параметра можно найти соответствующее множество корней уравнения, если корни существуют, или установить, что при этом значении параметра корней нет.

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Решим уравнение

$$bx - 3x = b^3 - 3b^2 + 4b - 12$$

с параметром b.

▶ Вынесем в левой части уравнения множитель x за скобки. Получим

$$(b - 3)x = b^3 - 3b^2 + 4b - 12.$$

Мы имеем линейное уравнение, число корней которого зависит от того, отличен ли от нуля коэффициент при x или равен нулю.

Если $b - 3 \neq 0$, т. е. $b \neq 3$, то уравнение имеет единственный корень

$$x = \frac{b^3 - 3b^2 + 4b - 12}{b - 3}.$$

Разложив числитель дроби на множители, получим, что

$$x = \frac{(b-3)(b^2+4)}{b-3}.$$

Отсюда

$$x = b^2 + 4.$$

Если $b-3=0$, т. е. $b=3$, то уравнение принимает вид $0x=0$. В этом случае любое число является корнем уравнения.

Итак, мы нашли, что при $b \neq 3$ уравнение имеет единственный корень b^2+4, а при $b=3$ любое число является корнем уравнения. ◁

П р и м е р 2. Решим уравнение

$$ax^2 + (a^2-1)x + (a-1)^2 = 0$$

с параметром a.

▶ Данное уравнение при $a=0$ является линейным, а при $a \neq 0$ — квадратным. Рассмотрим каждый из этих случаев.

Если $a=0$, то данное уравнение обращается в линейное уравнение $-x+1=0$, которое имеет единственный корень $x=1$.

Пусть $a \neq 0$. Тогда мы имеем квадратное уравнение

$$ax^2 + (a^2-1)x - (a-1)^2 = 0.$$

Найдём его дискриминант:

$$D = (a^2-1)^2 - 4a(a-1)^2 = (a-1)^2((a+1)^2 - 4a) = (a-1)^4.$$

Так как $D \geqslant 0$ при любом значении a, то это уравнение при любом a имеет корни.

Если $a=1$, то $D=0$, и это уравнение имеет единственный корень. Найти его можно, подставив в уравнение вместо a число 1. Получим $x^2=0$. Отсюда $x=0$.

Если $a \neq 1$, то $D > 0$, и уравнение имеет два корня:

$$x_1 = \frac{1-a^2-(a-1)^2}{2a} = \frac{-2a^2+2a}{2a} = 1-a,$$

$$x_2 = \frac{1-a^2+(a-1)^2}{2a} = \frac{-2a+2}{2a} = \frac{1-a}{a}.$$

Итак, мы нашли, что данное уравнение имеет корень 1 при $a=0$, корень 0 при $a=1$, корни $1-a$ и $\frac{1-a}{a}$ при $a \neq 0$ и $a \neq 1$. ◁

Упражнения

733. Какие случаи надо выделить при решении уравнения $bx + 2x = 3b + 6$ с параметром b? Найдите корни уравнения в каждом из этих случаев.

734. Решите относительно y уравнение:

а) $py - p - 1 = 0$;
б) $py - 3y - 4p + 12 = 0$.

735. Решите уравнение с параметром a:

$$ax - 2x = a^3 - 2a^2 - 9a + 18.$$

736 Решите уравнение с параметром b:

$$2x^2 - 4x + b = 0.$$

737. Решите относительно x уравнение:

а) $x^2 - 5ax + 4a^2 = 0$; б) $3x^2 - 10ax + 3a^2 = 0$.

738. При каких значениях параметра t имеет единственный корень уравнение:

а) $3x^2 + tx + 3 = 0$; в) $tx^2 - 6x + 1 = 0$;
б) $2x^2 - tx + 50 = 0$; г) $tx^2 + x - 2 = 0$?

739. Выясните, при каких значениях параметра a сумма квадратов корней уравнения

$$x^2 - ax + a - 3 = 0$$

принимает наименьшее значение, и найдите это значение.

740. Решите относительно x уравнение

$$(a - 1)x^2 + 2ax + a + 1 = 0.$$

741. Решите уравнение с параметром k:

$$x^2 - (4k + 1)x + 2(2k^2 + k - 3) = 0.$$

742. Выясните, при каких значениях параметра b равна 7 сумма корней уравнения

$$y^2 - (2b - 1)y + b^2 - b - 2 = 0.$$

Дополнительные упражнения к главе III

К параграфу 7

743. Решите уравнение:

а) $(x + 2)^2 + (x - 3)^2 = 13$;
б) $(3x - 5)^2 - (2x + 1)^2 = 24$;
в) $(x - 4)(x^2 + 4x + 16) + 28 = x^2(x - 25)$;
г) $(2x + 1)(4x^2 - 2x + 1) - 1 = 1{,}6x^2(5x - 2)$.

744. Решите относительно x уравнение:

а) $x^2 = a$; в) $x^2 + 4b = 0$;
б) $x^2 = a^2$; г) $x^2 + 9b^2 = 0$.

745. Докажите, что при любом значении переменной значение выражения положительно:

а) $a^2 + 4a + 11$; в) $m^2 - 4m + 51$; д) $2b^2 - 8b + 20$;

б) $\frac{x^2 - 2x + 7}{19}$; г) $\frac{p^2 - 6p + 18}{p^2 + 1}$; е) $\frac{2c^2 + 3}{c^2 + 12c + 40}$.

746. Используя выделение квадрата двучлена:

а) докажите, что наименьшим значением выражения $x^2 - 8x + 27$ является число 11;

б) найдите наименьшее значение выражения $a^2 - 4a + 20$.

747. Решите уравнение:

а) $4x^2 + 7x + 3 = 0$; д) $8x^2 + x - 75 = 0$;
б) $x^2 + x - 56 = 0$; е) $3x^2 - 11x - 14 = 0$;
в) $x^2 - x - 56 = 0$; ж) $3x^2 + 11x - 34 = 0$;
г) $5x^2 - 18x + 16 = 0$; з) $x^2 - x - 1 = 0$.

748. При каких значениях x верно равенство:

а) $(5x + 3)^2 = 5(x + 3)$; д) $(5x + 3)^2 = 5x + 3$;
б) $(3x + 10)^2 = 3(x + 10)$; е) $(5x + 3)^2 = (3x + 5)^2$;
в) $(3x - 8)^2 = 3x^2 - 8x$; ж) $(4x + 5)^2 = 4(x + 5)^2$;
г) $(4x + 5)^2 = 5x^2 + 4x$; з) $(2x + 10)^2 = 4(x + 5)^2$?

749. Решите уравнение и выполните проверку:

а) $x^2 - 2x - 5 = 0$; г) $5y^2 - 7y + 1 = 0$;
б) $x^2 + 4x + 1 = 0$; д) $2y^2 + 11y + 10 = 0$;
в) $3y^2 - 4y - 2 = 0$; е) $4x^2 - 9x - 2 = 0$.

750. Найдите приближённые значения корней уравнения в виде десятичных дробей с точностью до 0,01:

а) $x^2 - 2x - 2 = 0$; в) $3x^2 - 7x + 3 = 0$;
б) $x^2 + 5x + 3 = 0$; г) $5x^2 + 31x + 20 = 0$.

751. Выясните, при каких значениях переменной:

а) трёхчлен $a^2 + 7a + 6$ и двучлен $a + 1$ принимают равные значения;

б) трёхчлены $3x^2 - x + 1$ и $2x^2 + 5x - 4$ принимают равные значения.

Найдите эти значения.

752. При каком значении a один из корней уравнения $ax^2 - 3x - 5 = 0$ равен 1? Найдите, чему равен при этом значении a второй корень.

753. Найдите пять последовательных целых чисел, если известно, что сумма квадратов трёх первых чисел равна сумме квадратов двух последних.

754. Найдите три последовательных чётных числа, если известно, что сумма квадратов первых двух чисел равна квадрату третьего числа.

755. Квадрат суммы двух последовательных натуральных чисел больше суммы их квадратов на 112. Найдите эти числа.

756. Периметр прямоугольника равен 28 см, а сумма площадей квадратов, построенных на двух смежных сторонах прямоугольника, равна 116 см^2. Найдите стороны прямоугольника.

757. Фотографическая карточка размером 12×18 см наклеена на лист так, что получилась рамка одинаковой ширины. Определите ширину рамки, если известно, что фотокарточка вместе с рамкой занимает площадь 280 см^2.

758. Цветочная клумба, имеющая форму прямоугольника, окружена дерновым бордюром, ширина которого всюду одинакова. Клумба вместе с бордюром образует прямоугольник, длина которого 4,5 м, а ширина 2,5 м. Найдите ширину бордюра, если известно, что его площадь равна 3,25 м^2.

759. *Старинная задача.* Некто купил лошадь и спустя некоторое время продал её за 24 пистоля. При этом он потерял столько процентов, сколько стоила сама лошадь. Спрашивается: за какую сумму он её купил?

760. Дно ящика — прямоугольник, ширина которого в 2 раза меньше его длины. Высота ящика 0,5 м. Найдите объём ящика, если известно, что площадь его дна на 1,08 м^2 меньше площади боковых стенок.

761. Имеется лист картона прямоугольной формы, длина которого в 1,5 раза больше его ширины. Из него можно изготовить открытую коробку объёмом 6080 см^3, вырезав по углам картона квадраты со стороной 8 см. Найдите размеры — длину и ширину листа картона.

762. Разность кубов двух последовательных натуральных чисел равна 919. Найдите эти числа.

763. Разность кубов двух последовательных нечётных натуральных чисел равна 866. Найдите эти числа.

764. Решите уравнение и выполните проверку по теореме, обратной теореме Виета:

а) $x^2 - 5\sqrt{2}x + 12 = 0$; в) $y^2 - 6y + 7 = 0$;

б) $x^2 + 2\sqrt{3}x - 72 = 0$; г) $p^2 - 10p + 7 = 0$.

765. Найдите b и решите уравнение:

а) $2x^2 + bx - 10 = 0$, если оно имеет корень 5;
б) $3x^2 + bx + 24 = 0$, если оно имеет корень 3;
в) $(b - 1)x^2 - (b + 1)x = 72$, если оно имеет корень 3;
г) $(b - 5)x^2 - (b - 2)x + b = 0$, если оно имеет корень $\frac{1}{2}$.

766. Докажите, что уравнение $7x^2 + bx - 23 = 0$ при любых значениях b имеет один положительный и один отрицательный корень.

767. Докажите, что уравнение $12x^2 + 70x + a^2 + 1 = 0$ при любых значениях a не имеет положительных корней.

768. Докажите, что если сумма коэффициентов квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ равна нулю, то один из корней уравнения равен 1. Используя это свойство, решите уравнение:

а) $2x^2 - 41x + 39 = 0$; б) $17x^2 + 243x - 260 = 0$.

769. Разность корней уравнения $3x^2 + bx + 10 = 0$ равна $4\frac{1}{3}$. Найдите b.

770. Один из корней уравнения $5x^2 - 12x + c = 0$ в 3 раза больше другого. Найдите c.

771. Частное корней уравнения $4x^2 + bx - 27 = 0$ равно -3. Найдите b.

772. Квадрат разности корней уравнения $x^2 + px + 90 = 0$ равен 81. Найдите p.

773. Разность квадратов корней уравнения $2x^2 - 5x + c = 0$ равна 0,25. Найдите c.

774. Один из корней уравнения $4x^2 + bx + c = 0$ равен 0,5, а другой — свободному члену. Найдите b и c.

775. Известно, что коэффициенты b и c уравнения $x^2 + bx + c = 0$, где $c \neq 0$, являются его корнями. Найдите b и c.

776. Выразите через p и q сумму квадратов корней уравнения $x^2 + px + q = 0$.

777. Известно, что сумма квадратов корней уравнения $x^2 - 15x + q = 0$ равна 153. Найдите q.

778. Квадрат разности корней уравнения $x^2 + px + 405 = 0$ равен 144. Найдите p.

779. Известно, что x_1 и x_2 — корни уравнения $3x^2 + 2x + k = 0$, причём $2x_1 = -3x_2$. Найдите k.

780. Известно, что x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 - 8x + k = 0$, причём $3x_1 + 4x_2 = 29$. Найдите k.

781. Зная, что уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет корни x_1 и x_2, составьте квадратное уравнение, имеющее корни:

а) $3x_1$ и $3x_2$; б) $x_1 + 2$ и $x_2 + 2$.

782. Известно, что уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет корни x_1 и x_2. Составьте квадратное уравнение, корнями которого являются числа $\frac{x_1}{x_2}$ и $\frac{x_2}{x_1}$.

К параграфу 8

783. Найдите корни квадратного трёхчлена:

а) $\frac{1}{6}x^2 + \frac{2}{3}x - 2$; в) $-x^2 + 4x - 2\frac{2}{4}$;

б) $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}$; г) $0,4x^2 - x + 0,2$.

784. Составьте какой-нибудь квадратный трёхчлен, корнями которого являются числа:

а) -7 и 2; б) $3 - \sqrt{2}$ и $3 + \sqrt{2}$.

785. При каком значении p выражение $2px^2 - 2x - 2p - 3$ становится квадратным трёхчленом, одним из корней которого является число нуль? Найдите другой корень.

786. Докажите, что квадратный трёхчлен имеет корни, и найдите их сумму и произведение:

а) $2x^2 - 10x + 3$; в) $0,5x^2 + 6x + 1$;

б) $\frac{1}{3}x^2 + 7x - 2$; г) $-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}$.

787. Найдите трёхчлен вида $x^2 + px + q$, корнями которого являются не равные нулю числа p и q.

788. Пусть a и b — корни трёхчлена $x^2 + px + q$, причём $ab = 4$ и $\sqrt{a} + \sqrt{b} = 3$. Чему равно a и чему равно b?

789. Выделите квадрат двучлена из квадратного трёхчлена:

а) $2x^2 - 3x + 7$; в) $5x^2 - 3x$;

б) $-3x^2 + 4x - 1$; г) $-4x^2 + 8x$.

790. Докажите, что квадратный трёхчлен:

а) $-x^2 + 20x - 103$ не принимает положительных значений;

б) $x^2 - 16x + 65$ не принимает отрицательных значений.

791. Найдите наибольшее или наименьшее значение квадратного трёхчлена:

а) $3x^2 - 4x + 5$; б) $-3x^2 + 12x$.

792. Сумма положительных чисел a и b равна 40. При каких значениях a и b их произведение будет наибольшим?

793. Разложите на множители квадратный трёхчлен:

а) $0{,}8x^2 - 19{,}8x - 5$; в) $x^2 + x\sqrt{2} - 2$;

б) $3{,}5 - 3\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}x^2$; г) $x^2 - x\sqrt{6} + 1$.

794. Зная, что коэффициенты квадратного трёхчлена $(n - 3)x^2 + (n + 1)x + 9 - 2n$ — натуральные числа, найдите этот трёхчлен.

795. Зная, что m — целое число, найдите целые корни трёхчлена $mx^2 + (m - 3)x - 3$.

796. Сократите дробь:

а) $\dfrac{2m^2 - 8}{m^2 + 6m + 8}$; б) $\dfrac{2m^2 - 5m + 2}{mn - 2n - 3m + 6}$.

797. Выполните действие:

а) $\dfrac{x+4}{x-1} - \dfrac{37x - 12}{4x^2 - 3x - 1}$; г) $\dfrac{x^2 + 11x + 30}{3x - 15} : \dfrac{x+5}{x-5}$;

б) $\dfrac{x-1}{x+2} - \dfrac{1-x}{x^2 + 3x + 2}$; д) $\dfrac{2x^2 - 7}{x^2 - 3x - 4} - \dfrac{x+1}{x-4}$;

в) $\dfrac{7x - x^2}{x+4} \cdot \dfrac{x^2 - x - 20}{7 - x}$; е) $\dfrac{2 + x - x^2}{2 - 5x + 3x^2} + \dfrac{10x}{3x - 2}$.

К параграфу 9

798. Решите уравнение:

а) $\dfrac{x+1}{6} + \dfrac{20}{x-1} = 4$; д) $\dfrac{3}{1-x} + \dfrac{1}{1+x} = \dfrac{28}{1-x^2}$;

б) $\dfrac{x+15}{4} - \dfrac{21}{x+2} = 2$; е) $\dfrac{5}{x-2} - \dfrac{3}{x+2} = \dfrac{20}{x^2-4}$;

в) $\dfrac{12}{x-1} - \dfrac{8}{x+1} = 1$; ж) $\dfrac{x+2}{x+1} + \dfrac{x+3}{x-2} = \dfrac{29}{(x+1)(x-2)}$;

г) $\dfrac{16}{x-3} + \dfrac{30}{1-x} = 3$; з) $\dfrac{x+2}{x+3} - \dfrac{x+1}{x-1} = \dfrac{4}{(x+3)(x-1)}$.

799. Найдите координаты точек пересечения с осью x графика функции, заданной формулой:

а) $y = \dfrac{2x - 5}{x + 3}$; в) $y = \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}$;

б) $y = \dfrac{(x-4)(3x-15)}{x-9}$; г) $y = \dfrac{x^3 - 7x^2 + 12x}{x - 3}$.

800. При каком значении x:

а) значение функции $y=\frac{5x-7}{x^2+1}$ равно -6; 0; 0,8; 0,56;

б) значение функции $y=\frac{x^2-2x+6}{x+4}$ равно 1,5; 3; 7?

801. Найдите координаты точек пересечения графиков функций:

а) $y = 2x + 3$ и $y=\frac{34}{x-5}$;

б) $y=\frac{x^2-5x}{x+3}$ и $y = 2x$.

802. Решите графически уравнение:

а) $\frac{6}{|x|}=1{,}5x-2$; б) $\frac{8}{|x|}=x^2$; в) $\frac{3}{|x|}=x+1$; г) $x^2=\frac{5}{|x|}$.

803. Найдите корни уравнения:

а) $\frac{x\sqrt{3}+\sqrt{2}}{x\sqrt{3}-\sqrt{2}}+\frac{x\sqrt{3}-\sqrt{2}}{x\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\frac{10x}{3x^2-2}$;

б) $\frac{1-y\sqrt{5}}{1+y\sqrt{5}}+\frac{1+y\sqrt{5}}{1-y\sqrt{5}}=\frac{9y}{1-5y^2}$.

804. Решите уравнение:

а) $\frac{2x+1}{2x-1}-\frac{3(2x-1)}{7(2x+1)}+\frac{8}{1-4x^2}=0$;

б) $\frac{y}{y^2-9}-\frac{1}{y^2+3y}+\frac{3}{6y+2y^2}=0$;

в) $\frac{2y-1}{14y^2+7y}+\frac{8}{12y^2-3}=\frac{2y+1}{6y^2-3y}$;

г) $\frac{3}{x^2-9}-\frac{1}{9-6x+x^2}=\frac{3}{2x^2+6x}$;

д) $\frac{9x+12}{x^3-64}-\frac{1}{x^2+4x+16}=\frac{1}{x-4}$;

е) $\frac{3}{8y^3+1}-\frac{1}{2y+1}=\frac{y+3}{4y^2-2y+1}$;

ж) $\frac{32}{x^3-2x^2-x+2}+\frac{1}{(x-1)(x-2)}=\frac{1}{x+1}$;

з) $\frac{1}{3(x-4)}+\frac{1}{2(x^2+3)}+\frac{1}{x^3-4x^2+3x-12}=0$.

805. Найдите значения переменной y, при которых:

а) сумма дробей $\frac{6}{y+1}$ и $\frac{y}{y-2}$ равна их произведению;

б) сумма дробей $\frac{2}{y-3}$ и $\frac{6}{y+3}$ равна их частному;

в) разность дробей $\frac{y+12}{y-4}$ и $\frac{y}{y+4}$ равна их произведению.

806. На перегоне в 600 км после прохождения $\frac{1}{4}$ пути поезд был задержан на 1 ч 30 мин. Чтобы прийти на конечную станцию вовремя, машинист увеличил скорость поезда на 15 км/ч. Сколько времени поезд был в пути?

807. Туристы совершили три перехода в 12,5 км, 18 км и 14 км, причём скорость на первом переходе была на 1 км/ч меньше скорости на втором переходе и на столько же больше скорости на третьем. На третий переход они затратили на 30 мин больше, чем на второй. Сколько времени заняли все переходы?

808. Автомобиль прошёл с некоторой постоянной скоростью путь от A до B длиной 240 км. Возвращаясь обратно, он прошёл половину пути с той же скоростью, а затем увеличил её на 10 км/ч. В результате на обратный путь было затрачено на $\frac{2}{5}$ ч меньше, чем на путь от A до B. С какой скоростью шёл автомобиль из A в B?

809. Расстояние от A до B, равное 400 км, поезд прошёл с некоторой постоянной скоростью; $\frac{2}{5}$ обратного пути из B в A он шёл с той же скоростью, а потом уменьшил скорость на 20 км/ч. Найдите скорость поезда на последнем участке, если на всю дорогу было затрачено 11 ч.

810. Турист проехал на моторной лодке вверх по реке 25 км, а обратно спустился на плоту. В лодке он плыл на 10 ч меньше, чем на плоту. Найдите скорость течения, если скорость лодки в стоячей воде 12 км/ч.

811. Моторная лодка прошла 35 км вверх по реке и на 18 км поднялась по её притоку, затратив на весь путь 8 ч. Скорость течения в реке на 1 км/ч меньше скорости течения в её притоке. Найдите скорость течения в реке, если скорость лодки в стоячей воде 10 км/ч.

812. Из пункта A отправили по течению плот. Вслед за ним через 5 ч 20 мин из того же пункта вышел катер и догнал плот, пройдя 20 км. Сколько километров в час проходил плот, если катер шёл быстрее его на 12 км/ч?

813. Рыболов отправился на лодке от пункта N вверх по реке. Проплыв 6 км, он бросил вёсла, и через 4 ч 30 мин после отправления из N течение снова отнесло его к пункту N. Зная, что скорость лодки в стоячей воде 90 м/мин, найдите скорость течения реки.

814. Через 2 ч 40 мин после отправления плота от пристани A вниз по течению реки навстречу ему от пристани B отошёл катер. Встреча произошла в 27 км от B. Найдите скорость плота, если скорость катера в стоячей воде 12 км/ч и расстояние от A до B равно 44 км.

815. Теплоход отправился от пристани A до пристани B, расстояние между которыми 225 км. Через 1,5 ч после отправления он был задержан на $\frac{1}{2}$ ч и, чтобы прийти в пункт назначения вовремя, увеличил скорость на 10 км/ч. Найдите первоначальную скорость теплохода.

816. Из города A в город B, расстояние между которыми 120 км, вышли одновременно два автомобиля. Первый из них ехал всё время с постоянной скоростью. Второй автомобиль первые $\frac{3}{4}$ ч ехал с той же скоростью, затем сделал остановку на 15 мин, после этого увеличил скорость на 5 км/ч и прибыл в город B вместе с первым автомобилем. Найдите скорость первого автомобиля.

817. Автобус проехал расстояние между пунктами A и B, равное 400 км, с некоторой постоянной скоростью. Возвращаясь обратно, он 2 ч ехал с той же скоростью, а затем увеличил скорость на 10 км/ч и возвратился в пункт A, затратив на обратный путь на 20 мин меньше, чем на путь из A в B. Сколько времени затратил автобус на обратный путь?

818. Мотоциклист ехал из одного города в другой 4 ч. На обратном пути первые 100 км он ехал с той же скоростью, а затем уменьшил её на 10 км/ч и поэтому на обратный путь затратил на 30 мин больше. Найдите расстояние между городами.

819. Из двух городов A и B выходят одновременно два автомобиля и встречаются через 5 ч. Скорость автомобиля, выходящего из A, на 10 км/ч меньше скорости другого автомобиля. Если бы первый автомобиль вышел из A на $4\frac{1}{2}$ ч раньше второго, то встреча произошла бы в 150 км от B. Найдите расстояние между городами A и B.

820. Расстояние от пристани M до пристани N по течению реки катер проходит за 6 ч. Однажды, не дойдя 40 км до пристани N, катер повернул назад и возвратился к пристани M, затратив на весь путь 9 ч. Найдите скорость катера в стоячей воде, если скорость течения реки равна 2 км/ч.

821. Мотоциклист проехал расстояние от пункта M до пункта N за 5 ч. На обратном пути он первые 36 км ехал с той же скоростью, а остальную часть пути — со скоростью, на 3 км/ч большей. С какой скоростью ехал мотоциклист первоначально, если на обратный путь он затратил на 15 мин меньше, чем на путь из пункта M в пункт N?

822. Отец и сын прошли 240 м, при этом отец сделал на 100 шагов меньше, чем сын. Найдите длину шага каждого из них, если шаг отца длиннее шага сына на 20 см.

823. Первая мастерская должна была сшить 160 костюмов, а вторая за тот же срок — на 25% меньше. Первая мастерская шила в день на 10 костюмов больше, чем вторая, и выполнила задание за 2 дня до намеченного срока. Сколько костюмов в день шила вторая мастерская, если ей для выполнения задания понадобилось дополнительно 2 дня?

824. Бригада рабочих должна была за определённый срок изготовить 768 пылесосов. Первые 5 дней бригада выполняла ежедневно установленную норму, а затем каждый день изготовляла на 6 пылесосов больше, чем намечалось, поэтому уже за день до срока было изготовлено 844 пылесоса. Сколько пылесосов в день должна была изготовлять бригада по плану?

825. Масса двух сплавов меди и олова равна 60 кг. Первый сплав содержит 6 кг меди, а второй — 3,6 кг меди. Найдите массу каждого сплава, если известно, что содержание меди в первом сплаве на 15% больше, чем во втором.

826. Сплав меди с цинком, содержащий 6 кг цинка, сплавили с 13 кг цинка. В результате содержание меди в сплаве понизилось на 26%. Какова была первоначальная масса сплава?

827. За 4 дня совместной работы двумя тракторами было вспахано $\frac{2}{3}$ поля. За сколько дней можно было бы вспахать всё поле каждым трактором, если первым его можно вспахать на 5 дней быстрее, чем вторым?

828. Два хлопкоуборочных комбайна могут собрать хлопок с поля на 9 дней быстрее, чем один первый комбайн, и на 4 дня быстрее, чем один второй. За сколько дней каждый комбайн может собрать весь хлопок?

829. Для наполнения бассейна через первую трубу потребуется на 9 ч больше времени, чем при наполнении через первую и вторую трубы, и на 7 ч меньше, чем через одну вторую трубу. За сколько часов наполнится бассейн через обе трубы?

830. Два слесаря получили заказ. Сначала 1 ч работал первый слесарь, затем 4 ч они работали вместе. В результате было выполнено 40% заказа. За сколько часов мог выполнить заказ каждый слесарь, если первому для этого понадобилось бы на 5 ч больше, чем второму?

831. При совместной работе двух копировальных машин можно снять ксерокопию с рукописи за 6 мин. Если сначала снять ксерокопию с половины рукописи одной машиной, а затем с оставшейся части — другой машиной, то вся работа будет закончена через 12,5 мин. За какое время можно снять ксерокопию с рукописи каждой машиной в отдельности?

К параграфу 10

832. При каких значениях m и b пара (m; 3) является решением системы уравнений

$$\begin{cases} -3x + y = 9, \\ 2x - by = -10? \end{cases}$$

833. Сколько решений имеет система уравнений:

а) $\begin{cases} 3x - 6y = 5, \\ 2x + 3y = 7; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 0{,}5x + 2y = 0{,}8, \\ 2{,}5x + 10y = 6; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 4x - 3y = 12, \\ \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}y = 1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x - 0{,}3y = 1, \\ 4x + 0{,}6y = 1? \end{cases}$

834. Укажите какие-либо значения a, b и c, при которых система уравнений

$$\begin{cases} -8x + 9y = 10, \\ ax + by = c \end{cases}$$

имеет единственное решение.

835. При каком значении c система уравнений

$$\begin{cases} 5x - 2y = 3, \\ 10x - 4y = c \end{cases}$$

а) имеет бесконечное множество решений; б) не имеет решений?

836. Задайте формулой линейную функцию, график которой проходит через точки:

а) (−1; 3) и (2; −2); в) (0; 5) и (4; 0);

б) (4; 1) и (−3; −1); г) (−3; 0) и (0; −6).

837. График какой линейной функции проходит через точку (−2; 5) и точку пересечения прямых

$$3x - 2y = 16 \quad \text{и} \quad 4x + 3y = -7?$$

Глава IV НЕРАВЕНСТВА

В этой главе вы познакомитесь со свойствами числовых неравенств, научитесь применять их для сравнения значений числовых выражений, при доказательстве неравенств. Основное содержание главы составляет решение неравенств, сводящихся к виду $ax + b > 0$ или $ax + b < 0$, и их систем. Неравенства такого вида решают аналогично тому, как решают уравнения вида $ax + b = 0$, но при этом приходится учитывать знак коэффициента a. При решении различных задач вам поможет геометрическая интерпретация множеств решений неравенств.

§ 11 ЧИСЛОВЫЕ НЕРАВЕНСТВА И ИХ СВОЙСТВА

34. Числовые неравенства

Мы можем сравнить любые числа a и b и результат сравнения записать в виде равенства или неравенства, используя для этого знаки $=$, $<$, $>$. Для произвольных чисел a и b выполняется одно и только одно из соотношений: $a = b$, $a < b$, $a > b$.

Рассмотрим примеры.

1. Сравним обыкновенные дроби $\frac{5}{8}$ и $\frac{4}{7}$. Для этого приведём их к общему знаменателю:

$$\frac{5}{8} = \frac{35}{56}; \quad \frac{4}{7} = \frac{32}{56}.$$

Так как $35 > 32$, то $\frac{5}{8} > \frac{4}{7}$.

2. Сравним десятичные дроби 3,6748 и 3,675. Цифры в разрядах единиц, десятых и сотых совпадают, а в разряде тысячных в первой дроби стоит цифра 4, а во второй — цифра 5. Так как $4 < 5$, то $3{,}6748 < 3{,}675$.

3. Сравним обыкновенную дробь $\frac{9}{20}$ и десятичную дробь 0,45. Обратив дробь $\frac{9}{20}$ в десятичную, получим, что $\frac{9}{20} = 0{,}45$.

4. Сравним отрицательные числа -15 и -23. Модуль первого числа меньше модуля второго. Значит, первое число больше второго, т. е. $-15 > -23$.

В зависимости от конкретного вида чисел мы использовали тот или иной способ сравнения. Однако удобно иметь такой способ сравнения чисел, который охватывает все случаи. Он заключается в том, что составляют разность чисел и выясняют, является ли она положительным числом, отрицательным числом или нулём. Этот способ сравнения чисел основан на следующем определении:

Определение. Число a больше числа b, если разность $a - b$ — положительное число; число a меньше числа b, если разность $a - b$ — отрицательное число.

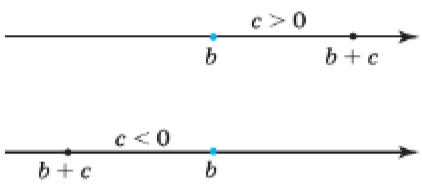


Рис. 32

Заметим, что если разность $a - b$ равна нулю, то числа a и b равны.

На координатной прямой большее число изображается точкой, лежащей правее, а меньшее — точкой, лежащей левее. Действительно, пусть a и b — некоторые числа. Обозначим разность $a - b$ буквой c. Так как $a - b = c$, то $a = b + c$.

Если c — положительное число, то точка с координатой $b + c$ лежит правее точки с координатой b, а если c — отрицательное число, то левее (рис. 32).

Значит, если $a > b$, то точка с координатой a лежит правее точки с координатой b, а если $a < b$ — левее.

Покажем, как приведённое определение используется при решении задач.

Пример 1. Докажем, что при любых значениях переменной a верно неравенство

$$(a-3)(a-5) < (a-4)^2.$$

▶ Составим разность левой и правой частей неравенства и преобразуем её:

$$(a-3)(a-5) - (a-4)^2 =$$
$$= a^2 - 3a - 5a + 15 - a^2 + 8a - 16 = -1.$$

При любом a рассматриваемая разность отрицательна и, следовательно, верно неравенство $(a-3)(a-5) < (a-4)^2$. ◁

Пример 2. Пусть a и b — положительные числа. Число $\frac{a+b}{2}$ называется *средним арифметическим чисел a и b*, число $\sqrt{ab}$ — *средним геометрическим*, число $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ — *средним гармоническим*.

Докажем, что среднее арифметическое, среднее геометрическое и среднее гармоническое положительных чисел a и b связаны соотношениями:

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leqslant \sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}.$$

▶ Докажем сначала, что $\sqrt{ab} \geqslant \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$.

Преобразуем разность левой и правой частей этого неравенства:

$$\sqrt{ab} - \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = \sqrt{ab} - \frac{2ab}{a+b} = \frac{a\sqrt{ab}+b\sqrt{ab}-2ab}{a+b} =$$

$$= \frac{\sqrt{ab}(a+b-2\sqrt{ab})}{a+b} = \frac{\sqrt{ab}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{a+b}.$$

При $a > 0$ и $b > 0$ рассматриваемая разность неотрицательна и, следовательно, верно неравенство

$$\sqrt{ab} \geqslant \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}.$$

Теперь докажем неравенство $\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}$. Для этого преобразуем разность

$$\sqrt{ab} - \frac{a+b}{2} = \frac{2\sqrt{ab}-a-b}{2} = -\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}.$$

При $a > 0$ и $b > 0$ рассматриваемая разность либо отрицательна, либо равна нулю и, значит, верно неравенство

$$\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}.$$

Итак, мы доказали, что если $a > 0$ и $b > 0$, то

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leqslant \sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}.$$ ◁

Упражнения

838. Сравните числа a и b, если:
а) $a - b = -0{,}001$; б) $a - b = 0$; в) $a - b = 4{,}3$.

839. Известно, что $a < b$. Может ли разность $a - b$ выражаться числом 3,72? −5? 0?

840. Даны выражения

$$3a(a + 6) \text{ и } (3a + 6)(a + 4).$$

Сравните их значения при $a = -5$; 0; 40. Докажите, что при любом a значение первого выражения меньше значения второго.

841. Даны выражения

$$4b(b + 1) \text{ и } (2b + 7)(2b - 8).$$

Сравните их значения при $b = -3$; −2; 10. Можно ли утверждать, что при любом значении b значение первого выражения больше, чем значение второго?

842. Докажите, что при любом значении переменной верно неравенство:
а) $3(a + 1) + a < 4(2 + a)$;
б) $(7p - 1)(7p + 1) < 49p^2$;
в) $(a - 2)^2 > a(a - 4)$;
г) $(2a + 3)(2a + 1) > 4a(a + 2)$.

843. Докажите неравенство:
а) $2b^2 - 6b + 1 > 2b(b - 3)$;
б) $(c + 2)(c + 6) < (c + 3)(c + 5)$;
в) $p(p + 7) > 7p - 1$;
г) $8y(3y - 10) < (5y - 8)^2$.

844. Верно ли при любом x неравенство:
а) $4x(x + 0{,}25) > (2x + 3)(2x - 3)$;
б) $(5x - 1)(5x + 1) < 25x^2 + 2$;
в) $(3x + 8)^2 > 3x(x + 16)$;
г) $(7 + 2x)(7 - 2x) < 49 - x(4x + 1)$?

845. Докажите неравенство:
а) $a(a + b) \geqslant ab$;
б) $m^2 - mn + n^2 \geqslant mn$;
в) $10a^2 - 5a + 1 \geqslant a^2 + a$;
г) $2bc \leqslant b^2 + c^2$;
д) $a(a - b) \geqslant b(a - b)$;
е) $a^2 - a \leqslant 50a^2 - 15a + 1$.

846. *(Для работы в парах.)* Увеличится или уменьшится дробь $\frac{a}{b}$, где a и b — натуральные числа, если к её числителю и знаменателю прибавить по 1?

1) Рассмотрите на примерах, как изменяется дробь $\frac{a}{b}$. (Одному учащемуся рекомендуем взять дроби, у которых числитель меньше знаменателя, а другому — дроби, у которых числитель больше знаменателя.)
2) Обсудите друг с другом ваши наблюдения и выскажите гипотезу для каждого случая.
3) Проведите доказательство: один — для случая $a < b$, а другой — для случая $a > b$.
4) Проверьте друг у друга правильность рассуждений.

847. Докажите, что при $a > 0$ верно неравенство

$$\frac{a+2}{a} - 2 \geqslant 2 - \frac{a+2}{2}.$$

848. Докажите, что сумма любого положительного числа и числа, ему обратного, не меньше чем 2.

849. Докажите неравенство:

а) $\frac{c^2+1}{2} \geqslant c$; б) $\frac{c}{c^2+1} \leqslant \frac{1}{2}$.

850. Используя выделение квадрата двучлена, докажите неравенство:
а) $a^2 - 6a + 14 > 0$; б) $b^2 + 70 > 16b$.

851. Выберите из данных неравенств такое, которое не является верным при любом значении a:
а) $a^2 > 2a - 3$; в) $4a - 4 < a^2$;
б) $a^2 + 6 > 4a$; г) $8a - 70 < a^2$.

852. *(Для работы в парах.)* Докажите, что если a и b — положительные числа и $a^2 > b^2$, то $a > b$. Пользуясь этим свойством, сравните числа:

а) $\sqrt{6} + \sqrt{3}$ и $\sqrt{7} + \sqrt{2}$; в) $\sqrt{5} - 2$ и $\sqrt{6} - \sqrt{3}$;

б) $\sqrt{3} + 2$ и $\sqrt{6} + 1$; г) $\sqrt{10} - \sqrt{7}$ и $\sqrt{11} - \sqrt{6}$.

1) Проведите доказательство приведённого утверждения.
2) Распределите, кто выполняет задания а) и в), а кто — задания б) и г), и выполните их.
3) Проверьте друг у друга, правильно ли выполнено сравнение выражений. Исправьте ошибки, если они допущены.

853. Докажите, что при $a \geqslant 0$ и $b \geqslant 0$ верно неравенство

$$\frac{a+b}{2} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

854. Что больше: $a^3 + b^3$ или $ab(a + b)$, если a и b — неравные положительные числа?

855. К каждому из чисел 0, 1, 2, 3 прибавили одно и то же число k. Сравните произведение крайних членов получившейся последовательности чисел с произведением средних её членов.

856. Одноклассники Коля и Миша вышли одновременно из посёлка на станцию. Коля шёл со скоростью 5 км/ч, а Миша первую половину пути шёл со скоростью, на 0,5 км/ч большей, чем Коля, а вторую половину пути — со скоростью, на 0,5 км/ч меньшей, чем Коля. Кто из них первым пришёл на станцию?

П

857. Найдите значение дроби $\frac{x^2 - 6x + 3}{x + 2}$ при $x = -\frac{1}{3}$.

858. Сократите дробь:

а) $\frac{x^2 - 10x + 25}{35 - 7x}$; б) $\frac{4x^2 - 12x + 9}{(3 - 2x)^2}$.

859. Решите уравнение:

а) $\frac{5}{x} = 2 - \frac{3}{x - 2}$; б) $\frac{3}{2x - 1} = 5x - 9$.

35. Свойства числовых неравенств

Рассмотрим некоторые свойства числовых неравенств.

ТЕОРЕМА 1

Если $a > b$, то $b < a$; если $a < b$, то $b > a$.

● Действительно, если разность $a - b$ — положительное число, то разность $b - a$ — отрицательное число, и наоборот. ○

ТЕОРЕМА 2

Если $a < b$ и $b < c$, то $a < c$.

● Докажем, что разность $a - c$ — отрицательное число. Прибавим к этой разности числа b и $-b$ и сгруппируем слагаемые:

$$a - c = a - c + b - b = (a - b) + (b - c).$$

По условию $a < b$ и $b < c$. Поэтому слагаемые $a - b$ и $b - c$ — отрицательные числа. Значит, и их сумма является отрицательным числом. Следовательно, $a < c$. ○

Аналогично доказывается, что если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$.

Геометрическая иллюстрация этих свойств дана на рисунке 33.

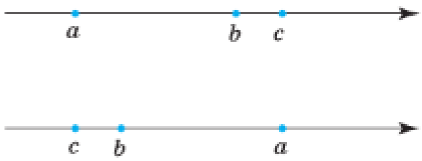


Рис. 33

ТЕОРЕМА 3

Если $a < b$ и c — любое число, то $a + c < b + c$.

● Преобразуем разность $(a + c) - (b + c)$:

$$(a + c) - (b + c) = a - b.$$

По условию $a < b$, поэтому $a - b$ — отрицательное число. Значит, и разность $(a + b) - (b + c)$ отрицательна. Следовательно, $a + c < b + c$. ○

Итак,

> если к обеим частям верного неравенства прибавить одно и то же число, то получится верное неравенство.

ТЕОРЕМА 4

Если $a < b$ и c — положительное число, то $ac < bc$. Если $a < b$ и c — отрицательное число, то $ac > bc$.

● Представим разность $ac - bc$ в виде произведения:

$$ac - bc = c(a - b).$$

АРХИМЕД (287—212 гг. до н. э.) — древнегреческий математик, физик и механик. Разработал новые математические методы, в частности методы вычисления площадей криволинейных фигур и объёмов тел. Дал образцы применения математики к задачам естествознания и техники.

Так как $a < b$, то $a - b$ — отрицательное число. Если $c > 0$, то произведение $c(a - b)$ отрицательно, и, следовательно, $ac < bc$. Если $c < 0$, то произведение $c(a - b)$ положительно, и, следовательно, $ac > bc$. ○

Так как деление можно заменить умножением на число, обратное делителю, то аналогичное свойство справедливо и для деления. Итак,

> если обе части верного неравенства умножить или разделить на одно и то же положительное число, то получится верное неравенство;
> если обе части верного неравенства умножить или разделить на одно и то же отрицательное число и изменить знак неравенства на противоположный, то получится верное неравенство.

СЛЕДСТВИЕ

Если a и b — положительные числа и $a < b$, то $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

● Разделим обе части неравенства $a < b$ на положительное число ab: $\frac{a}{ab} < \frac{b}{ab}$. Сократив дроби, получим $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$, т. е. $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$. ○

Приведём пример использования рассмотренных свойств неравенств.

Пример. Оценим периметр равностороннего треугольника со стороной a мм, если известно, что $54{,}2 < a < 54{,}3$.

▶ Периметр равностороннего треугольника со стороной a вычисляется по формуле $P = 3a$. Умножим на 3 обе части каждого из неравенств $54{,}2 < a$ и $a < 54{,}3$ и запишем результат в виде двойного неравенства:

$$54{,}2 \cdot 3 < 3a < 54{,}3 \cdot 3, \quad 162{,}6 < 3a < 162{,}9.$$

Значит, периметр P данного треугольника больше 162,6 мм, но меньше 162,9 мм. ◁

Упражнения

860. Отметьте на координатной прямой точки, имеющие координаты a, b, c, d и e, если $a < b$, $c > b$, $c < d$, $a > e$.

861. Пусть m, n, p и q — некоторые числа, причём $m > p$, $n > m$, $n < q$. Сравните, если это возможно, числа p и n, p и q, q и m. При сравнении чисел воспользуйтесь координатной прямой.

862. Известно, что $a < b$. Сравните, если возможно, a и $b + 1$, $a - 3$ и b, $a - 5$ и $b + 2$, $a + 4$ и $b - 1$.

863. Какими числами (положительными или отрицательными) являются a и b, если известно, что верны неравенства:

а) $a - 3 > b - 3$ и $b > 4$;
б) $a - 8 > b - 8$ и $a < -12$;
в) $7a > 7b$ и $b > \frac{1}{2}$;
г) $-2a > -2b$ и $b < -\frac{1}{3}$?

864. Используя свойства неравенств, запишите верное неравенство, которое получится, если:

а) к обеим частям неравенства $18 > -7$ прибавить число -5; число 2,7; число 7;
б) из обеих частей неравенства $5 > -3$ вычесть число 2; число 12; число -5;
в) обе части неравенства $-9 < 21$ умножить на 2; на -1; на $-\frac{1}{3}$;
г) обе части неравенства $15 > -6$ разделить на 3; на -3; на -1.

865. Известно, что $a < b$. Используя свойства неравенств, запишите верное неравенство, которое получится, если:

а) к обеим частям этого неравенства прибавить число 4;
б) из обеих частей этого неравенства вычесть число 5;
в) обе части этого неравенства умножить на 8;
г) обе части этого неравенства разделить на $\frac{1}{3}$;
д) обе части этого неравенства умножить на $-4{,}8$;
е) обе части этого неравенства разделить на -1.

866. Известно, что $a < b$. Поставьте вместо звёздочки знак $<$ или $>$ так, чтобы получилось верное неравенство:

а) $-12{,}7a * -12{,}7b$;
б) $\frac{a}{3} * \frac{b}{3}$;
в) $0{,}07a * 0{,}07b$;
г) $-\frac{a}{2} * -\frac{b}{2}$.

867. Каков знак числа a, если известно, что:

а) $5a < 2a$; б) $7a > 3a$; в) $-3a < 3a$; г) $-12a > -2a$?

868. Известно, что $c > d$. Объясните, на основании каких свойств можно утверждать, что верно неравенство:

а) $-7c < -7d$;
б) $\frac{c}{8} > \frac{d}{8}$;
в) $2c + 11 > 2d + 11$;
г) $0{,}01c - 0{,}7 > 0{,}01d - 0{,}7$;
д) $1 - c < 1 - d$;
е) $2 - \frac{c}{2} < 2 - \frac{d}{2}$.

869. Известно, что a, b, c и d — положительные числа, причём $a > b$, $d < b$, $c > a$. Расположите в порядке возрастания числа $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \frac{1}{d}$.

870. *(Для работы в парах.)* Известно, что a — положительное число.
а) Расположите в порядке возрастания числа:

$$2a,\ a\sqrt{3},\ -a,\ a(\sqrt{3}-\sqrt{2}),\ 3a.$$

б) Расположите в порядке убывания числа:

$$6a,\ -a\sqrt{5},\ a(\sqrt{7}-\sqrt{6}),\ -a,\ -5a-1.$$

1) Распределите, кто выполняет задание а), а кто — задание б), и выполните их.
2) Проверьте друг у друга, правильно ли выполнено задание. Исправьте допущенные ошибки.

871. Известно, что $3 < a < 4$. Оцените значение выражения:
а) $5a$; б) $-a$; в) $a + 2$; г) $5 - a$; д) $0{,}2a + 3$.

872. Зная, что $5 < x < 8$, оцените значение выражения:
а) $6x$; в) $x - 5$;
б) $-10x$; г) $3x + 2$.

873. Пользуясь тем, что $1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$, оцените значение выражения:
а) $\sqrt{2}+1$; б) $\sqrt{2}-1$; в) $2-\sqrt{2}$.

874. Пользуясь тем, что $2{,}2 < \sqrt{5} < 2{,}3$, оцените значение выражения:
а) $\sqrt{5}+2$;
б) $3-\sqrt{5}$.

875. Сравните числа:
а) $\sqrt{11} + 13$ и 15; в) $\sqrt{8} - \sqrt{3}$ и 2;
б) $\sqrt{84}$ и $7 + \sqrt{6}$; г) $\sqrt{47} - \sqrt{7}$ и 5.

876. Сравните числа:
а) $\sqrt{2} + 5$ и $2 + \sqrt{5}$; в) $\frac{2\sqrt{3}+23}{3}$ и 9;
б) $\sqrt{3} - 4$ и $1 - \sqrt{5}$; г) $\frac{1-\sqrt{15}}{12}$ и $-\frac{7}{8}$.

877. а) Оцените периметр квадрата, сторона которого равна a см, если $5{,}1 \leqslant a \leqslant 5{,}2$.
б) Оцените длину стороны квадрата, зная, что периметр квадрата равен P см, если $15{,}6 \leqslant P \leqslant 15{,}8$.

878. Оцените значение выражения $\frac{1}{y}$, если:

а) $5 < y < 8$; б) $0{,}125 < y < 0{,}25$.

П

879. Найдите значение многочлена $x^2 - 4x + 1$ при $x = \frac{1}{4}$; -3; $2 - \sqrt{3}$.

880. Решите уравнение:

а) $\frac{8x^2 - 3}{5} - \frac{5 - 9x^2}{4} = 2$;

б) $\frac{2}{x^2 - x + 1} - \frac{1}{x + 1} = \frac{2x - 1}{x^3 + 1}$;

в) $\frac{10}{x^2 - 4} - \frac{3}{2x - 4} = \frac{1}{2}$;

г) $x - \frac{x^2 - 17}{x - 3} = \frac{5}{x}$.

36. Сложение и умножение числовых неравенств

Рассмотрим теперь, как выполняется сложение и умножение числовых неравенств.

ТЕОРЕМА 5

Если $a < b$ и $c < d$, то $a + c < b + d$.

● Прибавив к обеим частям неравенства $a < b$ число c, получим $a + c < b + c$. Прибавив к обеим частям неравенства $c < d$ чис-ло b, получим $b + c < b + d$. Из неравенств $a + c < b + c$ и $b + c < b + d$ следует, что $a + c < b + d$. ○

Теорема справедлива и в случае почленного сложения более чем двух неравенств.

Таким образом,

> если почленно сложить верные неравенства одного знака, то получится верное неравенство.

ТЕОРЕМА 6

Если $a < b$ и $c < d$, где a, b, c и d — положительные числа, то $ac < bd$.

● Умножив обе части неравенства $a < b$ на положительное число c, получим $ac < bc$. Умножив обе части неравенства $c < d$ на положительное число b, получим $bc < bd$. Из неравенств $ac < bc$ и $bc < bd$ следует, что $ac < bd$. ○

Теорема справедлива и для почленного умножения более чем двух неравенств указанного вида.

Таким образом,

> если почленно перемножить верные неравенства одного знака, левые и правые части которых — положительные числа, то получится верное неравенство.

Заметим, что если в неравенствах $a < b$ и $c < d$ среди чисел a, b, c и d имеются отрицательные, то неравенство $ac < bd$ может оказаться неверным. Так, перемножив почленно верные неравенства $-1 < 2$ и $-3 < 1$, получим неравенство $3 < 2$, которое не является верным.

СЛЕДСТВИЕ

> Если числа a и b положительны и $a < b$, то $a^n < b^n$, где n — натуральное число.

● Перемножив почленно n верных неравенств $a < b$, в которых a и b — положительные числа, получим верное неравенство $a^n < b^n$. ○

Доказанные свойства используются для оценки суммы, разности, произведения и частного.

Пусть, например, известно, что $15 < x < 16$ и $2 < y < 3$. Требуется оценить сумму $x + y$, разность $x - y$, произведение xy и частное $\frac{x}{y}$.

1. Оценим сумму $x + y$.

Применив теорему о почленном сложении неравенств к неравенствам $15 < x$ и $2 < y$, а затем к неравенствам $x < 16$ и $y < 3$, получим $17 < x + y$ и $x + y < 19$. Результат можно записать в виде двойного неравенства $17 < x + y < 19$. Запись обычно ведут короче:

$$\begin{array}{c} 15 < x < 16 \\ 2 < y < 3 \\ \hline 17 < x + y < 19 \end{array}$$

2. Оценим разность $x - y$.

Для этого представим разность $x - y$ в виде суммы $x + (-y)$. Сначала оценим выражение $-y$. Так как $2 < y < 3$, то $-2 > -y > -3$, т. е. $-3 < -y < -2$. Применим теперь теорему о почленном сложении неравенств:

$$\begin{array}{c} 15 < x < 16 \\ \underline{-3 < -y < -2} \\ 12 < x - y < 14 \end{array}$$

3. Оценим произведение xy.

Так как каждое из чисел x и y заключено между положительными числами, то они также являются положительными числами. Применив теорему о почленном умножении неравенств, получим

$$\begin{array}{c} 15 < x < 16 \\ \underline{2 < y < 3} \\ 30 < xy < 48 \end{array}$$

4. Оценим частное $\frac{x}{y}$.

Для этого представим частное $\frac{x}{y}$ в виде произведения $x \cdot \frac{1}{y}$. Сначала оценим выражение $\frac{1}{y}$. Так как $2 < y < 3$, то $\frac{1}{2} > \frac{1}{y} > \frac{1}{3}$, т. е. $\frac{1}{3} < \frac{1}{y} < \frac{1}{2}$. По теореме о почленном умножении неравенств имеем

$$\begin{array}{c} 15 < x < 16 \\ \underline{\frac{1}{3} < \frac{1}{y} < \frac{1}{2}} \\ 5 < \frac{x}{y} < 8 \end{array}$$

Упражнения

881. Сложите почленно неравенства:

а) $12 > -5$ и $9 > 7$; б) $-2{,}5 < -0{,}7$ и $-6{,}5 < -1{,}3$.

882. Перемножьте почленно неравенства:

а) $5 > 2$ и $4 > 3$; б) $8 < 10$ и $\frac{1}{4} < \frac{1}{2}$.

883. Верно ли для положительных чисел a и b, что:

а) если $a^2 > b^2$, то $a^3 > b^3$; б) если $a^3 > b^3$, то $a^2 > b^2$?

884. Пусть $3 < a < 4$ и $4 < b < 5$. Оцените:

а) $a + b$; б) $a - b$; в) ab; г) $\frac{a}{b}$.

885. Зная, что $6 < x < 7$ и $10 < y < 12$, оцените:

а) $x + y$; б) $y - x$; в) xy; г) $\frac{y}{x}$.

886. Пользуясь тем, что $1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$ и $1{,}7 < \sqrt{3} < 1{,}8$, оцените:

а) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$; б) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$.

887. Пользуясь тем, что $2{,}2 < \sqrt{5} < 2{,}3$ и $2{,}4 < \sqrt{6} < 2{,}5$, оцените:

а) $\sqrt{6} + \sqrt{5}$; б) $\sqrt{6} - \sqrt{5}$.

888. Известны границы длин основания a и боковой стороны b равнобедренного треугольника, выраженные в миллиметрах:

$$26 \leqslant a \leqslant 28 \text{ и } 41 \leqslant b \leqslant 43.$$

Оцените периметр этого треугольника.

889. Измеряя длину a и ширину b прямоугольника (в сантиметрах), нашли, что $5{,}4 < a < 5{,}5$ и $3{,}6 < b < 3{,}7$.

Оцените: а) периметр прямоугольника; б) площадь прямоугольника.

890. Известны границы длины a и ширины b (в метрах) комнаты прямоугольной формы: $7{,}5 \leqslant a \leqslant 7{,}6$ и $5{,}4 \leqslant b \leqslant 5{,}5$. Подойдёт ли это помещение для библиотеки, для которой требуется комната площадью не менее 40 м^2?

891. Пусть α и β — углы треугольника. Известно, что

$$58^\circ \leqslant \alpha \leqslant 59^\circ,$$
$$102^\circ \leqslant \beta \leqslant 103^\circ.$$

Оцените величину третьего угла.

892. *(Для работы в парах.)* Используя соотношение между средним арифметическим и средним геометрическим положительных чисел, докажите, что при $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $c \geqslant 0$ верно неравенство:

а) $(a + b)(b + c)(a + c) \geqslant 8abc$;

б) $\frac{(a+1)(b+1)(a+c)(b+c)}{16} \geqslant abc$.

1) Обсудите, какие свойства неравенств можно использовать при доказательстве неравенств. Запишите неравенство, выражающее соотношение между средним арифметическим и средним геометрическим положительных чисел a и b.

2) Распределите, кто выполняет доказательство неравенства а), а кто — неравенства б). Проведите доказательство.

3) Проверьте друг у друга, правильно ли выполнено доказательство неравенства.

893. Докажите, что сумма длин двух противоположных сторон выпуклого четырёхугольника меньше суммы длин его диагоналей.

894. *(Задача-исследование.)* Сравните сумму длин медиан треугольника с его периметром.

1) Начертите произвольный треугольник ABC и проведите медиану BO.

2) На луче BO отложите отрезок $OD = BO$ и соедините точку D с точками A и C. Какой вид имеет четырёхугольник $ABCD$?

3) Рассмотрите треугольник ABD. Сравните $2m_b$ с суммой $BC + AB$ (m_b — медиана BO).

4) Составьте аналогичные неравенства для $2m_a$ и $2m_c$.

5) Используя сложение неравенств, оцените сумму медиан треугольника $m_a + m_b + m_c$.

П

895. Лист жести имеет форму квадрата. После того как от него отрезали полосу шириной 5 дм, площадь оставшейся части листа стала равной 6 дм^2. Каковы размеры первоначального листа жести?

896. Упростите выражение

$$\left(\frac{8x}{16-9x^2}+\frac{x}{3x-4}\right):\left(1-\frac{4-3x}{4+3x}\right).$$

897. Докажите, что:

а) $9a+\frac{1}{a}\geqslant 6$ при $a > 0$; б) $25b+\frac{1}{b}\leqslant -10$ при $b < 0$.

Контрольные вопросы и задания

1 Сформулируйте теоремы, выражающие основные свойства числовых неравенств, и докажите их.

2 Сформулируйте и докажите теоремы о почленном сложении и умножении неравенств.

3 Оцените сумму, разность, произведение и частное чисел a и b, если известно, что $4 < a < 5$ и $9 < b < 10$.

§ 12 НЕРАВЕНСТВА С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ И ИХ СИСТЕМЫ

37. Пересечение и объединение множеств

Пусть A — множество натуральных делителей числа 12, а B — множество натуральных делителей числа 18. Зададим множества A и B путём перечисления элементов:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\},$$

$$B = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}.$$

Обозначим буквой C множество общих делителей чисел 12 и 18, т. е. чисел, принадлежащих как множеству A, так и множеству B. Получим $C = \{1, 2, 3, 6\}$.

Говорят, что множество C является *пересечением* множеств A и B, и пишут: $A \cap B = C$.

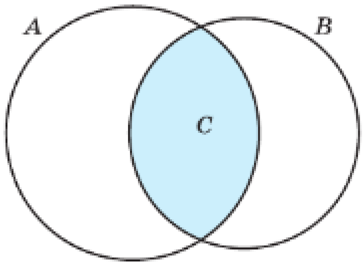


Рис. 34

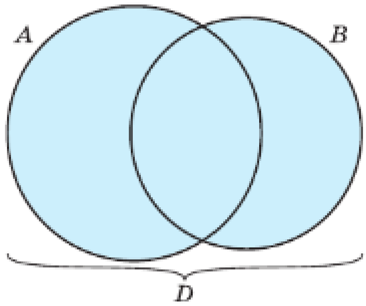


Рис. 35

> Пересечением двух множеств называют множество, состоящее из всех общих элементов этих множеств.

Соотношение между множествами A, B и C можно проиллюстрировать с помощью специальных схем, называемых кругами Эйлера. На рисунке 34 множества A и B изображены кругами. Фигура, образовавшаяся при пересечении кругов, закрашенная на рисунке, изображает множество C.

Заметим, что если некоторые множества X и Y не имеют общих элементов, то говорят, что пересечением этих множеств является *пустое множество*. Его обозначают знаком $\varnothing$ и используют такую запись: $X \cap Y = \varnothing$.

Введём теперь понятие объединения множеств. Вернёмся к рассмотренному примеру множеств натуральных делителей чисел 12 и 18. Пусть D — множество, которому принадлежат все элементы множества A и все элементы множества B. Для того чтобы задать множество D, выпишем сначала все элементы множества A, а затем те элементы множества B, которые не принадлежат множеству A. Получим

$$D = \{1, 2, 3, 4, 6, 12, 9, 18\}.$$

Говорят, что множество D является *объединением* множеств A и B, и пишут: $D = A \cup B$.

> Объединением множеств называют множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из этих множеств.

На рисунке 35 с помощью кругов Эйлера показано соотношение между множествами A, B и D. Фигура, закрашенная на рисунке, изображает множество D.

Упражнения

898. Известно, что X — множество простых чисел, не превосходящих 20, а Y — множество двузначных чисел, не превосходящих 20. Задайте множества X и Y перечислением элементов и найдите их пересечение и объединение.

899. Задайте путём перечисления элементов множество A двузначных чисел, являющихся квадратами натуральных чисел, и множество B двузначных чисел, кратных 16. Найдите пересечение и объединение этих множеств.

900. Найдите пересечение и объединение:

а) множеств цифр, используемых в записи чисел 11 243 и 6321;
б) множеств букв, используемых в записи слов «геометрия» и «география»;
в) множества простых чисел, не превосходящих 40, и множества двузначных чисел;
г) множества двузначных чисел и множества натуральных чисел, кратных 19.

901. Пусть A — множество квадратов натуральных чисел, B — множество кубов натуральных чисел. Принадлежит ли:

а) пересечению множеств A и B число 1; 4; 64;
б) объединению множеств A и B число 16; 27; 64?

902. На рисунке 36 изображены отрезки AB и CD. Какая фигура является:

а) пересечением этих отрезков;
б) объединением этих отрезков?

Рис. 36

903. Множеством каких фигур является пересечение:

а) множества прямоугольников и множества ромбов;
б) множества равнобедренных треугольников и множества прямоугольных треугольников?

904. Проиллюстрируйте с помощью кругов Эйлера соотношение между множеством $\boldsymbol{N}$ натуральных чисел, множеством $\boldsymbol{Z}$ целых чисел, множеством $\boldsymbol{Q}$ рациональных чисел. Найдите пересечение и объединение:

а) множества натуральных и множества целых чисел;
б) множества целых и множества рациональных чисел;
в) множества рациональных и множества иррациональных чисел.

905. Проиллюстрируйте с помощью кругов Эйлера соотношение между множеством чисел, кратных 4, и множеством чисел, кратных 3. Какое множество изображает общая часть этих кругов?

906. *(Для работы в парах.)* Проиллюстрируйте с помощью кругов Эйлера соотношение между множествами A и B и найдите пересечение и объединение этих множеств, если:

а) A — множество целых чисел, кратных 3, B — множество целых чисел, кратных 5;
б) A — множество целых чисел, кратных 3, B — множество целых чисел, кратных 15.
1) Распределите, кто выполняет задания для случая а), а кто — для случая б), и выполните их.
2) Проверьте друг у друга, верно ли выполнен рисунок и правильно ли найдены пересечение и объединение множеств A и B.
3) Исправьте ошибки, если они допущены.

907. Найдите пересечение и объединение множеств X и Y, если:
а) X — множество простых чисел, Y — множество составных чисел;
б) X — множество целых чисел, кратных 5, Y — множество целых чисел, кратных 15.

П

908. Доказать, что функция, заданная формулой

$$y = (x-8)^2 - (x+8)^2$$

является прямой пропорциональностью.

909. Решите уравнение

$$1-\frac{1}{2-x}=\frac{6-x}{3x^2-12}-\frac{1}{x-2}.$$

910. В одном фермерском хозяйстве благодаря применению новых технологий удалось получить гречихи на 2 ц с гектара больше, чем в другом. В результате оказалось, что в первом хозяйстве собрали 180 ц гречихи, а во втором — только 160 ц, хотя во втором хозяйстве под гречиху было отведено на 1 га больше. Какова была урожайность гречихи в каждом хозяйстве?

38. Числовые промежутки

Известно, что множество действительных чисел образовано рациональными и иррациональными числами. Между множеством действительных чисел и множеством точек на координатной прямой существует *взаимно однозначное соответствие*: каждой точке координатной прямой соответствует некоторое действительное число; и наоборот, каждое действительное число можно изобразить точкой на координатной прямой. В 7 классе рассматривались некоторые числовые промежутки: открытый и замкнутый лучи, отрезок, интервал и полуинтервал. Будем теперь называть замкнутый луч просто числовым лучом, а открытый луч — открытым числовым лучом. При задании числовых промежутков используют как неравенства, так и специальные обозначения.

Обозначения числовых промежутков, их названия и изображения на координатной прямой показаны в таблице.

Неравенство, задающее числовой промежуток	Обозначение и название числового промежутка	Изображение числового промежутка на координатной прямой
$a \leqslant x \leqslant b$	$[a;\ b]$ — числовой отрезок	
$a < x < b$	$(a;\ b)$ — интервал	
$a \leqslant x < b$	$[a;\ b)$ — полуинтервал	
$a < x \leqslant b$	$(a;\ b]$ — полуинтервал	

Продолжение

Неравенство, задающее числовой промежуток	Обозначение и название числового промежутка	Изображение числового промежутка на координатной прямой
$x \geqslant a$	$[a;\ +\infty)$ — числовой луч	
$x > a$	$(a;\ +\infty)$ — открытый числовой луч	
$x \leqslant a$	$(-\infty;\ a]$ — числовой луч	
$x < a$	$(-\infty;\ a)$ — открытый числовой луч	

Из таблицы видно, что в случае, если граничная точка входит в числовой промежуток (неравенство нестрогое), ставится квадратная скобка, в противном случае (неравенство строгое) — круглая. Круглая скобка ставится также при использовании знаков $-\infty$ и $+\infty$ (читается «минус бесконечность» и «плюс бесконечность»).

Множество всех действительных чисел изображается всей координатной прямой. Его называют числовой прямой и обозначают так: $(-\infty;\ +\infty)$.

Рассмотрим примеры нахождения объединения и пересечения числовых промежутков.

Пример 1. Найдём пересечение и объединение числовых промежутков $[1;\ 5]$ и $[3;\ 7]$ (рис. 37).

▶ Имеем

$$[1;\ 5] \cap [3;\ 7] = [3;\ 5];$$

$$[1;\ 5] \cup [3;\ 7] = [1;\ 7]. \ \triangleleft$$

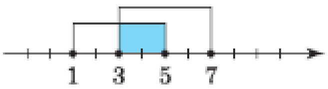


Рис. 37

Пример 2. Найдём пересечение и объединение числовых промежутков $[-4;\ +\infty)$ и $[3;\ +\infty)$ (рис. 38).

▶ Имеем

$$[-4;\ +\infty) \cap [3;\ +\infty) = [3;\ +\infty);$$

$$[-4;\ +\infty) \cup [3;\ +\infty) = [-4;\ +\infty). \ \triangleleft$$

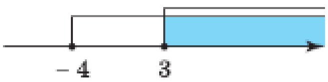


Рис. 38

Заметим, что если числовые промежутки не имеют общих элементов, то их пересечением является пустое множество. Например,

$$[1;\ 4] \cap [7;\ +\infty) = \varnothing \text{ (рис. 39).}$$

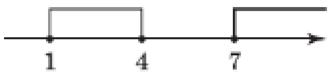


Рис. 39

Следует иметь также в виду, что объединение числовых промежутков не всегда представляет собой числовой промежуток. Например, множество $[0; 4] \cup [6; 10]$ не является числовым промежутком (рис. 40).

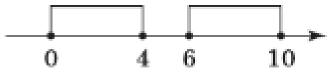


Рис. 40

Упражнения

911. Изобразите на координатной прямой промежуток и назовите его:

а) $[-2; 4]$; г) $(-4; 0)$; ж) $(-\infty; 4]$;
б) $(-3; 3)$; д) $(3; +\infty)$; з) $(-\infty; -1)$;
в) $[0; 5]$; е) $[2; +\infty)$; и) $(-\infty; +\infty)$.

912. Изобразите на координатной прямой промежуток и назовите его:

а) $(3; 7)$; в) $(-\infty; 5)$; д) $(-\infty; 3]$;
б) $[1; 6]$; г) $[12; +\infty)$; е) $(15; +\infty)$.

913. Назовите промежутки, изображённые на рисунке 41, и обозначьте их.

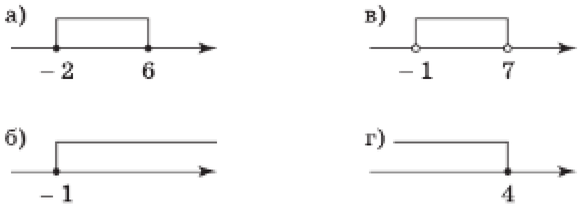


Рис. 41

914. Изобразите на координатной прямой множество чисел, удовлетворяющих неравенству:

а) $x \geqslant -2$; в) $x > 8$; д) $x > 0{,}3$;
б) $x \leqslant 3$; г) $x < -5$; е) $x \leqslant -8{,}1$.

915. Изобразите на координатной прямой множество чисел, удовлетворяющих двойному неравенству:

а) $-1{,}5 \leqslant x \leqslant 4$; в) $-5 \leqslant x \leqslant -3\frac{1}{3}$;
б) $-2 < x < 1{,}3$: г) $2 < x \leqslant 6{,}1$.

916. а) Принадлежит ли интервалу $(-4; 6{,}5)$ число:

$$-3; -5; 5; 6{,}5; -3{,}9; -4{,}1?$$

б) Принадлежит ли числовому отрезку $[-8; -5]$ число:

$$-9; -8; -5{,}5; -5; -6; -7{,}5?$$

917. Какие из чисел $-1{,}6$; $-1{,}5$; -1; 0; 3; $5{,}1$; $6{,}5$ принадлежат промежутку:

а) $[-1{,}5;\ 6{,}5]$; б) $(3;\ +\infty)$; в) $(-\infty;\ -1]$?

918. Принадлежит ли интервалу $(1{,}5;\ 2{,}4)$ число:

а) $\sqrt{2}$; б) $\sqrt{3}$; в) $\sqrt{5}$; г) $\sqrt{6}$?

919. Укажите все дроби вида $\frac{a}{54}$, где $a \in N$, принадлежащие промежутку $\left[\frac{1}{9};\ \frac{1}{6}\right]$.

920. Какие целые числа принадлежат промежутку:

а) $(-4;\ 3)$; б) $[-3;\ 5]$?

921. Какие целые числа принадлежат промежутку:

а) $[0;\ 8]$; б) $(-3;\ 3)$; в) $(-5;\ 2)$; г) $(-4;\ 9]$?

922. Укажите наибольшее целое число, принадлежащее промежутку:

а) $[-12;\ -9]$; б) $[-1;\ 17)$; в) $(-\infty;\ 31]$; г) $(-\infty;\ 8)$.

923. Принадлежит ли промежутку $(-\infty;\ 2)$ число $1{,}98$? Укажите два числа, большие $1{,}98$, принадлежащие этому промежутку. Можно ли найти наибольшее число, принадлежащее этому промежутку? Существует ли в этом промежутке наименьшее число?

924. Используя координатную прямую, найдите пересечение промежутков:

а) $(1;\ 8)$ и $(5;\ 10)$; в) $(5;\ +\infty)$ и $(7;\ +\infty)$;
б) $[-4;\ 4]$ и $[-6;\ 6]$; г) $(-\infty;\ 10)$ и $(-\infty;\ 6)$.

925. Сколько целых чисел принадлежит пересечению интервалов $(-3{,}9;\ 2)$ и $(-4{,}3;\ 1)$? Выберите верный ответ:

1. Три 2. Четыре 3. Пять 4. Шесть

926. Покажите дугой на координатной прямой объединение промежутков:

а) $[-7;\ 0]$ и $[-3;\ 5]$; в) $(-\infty;\ 4)$ и $(10;\ +\infty)$;
б) $(-4;\ 1)$ и $(10;\ 12)$; г) $[3;\ +\infty)$ и $(8;\ +\infty)$.

927. Используя координатную прямую, найдите пересечение и объединение промежутков:

а) $(-3;\ +\infty)$ и $(4;\ +\infty)$; в) $(-\infty;\ 6)$ и $(-\infty;\ 9)$;
б) $(-\infty;\ 2)$ и $[0;\ +\infty)$; г) $[1;\ 5]$ и $[0;\ 8]$.

928. Упростите выражение:

а) $\dfrac{1+\dfrac{a-x}{x}}{ax}$; б) $\dfrac{\dfrac{a^2-b^2}{a^2}-1}{2a^2b^2}$.

929. Докажите неравенство $a^2 + 5 > 2a$.

930. Пассажир проехал в поезде 120 км и вернулся с обратным поездом, проходящим в час на 5 км больше. Определите скорость каждого поезда, если известно, что на обратный путь он затратил на 20 мин меньше.

931. При каком x значение функции, заданной формулой $y = \dfrac{3x-1}{x-2}$, равно -1?

39. Решение неравенств с одной переменной

Неравенство $5x - 11 > 3$ при одних значениях переменной x обращается в верное числовое неравенство, а при других нет.

Например, если вместо x подставить число 4, то получится верное неравенство $5 \cdot 4 - 11 > 3$, а если вместо x подставить число 2, то получится неравенство $5 \cdot 2 - 11 > 3$, которое не является верным.

Говорят, что число 4 является *решением неравенства* $5x - 11 > 3$ или удовлетворяет этому неравенству. Нетрудно проверить, что решениями неравенства являются, например, числа 100, 180, 1000. Числа 2; 0,5; -5 не являются решениями этого неравенства.

> **Определение.** Решением неравенства с одной переменной называется значение переменной, которое обращает его в верное числовое неравенство.

Решить неравенство — значит найти все его решения или доказать, что решений нет.

Неравенства, имеющие одни и те же решения, называются *равносильными*. Неравенства, не имеющие решений, также считают равносильными.

При решении неравенств используются следующие свойства:

1) Если из одной части неравенства перенести в другую слагаемое с противоположным знаком, то получится равносильное ему неравенство.
2) Если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же положительное число, то получится равносильное ему неравенство;
если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же отрицательное число, изменив при этом знак неравенства на противоположный, то получится равносильное ему неравенство.

Например, неравенство

$$18 + 6x > 0 \qquad (1)$$

равносильно неравенству

$$6x > -18, \qquad (2)$$

а неравенство $6x > -18$ равносильно неравенству $x > -3$.

Указанные свойства неравенств можно доказать, опираясь на свойства числовых неравенств.

Докажем, например, что равносильны неравенства (1) и (2). Пусть некоторое число a является решением неравенства (1), т. е. обращает его в верное числовое неравенство $18 + 6a > 0$. Прибавив к обеим частям этого неравенства число -18, получим верное неравенство $18 + 6a - 18 > 0 - 18$, т. е. $6a > -18$, а это означает, что число a является решением неравенства (2).

Мы показали, что каждое решение неравенства (1) является решением неравенства (2). Аналогично доказывается, что каждое решение неравенства (2) служит решением неравенства (1). Таким образом, неравенства (1) и (2) имеют одни и те же решения, т. е. являются равносильными.

Подобными рассуждениями устанавливается справедливость обоих свойств неравенств в общем виде.

Приведём примеры решения неравенств.

Пример 1. Решим неравенство $16x > 13x + 45$.

▶ Перенесём слагаемое $13x$ с противоположным знаком в левую часть неравенства:

$$16x - 13x > 45.$$

Приведём подобные члены:

$$3x > 45.$$

Разделим обе части неравенства на 3:

$$x > 15.$$

Множество решений неравенства состоит из всех чисел, больших 15. Это множество представляет собой открытый числовой луч $(15; +\infty)$, изображённый на рисунке 42.

Рис. 42

Ответ можно записать в виде числового промежутка $(15; +\infty)$ или в виде неравенства $x > 15$, задающего этот промежуток. ◁

Пример 2. Решим неравенство $15x - 23(x + 1) > 2x + 11$.

▶ Раскроем скобки в левой части неравенства:

$$15x - 23x - 23 > 2x + 11.$$

Перенесём с противоположными знаками слагаемое $2x$ из правой части неравенства в левую, а слагаемое -23 из левой части в правую:

$$15x - 23x - 2x > 11 + 23,$$

Приведём подобные члены:

$$-10x > 34.$$

Разделим обе части на -10, при этом изменим знак неравенства на противоположный:

$$x < -3{,}4.$$

Множество решений данного неравенства представляет собой открытый числовой луч $(-\infty; -3{,}4)$, изображённый на рисунке 43.

Рис. 43

Ответ: $(-\infty; -3{,}4)$. ◁

Пример 3. Решим неравенство $\frac{x}{3} - \frac{x}{2} < 2$.

▶ Умножим обе части неравенства на наименьший общий знаменатель дробей, входящих в неравенство, т. е. на число 6. Получим

$$\frac{x}{3} \cdot 6 - \frac{x}{2} \cdot 6 < 2 \cdot 6,$$

$$2x - 3x < 12.$$

Отсюда

$$-x < 12,$$

$$x > -12.$$

Ответ: $(-12; +\infty)$. ◁

В каждом из рассмотренных примеров мы заменяли заданное неравенство равносильным ему неравенством вида $ax > b$ или $ax < b$, где a и b — некоторые числа. Неравенства такого вида называют *линейными неравенствами с одной переменной*.

В приведённых примерах мы получали линейные неравенства, в которых коэффициент при переменной не равен нулю. Может случиться, что при решении неравенства мы придём к линейному неравенству вида $0 \cdot x > b$ или $0 \cdot x < b$. Неравенство такого вида, а значит, и соответствующее исходное неравенство либо не имеют решений, либо их решением является любое число.

Пример 4. Решим неравенство

$$2(x + 8) - 5x < 4 - 3x.$$

▶ Имеем

$$2x + 16 - 5x < 4 - 3x,$$
$$2x - 5x + 3x < 4 - 16.$$

Приведём подобные члены в левой части неравенства и запишем результат в виде $0 \cdot x$:

$$0 \cdot x < -12.$$

Полученное неравенство не имеет решений, так как при любом значении x оно обращается в числовое неравенство $0 < -12$, не являющееся верным. Значит, не имеет решений и равносильное ему заданное неравенство.

Ответ: решений нет. ◁

Упражнения

932. Является ли решением неравенства $5y > 2(y - 1) + 6$ значение y, равное:

а) 8; б) −2; в) 1,5; г) 2?

933. Укажите два каких-либо решения неравенства $2x < x + 7$.

934. Решите неравенство и изобразите множество его решений на координатной прямой:

а) $x + 8 > 0$; в) $x + 1{,}5 \leqslant 0$;

б) $x - 7 < 0$; г) $x - 0{,}4 \geqslant 0$.

935. Решите неравенство:

а) $3x > 15$;
б) $-4x < -16$;
в) $-x \geqslant 1$;
г) $11y \leqslant 33$;
д) $12y < 1,8$;
е) $27b \geqslant 12$;
ж) $-6x > 1,5$;
з) $15x \leqslant 0$;
и) $0,5y > -4$;
к) $2,5a > 0$;
л) $\frac{1}{3}x > 6$;
м) $-\frac{1}{7}y < -1$.

936. Решите неравенство и изобразите множество его решений на координатной прямой:

а) $2x < 17$;
б) $5x \geqslant -3$;
в) $-12x < -48$;
г) $-x < -7,5$;
д) $30x > 40$;
е) $-15x < -27$;
ж) $-4x \geqslant -1$;
з) $10x \leqslant -24$;
и) $\frac{1}{6}x < 2$;
к) $-\frac{1}{3}x < 0$;
л) $0,02x \geqslant -0,6$;
м) $-1,8x \leqslant 36$.

937. Решите неравенство $5x + 1 > 11$. Укажите три каких-нибудь решения этого неравенства.

938. Решите неравенство $3x - 2 < 6$. Является ли решением этого неравенства число: 4; $2\frac{4}{5}$; $2\frac{4}{7}$?

939. Решите неравенство:

а) $7x - 2,4 < 0,4$;
б) $1 - 5y > 3$;
в) $2x - 17 \geqslant -27$;
г) $2 - 3a \leqslant 1$;
д) $17 - x > 10 - 6x$;
е) $30 + 5x \leqslant 18 - 7x$;
ж) $64 - 6y \geqslant 1 - y$;
з) $8 + 5y \leqslant 21 + 6y$.

940. Решите неравенство и изобразите множество его решений на координатной прямой:

а) $11x - 2 < 9$;
б) $2 - 3y > -4$;
в) $17 - x \leqslant 11$;
г) $2 - 12x > -1$;
д) $3y - 1 > -1 + 6y$;
е) $0,2x - 2 < 7 - 0,8x$;
ж) $6b - 1 < 12 + 7b$;
з) $16x - 34 > x + 1$.

941. а) При каких значениях x двучлен $2x - 1$ принимает положительные значения?
б) При каких значениях y двучлен $21 - 3y$ принимает отрицательные значения?
в) При каких значениях c двучлен $5 - 3c$ принимает значения, большие 80?

942. а) При каких значениях a значения двучлена $2a - 1$ меньше значений двучлена $7 - 1,2a$?
б) При каких значениях p значения двучлена $1,5p - 1$ больше значений двучлена $1 + 1,1p$?

943. Решите неравенство:

а) $5(x - 1) + 7 \leqslant 1 - 3(x + 2)$;
б) $4(a + 8) - 7(a - 1) < 12$;
в) $4(b - 1{,}5) - 1{,}2 \geqslant 6b - 1$;
г) $1{,}7 - 3(1 - m) \leqslant -(m - 1{,}9)$;
д) $4x > 12(3x - 1) - 16(x + 1)$;
е) $a + 2 < 5(2a + 8) + 13(4 - a)$;
ж) $6y - (y + 8) - 3(2 - y) \leqslant 2$.

944. Решите неравенство:

а) $4(2 - 3x) - (5 - x) > 11 - x$;
б) $2(3 - z) - 3(2 + z) \leqslant z$;
в) $1 > 1{,}5(4 - 2a) + 0{,}5(2 - 6a)$;
г) $2{,}5(2 - y) - 1{,}5(y - 4) \leqslant 3 - y$;
д) $x - 2 \geqslant 4{,}7(x - 2) - 2{,}7(x - 1)$;
е) $3{,}2(a - 6) - 1{,}2a \leqslant 3(a - 8)$.

945. Решите неравенство и покажите на координатной прямой множество его решений:

а) $a(a - 4) - a^2 > 12 - 6a$;
б) $(2x - 1)2x - 5x < 4x^2 - x$;
в) $5y^2 - 5y(y + 4) \geqslant 100$;
г) $6a(a - 1) - 2a(3a - 2) < 6$.

946. Решите неравенство:

а) $0{,}2x^2 - 0{,}2(x - 6)(x + 6) > 3{,}6x$;
б) $(2x - 5)^2 - 0{,}5x < (2x - 1)(2x + 1) - 15$;
в) $(12x - 1)(3x + 1) < 1 + (6x + 2)^2$;
г) $(4y - 1)^2 > (2y + 3)(8y - 1)$.

947. Решите неравенство:

а) $4b(1 - 3b) - (b - 12b^2) < 43$;
б) $3y^2 - 2y - 3y(y - 6) \geqslant -2$;
в) $2p(5p + 2) - p(10p + 3) \leqslant 14$;
г) $a(a - 1) - (a^2 + a) < 34$.

948. Решите неравенство:

а) $\frac{2x}{5} > 1$;
б) $\frac{x}{3} < 2$;
в) $\frac{6x}{7} \geqslant 0$;
г) $\frac{3x - 1}{4} > 2$;
д) $2 > \frac{6 - x}{5}$;
е) $\frac{2 + 3x}{18} < 0$;
ж) $\frac{12 - 7x}{42} \geqslant 0$;
з) $\frac{1}{3}(x + 15) > 4$;
и) $6 \leqslant \frac{2}{7}(x + 4)$.

949. Решите неравенство:

а) $\frac{9x}{5} \geqslant 0$;
б) $1 < \frac{3x}{4}$;
в) $\frac{5 + 6x}{2} > 3$;
г) $\frac{4x - 11}{4} \leqslant 0$;
д) $\frac{1}{7}x \geqslant 2$;
е) $\frac{2}{11}(x - 4) < 3$.

950. При каких значениях y:

а) значения дроби $\frac{7 - 2y}{6}$ больше соответствующих значений дроби $\frac{3y - 7}{12}$;

б) значения дроби $\frac{4,5-2y}{5}$ меньше соответствующих значений дроби $\frac{2-3y}{10}$;

в) значения двучлена $5y-1$ больше соответствующих значений дроби $\frac{3y-1}{4}$;

г) значения дроби $\frac{5-2y}{12}$ меньше соответствующих значений двучлена $1-6y$?

951. Решите неравенство:

а) $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}<5$; в) $\frac{x}{4}-\frac{x}{2}>-3$; д) $\frac{2x}{5}-x\leqslant 1$;

б) $\frac{3y}{2}-\frac{y}{3}\geqslant 2$; г) $y+\frac{y}{2}>3$; е) $\frac{3x}{4}-2x<0$.

952. Решите неравенство и покажите на координатной прямой множество его решений:

а) $\frac{13x-1}{2}<4x$; в) $\frac{x}{4}-\frac{x}{5}\leqslant 2$;

б) $\frac{5-2a}{4}\geqslant 2a$; г) $\frac{2y}{5}-\frac{y}{2}\geqslant 1$.

953. Решите неравенство:

а) $\frac{3+x}{4}+\frac{2-x}{3}<0$; г) $x-\frac{x-3}{5}+\frac{2x-1}{10}\leqslant 4$;

б) $\frac{4-y}{5}-5y\geqslant 0$; д) $\frac{y-1}{2}-1+\frac{2y-1}{6}>y$;

в) $y-\frac{2y-1}{4}\geqslant 1$; е) $p-\frac{p-1}{2}-\frac{p+3}{4}>2$.

954. Решите неравенство:

а) $\frac{2a-1}{2}-\frac{3a-3}{5}>a$; в) $\frac{5x-1}{5}+\frac{x+1}{2}\leqslant x$;

б) $x-\frac{2x+3}{2}\leqslant\frac{x-1}{4}$; г) $\frac{y-1}{2}-\frac{2y+3}{8}-y>2$.

955. а) При каких значениях a сумма дробей $\frac{2a-1}{4}$ и $\frac{a-1}{3}$ положительна?

б) При каких значениях b разность дробей $\frac{3b-1}{2}$ и $\frac{1+5b}{4}$ отрицательна?

956. Решите неравенство:

а) $31(2x + 1) - 12x > 50x$; в) $3x + 7 > 5(x + 2) - (2x + 1)$;

б) $x + 4 - \frac{x}{3} < \frac{2x}{3}$; г) $\frac{12x - 1}{3} < 4x - 3$.

957. При каких значениях x функция, заданная формулой $y = 2x + 13$, принимает положительные значения; отрицательные значения?

958. При каких значениях переменной имеет смысл выражение:

а) $\sqrt{2x - 4}$; в) $\sqrt{\frac{1 + 3a}{25}}$; д) $\sqrt{-3(1 - 5x)}$;

б) $\sqrt{4 - 6a}$; г) $\sqrt{\frac{7 - 5a}{8}}$; е) $\sqrt{-(6 - x)}$?

959. Найдите область определения функции:

а) $y = \frac{\sqrt{7 - 14x}}{x + 8}$; б) $y = \frac{6}{\sqrt{4 - x} - 1}$.

960. Найдите:

а) наибольшее целое число, удовлетворяющее неравенству $1{,}6 - (3 - 2y) < 5$;

б) наименьшее целое число, удовлетворяющее неравенству $8(6 - y) < 24{,}2 - 7y$.

961. При каких натуральных значениях n:

а) разность $(2 - 2n) - (5n - 27)$ положительна;

б) сумма $(-27{,}1 + 3n) + (7{,}1 + 5n)$ отрицательна?

962. Найдите множество значений a, при которых уравнение

$$(a + 5)x^2 + 4x - 20 = 0$$

не имеет корней.

963. Найдите множество значений k, при которых уравнение

$$(k - 4)x^2 + 16x - 24 = 0$$

имеет два корня.

964. Длина стороны прямоугольника 6 см. Какой должна быть длина другой стороны, чтобы периметр прямоугольника был меньше периметра квадрата со стороной 4 см?

965. Длина основания прямоугольного параллелепипеда 12 дм, ширина 5 дм. Какой должна быть высота параллелепипеда, чтобы его объём был меньше объёма куба с ребром 9 дм?

966. Одна из переплётных мастерских берёт по 480 р. за книгу и ещё 630 р. за оформление заказа, а другая — по 485 р. за книгу и 580 р. за оформление заказа. Укажите наименьшее число книг, при котором заказ выгоднее сделать в первой мастерской.

967. За денежный почтовый перевод до 1000 р. в некотором городе берётся плата 7 р. плюс 5% от переводимой суммы. Посетитель имеет 800 р. Укажите наибольшее целое число рублей, которое он может перевести.

968. Туристы отправились на моторной лодке по течению реки и должны вернуться обратно к стоянке не позднее чем через 3 ч. На какое расстояние могут отъехать туристы, если скорость течения реки 2 км/ч, а скорость лодки в стоячей воде 18 км/ч?

П

969. Найдите значение дроби $\frac{x^2+x-5}{x-1}$ при $x=1-\sqrt{3}$.

970. Решите уравнение:

а) $\frac{x^2-4}{6}-\frac{x}{2}=\frac{x-4}{3}$;   б) $\frac{2x^2-1}{2}-x+\frac{1}{2}=0$.

971. Решите графически уравнение $\frac{12}{x}=x^2$.

972. Моторная лодка прошла 30 км по течению реки и возвратилась обратно, затратив на весь путь 5 ч 20 мин. Найдите скорость лодки в стоячей воде, если известно, что скорость течения реки равна 3 км/ч.

40. Решение систем неравенств с одной переменной

З а д а ч а. Турист вышел с турбазы по направлению к станции, расположенной на расстоянии 20 км. Если турист увеличит скорость на 1 км/ч, то за 4 ч он пройдёт расстояние, большее 20 км. Если он уменьшит скорость на 1 км/ч, то даже за 5 ч не успеет дойти до станции. Какова скорость туриста?

▶ Пусть скорость туриста равна x км/ч. Если турист будет идти со скоростью $(x + 1)$ км/ч, то за 4 ч он пройдёт $4(x + 1)$ км. По условию задачи $4(x + 1) > 20$. Если турист будет идти со скоростью $(x - 1)$ км/ч, то за 5 ч он пройдёт $5(x - 1)$ км. По условию задачи $5(x - 1) < 20$.

Требуется найти те значения x, при которых верно как неравенство $4(x + 1) > 20$, так и неравенство $5(x - 1) < 20$, т. е. найти общие решения этих неравенств. В таких случаях говорят, что надо решить систему неравенств, и используют запись

$$\begin{cases} 4(x+1) > 20, \\ 5(x-1) < 20. \end{cases}$$

Заменив каждое неравенство системы равносильным ему неравенством, получим систему

$$\begin{cases} x > 4, \\ x < 5. \end{cases}$$

Значит, значение x должно удовлетворять условию $4 < x < 5$.

Ответ: скорость туриста больше 4 км/ч, но меньше 5 км/ч. ◁

Определение. Решением системы неравенств с одной переменной называется значение переменной, при котором верно каждое из неравенств системы.

Решить систему — значит найти все её решения или доказать, что решений нет.

Пример 1. Решим систему неравенств

$$\begin{cases} 2x - 1 > 6, \\ 5 - 3x > -13. \end{cases}$$

▶ Имеем

$$\begin{cases} 2x > 7, \\ -3x > -18. \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{cases} x > 3{,}5, \\ x < 6. \end{cases}$$

Решениями системы являются значения x, удовлетворяющие каждому из неравенств $x > 3{,}5$ и $x < 6$. Изобразив на координатной прямой множество чисел, удовлетворяющих неравенству $x > 3{,}5$, и множество чисел, удовлетворяющих неравенству $x < 6$ (рис. 44), найдём, что оба неравенства верны при $3{,}5 < x < 6$. Множеством решений системы является интервал $(3{,}5;\ 6)$.

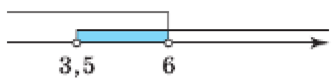


Рис. 44

Ответ можно записать в виде интервала (3,5; 6) или в виде двойного неравенства $3{,}5 < x < 6$, задающего этот интервал. ◁

П р и м е р 2. Решим систему неравенств

$$\begin{cases} 3x - 2 > 25, \\ 1 - x < 0. \end{cases}$$

▶ Имеем

$$\begin{cases} 3x > 27, \\ -x < -1; \end{cases} \qquad \begin{cases} x > 9, \\ x > 1. \end{cases}$$

Изобразим на координатной прямой множества решений каждого из полученных неравенств (рис. 45).

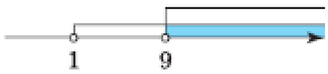


Рис. 45

Оба неравенства верны при $x > 9$. Ответ можно записать в виде неравенства $x > 9$ или в виде открытого числового луча $(9; +\infty)$, задаваемого этим неравенством. ◁

П р и м е р 3. Решим систему неравенств

$$\begin{cases} 2 - x > 0, \\ 0{,}2x - 1 < 0. \end{cases}$$

▶ Имеем

$$\begin{cases} -x > -2, \\ 0{,}2x < 1; \end{cases} \qquad \begin{cases} x < 2, \\ x < 5. \end{cases}$$

Используя координатную прямую, найдём общие решения неравенств $x < 2$ и $x < 5$, т. е. пересечение множеств их решений (рис. 46).

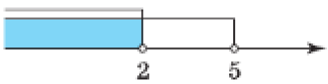


Рис. 46

Мы видим, что пересечение этих множеств состоит из чисел, удовлетворяющих условию $x < 2$, т. е. представляет собой открытый числовой луч $(-\infty; 2)$.

О т в е т: $(-\infty; 2)$. ◁

Пример 4. Решим систему неравенств

$$\begin{cases} 1-5x>11, \\ 6x-18>0. \end{cases}$$

▶ Имеем

$$\begin{cases} -5x>10, \\ 6x>18; \end{cases} \qquad \begin{cases} x<-2, \\ x>3. \end{cases}$$

Используя координатную прямую (рис. 47), найдём, что множество чисел, удовлетворяющих неравенству $x < -2$, и множество чисел, удовлетворяющих неравенству $x > 3$, не имеют общих элементов, т. е. их пересечение пусто. Данная система неравенств не имеет решений.

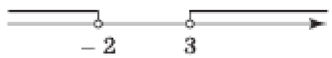


Рис. 47

Ответ: решений нет. ◁

Пример 5. Решим двойное неравенство

$$-1 < 3 + 2x < 3.$$

▶ Двойное неравенство представляет собой иную запись системы неравенств

$$\begin{cases} 3+2x>-1, \\ 3+2x<3. \end{cases}$$

Решив её, найдём, что оба неравенства верны при

$$-2 < x < 0.$$

В этом примере запись удобно вести с помощью двойных неравенств:

$$-1 < 3 + 2x < 3,$$
$$-4 < 2x < 0,$$
$$-2 < x < 0.$$

Ответ: $(-2; 0)$. ◁

Упражнения

973. Является ли число 3 решением системы неравенств:

а) $\begin{cases} 6x-1>x, \\ 4x-32<3x; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 7x<5x+7, \\ 3x-1>5-x; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 5x+4<20, \\ 3-2x>-1? \end{cases}$

974. Какие из чисел -2, 0, 5, 6 являются решениями системы неравенств

$$\begin{cases} 3x-22<0, \\ 2x-1>3? \end{cases}$$

975. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} x > 17, \\ x > 12; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x > 0, \\ x < 6; \end{cases}$ д) $\begin{cases} x \geqslant -1, \\ x \leqslant 3; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x < 1, \\ x < 5; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x < -3{,}5, \\ x > 8; \end{cases}$ е) $\begin{cases} x > 8, \\ x \leqslant 20. \end{cases}$

976. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} 2x - 12 > 0, \\ 3x > 9; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 3x - 10 < 0, \\ 2x > 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 4y < -4, \\ 5 - y > 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 6y \geqslant 42, \\ 4y + 12 \leqslant 0. \end{cases}$

977. Решите систему неравенств и укажите несколько чисел, являющихся её решениями:

а) $\begin{cases} x - 0{,}8 > 0, \\ -5x < 10; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 1 > 3x, \\ 5x - 1 > 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2 - x \leqslant 0, \\ x - 4 \leqslant 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 10x < 2, \\ x > 0{,}1. \end{cases}$

978. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} 0{,}4x - 1 \leqslant 0, \\ 2{,}3x \geqslant 4{,}6; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 0{,}3x > 4, \\ 0{,}2x + 1 < 6; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 0{,}7x - 2{,}1 < 0, \\ \frac{2}{3}x > 1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \frac{5}{6}x - 10 \leqslant 0, \\ 3x \leqslant 1\frac{1}{3}. \end{cases}$

979. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} 0{,}6x + 7{,}2 > 0, \\ 5{,}2 \geqslant 2{,}6x; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 0{,}2x < 3, \\ \frac{1}{6}x > 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 1{,}5x + 4{,}5 \leqslant 0, \\ \frac{1}{9}x \geqslant 1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x - 6{,}5 < 0, \\ \frac{1}{3}x < -1. \end{cases}$

980. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases}2x-1<1,4-x,\\3x-2>x-4;\end{cases}$ в) $\begin{cases}17x-2>12x-1,\\3-9x<1-x;\end{cases}$

б) $\begin{cases}5x+6\leqslant x,\\3x+12\leqslant x+17;\end{cases}$ г) $\begin{cases}25-6x\leqslant 4+x,\\3x+7,7>1+4x.\end{cases}$

981. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases}57-7x>3x-2,\\22x-1<2x+47;\end{cases}$ в) $\begin{cases}102-73z>2z+2,\\81+11z\geqslant 1+z;\end{cases}$

б) $\begin{cases}1-12y<3y+1,\\2-6y>4+4y;\end{cases}$ г) $\begin{cases}6+6,2x\geqslant 12-1,8x,\\2-x\geqslant 3,5-2x.\end{cases}$

982. Укажите допустимые значения переменной:

а) $\sqrt{3-2x}+\sqrt{1-x}$; в) $\sqrt{6-x}-\sqrt{3x-9}$;

б) $\sqrt{x}-\sqrt{3x-1}$; г) $\sqrt{2x+2}+\sqrt{6-4x}$.

983. Найдите область определения функции:

а) $y=\dfrac{x-2}{\sqrt{x+6}-\sqrt{2x-5}}$; б) $y=\dfrac{6}{\sqrt{2x-1}-\sqrt{x+1}}$.

984. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases}5(x-2)-x>2,\\1-3(x-1)<-2;\end{cases}$ в) $\begin{cases}7x+3\geqslant 5(x-4)+1,\\4x+1\leqslant 43-3(7+x);\end{cases}$

б) $\begin{cases}2y-(y-4)<6,\\y>3(2y-1)+18;\end{cases}$ г) $\begin{cases}3(2-3p)-2(3-2p)>p,\\6<p^2-p(p-8).\end{cases}$

985. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases}2(x-1)-3(x-2)<x,\\6x-3<17-(x-5);\end{cases}$

б) $\begin{cases}3,3-3(1,2-5x)>0,6(10x+1),\\1,6-4,5(4x-1)<2x+26,1;\end{cases}$

в) $\begin{cases}5,8(1-a)-1,8(6-a)<5,\\8-4(2-5a)>-(5a+6);\end{cases}$

г) $\begin{cases}x(x-1)-(x^2-10)<1-6x,\\3,5-(x-1,5)<6-4x.\end{cases}$

986. Решите систему неравенств и укажите все целые числа, которые являются её решениями:

а) $\begin{cases} 3-2a<13, \\ 5a<17; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2-6y<14, \\ 1<21-5y; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 12-6x\leqslant 0, \\ 3x+1\leqslant 25-x; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3-4x<15, \\ 1-2x>0. \end{cases}$

987. Найдите целые решения системы неравенств:

а) $\begin{cases} y\geqslant 0, \\ 7{,}2-y\geqslant 4; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 6-4b>0, \\ 3b-1>0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 12a-37>0, \\ 6a\leqslant 42; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3-18x<0, \\ 0{,}2-0{,}1x>0. \end{cases}$

988. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} 2{,}5a-0{,}5(8-a)<a+1{,}6, \\ 1{,}5(2a-1)-2a<a+2{,}9; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 0{,}7(5a+1)-0{,}5(1+a)<3a, \\ 2a-(a-1{,}7)>6{,}7. \end{cases}$

989. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} \frac{x}{3}+\frac{x}{4}<7, \\ 1-\frac{x}{6}>0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} \frac{3x-1}{2}-x\leqslant 2, \\ 2x-\frac{x}{3}\geqslant 1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} y-\frac{y-1}{2}>1, \\ \frac{y}{3}<5; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2p-\frac{p-2}{5}>4, \\ \frac{p}{2}-\frac{p}{8}\leqslant 6. \end{cases}$

990. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} \frac{x-1}{2}-\frac{x-3}{3}<2, \\ \frac{13x-1}{2}>0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 4-\frac{y-1}{3}\geqslant y, \\ \frac{7y-1}{8}\geqslant 6; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \frac{3x+1}{2}<-1, \\ \frac{x}{2}-1<x; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \frac{5a+8}{3}-a\geqslant 2a, \\ 1-\frac{6-15a}{4}\geqslant a. \end{cases}$

991. Решите двойное неравенство:

а) $-3<2x-1<3$; в) $2<6-2y<5$;
б) $-12<5-x<17$; г) $-1<5y+4<19$.

992. Решите двойное неравенство и укажите три числа, являющиеся его решениями:

а) $-6{,}5 < \frac{7x+6}{2} \leqslant 20{,}5$; в) $-2 \leqslant \frac{3x-1}{8} \leqslant 0$;

б) $-1 < \frac{4-a}{3} \leqslant 5$; г) $-2{,}5 \leqslant \frac{1-3y}{2} \leqslant 1{,}5$.

993. Решите двойное неравенство:

а) $-1 \leqslant 15x + 14 < 44$; в) $-1{,}2 < 1 - 2y < 2{,}4$;

б) $-1 \leqslant \frac{6-a}{3} \leqslant 1$; г) $-2 < \frac{4x-1}{3} \leqslant 0$.

994. а) При каких y значения двучлена $3y - 5$ принадлежат промежутку $(-1;\ 1)$?

б) При каких b значения дроби $\frac{5-2b}{4}$ принадлежат промежутку $[-2;\ 1]$?

995. При каких значениях a уравнение

$$x^2 + 2ax + a^2 - 4 = 0$$

имеет два корня, принадлежащие промежутку $(-6;\ 6)$?

996. При каких значениях b уравнение

$$x^2 - 6bx + 9b^2 - 16 = 0$$

имеет два отрицательных корня?

997. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} x > 8, \\ x > 7, \\ x > -4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y < -1, \\ y < -5, \\ y < 4; \end{cases}$ в) $\begin{cases} m > 9, \\ m > 10, \\ m < 12; \end{cases}$ г) $\begin{cases} q < 6, \\ q < 5, \\ q < 1. \end{cases}$

998. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} x - 4 < 8, \\ 2x + 5 < 13, \\ 3 - x > 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x - 1 < x + 3, \\ 5x - 1 > 6 - 2x, \\ x - 5 < 0. \end{cases}$

999. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} 3 - 2a < 13, \\ a - 1 > 0, \\ 5a - 35 < 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 6 - 4a < 2, \\ 6 - a > 2, \\ 3a - 1 < 8; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 5a - 8 > 7, \\ 4 - a < 3, \\ 2 - 3a > 10. \end{cases}$

1000. Укажите допустимые значения переменной:

а) $\dfrac{\sqrt{12-25x}}{6}$; б) $\dfrac{1}{\sqrt{5x-11}}$; в) $\dfrac{4x}{\sqrt{(3x-2)^2}}$.

1001. Найдите все натуральные значения n, при которых значение дроби $\dfrac{9n^2+12n+12}{n}$ — натуральное число.

1002. а) Выразите переменную h через S и a, если $S=\frac{1}{2}ah$.

б) Выразите переменную p через s и m, если $\frac{s}{p}=0{,}5m$.

в) Выразите переменную t через s и a, если $s=\frac{at^2}{2}$ и $t>0$.

1003. Велосипедист проехал 20 км по дороге, ведущей в гору, и 60 км по ровной местности, затратив на весь путь 6 ч. С какой скоростью ехал велосипедист на каждом участке пути, если известно, что в гору он ехал со скоростью, на 5 км/ч меньшей, чем по ровной местности?

Контрольные вопросы и задания

1 Что называется пересечением двух множеств? объединением двух множеств?

2 Изобразите на координатной прямой известные вам виды числовых промежутков. Назовите и обозначьте их.

3 Что называется решением неравенства? Является ли решением неравенства $3x-11>1$ число 5? число 2? Что значит решить неравенство?

4 Что называется решением системы неравенств? Является ли решением системы неравенств $\begin{cases}2x+1>3,\\3x<10\end{cases}$ число 3? число 5? Что значит решить систему неравенств?

Для тех, кто хочет знать больше

41. Доказательство неравенств

Один из приёмов доказательства неравенств состоит в том, что составляют разность левой и правой частей неравенства и показывают, что она сохраняет знак при любых указанных значениях переменных. Этот приём вам уже приходилось применять в простых случаях. Покажем его применение на более сложном примере.

Пример 1. Докажем, что

$$2\sqrt{a+1} > \sqrt{a} + \sqrt{a+2} \text{ при } a \geqslant 0.$$

▶ Составим разность левой и правой частей неравенства и преобразуем её:

$$2\sqrt{a+1} - \sqrt{a} - \sqrt{a+2} = (\sqrt{a+1} - \sqrt{a}) + (\sqrt{a+1} - \sqrt{a+2}).$$

Для того чтобы оценить составленную разность, каждое из выражений, записанных в скобках, представим в виде дроби со знаменателем 1 и освободимся от иррациональности в её числителе. Получим

$$(\sqrt{a+1} - \sqrt{a}) + (\sqrt{a+1} - \sqrt{a+2}) = \frac{\sqrt{a+1} - \sqrt{a}}{1} + \frac{\sqrt{a+1} - \sqrt{a+2}}{1} =$$

$$= \frac{(\sqrt{a+1} - \sqrt{a})(\sqrt{a+1} + \sqrt{a})}{\sqrt{a+1} + \sqrt{a}} + \frac{(\sqrt{a+1} - \sqrt{a+2})(\sqrt{a+1} - \sqrt{a+2})}{\sqrt{a+1} + \sqrt{a+2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a+1} + \sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{a+1} + \sqrt{a+2}}.$$

Так как функция $y = \sqrt{x}$ является возрастающей, то знаменатель первой дроби меньше, чем знаменатель второй, т. е. первая дробь больше второй. Следовательно, разность дробей является положительной. Заданное неравенство доказано. ◁

Ещё один приём доказательства неравенств состоит в том, чтобы показать, что данное неравенство следует из других неравенств, справедливость которых известна.

Пример 2. Докажем, что

$$(a^2 + bc)(b^2 + ac)(c^2 + ab) \geqslant 8a^2b^2c^2, \text{ если } a > 0,\ b > 0,\ c > 0.$$

▶ Из соотношения между средним арифметическим и средним геометрическим двух положительных чисел следует, что при указанных значениях переменных

$$\frac{a^2 + bc}{2} \geqslant \sqrt{a^2bc}, \quad \frac{b^2 + ac}{2} \geqslant \sqrt{b^2ac}, \quad \frac{c^2 + ab}{2} \geqslant \sqrt{c^2ab}.$$

Перемножив эти неравенства, получим, что

$$\frac{a^2 + bc}{2} \cdot \frac{b^2 + ac}{2} \cdot \frac{c^2 + ab}{2} \geqslant \sqrt{a^4b^4c^4}.$$

Отсюда

$$(a^2 + bc)(b^2 + ac)(c^2 + ab) \geqslant 8a^2b^2c^2.$$

Неравенство доказано. ◁

В отдельных случаях удаётся доказать неравенство, используя некоторые очевидные соотношения. В качестве таких очевидных соотношений могут быть взяты, например, такие: $(1 + a)^2 > 1 + 2a$ при любом a, не равном нулю, $\frac{1}{c+1} < \frac{1}{c}$ при $c > 0$, $\sqrt{x+2} > \sqrt{x+1}$ при $x \geqslant -1$ и т. п.

Пример 3. Докажем, что двойное неравенство

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} < \frac{1}{2\sqrt{x}} < \sqrt{x} - \sqrt{x-1}$$

верно при любом $x \geqslant 1$.

▶ Заменим разности $\sqrt{x+1} - \sqrt{x}$ и $\sqrt{x} - \sqrt{x-1}$ соответственно равными им дробями $\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$ и $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}$. Тогда данное неравенство примет вид

$$\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} < \frac{1}{2\sqrt{x}} < \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}.$$

Так как $\sqrt{x+1} > \sqrt{x}$ и $\sqrt{x} > \sqrt{x-1}$ при $x \geqslant 1$, то

$$\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} < \frac{1}{2\sqrt{x}} \text{ и } \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}} > \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

$$\text{т. е. } \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} < \frac{1}{2\sqrt{x}} < \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}.$$

Неравенство доказано. ◁

Пример 4. Докажем, что при любом натуральном $n > 1$ верно неравенство

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2}.$$

▶ Очевидно, что при любом натуральном $n > 1$ верны следующие неравенства:

$$\frac{1}{n+1} > \frac{1}{2n}, \quad \frac{1}{n+2} > \frac{1}{2n}, \quad \ldots, \quad \frac{1}{2n-1} > \frac{1}{2n}.$$

Складывая почленно эти неравенства и прибавляя к левой и правой частям полученного неравенства по $\frac{1}{2n}$, будем иметь

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}>\underbrace{\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\ldots+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}}_{n\ \text{раз}}.$$

Отсюда

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}>\frac{1}{2}.$$

Неравенство доказано. ◁

Упражнения

1004. Докажите неравенство:

а) $a^2+b^2+4\geqslant 2(a+b+1)$; б) $4a^2+b^2>4(a+b-2)$.

1005. Докажите, что если $x>0$ и $y>0$, то:

а) $\frac{x}{y^2}+\frac{y}{x^2}\geqslant\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$; б) $\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}\geqslant x+y$.

1006. Докажите, что при $a>0$ и $b>0$ верно неравенство:

а) $(a+b)(ab+16)\geqslant 16ab$; б) $(a^2+4b)(4b+25)\geqslant 80ab$.

1007. Докажите, что:

а) $\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{a+c}{b}\geqslant 6$, если $a>0$, $b>0$, $c>0$;

б) $(1+a)(1+b)(1+c)>24$, если $a>0$, $b>0$, $c>0$ и $abc=9$.

1008. Докажите, что куб полусуммы любых двух положительных чисел не превосходит полусуммы их кубов.

1009. Докажите, что

$$\sqrt{(a+c)(b+d)}\geqslant\sqrt{ab}+\sqrt{cd},$$

если $a>0$, $b>0$, $c>0$, $d>0$.

1010. Докажите, что при $a>0$, $b>0$, $c>0$ верно неравенство

$$\frac{3}{a+b+c}<\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}.$$

1011. Докажите, что если $x + y + z = 1$, то
$$\sqrt{4x+1} + \sqrt{4y+1} + \sqrt{4z+1} \leqslant 5.$$

1012. Докажите, что при любом a, большем 1, верно неравенство
$$\frac{1}{\sqrt{a}} < \sqrt{a+1} - \sqrt{a-1}.$$

1013. Велосипедист рассчитал, с какой скоростью он должен ехать из посёлка в город и обратно, чтобы, пробыв в городе полчаса, вернуться в посёлок к намеченному сроку. Однако на пути из посёлка в город он ехал со скоростью, на 2 км/ч меньшей намеченной, а спустя полчаса возвращался из города в посёлок со скоростью, на 2 км/ч большей намеченной. Успел ли велосипедист вернуться в посёлок к назначенному сроку?

Дополнительные упражнения к главе IV

К параграфу 11

1014. Докажите неравенство:

а) $(6y - 1)(y + 2) < (3y + 4)(2y + 1)$;
б) $(3y - 1)(2y + 1) > (2y - 1)(2 + 3y)$.

1015. Докажите неравенство:

а) $(x + 1)^2 \geqslant 4x$; в) $4(x + 2) < (x + 3)^2 - 2x$;
б) $(3b + 1)^2 > 6b$; г) $1 + (m + 2)^2 > 3(2m - 1)$.

1016. Верно ли неравенство:

а) $\sqrt{7} + 2\sqrt{5} < 2 + \sqrt{35}$; б) $4\sqrt{6} + 2 > 2\sqrt{3} + 4\sqrt{2}$?

1017. Докажите неравенство:

а) $a^2 + b^2 + 2 \geqslant 2(a + b)$;
б) $a^2 + b^2 + c^2 + 5 > 2(a + b + c)$.

1018. а) Докажите, что при $a > 3$ значение выражения
$$\left(\frac{a-3}{a+3} - \frac{a+3}{a-3}\right)\left(1 + \frac{3}{a}\right)$$
отрицательно.

б) Докажите, что при $y > 1$ значение выражения

$$\frac{y^2+3}{y-1} - \frac{2}{y} : \left(\frac{1}{y^2-y} + \frac{y-3}{y^2-1}\right)$$

положительно.

1019. В каком случае катер затратит больше времени: если он пройдёт 20 км по течению реки и 20 км против течения или если он пройдёт 40 км в стоячей воде?

1020. (*Задача-исследование.*) Моторная лодка прошла в один день некоторое расстояние по течению реки и вернулась обратно. В другой день она прошла такое же расстояние по течению более быстрой реки и также вернулась обратно. В какой из дней лодка затратила на весь путь больше времени?
1) Выскажите предположение об ожидаемом ответе.
2) Введите обозначения:
x км/ч — скорость лодки в стоячей воде;
y км/ч и z км/ч — скорости течения первой и второй рек;
s км — расстояние, на которое отплывала лодка.
3) Запишите формулы для вычисления времени t_1 ч и t_2 ч, затраченного лодкой на весь путь в каждый из дней.
4) Найдите разность $t_1 - t_2$ и, оценив её, ответьте на вопрос задачи.
5) Подтвердилось ли ваше предположение?

1021. Велосипедисты Смирнов и Антонов отправились одновременно из посёлка в город и, пробыв в городе одинаковое время, вернулись в посёлок. Смирнов в город и обратно ехал со скоростью 15 км/ч, а Антонов в город ехал со скоростью, на 1 км/ч большей, чем Смирнов, а возвращался со скоростью, на 1 км/ч меньшей, чем Смирнов. Кто из велосипедистов вернулся в посёлок раньше?

1022. Докажите, что полупериметр треугольника больше длины каждой из его сторон.

1023. Сравните площадь квадрата с площадью произвольного прямоугольника, имеющего тот же периметр.

1024. Используя выделение из трёхчлена квадрата двучлена, докажите неравенство:
а) $a^2 + ab + b^2 \geqslant 0$;
б) $a^2 - ab + b^2 \geqslant 0$.

1025. Докажите, что при $a > 0$ и $b > 0$ верно неравенство:

а) $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \geqslant 4$; б) $\frac{a}{b^2}+\frac{b}{a^2} \geqslant \frac{1}{a}+\frac{1}{b}$.

1026. Используя соотношение между средним арифметическим и средним геометрическим двух положительных чисел, докажите, что при $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ верно неравенство:

а) $ac + \frac{b}{c} \geqslant 2\sqrt{ab}$;   б) $\left(1 + \frac{a^2}{bc}\right)\left(1 + \frac{b^2}{ac}\right)\left(1 + \frac{c^2}{ab}\right) \geqslant 8$.

1027. *Старинная задача (из книги «Начала» Евклида).* Докажите, что если a — наибольшее число в пропорции $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, где a, b, c, d — положительные числа, то верно неравенство

$$a + d > b + c.$$

1028. Известно, что $12 \leqslant y \leqslant 16$. Оцените значение выражения:

а) $-0{,}5y$;   б) $42 - 2y$;   в) $\frac{1}{y} + 2$.

1029. Оцените значение выражения:

а) $a + 2b$, если $0 < a < 1$ и $-3 < b < -2$;

б) $\frac{1}{2}a - b$, если $7 < a < 10$ и $14 < b < 15$.

1030. Оцените длину средней линии треугольника ABC, которая параллельна стороне AB, если $10{,}4 < AB < 10{,}5$.

1031. Оцените длину средней линии трапеции с основаниями a см и c см, если $3{,}4 \leqslant a \leqslant 3{,}5$ и $6{,}2 \leqslant c \leqslant 6{,}3$.

К параграфу 12

1032. а) Принадлежит ли промежутку $[8; 41)$ число 40,9? Можно ли указать число, большее чем 40,9, принадлежащее этому промежутку?

б) Существует ли в промежутке $[8; 41)$ наибольшее число; наименьшее число?

1033. а) Принадлежит ли промежутку $(7; 17]$ число 7,01? Можно ли указать число, меньшее чем 7,01, принадлежащее этому промежутку?

б) Существует ли в промежутке $(7; 17]$ наименьшее число; наибольшее число?

1034. Укажите, если это возможно, наименьшее и наибольшее числа, принадлежащие промежутку:

а) $[12; 37]$;   б) $[8; 13)$;   в) $(11; 14)$;   г) $(3; 19]$.

1035. Верно ли, что:

а) $(-5; 5) \cap (-3; 2) = (-3; 2)$;

б) $(4; 11) \cup (0; 6) = (4; 6)$;

в) $(-\infty; 4) \cup (1; +\infty) = (-\infty; +\infty)$;

г) $(-\infty; 2) \cap (-2; +\infty) = (-2; 2)$?

1036. Найдите пересечение и объединение:

а) множества целых чисел и множества положительных чисел;

б) множества простых чисел и множества нечётных натуральных чисел.

1037. Является ли число $\sqrt{19}$ решением неравенства $x < 5$? Укажите какое-нибудь число, большее $\sqrt{19}$, удовлетворяющее этому неравенству.

1038. Является ли число $\sqrt{11}$ решением неравенства $x > 3$? Укажите какое-нибудь число, меньшее $\sqrt{11}$, удовлетворяющее этому неравенству.

1039. Решите неравенство:

а) $0{,}01(1 - 3x) > 0{,}02x + 3{,}01$;
б) $12(1 - 12x) + 100x > 36 - 49x$;
в) $(0{,}6y - 1) - 0{,}2(3y + 1) < 5y - 4$;
г) $\frac{2}{3}(6x + 4) - \frac{1}{6}(12x - 5) \leqslant 4 - 6x$;
д) $(3a + 1)(a - 1) - 3a^2 > 6a + 7$;
е) $15x^2 - (5x - 2)(3x + 1) < 7x - 8$.

1040. При каких значениях a верно неравенство:

а) $\frac{a-1}{4} - 1 > \frac{a+1}{3} + 8$; в) $\frac{1-2a}{4} - 2 < \frac{1-5a}{8}$;

б) $\frac{3a-1}{2} - \frac{a-1}{4} > 0$; г) $\frac{5a}{6} - \frac{3a-1}{3} + \frac{2a-1}{2} < 1$?

1041. Решите неравенство:

а) $\frac{x-0{,}5}{4} + \frac{x-0{,}25}{4} + \frac{x-0{,}125}{8} < 0$; б) $\frac{5-x}{3} - \frac{1-x}{2} > 1$.

1042. Найдите все натуральные числа, удовлетворяющие неравенству:
а) $3(5 - 4x) + 2(14 + x) > 0$; б) $(x + 1)(x - 1) - (x^2 - 3x) \leqslant 14$.

1043. При каких значениях x:

а) значение дроби $\frac{3x-8}{12}$ больше соответствующего значения дроби $\frac{x-1}{4}$;

б) значение дроби $\frac{x+1}{3}$ меньше соответствующего значения дроби $\frac{2x+3}{6}$?

1044. Решите неравенство:

а) $2(4y - 1) - 5y < 3y + 5$;
б) $6(1 - y) - 8(3y + 1) + 30y > -5$.

1045. Найдите, при каких значениях a уравнение имеет положительный корень:

а) $3x = 9a$; в) $x - 8 = 3a + 1$;
б) $x + 2 = a$; г) $2x - 3 = a + 4$.

1046. Найдите, при каких значениях b уравнение имеет отрицательный корень:

а) $10x = 3b$; в) $3x - 1 = b + 2$;
б) $x - 4 = b$; г) $3x - 3 = 5b - 2$.

1047. При каких значениях m верно равенство:

а) $|2m - 16| = 2m - 16$; в) $|m + 6| = -m - 6$;

б) $\frac{|12-6m|}{12-6m} = 1$; г) $\frac{|10m-35|}{10m-35} = -1$?

1048. Найдите промежутки, в которых функция $y = -6x + 12$ принимает положительные значения; отрицательные значения. Ответ проиллюстрируйте на графике.

1049. Со склада вывозят болванки: железные массой по 500 кг и медные массой по 200 кг. На грузовик, который может везти не более 4 т, погрузили 12 болванок. Сколько среди них может быть железных болванок?

1050. С турбазы в город, отстоящий на расстояние 24 км, вышел первый турист со скоростью 4 км/ч. Спустя 2 ч вслед за ним отправился второй турист. С какой скоростью должен идти второй турист, чтобы догнать первого до его прихода в город?

1051. От деревни до фермы 20 км, а от фермы до станции 40 км (рис. 48). С фермы по направлению к станции выехал велосипедист со скоростью 12 км/ч. Одновременно из деревни на станцию через ферму по той же дороге отправился мотоциклист. С какой скоростью должен ехать мотоциклист, чтобы догнать велосипедиста до его приезда на станцию?

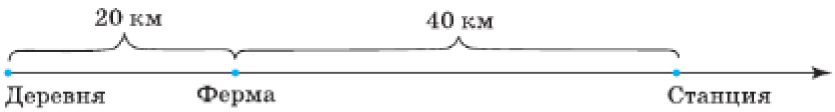


Рис. 48

1052. Основание равнобедренного треугольника равно 20 см, а его периметр не превосходит 46 см. Какова длина боковой стороны треугольника, если известно, что она выражается целым числом сантиметров?

1053. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} 0,3x - 1 < x + 0,4, \\ 2 - 3x < 5x + 1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2,5x - 0,12 > 0,6x + 0,07, \\ 1 - 2x > -x - 4; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x + 1,4 < \frac{3x - 7}{5}, \\ 2x > 3 - \frac{2x}{5}; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 3(x - 2)(x + 2) - 3x^2 < x, \\ 5x - 4 > 4 - 5x; \end{cases}$

д) $\begin{cases} (x - 4)(5x - 1) - 5x^2 > x + 1, \\ 3x - 0,4 < 2x - 0,6; \end{cases}$

е) $\begin{cases} 1 + \frac{1 + x}{3} > \frac{2x - 1}{6} - 2, \\ 3x - \frac{x}{4} > 4. \end{cases}$

1054. Найдите целые решения системы неравенств:

а) $\begin{cases} 6x(x - 1) - 3x(2x - 1) < x, \\ 0,5x - 3,7 < 0,2x - 0,7; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 0,7x - 3(0,2x + 1) \leqslant 0,5x + 1, \\ 0,3(1 - x) + 0,8x \geqslant x + 5,3; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \frac{1}{3}(3x - 2) + \frac{1}{6}(12x + 1) > 0, \\ \frac{1}{7}(14x - 21) + \frac{2}{9}(9x - 6) < 0; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 0,2(5x - 1) + \frac{1}{3}(3x + 1) < x + 5,8, \\ 8x - 7 - \frac{1}{6}(6x - 2) > x; \end{cases}$

д) $\begin{cases} \frac{z - 1}{2} - \frac{z - 4}{3} > 2z - 1, \\ 2z - \frac{z - 5}{3} > 0; \end{cases}$

е) $\begin{cases} 3y - \frac{1 + 5y}{4} < y, \\ \frac{4 - y}{5} - y - 1 < 0. \end{cases}$

1055. Решите двойное неравенство:

а) $-9 < 3x < 18$;

б) $1 < \frac{2x - 1}{2} < 2$;

в) $3 \leqslant 5x - 1 \leqslant 4$;

г) $0 \leqslant \frac{1 - x}{3} \leqslant 1$.

1056. а) При каких x значение выражения $2x - 4$ принадлежит интервалу $(-1; 5)$?

б) При каких x значение дроби $\frac{x-5}{2}$ принадлежит числовому отрезку $[0;\ 5]$?

в) При каких x значения функции $y=-\frac{1}{3}x+8$ принадлежат интервалу $(-1;\ 1)$?

г) При каких x значения функции $y = -2{,}5x + 6$ принадлежат числовому отрезку $[-6;\ -2]$?

1057. Найдите положительные значения y, удовлетворяющие системе неравенств:

а) $\begin{cases} 3(y-1)-4(y+8)<5(y+5), \\ 1{,}2(1+5y)-0{,}2<5(1-3y)-3y; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 15(y-4)-14(y-3)<y(y-9)-y^2, \\ \frac{5-y}{3}-y>14-\frac{2-y}{6}; \end{cases}$

в) $\begin{cases} (2y-1)(3y+2)-6y(y-4)<48, \\ \frac{y-1}{8}-\frac{6y+1}{4}-1<0. \end{cases}$

1058. Найдите отрицательные значения y, удовлетворяющие системе неравенств:

а) $\begin{cases} \frac{5y-1}{6}-\frac{2y-1}{2}>0, \\ 1-\frac{y+4}{3}<0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} (y+6)(5-y)+y(y-1)>0, \\ 0{,}3y(10y+20)-3y^2+30>0. \end{cases}$

1059. При каких значениях a уравнение

$$x^2 - 4ax + 4a^2 - 25 = 0$$

имеет два корня, каждый из которых больше 2?

1060. При каких значениях b уравнение

$$x^2 - (2b - 2)x + b^2 - 2b = 0$$

имеет два корня, принадлежащие интервалу $(-5;\ 5)$?

1061. Если туристы будут проходить в день на 5 км больше, чем сейчас, то они пройдут за 6 дней расстояние, большее 90 км. Если же они будут проходить в день на 5 км меньше, то за 8 дней они пройдут расстояние, меньшее 90 км. Сколько километров в день проходят туристы?

1062. Первую половину пути поезд прошёл со скоростью 60 км/ч, а затем увеличил скорость. Какой могла быть скорость поезда во второй половине пути, если известно, что его средняя скорость на всём участке не превышала 72 км/ч?

Глава V ФУНКЦИИ

Функция — одно из важнейших понятий математики. Первое представление об этом понятии вы получили при изучении алгебры в 7 классе. Теперь знания о функциях будут расширены: вы рассмотрите общие свойства функций, изучите некоторые конкретные виды функций, познакомитесь с новыми понятиями, при этом особое внимание будет уделено понятиям возрастающей и убывающей функций. Новый материал будет излагаться с опорой на графики функций.

§ 13 ФУНКЦИЯ И ЕЁ СВОЙСТВА

42. Функция. Область определения и множество значений функции

Напомним, что означает термин *функция*:

> функцией называют такую зависимость переменной y от переменной x, при которой каждому значению переменной x соответствует единственное значение переменной y.

Переменную x называют *независимой переменной* или *аргументом*. Переменную y называют *зависимой переменной*. Говорят также, что *переменная y является функцией от переменной x*. Значения зависимой переменной называют *значениями функции*.

Если зависимость переменной y от переменной x является функцией, то коротко это записывают так: $y = f(x)$ (читают: «y равно f от x»). Символом $f(x)$ обозначают также значение функции, соответствующее значению аргумента, равному x.

Пусть, например, функция задана формулой $y = 2x^2 - 6$. Тогда можно записать, что $f(x) = 2x^2 - 6$.

Найдём значения функции f для значений x, равных 2,5 и -3:

$$f(2{,}5) = 2 \cdot 2{,}5^2 - 6 = 6{,}5;$$

$$f(-3) = 2 \cdot (-3)^2 - 6 = 12.$$

Заметим, что в записи вида $y = f(x)$ вместо f употребляют и другие буквы: g, φ и т. п.

Все значения независимой переменной образуют *область определения функции*. Все значения, которые принимает зависимая переменная, образуют *множество значений функции*. Область определения функции принято обозначать символом $D(f)$, а множество значений функции — символом $E(f)$.

Функция $y = f(x)$ считается заданной, если указана область определения функции и правило, согласно которому каждому значению независимой переменной ставится в соответствие единственное значение зависимой переменной. Если функция $y = f(x)$ задана формулой и её область определения не указана, то считают, что область определения функции состоит из всех значений переменной x, при которых выражение $f(x)$ имеет смысл.

Например, областью определения функции $f(x) = 5x + x^2$ является множество всех чисел; областью определения функции $g(x) = \frac{2}{x+3}$ служит множество всех чисел, кроме -3.

Область определения функции, описывающей реальный процесс, зависит от конкретных условий его протекания.

Например, зависимость длины l железного стержня от температуры нагревания t выражается формулой $l = l_0(1 + at)$, где l_0 — начальная длина стержня, а a — коэффициент линейного расширения. Указанная формула имеет смысл при любых значениях t. Однако областью определения функции $l = f(t)$ является промежуток в несколько десятков градусов, для которого справедлив закон линейного расширения.

Графиком функции называется множество всех точек координатной плоскости, абсциссы которых равны значениям аргумента, а ординаты — соответствующим значениям функции.

На рисунке 49 изображён график функции $y = f(x)$, областью определения которой является отрезок $[-3; 7]$. С помощью графика можно найти, например, что $f(-3) = -2$, $f(0) = 2{,}5$, $f(2) = 4$, $f(5) = 2$. Наименьшее значение функции равно -2, а наибольшее равно 4, при этом любое число от -2 до 4 является значением данной функции.

Таким образом, множеством значений функции $y = f(x)$ служит отрезок $[-2; 4]$.

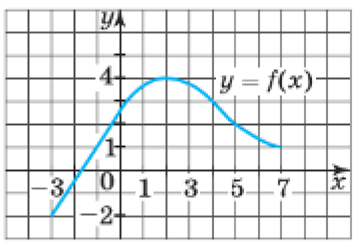
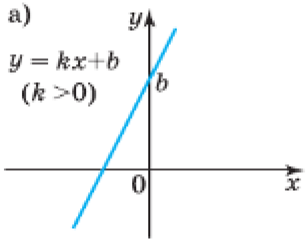


Рис. 49



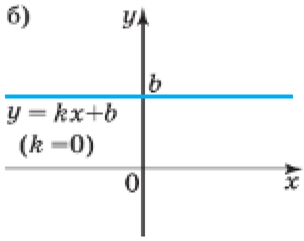


Рис. 50

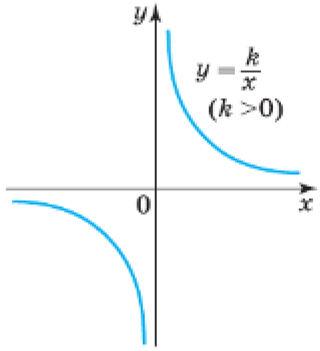


Рис. 51

Ранее были рассмотрены некоторые виды функций:
линейная функция, т. е. функция, заданная формулой $y = kx + b$, где k и b — некоторые числа;
прямая пропорциональность — частный случай линейной функции, она задаётся формулой $y = kx$, где $k \neq 0$;
обратная пропорциональность — функция $y = \frac{k}{x}$, $k \neq 0$.

Графиком функции $y = kx + b$ служит прямая (рис. 50, *а*). Областью определения этой функции является множество всех чисел. Множество значений этой функции при $k \neq 0$ есть множество всех чисел, а при $k = 0$ её множество значений состоит из одного числа b (рис. 50, *б*).

График функции $y = \frac{k}{x}$ называется *гиперболой*. На рисунке 51 изображён график функции $y = \frac{k}{x}$ для $k > 0$. Область определения этой функции есть множество всех чисел, кроме нуля. Это же множество является и множеством её значений.

Функциями такого вида описываются многие реальные процессы и закономерности.

Например, прямой пропорциональностью является зависимость массы тела m от его объёма V при постоянной плотности ρ ($m = \rho V$), зависимость длины окружности C от её радиуса R ($C = 2\pi R$).

Обратной пропорциональностью является зависимость силы тока I на участке цепи от сопротивления проводника R при постоянном напряжении U $\left(I = \frac{U}{R}\right)$, зависимость времени t, которое затрачивает равномерно движущееся тело на прохождение заданного пути s, от скорости движения v $\left(t = \frac{s}{v}\right)$.

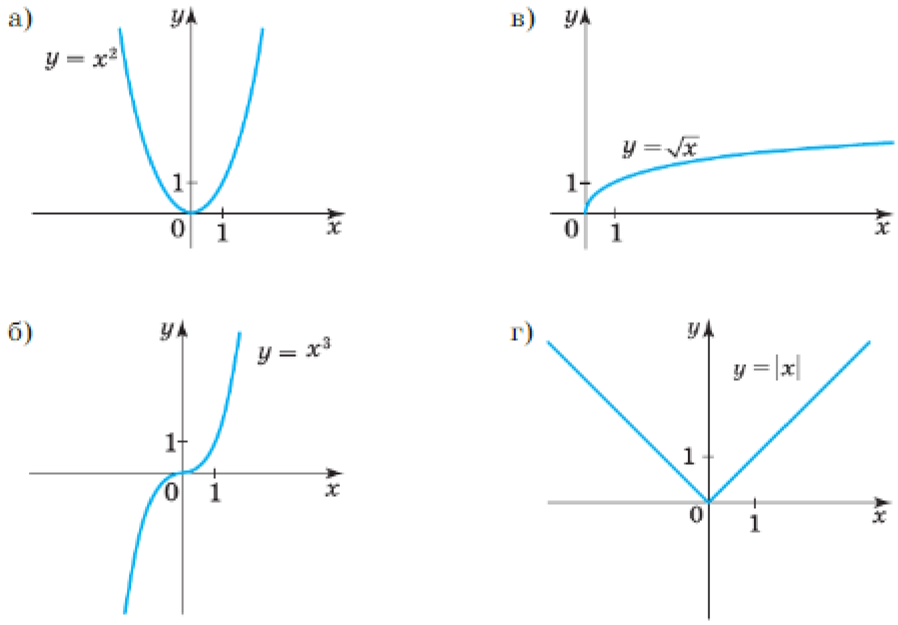


Рис. 52

Вы изучали также функции, заданные формулами $y = x^2$, $y = x^3$, $y = \sqrt{x}$, $y = |x|$. Их графики изображены на рисунке 52.

Упражнения

1063. Функция задана формулой $f(x) = -3x^2 + 10$. Найдите:
а) $f(-1)$; б) $f(0)$; в) $f\left(\frac{1}{3}\right)$.

1064. Найдите $f(0)$, $f(1{,}5)$ и $f(-1)$, если $f(x) = \frac{x - 0{,}5}{x + 0{,}5}$.

1065. Известно, что $f(x) = x^3 - 10$. Найдите:
а) $f(5)$; б) $f(4)$; в) $f(2)$; г) $f(-3)$.

1066. Пусть $\varphi(x) = x^2 + x + 1$. Найдите $\varphi(0) + \varphi(1) + \varphi(2) + \varphi(3)$.

1067. Известно, что $f(x) = -5x + 6$. Найдите значение x, при котором:
а) $f(x) = 17$; б) $f(x) = -3$; в) $f(x) = 0$.

1068. Найдите значения x, при которых $g(x) = 0$, если:
а) $g(x) = x(x + 4)$; б) $g(x) = \frac{x + 1}{5 - x}$.

1069. Существует ли значение x, при котором значение функции, заданной формулой $\varphi(x) = \frac{4}{6+x}$, равно: а) 1; б) −0,5; в) 0? В случае утвердительного ответа укажите это значение.

1070. Найдите значение x, при котором функция, заданная формулой $f(x) = 0{,}5x - 4$, принимает значение, равное: а) −5; б) 0; в) 2,5.

1071. Найдите область определения функции, заданной формулой:
а) $y = 4x - 8$; в) $y = \frac{2x}{5-x}$; д) $y = \frac{1}{x^2+1}$;
б) $y = x^2 - 5x + 1$; г) $y = \frac{3}{(x-4)(x+1)}$; е) $y = \sqrt{x-5}$.

1072. Приведите пример функции, область определения которой: а) множество всех чисел; б) множество всех чисел, кроме 7.

1073. Какова область определения функции, заданной формулой: а) $y = x^2 + 2x$; б) $y = \frac{x-1}{1+x}$; в) $y = \sqrt{9+x}$; г) $y = \sqrt{3-x}$?

1074. Найдите область определения функции и постройте её график:
а) $y = \frac{x^2-9}{6+2x}$; б) $y = \frac{4-x^2}{x^2+2x}$.

1075. Пассажир метро, вставший на эскалатор, сошёл с него через t с. Глубина спуска h м. Угол наклона эскалатора к горизонтальной плоскости 30°. Выразите формулой зависимость h от t, если скорость движения эскалатора равна 0,75 м/с. Найдите:
а) h, если $t = 2{,}25$ мин; б) t, если $h = 60$ м.

1076. Дальность полёта s м снаряда (без учёта сопротивления воздуха), выпущенного из орудия под углом 45° к горизонту, зависит только от начальной скорости снаряда v_0 м/с и может быть найдена по формуле $s = \frac{v_0^2}{g}$ ($g \approx 10$ м/с^2). Найдите:
а) s, если $v_0 = 600$ м/с; б) v_0, если $s = 24$ км.

1077. (*Для работы в парах.*) Укажите область определения функции, заданной формулой:
а) $y = \frac{5}{|x+1|+4}$; в) $y = x^2 + \sqrt{|x|-1}$;
б) $y = \frac{48}{|x|-2}$; г) $y = \sqrt{|2-x|-3x}$.
1) Распределите, кто выполняет задания а) и в), а кто — задания б) и г), и выполните их.

2) Объясните друг другу, как вы рассуждали при нахождении области определения функции.

3) Исправьте ошибки, если они допущены.

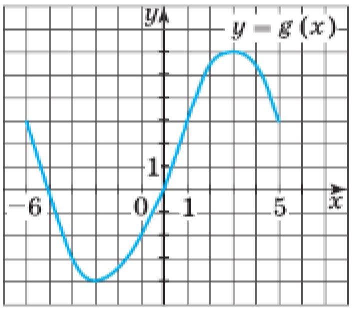


Рис. 53

1078. На рисунке 53 изображён график функции $y = g(x)$, областью определения которой служит отрезок $[-6; 5]$. С помощью графика найдите:

а) $g(-4)$, $g(-1)$, $g(1)$, $g(5)$;

б) значения x, при которых $g(x) = 4$, $g(x) = -4$, $g(x) = 0$;

в) наибольшее и наименьшее значения функции;

г) множество значений функции.

1079. В течение первых 10 дней мая ученики 8 класса измеряли атмосферное давление в полдень. По результатам измерений был построен график, изображённый на рисунке 54. Пользуясь графиком, найдите:

а) каким было атмосферное давление 2 мая, 5 мая, 9 мая;

б) день, когда атмосферное давление было самым высоким.

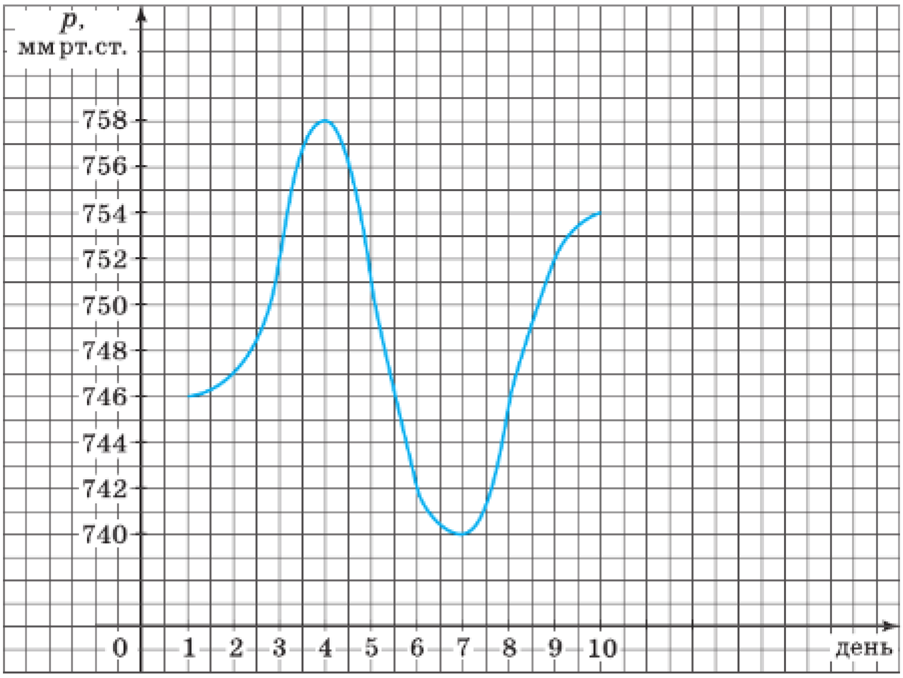


Рис. 54

1080. Постройте график функции, заданной формулой:

а) $f(x) = 1{,}5 - 3x$;

б) $f(x) = 4{,}5x$;

в) $f(x) = \frac{10}{x}$;

г) $f(x) = -\frac{1}{x}$.

Укажите область определения и множество значений функции.

1081. Найдите множество значений функции:

а) $f(x) = 2x - 1$, где $1 \leqslant x \leqslant 4$;

б) $g(x) = -3x + 8$, где $-2 \leqslant x \leqslant 5$.

1082. Используя рисунок 52 на с. 237, укажите область определения и множество значений каждой из функций

$$y = x^2,\ y = x^3,\ y = \sqrt{x},\ y = |x|.$$

1083. Найдите область определения и множество значений функции, заданной формулой $y = \frac{x^2}{x^2 + 1}$.

1084. Периметр равнобедренного треугольника с основанием 20 см зависит от длины x (см) боковой стороны. Задайте формулой функцию, выражающую эту зависимость, зная, что периметр треугольника не превосходит 100 см. Укажите область определения и множество значений этой функции.

1085. Постройте график функции $f(x) = -x^2$. Как изменяются значения данной функции с увеличением значений аргумента от $-\infty$ до 0 (увеличиваются или уменьшаются)? Укажите область определения и множество значений данной функции.

1086. Постройте график функции $f(x) = -2\sqrt{x}$. Как изменяются значения данной функции с увеличением значений аргумента от 0 до $+\infty$ (увеличиваются или уменьшаются)? Укажите область определения и множество значений данной функции.

1087. На рисунке 55 изображён график одной из функций, заданных формулами

$$y = x - 1,\ y = 1 + x,\ y = 2x - 1,\ y = 1 - 2x.$$

Выясните, какой именно.

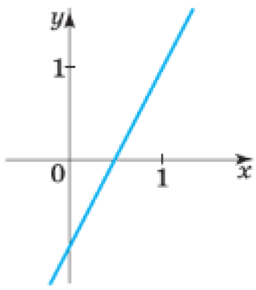


Рис. 55

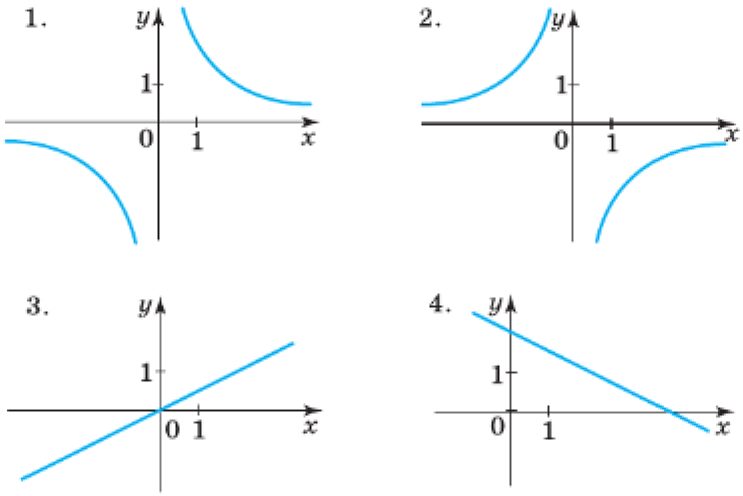


Рис. 56

1088. На рисунке 56 изображены графики функций, заданных формулами $y = \frac{x}{2}$, $y = \frac{2}{x}$, $y = 2 - \frac{x}{2}$, $y = -\frac{2}{x}$. Для каждой функции укажите соответствующий график.

1089. По графику функции $y = |x|$ (см. рис. 52) найдите, при каких значениях x:

а) $|x| = 3{,}5$;

б) $|x| < 2$;

в) $|x| \geqslant 4$.

Каково наименьшее значение функции? Имеет ли она наибольшее значение? Каково множество значений функции?

1090. Составьте таблицу значений и постройте график функции, заданной формулой:

а) $y = x^3 - 8x$, где $-3 \leqslant x \leqslant 3$; б) $y = \frac{4}{x+2}$, где $-1{,}5 \leqslant x \leqslant 6$.

Каково множество значений функции?

НИКОЛАЙ ИВАНОВИЧ ЛОБАЧЕВСКИЙ (1792–1856) — русский математик, создатель неевклидовой геометрии, которая изменила представление о роли аксиоматики в математике и сыграла важную роль в разработке теории относительности. Большой вклад внёс также в математический анализ и алгебру. Он разработал метод приближённого решения алгебраических уравнений высших степеней.

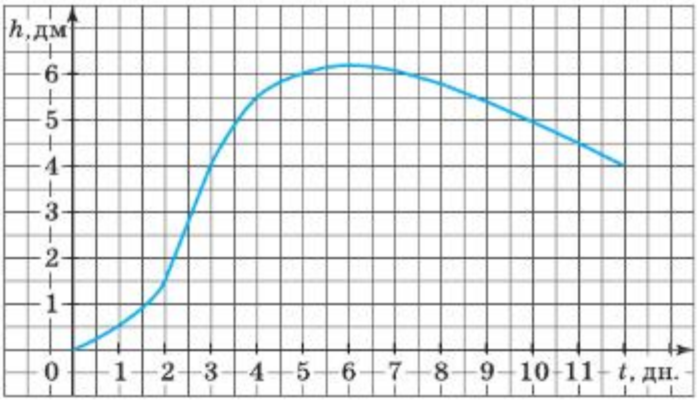


Рис. 57

1091. На рисунке 57 изображён график изменения уровня воды в реке относительно нулевой отметки. Опишите, как происходило изменение уровня воды.

1092. (*Задача-исследование.*) Изменение температуры воды p (°С) в баке как функции времени t (мин) описано с помощью формулы:

$$p = \begin{cases} 2t + 20, \text{ если } 0 \leqslant t < 40, \\ 100, \text{ если } 40 \leqslant t \leqslant 60, \\ -\frac{2}{3}t + 140, \text{ если } 60 < t \leqslant 150. \end{cases}$$

1) Определите, как изменялась температура воды в каждом из указанных промежутков времени.
2) Постройте график функции $p = f(t)$.
3) Обсудите, какой физический смысл имеет процесс, описанный функцией $p = f(t)$, в каждом из промежутков времени $[0; 40)$; $[40; 60]$; $(60; 150]$.

ПЕТЕР ДИРИХЛЕ (1805–1859) — немецкий математик. Сделал ряд крупных открытий в теории чисел. Имеет значительные достижения в развитии алгебры, теории функций и аналитической геометрии. Им проведены важные исследования в области механики и математической физики.

1093. Зависимость расстояния s (км), которое велосипедист проехал от турбазы, от времени его движения t (ч) задана следующим образом:

$$s = \begin{cases} 15t, \text{ если } 0 \leqslant t < \frac{7}{6}, \\ 17{,}5, \text{ если } \frac{7}{6} \leqslant t \leqslant \frac{3}{2}, \\ -12t + 35{,}5, \text{ если } \frac{3}{2} < t \leqslant \frac{5}{2}. \end{cases}$$

Найдите $s(0)$; $s(1)$; $s(1{,}4)$; $s(2)$. Постройте график функции $s = f(t)$ (масштаб по оси t: 1 ед. — 6 клеточек; по оси s: 10 ед. — 4 клеточки). Опишите, как происходило движение велосипедиста.

П

1094. Решите уравнение:
а) $-0{,}5(3x - 4) + 15x = 4(1{,}5x + 1) + 3$;
б) $(2x - 3)(2x + 3) - x^2 = 12x - 69 + 3x^2$.

1095. Решите неполное квадратное уравнение:
а) $6x^2 - 3x = 0$; в) $x^2 - 36 = 0$; д) $0{,}5x^2 - 1 = 0$;
б) $x^2 + 9x = 0$; г) $5x^2 + 1 = 0$; е) $0{,}6x + 9x^2 = 0$.

1096. Решите квадратное уравнение:
а) $x^2 + 7x + 12 = 0$; в) $2x^2 - 5x - 3 = 0$;
б) $x^2 - 2x - 35 = 0$; г) $3x^2 - 8x + 5 = 0$.

43. Свойства функции

На рисунке 58 изображён график зависимости температуры воздуха P (°С) от времени суток t (ч). Мы видим, что в 2 ч и в 8 ч температура равнялась нулю, от 0 до 2 ч и от 8 до 24 ч она была выше нуля, а от 2 до 8 ч — ниже нуля. Из графика ясно также,

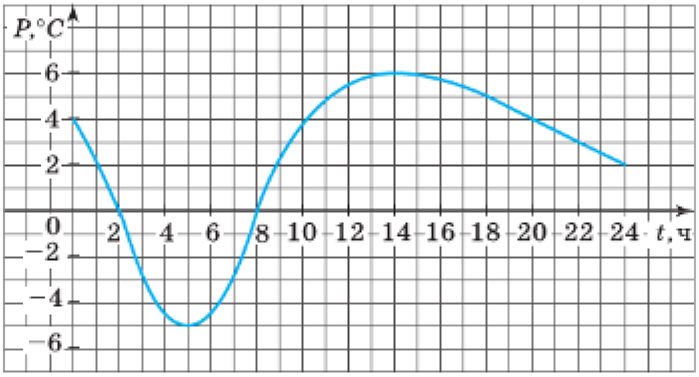


Рис. 58

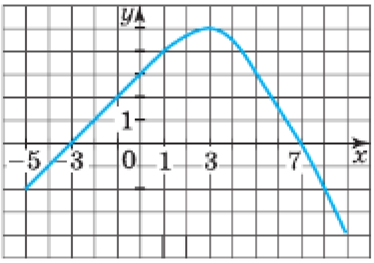


Рис. 59

что в течение первых пяти часов температура понижалась, затем в промежутке от 5 до 14 ч она повышалась, а потом опять понижалась.

С помощью графика мы выяснили некоторые свойства функции $P = f(t)$, где t — время суток в часах, а P — температура воздуха в градусах Цельсия.

Рассмотрим теперь свойства функции $y = f(x)$, где $-5 \leqslant x \leqslant 9$, график которой изображён на рисунке 59. Выясним сначала, при каких значениях x функция обращается в нуль, принимает положительные и отрицательные значения.

1) Найдём абсциссы точек пересечения графика с осью x. Получим $x = -3$ и $x = 7$.

Значит, функция принимает значение, равное нулю, при $x = -3$ и $x = 7$. Значения аргумента, при которых функция обращается в нуль, называют *нулями функции*, т. е. числа -3 и 7 — нули рассматриваемой функции.

2) Нули функции разбивают её область определения — промежуток $[-5; 9]$ — на три промежутка: $[-5; -3)$, $(-3; 7)$ и $(7; 9]$. Для значений x из промежутка $(-3; 7)$ точки графика расположены выше оси x, а для значений x из промежутков $[-5; -3)$ и $(7; 9]$ — ниже оси x. Значит, на промежутке $(-3; 7)$ функция принимает положительные значения, а на каждом из промежутков $[-5; -3)$ и $(7; 9]$ — отрицательные.

Промежутки, на которых функция сохраняет знак, называют *промежутками знакопостоянства*.

3) Выясним теперь, как изменяются (увеличиваются или уменьшаются) значения данной функции с изменением x от -5 до 9.

Из графика видно, что с возрастанием x от -5 до 3 значения y увеличиваются, а с возрастанием x от 3 до 9 значения y уменьшаются.

Говорят, что на промежутке $[-5; 3]$ функция $y = f(x)$ является *возрастающей*, а на промежутке $[3; 9]$ эта функция является *убывающей*.

Определение. Функция называется возрастающей на некотором промежутке, если большему значению аргумента из этого промежутка соответствует большее значение функции.
Функция называется убывающей на некотором промежутке, если большему значению аргумента из этого промежутка соответствует меньшее значение функции.

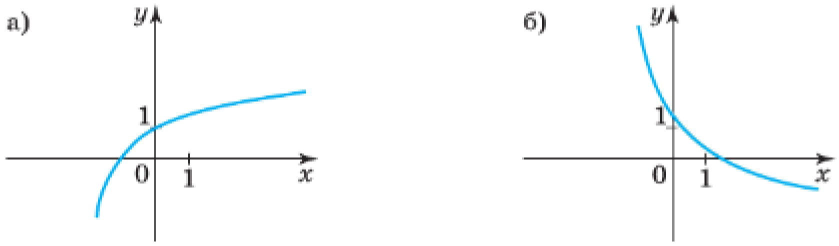


Рис. 60

Иными словами, функция $y = f(x)$ называется возрастающей на некотором промежутке, если для любых x_1 и x_2 из этого промежутка из условия $x_2 > x_1$ следует, что

$$f(x_2) > f(x_1).$$

Функция $y = f(x)$ называется убывающей на некотором промежутке, если для любых x_1 и x_2 из этого промежутка из условия $x_2 > x_1$ следует, что

$$f(x_2) < f(x_1).$$

Если функция возрастает на всей области определения, то её называют *возрастающей функцией*, а если убывает, то — *убывающей функцией*. Промежутки возрастания и убывания функции называются *промежутками монотонности* функции.

На рисунке 60 изображены графики возрастающей функции и убывающей функции.

Упражнения

1097. На рисунке 61 изображён график изменения скорости велосипедиста v в зависимости от времени его движения t. Укажите промежуток времени, в течение которого скорость велосипедиста:

а) возрастала; б) убывала; в) оставалась постоянной.

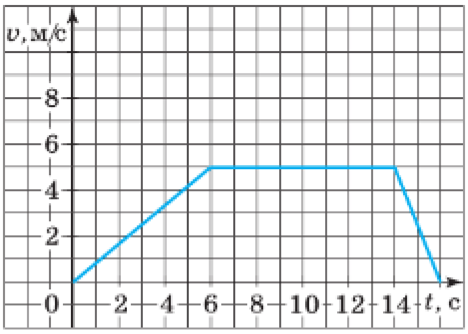


Рис. 61

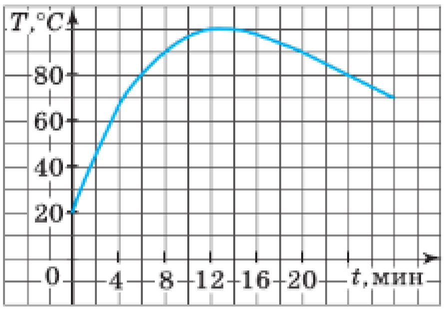


Рис. 62

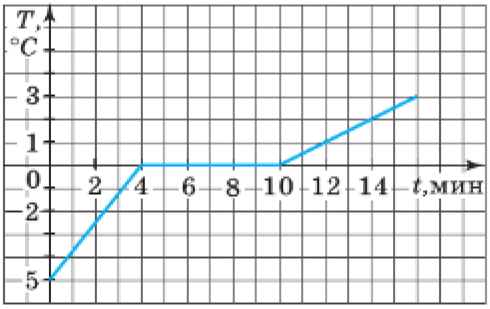


Рис. 63

1098. На рисунке 62 изображён график температуры воды в сосуде. Опишите, как изменялась температура, и укажите промежуток времени, в течение которого проводилось наблюдение. Каково было наибольшее значение температуры?

1099. Кусок льда, имеющий температуру −5 °C, нагревали в течение 16 мин. Результат нагревания показан на графике (рис. 63). Какой физический смысл имеет рассматриваемый процесс на каждом из промежутков [0; 4], (4; 10), [10; 16]?

1100. (*Для работы в парах.*) На рисунке 64 изображён график функции $y = f(x)$, где $-7 \leqslant x \leqslant 5$. Укажите:

а) нули функции;

б) промежутки, на которых функция принимает значения одного и того же знака (положительные или отрицательные);

в) промежутки, на которых функция возрастает, и промежутки, на которых она убывает;

г) наибольшее и наименьшее значения функции.

1) Распределите, кто выполняет задания а) и в), а кто — задания б) и г), и выполните их.

2) Объясните, как вы рассуждали при выполнении задания.

3) Исправьте допущенные ошибки, если они обнаружатся.

1101. Перечислите свойства функции $y = g(x)$, где $-5 \leqslant x \leqslant 5$, график которой изображён на рисунке 65.

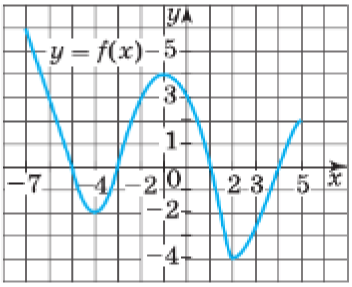


Рис. 64

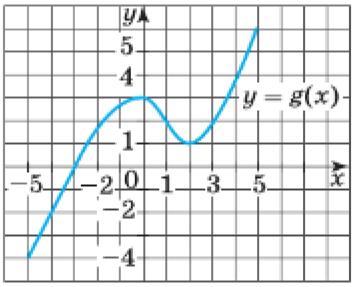


Рис. 65

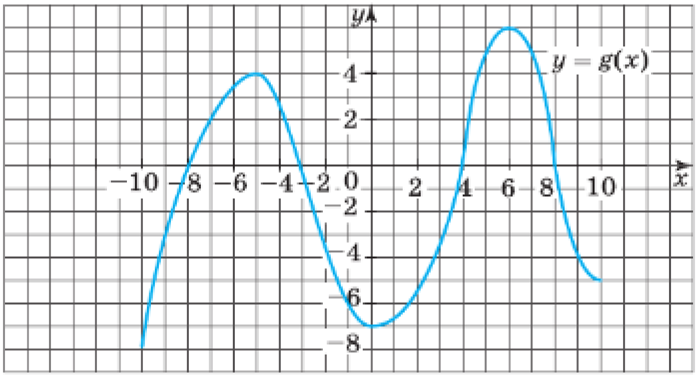


Рис. 66

1102. На рисунке 66 изображён график функции $y = g(x)$, где $-10 \leqslant x \leqslant 10$. Сколько нулей имеет функция? Укажите:

а) промежутки, на которых функция принимает отрицательные значения;

б) промежутки, на которых функция убывает.

1103. Для функции $y = f(x)$, график которой изображён на рисунке 67, укажите:

1) $D(f)$; 2) $E(f)$; 3) нули функции; 4) промежутки знакопостоянства; 5) промежутки монотонности; 6) $f(-3)$ и $f(1)$.

1104. Начертите график какой-либо функции с областью определения $[-3; 4]$ так, чтобы эта функция:

а) возрастала на промежутке $[-3; 0]$ и убывала на промежутке $[0; 4]$;

б) убывала на промежутке $[-3; 1]$ и возрастала на промежутке $[1; 4]$.

1105. Начертите график какой-нибудь функции, нулями которой служат числа:

а) -3 и 3; б) -4, 0 и 2; в) -3, 2, 1 и 5.

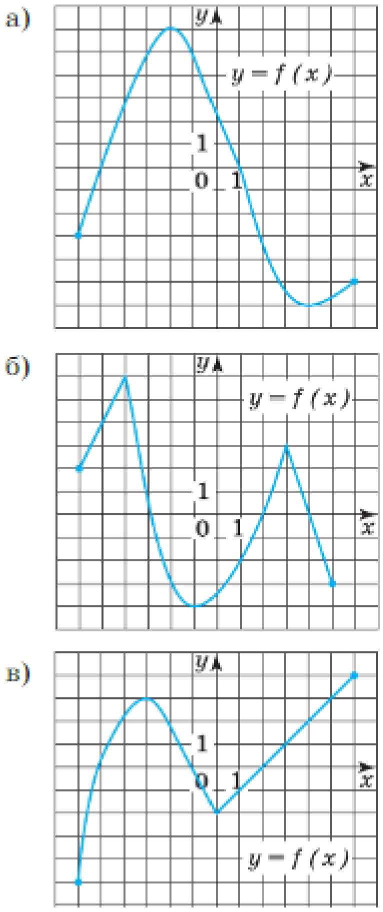


Рис. 67

1106. Найдите нули функции (если они существуют):

а) $y = -0{,}8x + 12$; в) $y = \frac{4 + 2x}{x^2 + 5}$;

б) $y = (3x - 10)(x + 6)$; г) $y = \frac{6}{(x-1)(x+8)}$.

1107. Имеет ли нули функция:

а) $y = 2{,}1x - 70$; б) $y = 4x(x - 2)$; в) $y = \frac{6 - x}{x}$?

1108. Укажите область определения и найдите нули функции:

а) $y = \frac{x - \sqrt{x+6}}{x+5}$; б) $y = \frac{4x^2 + 25x}{2x - \sqrt{10 - 6x}}$.

П

1109. Выясните, пересекаются ли прямая и гипербола. Если да, то найдите точки пересечения.

а) прямая $y = x + 1$ и гипербола $y = \frac{2}{x}$;

б) прямая $y = -2x - 2$ и гипербола $y = \frac{1}{x}$.

1110. Найдите, при каких значениях x значения функции $y = 2x - 3$ удовлетворяют неравенству $-3 < y \leqslant 5$.

1111. Докажите тождество:

а) $\left(\frac{a+1}{a^2+1-2a} + \frac{1}{a-1}\right) \cdot \frac{a-1}{a} - \frac{2}{a-1} = 0$;

б) $\left(\frac{1+x}{x^2 - xy} - \frac{1-y}{y^2 - xy}\right) \cdot \frac{x^2y - y^2x}{x+y} = 1$;

в) $3a\left(\frac{1}{a-c} - \frac{c}{a^3 - c^3} \cdot \frac{a^2 + c^2 + ac}{a+c}\right) - \frac{3c^2}{a^2 - c^2} = 3$.

1112. Найдите значение выражения

$$(9 - 4a^2)\left(\frac{4a}{2a-3} - 1\right)$$

при $a = -1{,}2$.

1113. Сравните числа:

а) $\frac{5}{7}$ и $\frac{4}{9}$; б) $\frac{38}{39}$ и $\frac{11}{12}$; в) $3{,}12$ и $3\frac{1}{8}$; г) $17{,}2(7)$ и $17{,}27$.

Контрольные вопросы и задания

1. Дайте определение функции. Что называется областью определения и множеством значений функции?
2. Что называется графиком функции? Что представляет собой график линейной функции? прямой пропорциональности? обратной пропорциональности?
3. Дайте определение возрастающей (убывающей) функции. Приведите примеры функции, возрастающей на промежутке; убывающей на промежутке. Назовите промежутки возрастания и убывания функции, график которой изображён на рисунке 64.

§ 14 СВОЙСТВА НЕКОТОРЫХ ВИДОВ ФУНКЦИЙ

44. Свойства линейной функции

Рассмотрим свойства функции, заданной формулой $y = kx + b$, где $k \neq 0$ (рис. 68).

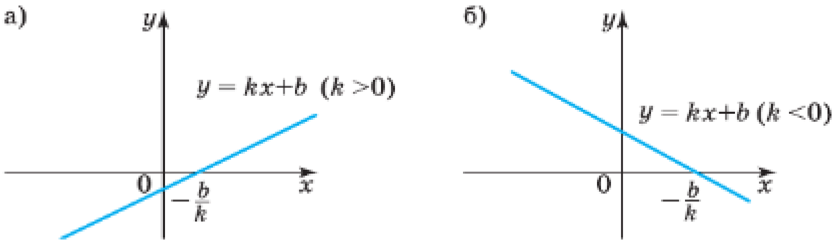


Рис. 68

1. *Функция определена при любых значениях переменной* x, т. е. $D(y) = \boldsymbol{R}$.

2. *Значением функции может быть любое число*, т. е. $E(y) = \boldsymbol{R}$.

3. *Функция обращается в нуль при* $x = -\frac{b}{k}$.

● Действительно, решим уравнение $kx + b = 0$, получим $kx = -b$, откуда $x = -\frac{b}{k}$. ○

4. *При* $k > 0$ *функция принимает отрицательные значения на промежутке* $\left(-\infty; -\frac{b}{k}\right)$ *и положительные значения на промежутке* $\left(-\frac{b}{k}; +\infty\right)$.

- Решив неравенства

$$kx + b < 0 \text{ и } kx + b > 0,$$

найдём, что если $k > 0$, то $y < 0$ при $x < -\frac{b}{k}$ и $y > 0$ при $x > -\frac{b}{k}$. ○

При $k < 0$ функция принимает отрицательные значения на промежутке $\left(-\frac{b}{k}; +\infty\right)$ и положительные значения на промежутке $\left(-\infty; -\frac{b}{k}\right)$.

- Убедиться в этом можно, решив неравенства

$$kx + b < 0 \text{ и } kx + b > 0$$

при условии, что $k < 0$. ○

5. *При $k > 0$ функция $y = kx + b$ является возрастающей, а при $k < 0$ — убывающей.*

- Докажем это. Пусть x_1 и x_2 — произвольные значения аргумента, причём $x_2 > x_1$. Обозначим через y_1 и y_2 соответствующие им значения функции:

$$y_1 = kx_1 + b \text{ и } y_2 = kx_2 + b.$$

Рассмотрим разность $y_2 - y_1$:

$$y_2 - y_1 = (kx_2 + b) - (kx_1 + b) = kx_2 - kx_1 = k(x_2 - x_1).$$

Множитель $x_2 - x_1$ положителен, так как $x_2 > x_1$. Поэтому знак произведения $k(x_2 - x_1)$ определяется знаком коэффициента k.

Если $k > 0$, то $k(x_2 - x_1) > 0$ и $y_2 > y_1$. Значит, при $k > 0$ функция $y = kx + b$ является возрастающей.

Если $k < 0$, то $k(x_2 - x_1) < 0$ и $y_2 < y_1$. Значит, при $k < 0$ функция $y = kx + b$ является убывающей. ○

Упражнения

1114. Постройте график функции и перечислите её свойства:
а) $y = 1{,}5x - 3$; б) $y = -0{,}6x + 5$.

1115. Постройте график функции: а) $y = 1{,}6x$; б) $y = -0{,}4x$. Перечислите свойства функции $y = kx$ при $k > 0$ и при $k < 0$.

1116. При каких значениях x функция $y = f(x)$ обращается в нуль, принимает положительные и отрицательные значения, если:
а) $f(x) = -0{,}7x + 350$; б) $f(x) = 30x + 10$?
Начертите схематически график функции и проиллюстрируйте на нём установленные свойства.

1117. Какие из линейных функций $y = 8x - 5$, $y = -3x + 11$, $y = -49x - 100$, $y = x + 1$, $y = 1 - x$ являются:
а) возрастающими; б) убывающими?

1118. Функция задана формулой $f(x) = 13x - 78$. При каких значениях x:

а) $f(x) = 0$; б) $f(x) > 0$; в) $f(x) < 0$?

Является ли функция возрастающей или убывающей?

1119. На рисунке 69 изображён график линейной функции $y = f(x)$. Какие из следующих утверждений о данной функции верны?

В ответе запишите их номера.

1) Функция является убывающей.
2) $x = -4$ — нуль функции.
3) $f(2) = 0$.
4) На промежутке $(-\infty; -4)$ функция принимает отрицательные значения.

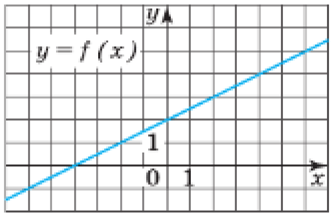


Рис. 69

1120. Функция задана формулой $f(x) = -1{,}5x + 6$. При каких значениях x выполняются условия $0 \leqslant f(x) \leqslant 3$? Получите ответ алгебраическим способом и проиллюстрируйте на графике.

1121. Линейная функция задана формулой $y = kx + 10$, где k — некоторое число. В каких координатных четвертях расположен график этой функции, если известно, что:

а) $k > 0$; б) $k < 0$; в) $k = 0$?

1122. Функция задана формулой $y = kx + b$, где k и b — некоторые числа. Покажите схематически, как располагается график в координатной плоскости, если:

а) $k > 0$, $b > 0$;
б) $k < 0$, $b > 0$;
в) $k < 0$, $b = 0$;
г) $k < 0$, $b < 0$;
д) $k = 0$, $b < 0$.

П

1123. Решите уравнение:

а) $0{,}6x^2 - 3{,}6x = 0$;
б) $c^2 - 5 = 0$;
в) $2x^2 + 17x = 0$;
г) $0{,}5x^2 + 9 = 0$.

1124. Сравните $g(2)$ и $g(-2)$, если:

а) $g(x) = \frac{1}{x^2 + 5}$; б) $g(x) = \frac{x}{x^2 + 5}$; в) $g(x) = \frac{-x}{x^2 + 5}$.

1125. Разложите на множители многочлен:

а) $4x - x^3$;
б) $a^4 - 169a^2$;
в) $c^3 - 8c^2 + 16c$.

45. Свойства функций $y = \frac{k}{x}$ и $y = \sqrt{x}$

На рисунке 70 изображён график функции $y = \frac{k}{x}$, где $k \neq 0$. Рассмотрим свойства этой функции.

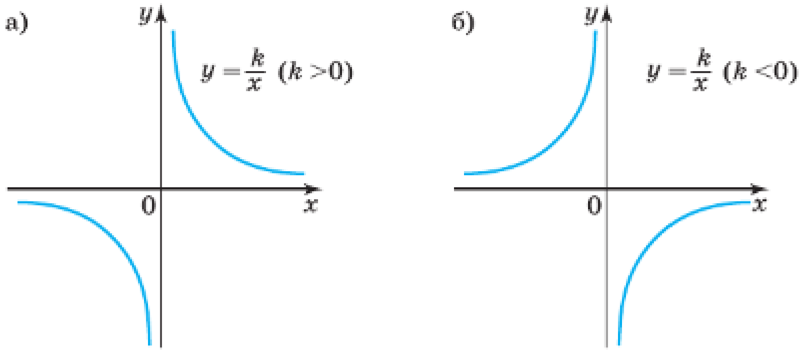


Рис. 70

1. *Функция определена для любых значений аргумента, кроме нуля*, т. е. $D(y) = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$.

2. *Значением функции может быть любое число, кроме нуля*, т. е. $E(y) = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$.

3. *Функция нулей не имеет.*

● Это следует из того, что дробь $\frac{k}{x}$ при любом значении аргумента в нуль не обращается (по условию $k \neq 0$). ○

4. *Функция* $y = \frac{k}{x}$ *при* $k > 0$ *принимает отрицательные значения на промежутке* $(-\infty;\ 0)$ *и положительные значения на промежутке* $(0;\ +\infty)$.

● Действительно, если $k > 0$, то дробь $\frac{k}{x}$ отрицательна при $x < 0$ и положительна при $x > 0$. ○

Функция $y = \frac{k}{x}$ *при* $k < 0$ *принимает отрицательные значения на промежутке* $(0;\ +\infty)$ *и положительные значения на промежутке* $(-\infty;\ 0)$.

Обоснование аналогично изложенному для случая $k > 0$.

5. *При* $k > 0$ *функция* $y = \frac{k}{x}$ *является убывающей на каждом из промежутков* $(-\infty;\ 0)$ *и* $(0;\ +\infty)$. *При* $k < 0$ *функция* $y = \frac{k}{x}$ *является возрастающей на каждом из этих промежутков* (см. рис. 70, *а*, *б*).

Доказательство этого свойства проводится аналогично тому, как это было сделано для линейной функции.

Заметим, что, хотя функция $y = \frac{k}{x}$, где $k \neq 0$, убывает (или возрастает) на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$, она не является ни убывающей, ни возрастающей функцией. В самом деле, эта функция монотонной не является.

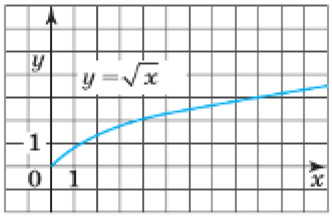


Рис. 71

Рассмотрим теперь свойства функции $y = \sqrt{x}$ (рис. 71).

1. *Функция определена при любых неотрицательных значениях аргумента*, т. е. $D(y) = [0; +\infty)$.

2. *Функция принимает только неотрицательные значения*, причём любое неотрицательное число может являться её значением, т. е. $E(y) = [0; +\infty)$.

3. *Функция обращается в нуль при $x = 0$.*

4. *Функция является возрастающей.*

Докажем это. Пусть x_1 и x_2 — произвольные значения аргумента, причём $x_2 > x_1 > 0$. Обозначим через y_1 и y_2 — соответствующие им значения функции: $y_1 = \sqrt{x_1}$ и $y_2 = \sqrt{x_2}$.

Рассмотрим разность $y_2 - y_1$:

$$y_2 - y_1 = \sqrt{x_2} - \sqrt{x_1} = \left(\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1}\right) \cdot \frac{\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1}}{\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1}} =$$

$$= \frac{\left(\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1}\right) \cdot \left(\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1}\right)}{\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1}} = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1}} > 0.$$

Так как $x_2 - x_1 > 0$ и $\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1} > 0$, то функция $y = \sqrt{x}$ является возрастающей.

Упражнения

1126. На рисунке 72 изображён график функции $y = f(x)$.
Какие из следующих утверждений являются верными? В ответе запишите их номера.

1) Функция является убывающей.
2) $x = 3$ — нуль функции.
3) На промежутке (0; 3) функция принимает положительные значения.
4) $f(-3) + f(2) > 0$.

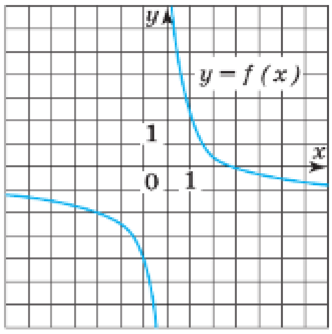


Рис. 72

1127. Какие из прямых

$$y = 25,\ y = 0{,}09,\ y = 10,\ y = -4$$

пересекают график функции $y = \sqrt{x}$? Для прямых, пересекающих график, укажите абсциссы точек пересечения.

1128. Используя график функции $y = \sqrt{x}$, постройте в той же системе координат график функции:

а) $y = 2\sqrt{x}$; б) $y = -\sqrt{x}$; в) $y = \sqrt{-x}$.

1129. Постройте в одной системе координат графики функций $y = \sqrt{x}$ и $y = x$.

а) Укажите координаты их общих точек.

б) При каких значениях x график функции $y = \sqrt{x}$ расположен выше прямой $y = x$ и при каких значениях x он расположен ниже этой прямой?

1130. Дана функция $f(x) = \sqrt{x}$. Укажите значения аргумента x, при которых выполняется условие:

а) $f(x) > 10$; б) $3 < f(x) < 5$.

Проиллюстрируйте свой ответ на графике.

1131. Постройте график функции и перечислите её свойства:

а) $y = \frac{3}{x}$; б) $y = -\frac{4}{x}$.

1132. Изобразите схематически в одной системе координат графики функции $y = \frac{1}{x}$ и $y = \frac{2}{x}$. Имеют ли эти графики общие точки? Обоснуйте свой ответ алгебраически.

1133. Функция задана формулой $y = \frac{4}{x}$. При каких значениях x:

а) функция принимает значение, равное: 8; −8;

б) функция принимает значение, меньшее 4;

в) функция принимает значение, большее 2?

1134. Является ли возрастающей или убывающей функция:

а) $y = 5x + \sqrt{x}$; б) $y = -x + \sqrt{-x}$; в) $y = x^2 + \sqrt{x}$?

П

1135. Решите систему неравенств $\begin{cases} \frac{x+1}{10} - \frac{x}{6} \leqslant \frac{x}{10} + \frac{1-x}{30}, \\ \frac{x}{3} - \frac{x+5}{12} < \frac{x}{4} - \frac{x-5}{24}. \end{cases}$

П

1136. Сравните значения выражений:

а) $5\sqrt{2}+3\sqrt{5}$ и $3\sqrt{7}+\sqrt{45}$;

б) $6\sqrt{2}-2\sqrt{7}$ и $4\sqrt{3}-\sqrt{28}$;

в) $5\sqrt{3}+3\sqrt{5}$ и $\sqrt{75}+7\sqrt{2}$;

г) $\sqrt{112}-2\sqrt{5}$ и $4\sqrt{7}-\sqrt{23}$.

Контрольные вопросы и задания

1 Приведите примеры возрастающей и убывающей линейной функции. Сформулируйте и докажите соответствующее свойство линейной функции.

2 Что называется нулём функции? Укажите нуль функции, заданной формулой $y = kx + b$, где $k \neq 0$. Может ли линейная функция не иметь нулей?

3 Как изменяется на каждом из промежутков $(-\infty;\ 0)$ и $(0;\ +\infty)$ функция $y = \frac{k}{x}$? Рассмотрите случаи $k > 0$ и $k < 0$.

4 Перечислите свойства функции, заданной формулой $y = \sqrt{x}$. Может ли эта функция принимать значение, равное 9, –4, 8? Если может, то при каком значении аргумента?

Для тех, кто хочет знать больше

46. Целая и дробная части числа

Рассмотрим две новые функции и построим их графики. Сначала введём понятия целой и дробной части числа.

> **Определение.** Целой частью числа x называется наибольшее целое число, не превосходящее x.

Целая часть числа x обозначается так: $[x]$.

Приведём примеры:

$$[5{,}7] = 5;\ \left[10\frac{5}{6}\right] = 10;\ [-7] = -7;\ [-8{,}2] = -9.$$

> **Определение.** Дробной частью числа x называется разность между числом и его целой частью.

Дробная часть числа x обозначается так: $\{x\}$. Таким образом, $\{x\} = x - [x]$.

Например,

$\{12{,}4\} = 12{,}4 - 12 = 0{,}4;$

$\{-3{,}5\} = -3{,}5 - [-3{,}5] = -3{,}5 - (-4) = 0{,}5;$ $\{7\} = 0.$

Выясним, что представляет собой график функции $y = [x]$.

Если $0 \leqslant x < 1$, то $[x] = 0$. Значит, на промежутке $[0; 1)$ график функции $y = [x]$ совпадает с прямой $y = 0$. Но так как $[1] = 1$, то при $x = 1$ график совершает «скачок».

Если $1 \leqslant x < 2$, то $[x] = 1$, значит, на промежутке $[1; 2)$ значения равны 1, а при $x = 2$ график опять совершает «скачок».

Рассматривая последовательно промежутки

$[2; 3), [3; 4), \ldots, [-1; 0), [-2; -1), \ldots,$

получаем график, состоящий из «ступенек» (рис. 73).

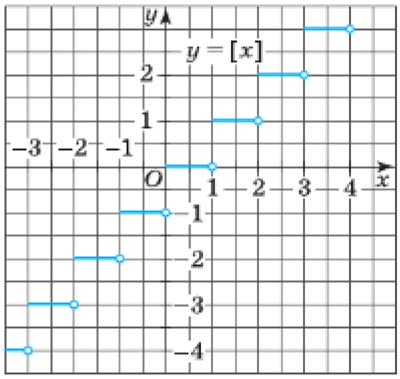


Рис. 73

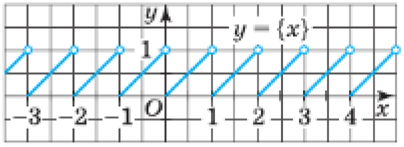


Рис. 74

Теперь рассмотрим график функции $y = \{x\}$. Для этого воспользуемся определением дробной части числа: $\{x\} = x - [x]$.

Имеем: если $0 \leqslant x < 1$, то $[x] = 0$, значит, $\{x\} = x - 0$ и график на этом промежутке совпадает с прямой $y = x$.

Если $1 \leqslant x < 2$, то $[x] = 1$, а $\{x\} = x - 1$, и график на этом промежутке совпадает с прямой $y = x - 1$ и т. д. График изображён на рисунке 74.

Упражнения

1137. Найдите $[a]$, если $a = 4{,}7;\ 98;\ -2\frac{2}{3};\ -0{,}01$.

1138. Найдите $\{c\}$, если $c = 5;\ -\frac{8}{9};\ -0{,}95;\ 0;\ 1{,}17$.

1139. Найдите целую и дробную части числа π.

1140. Известно, что $x = 2{,}7$. Найдите: $2[x]$; $[2x]$; $[-2x]$.

1141. Известно, что $x = 4{,}8$. Найдите: $\{3x\}$; $\{-3x\}$.

1142. Постройте график функции:

а) $y = 2[x]$; б) $y = [2x]$; в) $y = -[x]$.

1143. Постройте график функции $y = -\{x\}$.

Дополнительные упражнения к главе V

К параграфу 13

1144. Найдите область определения функции:

а) $y = \frac{1}{6x} + \frac{1}{6+x}$; б) $y = \sqrt{x} - \sqrt{x-4}$; в) $y = \frac{1}{1+\frac{1}{x}}$.

1145. Длина прямоугольника $ABCD$ (рис. 75) равна 10 см, а ширина — 7 см. Отрезок MN передвигается от отрезка AD до отрезка BC, оставаясь параллельным отрезку AD. Площадь y (см^2) закрашенной части есть функция расстояния x (см) от точки D до точки N. Задайте функцию $y = f(x)$ формулой. Найдите множество значений этой функции.

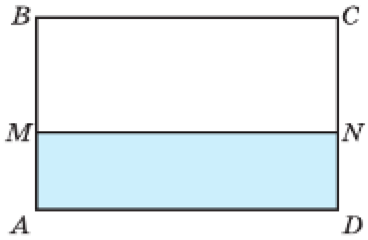


Рис. 75

1146. В равнобедренном треугольнике ABC основание AC равно 6 см, а боковая сторона — 5 см. Концы подвижного отрезка, параллельного основанию, лежат на боковых сторонах. Его длина равна y (см), а расстояние от вершины — x (см). Задайте формулой y как функцию от x. Найдите множество значений этой функции.

1147. Функция задана формулой $y = \frac{1}{x^2+1}$. Пересекает ли её график ось x? ось y? В каких координатных четвертях расположен график этой функции?

1148. Катер отправляется от пристани A и идёт вниз по реке к пристани B, до которой 60 км. После двухчасовой стоянки на пристани B он возвращается обратно. Расстояние l (км), пройденное катером от пристани A, зависит от времени t (ч), отсчитываемого с момента отправления катера из A до момента возвращения. Собственная скорость катера 16 км/ч, скорость течения реки 4 км/ч. Задайте l как функцию от t формулами, постройте график функции, опишите по графику её свойства и объясните их физический смысл.

1149. Начертите график какой-нибудь функции, областью определения которой является промежуток $[-3; 4]$, а множеством значений — промежуток $[0; 6]$.

1150. Найдите нули функции (если они существуют):

а) $y = \frac{2x + 11}{10}$; б) $y = \frac{6}{8 - 0,5x}$; в) $y = \frac{3x^2 - 12}{4}$.

1151. Известно, что $y = f(x)$ и $y = g(x)$ — возрастающие (убывающие) функции. Докажите, что функция $\varphi = f(x) + g(x)$ является возрастающей (убывающей) функцией.

1152. Известно, что $y = f(x)$ — возрастающая функция и a — некоторое число. Докажите, что уравнение $f(x) = a$ имеет не более одного корня.

1153. Решите уравнение:

а) $\sqrt{x} + x^2 = 18$; б) $x^3 + 5x = 6$.

1154. Какие из функций, заданных формулами

$$y = x^2, \quad y = x^2 + 5, \quad y = 2x + 5,$$
$$y = x^3, \quad y = -x^2, \quad y = -x^2 - 4,$$
$$y = \sqrt{x}, \quad y = \sqrt{x} + 1, \quad y = x^4 + x^2 + 6,$$

сохраняют знак на всей области определения?

1155. На рисунке 76 изображён график одной из функций:

$y = \sqrt{x - 1}$, $y = \sqrt{x + 1}$, $y = \sqrt{1 - x}$.

Какой именно?

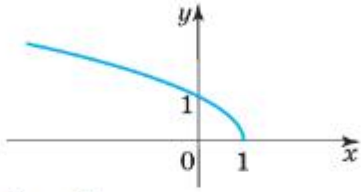


Рис. 76

1156. Какой из трёх графиков, изображённых на рисунке 77, является графиком функции $y = |x - 2|$?

1157. Постройте график функции $y = \frac{6}{|x|}$ и опишите её свойства.

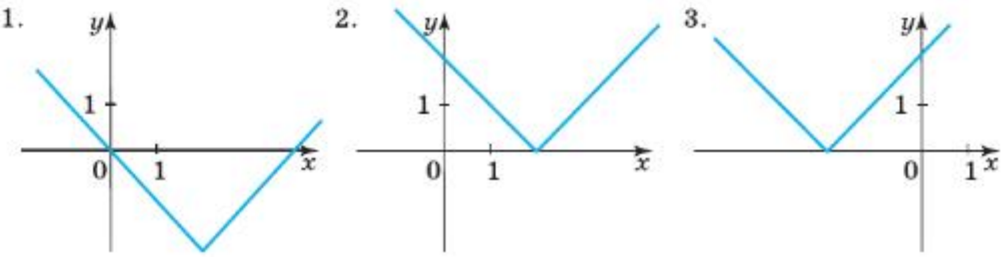


Рис. 77

К параграфу 14

1158. Функция задана формулой $y = 3{,}5x - 7$. Задайте формулой какую-нибудь линейную функцию, график которой пересекает график первой функции:
а) в точке, расположенной в третьей координатной четверти;
б) в точке, расположенной на оси x;
в) в точке, расположенной на оси y.

1159. Функция задана формулой $y = -2x + 6$. Задайте формулой функцию, график которой параллелен графику данной функции и проходит:
а) через начало координат;
б) через точку $(-4; 0)$;
в) через точку $(0; 3)$;
г) через точку $(-2; 2)$.

1160. При каких значениях a функция $y = (a - 2)x + 3$:
а) является возрастающей;
б) является убывающей;
в) не является ни возрастающей, ни убывающей?

1161. Дана функция $g(x) = 1 - \sqrt{x}$. Расположите в порядке возрастания значения этой функции при:

$$x = 0;\ x = 1;\ x = 0{,}25;\ x = 0{,}09;\ x = 36.$$

1162. Какие из прямых $y = 4x - 5$, $y = 0{,}5x - 2$, $y = -1$, $y = -x + 3$ имеют общие точки с графиком функции $y = \sqrt{x}$?

1163. Постройте график функции $y = \frac{4x+3}{4x^2+3x}$. Определите, при каких значениях k прямая $y = kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

1164. Постройте график функции и перечислите её свойства:

а) $y = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \leqslant 1, \\ \sqrt{x}, & \text{если } x > 1; \end{cases}$

б) $y = \begin{cases} (x-1)^2, & \text{если } x \leqslant 2, \\ -2x+5, & \text{если } 2 < x \leqslant 3. \end{cases}$

1165. С помощью графиков найдите приближённое значение корня уравнения $\sqrt{x} = \frac{2}{x}$.

1166. Постройте в одной системе координат в первой координатной четверти графики функций $y = x$, $y = x^2$, $y = x^3$, $y = \sqrt{x}$.
а) Укажите координаты точек, которые являются общими для всех этих графиков.

б) Опишите взаимное расположение этих графиков на отрезке $[0;\ 1]$ и на луче $[1;\ +\infty)$.

в) Глядя на рисунок, расположите в порядке возрастания числа: 0,37; $0{,}37^2$; $0{,}37^3$; $\sqrt{0{,}37}$.

г) Расположите в порядке убывания числа: 4,6; $4{,}6^2$; $4{,}6^3$; $\sqrt{4{,}6}$.

1167. Используя рисунок 52 на с. 237, перечислите свойства функций $y = x^2$, $y = x^3$, $y = \sqrt{x}$ и $y = |x|$.

1168. Графиком какой из функций — $y = \frac{4}{x}$ или $y = \frac{x}{4}$ — является гипербола?

1169. Какие из точек (5; 3), (10; −2), (−0,3; −50), (−0,4; 50) принадлежат графику функции:
а) $y = \frac{15}{x}$; б) $y = -\frac{20}{x}$?

1170. В одной системе координат постройте графики функций

$$y = \frac{1}{x},\ y = \frac{4}{x},\ y = -\frac{2}{x},\ y = -\frac{6}{x}.$$

Как зависит расположение графика функции $y = \frac{k}{x}$ от модуля коэффициента k?

1171. В одной системе координат постройте графики функций и найдите координаты их точек пересечения:
а) $y = -\frac{1}{x}$ и $y = -x$; б) $y = \frac{2}{x}$ и $y = x + 1$.

$$a^n = \frac{1}{a^{-n}}$$

Глава VI СТЕПЕНЬ С ЦЕЛЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

В этой главе будет продолжено изучение степеней. До сих пор вы имели дело только со степенями с натуральными показателями. Теперь вы встретитесь со степенями, показатели которых — целые отрицательные числа. Это позволит выполнять действия со степенями, показателями которых могут быть любые целые числа.

Использование степеней с целыми отрицательными показателями позволит записывать в стандартном виде не только большие, но и малые числа, что сделает запись вычислений более компактной.

§ 15 СТЕПЕНЬ С ЦЕЛЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ И ЕЁ СВОЙСТВА

47. Определение степени с целым отрицательным показателем

В справочной литературе можно найти сведения о том, что масса Солнца равна $1{,}989 \cdot 10^{33}$ г, а масса атома водорода равна $1{,}674 \cdot 10^{-24}$ г. Запись 10^{33} означает произведение тридцати трёх множителей, каждый из которых равен 10. А каков смысл записи 10^{-24}?

Выпишем последовательно степени числа 10 с показателями 0, 1, 2 и т. д.

Получим строку 10^0, 10^1, 10^2, 10^3, ...

В этой строке каждое число меньше следующего за ним в 10 раз. Продолжая строку по тому же закону влево, перед числом 10^0 следует написать число $\frac{1}{10} = \frac{1}{10^1}$, перед числом $\frac{1}{10^1}$ — число $\frac{1}{100} = \frac{1}{10^2}$, перед числом $\frac{1}{10^2}$ — число $\frac{1}{10^3}$ и т. д. Получим

$$\ldots,\ \frac{1}{10^3},\ \frac{1}{10^2},\ \frac{1}{10^1},\ 10^0,\ 10^1,\ 10^2,\ 10^3,\ \ldots \qquad (1)$$

В строке (1) справа от числа 10^0 показатель каждой степени на 1 меньше показателя следующей за ней степени. Распространяя этот закон на числа, стоящие слева от числа 10^0, их записывают в виде степени числа 10 с отрицательным показателем. Вместо $\frac{1}{10^1}$ пишут 10^{-1}, вместо $\frac{1}{10^2}$ пишут 10^{-2}, вместо $\frac{1}{10^3}$ пишут 10^{-3} и т. д. Получают

$$\ldots,\ 10^{-3},\ 10^{-2},\ 10^{-1},\ 10^0,\ 10^1,\ 10^2,\ 10^3,\ \ldots\ .$$

Итак, 10^{-1} означает $\frac{1}{10^1}$, 10^{-2} означает $\frac{1}{10^2}$, 10^{-3} означает $\frac{1}{10^3}$ и т. д. Такое соглашение принимается для степеней с любыми основаниями, отличными от нуля.

Определение. Если $a \neq 0$ и n — целое отрицательное число, то

$$a^n = \frac{1}{a^{-n}}.$$

Пользуясь этим определением, найдём, что

$$5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25};$$

$$(-3)^{-4} = \frac{1}{(-3)^4} = \frac{1}{81};$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(-\frac{1}{2}\right)^3} = -8.$$

Выражению 0^n при целом отрицательном n (так же как и при $n = 0$) не приписывают никакого значения; это выражение не имеет смысла.

Напомним, что при натуральном n это выражение имеет смысл и его значение равно нулю.

Вернёмся к примеру, рассмотренному в начале пункта. Теперь мы знаем, что запись $1{,}674 \cdot 10^{-24}$ г, выражающая массу атома водорода, означает

$$1{,}674 \cdot 10^{-24}\text{ г} = 1{,}674 \cdot \frac{1}{10^{24}}\text{ г} = 1{,}674 : 10^{24}\text{ г} = \underbrace{0{,}000\ldots0}_{24\text{ нуля}}1674\text{ г}.$$

Упражнения

1172. Замените степень с целым отрицательным показателем дробью:

а) 10^{-6}; г) x^{-20};
б) 9^{-2}; д) $(ab)^{-3}$;
в) a^{-1}; е) $(a+b)^{-4}$.

1173. Замените дробь степенью с отрицательным показателем:

а) $\frac{1}{10^2}$; б) $\frac{1}{6^7}$; в) $\frac{1}{x^7}$; г) $\frac{1}{y^{10}}$; д) $\frac{1}{7}$.

1174. Представьте числа:

а) 8, 4, 2, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ и $\frac{1}{8}$ в виде степени с основанием 2;

б) $\frac{1}{125}$, $\frac{1}{25}$, $\frac{1}{5}$, 1, 5, 25, 125 в виде степени с основанием 5.

1175. Представьте числа:

а) $\frac{1}{81}$, $\frac{1}{27}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{3}$, 1, 3, 9, 27, 81 в виде степени с основанием 3;

б) 100, 10, 1, 0,1, 0,01, 0,001, 0,0001 в виде степени с основанием 10.

1176. Вычислите:

а) 4^{-2}; в) $(-1)^{-9}$; д) $\left(\frac{1}{7}\right)^{-2}$; ж) $\left(1\frac{1}{2}\right)^{-5}$; и) $0{,}01^{-2}$;

б) $(-3)^{-3}$; г) $(-1)^{-20}$; е) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-3}$; з) $\left(-2\frac{2}{5}\right)^{-2}$; к) $1{,}125^{-1}$.

1177. Найдите значение выражения:

а) -10^{-4}; в) $(-0{,}8)^{-2}$; д) $-(-2)^{-3}$;
б) $-0{,}2^{-3}$; г) $(-0{,}5)^{-5}$; е) $-(-3)^{-2}$.

1178. Вычислите:

а) $(-4)^{-3}$; в) $\left(-\frac{3}{4}\right)^{-2}$; д) $-0{,}4^{-4}$;

б) $2{,}5^{-1}$; г) $\left(1\frac{1}{3}\right)^{-3}$; е) $-\left(2\frac{1}{2}\right)^{-2}$.

1179. Сравните с нулём значение степени:

а) 9^{-5}; в) $(-7,1)^{-6}$; д) $\left(-\frac{5}{6}\right)^{-5}$;

б) $2,6^{-4}$; г) $(-3,9)^{-3}$; е) $\left(2\frac{3}{4}\right)^{-2}$.

1180. Верно ли, что:
а) если $a > 0$ и n — целое число, то $a^n > 0$;
б) если $a < 0$ и n — чётное отрицательное число, то $a^n > 0$;
в) если $a < 0$ и n — нечётное отрицательное число, то $a^n < 0$?

1181. Найдите значение выражения x^p, если:
а) $x = -7$, $p = -2$; в) $x = 2$, $p = -6$;
б) $x = 8$, $p = -1$; г) $x = -9$, $p = 0$.

1182. Какое значение принимает выражение $-x^p$, если:
а) $x = -1$, $p = -2$; в) $x = 2$, $p = -1$;
б) $x = 0,5$, $p = -2$; г) $x = 0,5$, $p = -5$?

1183. Найдите значения выражений x^n и x^{-n}, если:

а) $x = \frac{1}{2}$, $n = 2$; в) $x = \frac{2}{3}$, $n = -2$;

б) $x = -\frac{1}{3}$, $n = 3$; г) $x = -1,5$, $n = 3$.

1184. Найдите значение выражения:
а) $8 \cdot 4^{-3}$; д) $3^{-2} + 4^{-1}$;
б) $-2 \cdot 10^{-5}$; е) $2^{-3} - (-2)^{-4}$;
в) $18 \cdot (-9)^{-1}$; ж) $0,5^{-2} + \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$;
г) $10 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right)^{-1}$; з) $0,3^0 + 0,1^{-4}$.

1185. Вычислите:
а) $6 \cdot 12^{-1}$; г) $1,3^0 - 1,3^{-1}$;
б) $-4 \cdot 8^{-2}$; д) $12 - \left(\frac{1}{6}\right)^{-1}$;
в) $6^{-1} - 3^{-2}$; е) $25 + 0,1^{-2}$.

1186. Представьте выражение в виде дроби, не содержащей степени с отрицательным показателем:
а) $3x^{-5}$; д) $x^{-1}c^{-3}$;
б) $x^{-4}y$; е) $-9yz^{-8}$;
в) $5ab^{-7}$; ж) $2(x + y)^{-4}$;
г) $5(ab)^{-7}$; з) $10x^{-1}(x - y)^{-3}$.

1187. Представьте в виде произведения дробь:

а) $\frac{3}{b^2}$; в) $\frac{2a^8}{c^5}$; д) $\frac{1}{x^2y^3}$; ж) $\frac{2a}{(a-2)^2}$;

б) $\frac{x}{y}$; г) $\frac{a^5}{7b^3}$; е) $\frac{(a+b)^2}{b^4c^4}$; з) $\frac{(c+b)^5}{2(a-b)^4}$.

1188. Представьте в виде дроби выражение:

а) $a^{-2} + b^{-2}$; в) $(a + b^{-1})(a^{-1} - b)$;

б) $xy^{-1} + xy^{-2}$; г) $(x - 2y^{-1})(x^{-1} + 2y)$.

1189. Преобразуйте в дробь выражение:

а) $(a^{-1} + b^{-1})(a + b)^{-1}$; б) $(a - b)^{-2}(a^{-2} - b^{-2})$.

1190. Определите множество значений x, при которых функция $y = (x - 2)^{-1}$ принимает:

а) положительные значения; б) отрицательные значения.

П

1191. При каких натуральных n дробь $\frac{(n-7)^2}{n}$ принимает натуральные значения?

1192. Найдите коэффициент обратной пропорциональности, зная, что её график проходит через точку:

а) $A(1{,}5;\ 8)$; б) $B(0{,}04;\ -25)$.

48. Свойства степени с целым показателем

Известные вам свойства степени с натуральным показателем справедливы и для степени с любым целым показателем (нужно только предполагать, что основание степени не равно нулю).

Для каждого $a \neq 0$ и любых целых m и n

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \quad (1)$$

$$a^m : a^n = a^{m-n}, \quad (2)$$

$$(a^m)^n = a^{mn}, \quad (3)$$

для каждых $a \neq 0$, $b \neq 0$, и любого целого n

$$(ab)^n = a^nb^n \quad (4)$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}. \quad (5)$$

Эти свойства можно доказать, опираясь на определение степени с целым отрицательным показателем и свойства степени с натуральным показателем.

Докажем, например, справедливость свойства (1) (основного свойства степени) для случая, когда показатели степеней — целые отрицательные числа. Иначе говоря, докажем, что если k и p — натуральные числа и $a \neq 0$, то $a^{-k} \cdot a^{-p} = a^{-k-p}$.

Имеем

$$a^{-k} \cdot a^{-p} = \frac{1}{a^k} \cdot \frac{1}{a^p} = \frac{1}{a^k \cdot a^p} = \frac{1}{a^{k+p}} = a^{-(k+p)} = a^{-k-p}.$$

Заменяя степени a^{-k} и a^{-p} дробями $\frac{1}{a^k}$ и $\frac{1}{a^p}$ и дробь $\frac{1}{a^{k+p}}$ степенью $a^{-(k+p)}$, мы воспользовались определением степени с целым отрицательным показателем. Заменяя произведение $a^k a^p$ степенью a^{k+p}, мы использовали основное свойство степени с натуральным показателем.

Из свойств степени вытекает, что действия над степенями с целыми показателями выполняются по тем же правилам, что и действия над степенями с натуральными показателями.

Пример 1. Преобразуем произведение $a^{-17} \cdot a^{21}$.

▶ При умножении степеней с одинаковыми основаниями основание оставляют тем же, а показатели степеней складывают. Имеем

$$a^{-17} \cdot a^{21} = a^{-17+21} = a^4. \triangleleft$$

Пример 2. Преобразуем частное $b^2 : b^5$.

▶ При делении степеней с одинаковыми основаниями основание оставляют прежним, а из показателя степени делимого вычитают показатель степени делителя. Имеем

$$b^2 : b^5 = b^{2-5} = b^{-3}. \triangleleft$$

Для степеней с натуральными и нулевым показателями мы могли применять правило деления степеней с одинаковыми основаниями в том случае, когда показатель степени делимого был не меньше показателя степени делителя. Теперь, после введения степеней с целыми показателями, это ограничение снимается: показатели степеней делимого и делителя могут быть любыми целыми числами.

Пример 3. Упростим выражение $(2a^3b^{-5})^{-2}$.

▶ Сначала применим свойство (4), а затем — свойство (3). Имеем

$$(2a^3b^{-5})^{-2} = 2^{-2} \cdot (a^3)^{-2}(b^{-5})^{-2} = \frac{1}{4}a^{-6}b^{10}. \triangleleft$$

Упражнения

1193. Найдите значение выражения:

а) $3^{-4} \cdot 3^{6}$; г) $2^{10} : 2^{12}$; ж) $(2^{-4})^{-1}$;

б) $2^{4} \cdot 2^{-3}$; д) $5^{-3} : 5^{-3}$; з) $(5^{2})^{-2} \cdot 5^{3}$;

в) $10^{8} \cdot 10^{-5} \cdot 10^{-6}$; е) $3^{-4} : 3$; и) $3^{-4} \cdot (3^{-2})^{-4}$.

1194. Вычислите:

а) $5^{-15} \cdot 5^{16}$; в) $4^{-8} : 4^{-9}$; д) $(2^{-2})^{-3}$;

б) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-4} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{3}$; г) $\left(\frac{1}{5}\right)^{2} : \left(\frac{1}{5}\right)^{4}$; е) $(0{,}1^{-3})^{-1}$.

1195. Докажите, что степени любого отличного от нуля числа с противоположными показателями взаимно обратны.

1196. Докажите, что $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{n}$ при любом целом n, $a \neq 0$ и $b \neq 0$.

1197. Вычислите:

а) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$; в) $0{,}01^{-2}$; д) $0{,}002^{-1}$;

б) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-1}$; г) $\left(1\frac{2}{3}\right)^{-4}$; е) $\left(-1\frac{1}{3}\right)^{-5}$.

1198. Представьте выражение в виде степени с основанием 3 и найдите его значение:

а) $27 \cdot 3^{-4}$; б) $(3^{-1})^{5} \cdot 81^{2}$; в) $9^{-2} : 3^{-6}$; г) $81^{3} : (9^{-2})^{-3}$.

1199. Представьте выражение в виде степени с основанием 2 и найдите его значение:

а) $\frac{1}{16} \cdot 2^{10}$; б) $32 \cdot (2^{-4})^{2}$; в) $8^{-1} \cdot 4^{3}$; г) $4^{5} \cdot 16^{-2}$.

1200. Представьте выражение, в котором m — целое число, в виде степени с основанием 5:

а) $5^{m} \cdot 5^{m+1} \cdot 5^{1-m}$; б) $(5^{m})^{2} \cdot (5^{-3})^{m}$; в) $625 : 5^{4m-2}$.

1201. Вычислите:

а) $8^{-2} \cdot 4^{3}$; в) $10^{0} : 10^{-3}$; д) $\frac{2^{-21}}{4^{-5} \cdot 4^{-6}}$; ж) $\frac{3^{-10} \cdot 9^{8}}{(-3)^{2}}$;

б) $9^{-6} \cdot 27^{5}$; г) $125^{-4} : 25^{-5}$; е) $\frac{4^{-2} \cdot 8^{-6}}{2^{-22}}$; з) $\frac{5^{-5} \cdot 25^{10}}{125^{3}}$.

1202. Найдите значение выражения:

а) $125^{-1} \cdot 25^2$; в) $(6^2)^6 : 6^{14}$; д) $\frac{(2^3)^5 \cdot (2^{-6})^2}{4^2}$;

б) $16^{-3} \cdot 4^6$; г) $12^0 : (12^{-1})^2$; е) $\frac{(3^{-2})^3 \cdot 9^4}{(3^3)^2}$.

1203. *(Для работы в парах.)* Зная, что m — целое число, сократите дробь:

а) $\frac{25^m}{5^{2m-1}}$; б) $\frac{6^m}{2^{m-1} \cdot 3^{m+1}}$.

1) Распределите, кто выполняет задание а), а кто — задание б), и выполните их.
2) Проверьте друг у друга, правильно ли выполнены задания.
3) Исправьте ошибки, если они допущены.

1204. Представьте какими-либо тремя способами выражение x^{-10} в виде произведения степеней.

1205. Представьте выражение a^{12}, где $a \neq 0$, в виде степени:
а) с основанием a^4; б) с основанием a^{-6}.

1206. Представьте в виде степени с основанием x частное:
а) $x^{10} : x^{12}$;
б) $x^0 : x^{-5}$;
в) $x^{n-1} : x^{-8}$, где n — целое число;
г) $x^6 : x^{n+2}$, где n — целое число.

1207. Упростите выражение:

а) $1{,}5ab^{-3} \cdot 6a^{-2}b$; г) $3{,}2x^{-1}y^{-5} \cdot \frac{5}{8}xy$;

б) $\frac{3}{4}m^{-2}n^4 \cdot 8m^3n^{-2}$; д) $\frac{1}{2}p^{-1}q^{-3} \cdot \frac{1}{6}p^2q^{-5}$;

в) $0{,}6c^2d^4 \cdot \frac{1}{3}c^{-2}d^{-4}$; е) $3\frac{1}{3}a^5b^{-18} \cdot 0{,}6a^{-1}b^{20}$.

1208. Найдите значение выражения:
а) $0{,}2a^{-2}b^4 \cdot 5a^3b^{-3}$ при $a = -0{,}125$, $b = 8$;
б) $\frac{1}{27}a^{-1}b^{-5} \cdot 81a^2b^4$ при $a = \frac{1}{7}$, $b = \frac{1}{14}$.

1209. Упростите выражение и найдите его значение:
а) $1{,}6x^{-1}y^{12} \cdot 5x^3y^{-11}$ при $x = -0{,}2$, $y = 0{,}7$;
б) $\frac{5}{6}x^{-3}y^3 \cdot 30x^3y^{-4}$ при $x = 127$, $y = \frac{1}{5}$.

1210. Представьте степень в виде произведения:

а) $(a^{-1}b^{-1})^{-2}$; в) $(0{,}5a^{-3}b^{5})^{-12}$; д) $\left(\frac{1}{3}p^{-2}q^{2}\right)^{-3}$;

б) $(x^{3}y^{-1})^{2}$; г) $(-2m^{5}n^{-3})^{2}$; е) $(-0{,}5x^{-3}y^{4})^{3}$.

1211. Преобразуйте в произведение:

а) $(6a^{-5}b)^{-1}$; в) $(-0{,}3x^{-5}y^{4})^{-2}$;

б) $\left(\frac{3}{4}a^{-1}b^{-3}\right)^{-2}$; г) $\left(\frac{7}{8}p^{-6}q\right)^{-1}$.

1212. Представьте в виде степени произведения выражение:

а) $0{,}0001x^{-4}$; в) $0{,}0081a^{8}b^{-12}$;

б) $32y^{-5}$; г) $10^{n}x^{-2n}y^{3n}$, где n — целое число.

1213. Упростите выражение:

а) $\frac{12x^{-5}}{y^{-6}}\cdot\frac{y}{36x^{-9}}$; в) $\frac{5x^{-1}y^{3}}{3}\cdot\frac{9x^{6}}{y^{-2}}$;

б) $\frac{63a^{2}}{2b^{-5}}\cdot\frac{18b^{2}}{7a}$; г) $\frac{16p^{-1}q^{2}}{5}\cdot\frac{25p^{6}}{64q^{-8}}$.

1214. Преобразуйте выражение:

а) $\frac{13x^{-2}}{y}\cdot\frac{y^{12}}{39x^{-3}}$; в) $\frac{p}{3c^{-2}}\cdot\frac{15c}{p^{-2}}$;

б) $\frac{5a^{5}}{b^{-7}}\cdot\frac{7b^{-3}}{25a}$; г) $\frac{26x^{17}}{y^{-8}}\cdot\frac{y}{13x^{25}}$.

1215. Упростите выражение:

а) $(0{,}25x^{-4}y^{-3})^{2}\cdot\left(\frac{x^{-3}}{4y^{2}}\right)^{-3}$; в) $\left(\frac{c^{-4}}{10a^{5}b^{2}}\right)^{-2}\cdot(5a^{3}bc^{2})^{-2}$;

б) $\left(\frac{a^{-3}b^{4}}{9}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{3}{a^{-2}b^{3}}\right)^{-3}$; г) $\left(\frac{x^{2}y^{-3}}{6z}\right)^{-3}\cdot\left(\frac{x^{2}y^{-2}}{9z}\right)^{2}$.

1216. Преобразуйте выражение:

а) $\left(\frac{2x^{-1}}{3y^{-2}}\right)^{-2}\cdot 12xy^{5}$; в) $(2a^{-2}b^{3})^{2}\cdot\left(\frac{a}{b}\right)^{-6}$;

б) $4a^{7}b^{-1}\cdot\left(\frac{ab}{5}\right)^{-1}$; г) $\left(\frac{2x^{2}}{y^{3}}\right)^{-1}\cdot(x^{-1}y)^{3}$.

1217. Известно, что x_1 и x_2 — корни уравнения $8x^2-6x+n=0$ и $x_1^{-1}+x_2^{-1}=6$. Найдите n.

1218. Решите уравнение

$$\frac{2x-7}{x+1}+\frac{3x+2}{x-1}=7.$$

1219. Найдите область определения функции:

а) $y=\frac{1}{|x|-x}$; б) $y=\frac{1}{|x|+x}$.

1220. Сократите дробь $\frac{\overline{ac}}{\overline{abc}}$, зная, что $b = a + c$.

Контрольные вопросы и задания

1. Сформулируйте определение степени с целым отрицательным показателем.
2. Сформулируйте свойства произведения и частного степеней с одинаковыми основаниями и целыми показателями.
3. Как возвести степень в степень?
4. Как возвести произведение и частное в степень?

§ 16 СТАНДАРТНЫЙ ВИД ЧИСЛА

49. Понятие стандартного вида числа

В науке и технике встречаются как очень большие, так и очень малые положительные числа. Например, большим числом выражается объём Земли — 1 083 000 000 000 км^3, а малым — диаметр молекулы воды, который равен 0,0000000003 м.

В обычном десятичном виде большие и малые числа неудобно читать и записывать, неудобно выполнять с ними какие-либо действия. В таком случае полезным оказывается представление числа в виде $a \cdot 10^n$, где n — целое число. Например:

$$125\,000 = 0{,}125 \cdot 10^6; \quad 0{,}0031 = 3{,}1 \cdot 10^{-3};$$
$$0{,}237 = 23{,}7 \cdot 10^{-2}.$$

Представим каждое из чисел 1 083 000 000 000 и 0,0000000003 в виде произведения числа, заключённого между единицей и десятью, и соответствующей степени числа 10:

$$1\,083\,000\,000\,000 = 1{,}083 \cdot 10^{12};$$
$$0{,}0000000003 = 3 \cdot 10^{-10}.$$

Говорят, что мы записали числа 1 083 000 000 000 и 0,0000000003 в *стандартном виде*. В таком виде можно представить любое положительное число.

> Стандартным видом числа a называют его запись в виде $a \cdot 10^n$, где $1 \leqslant a < 10$ и n — целое число. Число n называется *порядком числа* a.

Например, порядок числа, выражающего объём Земли в кубических километрах, равен 12, а порядок числа, выражающего диаметр молекулы воды в метрах, равен −10.

Порядок числа даёт представление о том, насколько велико или мало это число. Так, если порядок числа a равен 3, то это означает, что $1000 \leqslant a < 10\,000$. Если порядок числа a равен −2, то $0{,}01 \leqslant a < 0{,}1$. Большой положительный порядок показывает, что число очень велико. Большой по модулю отрицательный порядок показывает, что число очень мало.

Пример 1. Представим в стандартном виде число $a = 4\,350\,000$.

▶ В числе a поставим запятую так, чтобы в целой части оказалась одна цифра. В результате получим 4,35. Отделив запятой 6 цифр справа, мы уменьшили число a в 10^6 раз. Поэтому a больше числа 4,35 в 10^6 раз. Отсюда

$$a = 4{,}35 \cdot 10^6. \quad \triangleleft$$

Пример 2. Представим в стандартном виде число $a = 0{,}000508$.

▶ В числе a переставим запятую так, чтобы в целой части оказалась одна отличная от нуля цифра. В результате получится 5,08. Переставив запятую на четыре знака вправо, мы увеличили число a в 10^4 раз. Поэтому число a меньше числа 5,08 в 10^4 раз. Отсюда

$$a = 5{,}08 : 10^4 = 5{,}08 \cdot \frac{1}{10^4} = 5{,}08 \cdot 10^{-4}. \quad \triangleleft$$

Упражнения

1221. Назовите порядок числа, представленного в стандартном виде:

а) $1{,}2 \cdot 10^9$; в) $2{,}7 \cdot 10^{-3}$; д) $4{,}42 \cdot 10^5$;
б) $3{,}6 \cdot 10^3$; г) $6{,}3 \cdot 10^{-1}$; е) $9{,}28 \cdot 10^{-4}$.

1222. Запишите в стандартном виде число:

а) 52 000 000; в) 675 000 000; д) 0,00281;
б) 2 180 000; г) 40,44; е) 0,0000035.

1223. Запишите в стандартном виде:

а) $45 \cdot 10^3$; б) $117 \cdot 10^5$; в) $0{,}74 \cdot 10^6$; г) $0{,}06 \cdot 10^5$.

1224. Представьте число в стандартном виде:
а) 1 024 000; в) 21,56; д) 0,000004; ж) $508 \cdot 10^{-7}$;
б) 6 000 000; г) 0,85; е) 0,000282; з) $0,042 \cdot 10^{2}$.

1225. Масса Земли приближённо равна 6 000 000 000 000 000 000 000 т, а масса атома водорода 0,0000000000000000000000017 г. Запишите в стандартном виде массу Земли и массу атома водорода.

1226. Выразите:
а) $3,8 \cdot 10^3$ т в граммах; в) $8,62 \cdot 10^{-1}$ кг в тоннах;
б) $1,7 \cdot 10^{-4}$ км в сантиметрах; г) $5,24 \cdot 10^5$ см в метрах.

1227. Представьте:
а) $2,85 \cdot 10^8$ см в километрах;
б) $4,6 \cdot 10^{-2}$ м в миллиметрах;
в) $6,75 \cdot 10^{15}$ г в тоннах;
г) $1,9 \cdot 10^{-2}$ т в килограммах.

1228. Выполните умножение:
а) $(3,25 \cdot 10^2) \cdot (1,4 \cdot 10^3)$; б) $(4,4 \cdot 10^{-3}) \cdot (5,2 \cdot 10^4)$.

50. Решение задач с большими и малыми числами

Использование стандартного вида числа позволяет оперировать большими и малыми числами в самых разных ситуациях. Покажем, как удобна эта запись, если требуется сравнить очень большие числа.

Пример 1. В таблице приведены планеты Солнечной системы и для каждой из них указано её примерное расстояние до Солнца.

Выясним, какая из планет, ближе всего к Солнцу и какая — дальше всего от Солнца. Расположим планеты в порядке их удалённости от Солнца.

Планета	Расстояние, км
Земля	$1,5 \cdot 10^8$
Юпитер	$7,78 \cdot 10^8$
Меркурий	$5,8 \cdot 10^7$
Нептун	$4,497 \cdot 10^9$
Уран	$2,87 \cdot 10^9$
Сатурн	$1,42 \cdot 10^9$
Венера	$1,08 \cdot 10^8$
Марс	$2,28 \cdot 10^8$

▶ Все расстояния представлены в стандартном виде, т. е. нам известен порядок каждой из этих величин. Из таблицы видно, что наименьший порядок имеет число, равное $5,8 \cdot 10^7$, т. е. ближе всего к Солнцу находится Меркурий. Наибольший порядок, равный девяти, имеют числа, выражающие расстояния от Солнца до трёх планет — Нептуна, Урана и Сатурна. Так как порядок этих чисел один и тот же, то, чтобы узнать какое из расстояний больше, надо сравнить первые множители — числа 4,497; 2,87 и 1,42. Наибольшее из этих чисел — это число 4,497, значит, дальше всего от Солнца находится Нептун.

Один и тот же порядок, равный 8, имеют числа, выражающие расстояния от Солнца до планет Земля, Юпитер, Венера и Марс. Так как $1,08 < 1,5 < 2,28 < 7,78$, то расположение этих планет таково: Венера, Земля, Марс, Юпитер. Окончательно имеем: Меркурий, Венера, Земля, Марс, Юпитер, Сатурн, Уран, Нептун. ◁

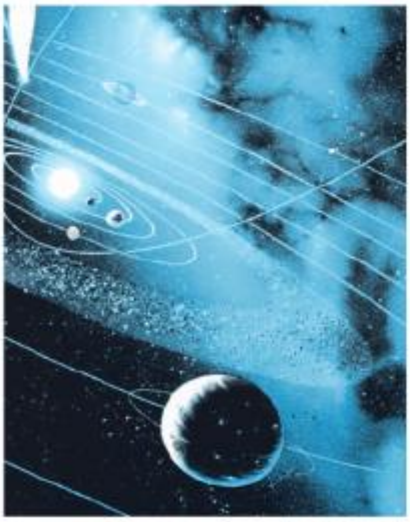
Стандартный вид числа удобен и при сравнении очень малых чисел.

Пример 2. В жизни нас постоянно сопровождают различные шумы. В акустике силу звука измеряют в Вт/см^2 (ватт на квадратный сантиметр). Сравним шорох листьев в лесу в тихую погоду (он оценивается как $1 \cdot 10^{-15}$ Вт/см^2) и шум на оживлённой городской улице ($1 \cdot 10^{-10}$ Вт/см^2).

▶ Из этого сравнения видно, что шум на городской улице на 5 порядков, т. е. в 100 000 раз, громче шороха листьев в лесу. Нетрудно сделать вывод о том, какой из этих «шумов» благоприятнее для человека. ◁

Упражнения

1229. Какой путь пройдёт свет за $2,8 \cdot 10^6$ с (скорость света равна $3 \cdot 10^5$ км/с)?



1230. *(Для работы в парах.)* а) Масса Земли $6,0 \cdot 10^{24}$ кг, а масса Марса $6,4 \cdot 10^{23}$ кг. Что больше: масса Земли или масса Марса — и во сколько раз? Результат округлите до десятых.

б) Масса Юпитера $1,90 \cdot 10^{27}$ кг, а масса Венеры $4,87 \cdot 10^{24}$ кг. Что меньше: масса Юпитера или масса Венеры — и во сколько раз? Результат округлите до единиц.

1) Распределите, кто выполняет задание а), а кто — задание б), и выполните их.

2) Проверьте друг у друга, правильно ли выполнены вычисления.

3) Исправьте допущенные ошибки.

4) Расположите указанные планеты в порядке возрастания их масс.

1231. Плотность железа $7{,}8 \cdot 10^3$ кг/м^3. Найдите массу железной плиты, длина которой 1,2 м, ширина $6 \cdot 10^{-1}$ м и толщина $2{,}5 \cdot 10^{-1}$ м.

1232. Числа записаны в стандартном виде:

$3{,}76 \cdot 10^5$; $1{,}9987 \cdot 10^5$; $5{,}001 \cdot 10^5$; $0{,}9999 \cdot 10^5$; $1{,}9899 \cdot 10^5$.
Расположите их:

а) в порядке возрастания; б) в порядке убывания.

1233. Числа записаны в стандартном виде:

$7{,}89 \cdot 10^2$; $1{,}11 \cdot 10^8$; $9{,}99 \cdot 10^{-8}$; $1{,}02 \cdot 10^{100}$; $1{,}11 \cdot 10^{11}$.
Расположите их:

а) в порядке возрастания; б) в порядке убывания.

1234. Самой длинной рекой в мире является Амазонка, её длина 7100 км. Вторая по протяжённости река — Нил. Её длина составляет 6670 км. Река Лена тянется на 5100 км, а река Меконг имеет протяжённость 4500 км. Запишите длину этих рек в стандартном виде.

1235. В стакане на 200 г содержится $66{,}822 \cdot 10^{23}$ молекул воды. Найдите вес одной молекулы воды и запишите его в стандартном виде.

1236. В атомной физике за единицу массы принята атомная единица массы (обозначается а. е. м.). Известно, что

$$1 \text{ а. е. м.} = 1{,}66 \cdot 10^{-24} \text{ г.}$$

Выразите в граммах массу одного атома водорода, меди, йода и азота, зная, что:
масса атома водорода равна 1,008 а. е. м.,
масса атома меди равна 63,546 а. е. м.,
масса атома йода равна 126,904 а. е. м.,
масса атома азота равна 14,007 а. е. м.

П

1237. Найдите значение выражения $(2-\sqrt{3})\sqrt{7+4\sqrt{3}}$.

1238. При каком значении m сумма корней уравнения

$$3x^2 - 18x + m = 0$$

равна произведению этих корней?

1239. Найдите целые отрицательные значения x, которые являются решением неравенства $\frac{4-3x}{2} - x < 11$.

1240. Замените a каким-либо натуральным числом так, чтобы не имела решений система неравенств:

а) $\begin{cases} 3x > 40{,}8, \\ 5x - a < 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 1 - 6x < 19, \\ 4x - a < 6. \end{cases}$

Контрольные вопросы и задания

1. Какую запись числа называют его стандартным видом?
2. Покажите на примере, как представить число в стандартном виде.

Для тех, кто хочет знать больше

51. Функции $y = x^{-1}$ и $y = x^{-2}$ и их свойства

Функция, которую можно задать формулой вида

$$y = x^n,$$

где x — независимая переменная и n — целое число, является *степенной функцией* с целым показателем.

Со степенными функциями $y = x^2$ и $y = x^3$ вы познакомились в курсе алгебры 7 класса. Вам знакома также степенная функция $y = x$ — она является частным случаем прямой пропорциональности $y = kx$ (при $k = 1$).

Рассмотрим теперь функции $y = x^{-1}$ и $y = x^{-2}$, выясним свойства этих функций и особенности их графиков. Отметим сразу, что областью определения каждой из этих функций является множество всех действительных чисел, кроме нуля.

Перечислим *свойства* функции $y = x^{-1}$ и особенности её графика.

1. Если $x > 0$, то $y > 0$; если $x < 0$, то $y < 0$.

В самом деле, x и y принимают значения одного знака.

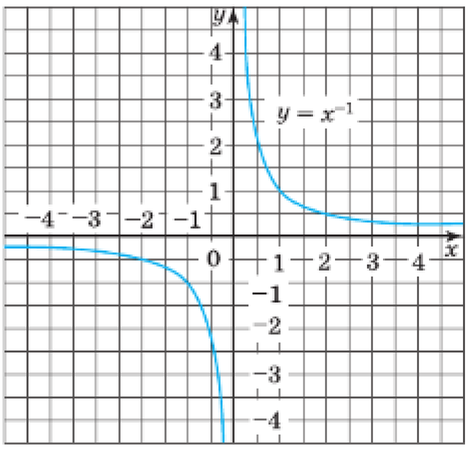


Рис. 78

Так как

$$x^{-1} = \frac{1}{x},$$

то графиком функции является гипербола, расположенная в первой и третьей четвертях координатной плоскости (рис. 78).

2. Противоположным значениям аргумента соответствуют противоположные значения функции.

Действительно, если x_0 и $-x_0$ — значения аргумента, то соответствующие им значения функции x_0^{-1} и $(-x_0)^{-1}$ также являются противоположными числами, так как

$$x_0^{-1} = \frac{1}{x_0}$$

и

$$(-x_0)^{-1} = -\frac{1}{x_0}.$$

Если точка $M(x_0; y_0)$ принадлежит графику функции $y = x^{-1}$, то точка $M'(-x_0; -y_0)$ также принадлежит графику этой функции. Значит, каждой точке $M(x_0; y_0)$ графика соответствует точка $M'(-x_0; -y_0)$ того же графика.

Точки, имеющие противоположные абсциссы и противоположные ординаты, симметричны относительно начала координат. Следовательно, график функции $y = x^{-1}$ симметричен относительно начала координат.

3. Если значения аргумента при $x > 0$ неограниченно возрастают ($x \to +\infty$), то соответствующие им значения функции, оставаясь положительными, неограниченно убывают, т. е. стремятся к нулю ($y \to 0$).

Если значения аргумента при $x > 0$ убывают, т. е. стремятся к нулю ($x \to 0$), **то соответствующие значения функции неограниченно возрастают** ($y \to +\infty$).

Если $x < 0$ и $x \to -\infty$, то $y \to 0$.

Если $x < 0$ и $x \to 0$, то $y \to -\infty$.

Таким образом, точки графика, удаляясь от оси y вправо или влево, всё больше приближаются к оси x, а удаляясь от оси x вверх или вниз, всё больше приближаются к оси y.

4. Значения аргумента и соответствующие им значения функции являются взаимно обратными числами.

Действительно, при любых значениях аргумента x верно равенство $xy = 1$. А это означает, что значения x и y являются взаимно обратными числами.

Если точка $M(a; b)$ принадлежит графику данной функции, то точка $M'(b; a)$ также принадлежит графику этой функции. Точки $M(a; b)$ и $M'(b; a)$ симметричны относительно прямой $y = x$. Значит, график функции $y = x^{-1}$ симметричен относительно прямой $y = x$.

Выясним теперь *свойства* функции $y = x^{-2}$ и особенности её графика.

1. При любом значении аргумента значения функции — положительные числа.

Это следует из того, что

$$x^{-2} = \frac{1}{x^2} > 0$$

при любом $x \neq 0$. Значит, график функции $y = x^{-2}$ расположен выше оси x.

2. Противоположным значениям аргумента соответствует одно и то же значение функции.

Действительно, если x_0 и $-x_0$ — значения аргумента, то x_0^{-2} и $(-x_0)^{-2}$ — соответствующие им значения функции, но

$$x_0^{-2} = (-x_0)^{-2}.$$

Отсюда следует, что каждой точке $M(x_0;\ y_0)$ графика функции соответствует точка $M'(-x_0;\ y_0)$ того же графика. Значит, график функции $y = x^{-2}$ симметричен относительно оси y.

3. Если $x \to +\infty$ или $x \to -\infty$, то $y \to 0$; если $x \to 0$, то $y \to +\infty$.

Действительно, если $|x|$ неограниченно возрастает ($|x| \to +\infty$), то $|x^{-2}|$ убывает, оставаясь положительным числом, т. е. y стремится к нулю. Если $|x| \to 0$, то x^{-2} неограниченно возрастает, т. е. $x^{-2} \to +\infty$.

Основываясь на этих свойствах, можно построить график функции $y = x^{-2}$.

Вычислим значения y для некоторых положительных значений аргумента.

x	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4
y	9	4	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{16}$

Построим в координатной плоскости точки, координаты которых помещены в таблице. Соединив эти точки плавной непрерывной линией, получим одну ветвь графика функции. Вторую ветвь, расположенную во второй координатной четверти, построим симметрично первой относительно оси y. График функции $y = x^{-2}$ изображён на рисунке 79.

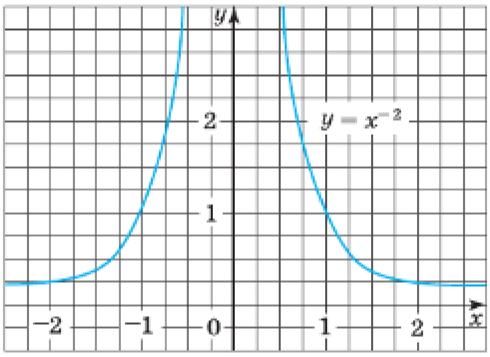


Рис. 79

Упражнения

1241. Известно, что точки $A\left(a; \frac{1}{247}\right)$ и $B(843; b)$ принадлежат гиперболе $y = x^{-1}$. Найдите a и b.

1242. Постройте в одной системе координат графики функций $y = x$ и $y = x^{-1}$. Выясните, при каких значениях аргумента верны равенство $x = x^{-1}$ и неравенства $x > x^{-1}$ и $x < x^{-1}$ в случае, если:

а) $x > 0$; б) $x < 0$.

1243. Докажите, что прямая $y = -x + l$, где l — некоторое положительное число, и гипербола $y = x^{-1}$:

а) имеют две общие точки, если $l > 2$;

б) имеют одну общую точку, если $l = 2$;

в) не имеют общих точек, если $l < 2$.

1244 Постройте график функции

$$y = \begin{cases} x, \text{ если } x \leqslant 0, \\ x^{-1}, \text{ если } x > 0. \end{cases}$$

Найдите:

а) значение y, если $x = -2$; 2;

б) значение x, при котором $y = -4$; 4.

1245. Постройте график функции $y = |x^{-1}|$. Как расположен этот график относительно оси y?

1246. Постройте в одной системе координат графики функций $y = x^{-1}$, где $x > 0$, и $y = x^{-2}$, где $x > 0$. Сравните значения x^{-1} и x^{-2}, если:

а) $0 < x < 1$; б) $x > 1$.

1247. Известно, что точки $A\left(a; \frac{1}{2601}\right)$ и $B(0{,}0625; b)$ принадлежат графику функции $y = x^{-2}$. Найдите a и b.

1248. Расположите в порядке возрастания числа x_0^2, x_0, x_0^0, x_0^{-1}, x_0^{-2}, зная, что:

а) $0 < x_0 < 1$; б) $x_0 > 1$.

1249. Постройте график функции

$$y = \begin{cases} x^{-2}, \text{ если } -2 \leqslant x < -1, \\ x^2, \text{ если } -1 \leqslant x \leqslant 1, \\ x^{-2}, \text{ если } 1 < x \leqslant 2. \end{cases}$$

Сколько общих точек имеет этот график с прямой $y = a$ в случае, когда:

а) $a = 2$; б) $a = 1$; в) $a = \frac{1}{2}$; г) $a = 0$?

1250. Дана функция

$$y = \begin{cases} x^{-1}, \text{ если } x < -\frac{1}{2}, \\ 4x, \text{ если } -\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}, \\ x^{-1}, \text{ если } x > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Сколько корней имеет уравнение:

а) $y = 2$; б) $y = \frac{1}{3}$; в) $y = 0$; г) $y = -3$?

Дополнительные упражнения к главе VI

К параграфу 15

1251. Вычислите:

а) $-0{,}25^{-2} \cdot 100$; г) $0{,}1^{-1} + 1{,}1^0$; ж) $(-0{,}2)^3 \cdot (-0{,}1)^2$;

б) $0{,}01 \cdot (-0{,}5)^{-3}$; д) $3\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} - 0{,}5$; з) $-6^{-1} \cdot 36^2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3$;

в) $0{,}2^{-4} \cdot (-1{,}6)$; е) $-4^{-1} \cdot 5 + 2{,}5^2$; и) $-(-1)^0 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^5$.

1252. Преобразуйте выражение так, чтобы оно не содержало степеней с отрицательными показателями:

а) $\frac{am^{-2}}{a^{-1}b}$; б) $\frac{(a+b)b}{b^{-1}(a-b)}$; в) $\frac{2a^{-1}b^2}{(a+b)^{-2}}$.

1253. Представьте в виде дроби выражение:

а) $xy^{-2} - x^{-2}y$; в) $mn(n - m)^{-2} - n(m - n)^{-1}$;

б) $\left(\frac{x}{y}\right)^{-1} + \left(\frac{x}{y}\right)^{-2}$; г) $(x^{-1} + y^{-1})(x^{-1} - y^{-1})$.

1254. Упростите выражение:

а) $\frac{x^{-1}+y^{-1}}{(x+y)^2}$; б) $\frac{ab^{-1}-a^{-1}b}{a^{-1}-b^{-1}}$.

1255. Представьте выражение в виде степени с основанием 10 (n — целое число):

а) 100^n; б) $0{,}1 \cdot 100^{n+3}$; в) $0{,}01^n \cdot 10^{2-2n}$.

1256. Упростите выражение (n — целое число):

а) $\frac{49^n}{7^{2n-1}}$; б) $\frac{15^n}{3^{n-1} \cdot 5^{n+1}}$.

1257. Докажите, что значение выражения (m — целое число) не зависит от m:

а) $\frac{21^m}{3^{m-1} \cdot 7^{m+1}}$; б) $\frac{6^m \cdot 10^{m+1}}{2^{2m} \cdot 15^{m-1}}$.

1258. Представьте выражение $x^{-2}+x^{-1}+x$ в виде произведения двух множителей, один из которых равен:

а) x; б) x^{-1}; в) x^{-2}.

1259. В выражении $a^{-6}+a^{-4}$ вынесите за скобки множитель:

а) a^{-4}; б) a^{-6}.

1260. Упростите выражение: а) $\frac{x^5+x^{12}}{x^{-5}+x^{-12}}$; б) $\frac{a^5+a^6+a^7}{a^{-5}+a^{-6}+a^{-7}}$.

1261. Докажите, что при любом целом n верно равенство:

а) $2^n+2^n=2^{n+1}$; б) $2 \cdot 3^n+3^n=3^{n+1}$.

1262. Сократите дробь (n — целое число): а) $\frac{3^{n+1}-3^n}{2}$; б) $\frac{2^n+2^{-n}}{4^n+1}$.

1263. Докажите, что выражение принимает одно и то же значение при любых целых значениях переменных:

а) $\frac{2^m \cdot 3^{n-1}-2^{m-1} \cdot 3^n}{2^m \cdot 3^n}$; в) $\frac{5^m 4^n}{5^{m-2}2^{2n}+5^m 2^{2n-1}}$;

б) $\frac{5^{n+1} \cdot 2^{n-2}+5^{n-2} \cdot 2^{n-1}}{10^{n-2}}$; г) $\frac{21^n}{3^{n-1}7^{n+1}+3^n 7^n}$.

1264. Корни x_1 и x_2 уравнения $nx^2-5x+1=0$ связаны соотношением $x_1^{-2}+x_2^{-2}=13$. Найдите n.

К параграфу 16

1265. Выразите время в секундах и запишите полученное число в стандартном виде:
а) 1 ч; б) 1 сутки; в) 1 год; г) 1 век.

1266. Выполните действия над числами, записанными в стандартном виде:
а) $(3,4 \cdot 10^{15}) \cdot (7 \cdot 10^{-12})$; в) $(9,6 \cdot 10^{-12}) : (3,2 \cdot 10^{-15})$;
б) $(8,1 \cdot 10^{-23}) \cdot (2 \cdot 10^{21})$; г) $(4,08 \cdot 10^{11}) : (5,1 \cdot 10^{-7})$.

1267. Расстояние от Земли до звезды α Центавра равно $2,07 \cdot 10^5$ астрономическим единицам (астрономической единицей называется расстояние от Земли до Солнца, которое равно $1,495 \cdot 10^8$ км). Выразите это расстояние в километрах.

1268. В 1 ккал содержится $4,2 \cdot 10^3$ Дж. Сколько килокалорий в 1 Дж?

1269. В таблице даны обозначения кратных и дольных приставок и соответствующие им множители.

Приставка	Кратность	Обозначение	Приставка	Кратность	Обозначение
мега-	10^6	М	деци-	10^{-1}	д
кило-	10^3	к	санти-	10^{-2}	с
гекто-	10^2	г	милли-	10^{-3}	м
дека-	10^1	да	микро-	10^{-6}	мк

Используя таблицу, выразите:
а) $2,5 \cdot 10^2$ Мт в тоннах;
б) $3,1 \cdot 10^{10}$ мг в килограммах;
в) $1,5 \cdot 10^{-2}$ гл в литрах;
г) $7 \cdot 10^{-7}$ м в микрометрах;
д) $8,4 \cdot 10^{-4}$ ккал в калориях.

1270. Масса Земли $6,0 \cdot 10^{21}$ т, а масса Луны $7,35 \cdot 10^{19}$ т. На сколько тонн масса Земли больше массы Луны?

ЗАДАЧИ ПОВЫШЕННОЙ ТРУДНОСТИ

1271. Сократите дробь:

а) $\frac{x^4+a^2x^2+a^4}{x^3+a^3}$; б) $\frac{8a^{n+2}+a^{n-1}}{16a^{n+4}+4a^{n+2}+a^n}$.

1272. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x+y+z+u=5, \\ y+z+u+v=1, \\ z+u+v+x=2, \\ u+v+x+y=0, \\ v+x+y+z=4. \end{cases}$$

1273. Докажите, что уравнение $x^4-5x^3-4x^2-7x+4=0$ не имеет отрицательных корней.

1274. Найдите обыкновенную дробь со знаменателем 21, заключённую между дробями $\frac{5}{14}$ и $\frac{5}{12}$.

1275. Какой цифрой оканчивается сумма $54^{35}+28^{21}$?

1276. Решите уравнение $x^2-2x+y^2-4y+5=0$.

1277. Найдите сумму квадратов корней уравнения $x^2+12x+30=0$.

1278. Найдите корни уравнения $x^2-2x-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}-13=0$.

1279. Найдите все двузначные числа $\overline{ab}$, где $b>a$, при которых значение дроби $\frac{\overline{ab}}{a+b}$ равно целому числу.

1280. Найдите три различные обыкновенные дроби вида $\frac{x}{x+1}$, сумма которых равна натуральному числу.

1281. Найдите целые значения x, при которых функция

$$y = \sqrt{20 + 2\sqrt{91 + 6x - x^2}} - \sqrt{20 - 2\sqrt{91 + 6x - x^2}}$$

принимает целые значения.

1282. Найдите все целые значения функции

$$y = \sqrt{12 + 2\sqrt{35 + 2x - x^2}} - \sqrt{12 - 2\sqrt{35 + 2x - x^2}},$$

которые она принимает при целых x.

1283. Представьте многочлен $x^8 + x^4 + 1$ в виде произведения четырёх многочленов ненулевой степени.

1284. Упростите выражение $\dfrac{\left(p^2 - \frac{1}{q^2}\right)^p \left(p - \frac{1}{q}\right)^{q-p}}{\left(q^2 - \frac{1}{p^2}\right)^q \left(q + \frac{1}{p}\right)^{p-q}}$. Укажите допустимые значения переменных.

1285. Функция y от x задана формулой $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, где $ad - bc \neq 0$. Пусть значениям аргумента x_1, x_2, x_3 и x_4 соответствуют значения функции y_1, y_2, y_3 и y_4. Докажите, что

$$\frac{y_3 - y_1}{y_3 - y_2} : \frac{y_4 - y_1}{y_4 - y_2} = \frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2} : \frac{x_4 - x_1}{x_4 - x_2}.$$

1286. Найдите все пары натуральных чисел, удовлетворяющие уравнению $x^2 - y^2 = 69$.

1287. Докажите, что сумма, разность, произведение и частное чисел вида $a + b\sqrt{2}$, где a и b — рациональные числа, могут быть представлены в таком же виде.

1288. Пара чисел $x = 3$, $y = 2$ является решением уравнения $(x + y\sqrt{2})(x - y\sqrt{2}) = 1$. Покажите, что существует бесконечно много других пар натуральных чисел, удовлетворяющих этому уравнению.

1289. При каком значении m сумма квадратов корней уравнения $x^2 + x + m = 0$ равна 13?

1290. Решите уравнение $(x^2 - a^2)^2 = 4ax + 1$ относительно x.

1291. Найдите наименьшее значение выражения

$$(a - 1)(a - 2)(a - 5)(a - 6) + 9.$$

1292. Сумма квадратов корней уравнения $x^2 + px + 1 = 0$ равна 254. Найдите коэффициент p.

1293. При каком значении a сумма квадратов корней уравнения $x^2 + (a - 1)x - 2a = 0$ равна 9?

1294. Докажите, что при любом натуральном n, большем 2, корни уравнения $x + \frac{1}{x} = n$ — иррациональные числа.

1295. Докажите, что функция $y = \sqrt{x^2 + 2\sqrt{2}x + 2} + \sqrt{x^2 - 2\sqrt{2}x + 2}$, где $-\sqrt{2} \leqslant x \leqslant \sqrt{2}$, линейная.

1296. Из города M в город N вышел автобус со скоростью 40 км/ч. Через четверть часа он встретил ехавшую из города N легковую автомашину. Эта машина доехала до города M, через 15 мин выехала обратно в город N и обогнала автобус в 20 км от города N. Найдите расстояние между городами M и N, если скорость легковой автомашины 50 км/ч.

1297. Два мальчика стартовали по беговой дорожке длиной 50 м с интервалом 1 с. Мальчик, стартовавший вторым, догнал первого в 10 м от линии старта, добежал до конца дорожки и побежал обратно с той же скоростью. На каком расстоянии от конца дорожки он встретил первого мальчика, если известно, что эта встреча произошла через 10 с после старта первого мальчика?

1298. Расстояние между пристанями A и B теплоход проходит по течению за 5 ч, а против течения — за 6 ч. За сколько часов проплывает по течению это расстояние плот?

1299. Катер прошёл по течению 90 км за некоторое время. За то же время он прошёл бы против течения 70 км. Какое расстояние за это время проплывёт плот?

1300. Из пунктов A и B одновременно навстречу друг другу выехали два велосипедиста и встретились в 30 км от пункта B. Прибыв в пункты A и B, они повернули обратно. Вторая встреча произошла в 18 км от пункта A. Найдите расстояние между пунктами A и B.

1301. Из A в B и из B в A выехали одновременно два мотоциклиста. Первый прибыл в B через 2,5 ч после встречи, а второй прибыл в A через 1,6 ч после встречи. Сколько часов был в пути каждый мотоциклист?

1302. Из A в B и из B в A выехали одновременно два автомобиля и встретились через 3 ч. Первый автомобиль пришёл в B на 1,1 ч позже, чем второй в A. Во сколько раз скорость второго автомобиля больше скорости первого?

1303. Заготовленную в карьере руду первый самосвал может вывезти на 3 ч быстрее, чем второй. Если треть руды вывезет первый самосвал, а потом оставшуюся часть вывезет второй, то будет затрачено на $7\frac{1}{3}$ ч больше, чем при одновременной работе обоих самосвалов. За сколько часов может вывезти руду каждый самосвал?

1304. Два слесаря получили задание. Для его выполнения первому слесарю понадобится на 7 ч больше, чем второму. После того как оба слесаря выполнили половину задания, работу пришлось заканчивать одному второму слесарю, и поэтому задание было выполнено на 4,5 ч позднее, чем если бы всю работу они выполнили вместе. За сколько часов мог бы выполнить задание каждый слесарь?

1305. Дано двузначное число. Число его единиц на 3 меньше числа десятков. Произведение этого числа и числа, записанного теми же цифрами в обратном порядке, равно 574. Найдите данное число.

1306. Найдите члены пропорции $x_1 : x_2 = x_3 : x_4$, в которой первый член на 6 больше второго, а третий на 5 больше четвёртого. Сумма квадратов всех членов равна 793.

1307. Из города по двум взаимно перпендикулярным дорогам вышли в разное время два пешехода. Скорость первого пешехода 4 км/ч, а второго — 5 км/ч. Сейчас первый находится в 7 км от города, а второй — в 10 км. Через сколько часов расстояние между пешеходами будет равно 25 км?

1308. Докажите, что если $a + c = 2b$ и $2bd = c(b + d)$, причём $b \neq 0$ и $d \neq 0$, то $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

1309. Постройте график функции, заданной формулой $y = -\frac{1}{\sqrt{x}}$.

1310. Постройте график функции, заданной формулой:

а) $y = |x + 2| + |x - 2|$; б) $y = |x + 1| - |x - 1|$.

1311. Постройте график функции, заданной формулой $y = x + \frac{1}{x}$.

1312. Пересекает ли график функции $y = \frac{3x + 1}{x}$ прямую:

а) $x = 0$; б) $y = 0$; в) $x = 3$; г) $y = 3$?

1313. Постройте график функции:

а) $y = \frac{2x + 3}{x}$; в) $y = \frac{12}{x - 4}$;

б) $y = \frac{4 - 5x}{x}$; г) $y = -\frac{6}{x + 3}$.

1314. Докажите, что графиком уравнения $xy - 2x + 3y - 6 = 0$ является пара пересекающихся прямых.

1315. Докажите, что графиком уравнения $(y - 2)(y + 3) = 0$ является пара параллельных прямых.

1316. Постройте график уравнения:

а) $xy + 3x = 0$;
б) $(x - y)(y - 5) = 0$;
в) $(xy - 6)(y - 3) = 0$;
г) $(x - y)^2 + (x - 1)^2 = 0$;
д) $x^2 - 4 = 0$;
е) $y^2 - 9 = 0$.

1317. Докажите, что если числа a, b и c таковы, что $a + b \neq 0$, $b + c \neq 0$, $c + a \neq 0$, то при

$$x = \frac{a-b}{a+b}, \quad y = \frac{b-c}{b+c}, \quad z = \frac{c-a}{c+a}$$

верно равенство

$$(1 + x)(1 + y)(1 + z) = (1 - x)(1 - y)(1 - z).$$

1318. На плоскости отмечено несколько точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Через каждые две точки проведена прямая. Сколько точек отмечено на плоскости, если известно, что всего проведено 45 прямых?

1319. Учитель раздал ученикам 27 карточек, на каждой из которых было написано целое число, и попросил вместо этого числа написать по очереди на доске куб этого числа или его квадрат. Возникающие одинаковые числа с доски стирались. Приведите пример исходного набора чисел, чтобы на доске в итоге оказалось наименьшее возможное количество чисел, если все исходные числа на карточках различны?

1320. Докажите тождество

$$\sqrt{\frac{a^2 + 6ab + 25b^2}{a - 2\sqrt{ab} + 5b} - 4b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}.$$

1321. Сколько решений имеет система уравнений

$$\begin{cases} x(x-2) = y + 12x, \\ xy - 5 = 0? \end{cases}$$

1322. Докажите, что система уравнений не имеет решений:

а) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 0{,}09, \\ y = x^2 + 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y = x^2 + 5, \\ y + x^2 = -2. \end{cases}$

1323. Решите графическим способом систему уравнений:

а) $\begin{cases} y - x^2 = -1, \\ y - 2x = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} xy - 1 = 0, \\ y + x^2 = 3. \end{cases}$

1324. Найдите решения системы уравнений:

а) $\begin{cases} (2x - y)(2x + y) = 3, \\ 2y - 3(x + y) = -4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2(x - y) + y = 5, \\ (2x - y)^2 = 5x + 15. \end{cases}$

1325. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} \dfrac{2}{y-1} + \dfrac{3}{x+1} = \dfrac{5}{2}, \\ \dfrac{1}{x-2} = -\dfrac{3}{y}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{1}{y+1} = \dfrac{2}{x-1}, \\ \dfrac{4}{x+2} + \dfrac{1}{y-1} = \dfrac{1}{3}. \end{cases}$

1326. Найдите решения системы уравнений:

а) $\begin{cases} x^2 - 3y^2 - y = -6, \\ 2x^2 - 3y^2 = -4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x^2 + xy = 16, \\ 3x^2 + xy - x = 18. \end{cases}$

1327. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 7xy + 2x^2 - 4y^2 = 0, \\ x^2 - 5xy + y = -11; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 6x^2 + 2xy - 3x - y = 0, \\ 2x^2 - y^2 + 2x + y = \dfrac{3}{2}. \end{cases}$

1328. Найдите решения системы уравнений

$$\begin{cases} xy = -2, \\ (x - y)^2 + x + y = 10. \end{cases}$$

1329. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 2x^2 + 4xy - 5y = 1, \\ x^2 + xy - 6y^2 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x(3x - 2y) = y^2, \\ 3y^2 = 2x(x + 2) - 3. \end{cases}$

1330. Найдите решения системы уравнений:

а) $\begin{cases} 2x^2 - xy = y^2 + 5, \\ x^2 - xy = y^2 + 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x^2 - 2y^2 = 2xy - 1, \\ 2x^2 - y^2 = 2xy - 1. \end{cases}$

1331. От пристани отправился первый катер. Через 1 ч вслед за ним отправился второй катер и догнал первый в 30 км от пристани. Если бы с момента отправления второго катера первый катер увеличил скорость на 10 км/ч, то второй догнал бы его в 90 км от пристани. Найдите скорость каждого катера.

1332. Артель выполнила работу за 20 дней. Если бы в артели было на 4 человека больше и рабочий день увеличился бы на 1 ч, то работа была бы выполнена за 10 дней. Если бы в артели было на 1 человека меньше, а рабочий день сократился на 1 ч, то для выполнения работы потребовалось бы 30 дней. Сколько человек было в артели и какой продолжительности был у них рабочий день?

1333. Благодаря применению в фермерском хозяйстве новых технологий урожайность гречихи возросла на 4 ц с 1 га. В результате было собрано не 147 ц, как в прошлом году, а на 3 ц больше, хотя под гречиху отвели на 1 га меньше. Какова была урожайность гречихи с 1 га в прошлом и текущем годах и какая площадь была отведена в эти годы в фермерском хозяйстве под гречиху?

1334. (Задача Безу, XVIII в.) Некто купил лошадь и спустя некоторое время продал её за 24 пистоля. При этом он потерял столько процентов, сколько стоила ему лошадь. За какую сумму он её купил?

1335. Положив в банк 2000 р., вкладчик получил через два года 2420 р. Какой процент начислял банк ежегодно?

1336. Вкладчик положил деньги в банк и получил через год 2220 р. Если бы вклад был на 200 р. больше, а банк выплачивал на 1% меньше, то вкладчик получил бы 2420 р. Какова была сумма вклада и какой процент выплачивал банк ежегодно?

1337. Фирма ежегодно увеличивала количество выпускаемых приборов на одно и то же число процентов. В результате за два года количество выпускаемых приборов удвоилось. Сколько процентов составлял ежегодный прирост числа выпускаемых приборов?

1338. Бассейн наполнится, если первую трубу открыть на 12 мин, а вторую — на 7 мин. Если же обе трубы открыть на 6 мин, то наполнится $\frac{2}{3}$ бассейна. За сколько минут наполнится бассейн, если открыть только вторую трубу?

1339. Один каменщик может выложить стену на 6 ч быстрее, чем другой. При совместной работе они за 2 ч выложат половину стены. За сколько часов каждый из них может выложить стену?

1340. Расстояние в 360 км легковой автомобиль проехал на 2 ч быстрее, чем грузовой. Если скорость каждого автомобиля увеличить на 30 км/ч, то грузовой автомобиль затратит на весь путь на 1 ч больше, чем легковой. Найдите скорость каждого автомобиля.

ИСТОРИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

О дробях

Простейшими дробями пользовались ещё в древности (2 тыс. лет до н. э.). Так, древние вавилоняне имели специальные обозначения для дробей $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$.

В Древнем Египте пользовались *единичными* дробями, т. е. дробями вида $\frac{1}{n}$, где n — натуральное число. Если в результате измерения получалось число $\frac{7}{8}$, то его записывали в виде суммы единичных дробей:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}.$$

Такой способ представления дробей был удобен в практическом отношении. Например, при решении задачи «Разделить 7 хлебов поровну между восемью лицами» этот способ подсказывал, что нужно иметь 8 половинок, 8 четвертинок и 8 осьмушек, т. е. 4 хлеба нужно разрезать пополам, 2 хлеба — на четвертушки и один хлеб — на осьмушки и распределить доли между лицами.

Одновременно с единичными дробями появились и *систематические* дроби, т. е. дроби, у которых числителями могут быть любые числа, а знаменателями — степени определённого числа (например, десяти, двенадцати, шестидесяти). Шестидесятеричные дроби использовались вплоть до XVII в. До сих пор единицы времени выражаются в шестидесятеричной системе:

$$1 \text{ минута} = \frac{1}{60} \text{ часа}, \ 1 \text{ секунда} = \frac{1}{60^2} \text{ часа}.$$

Систематическими дробями являются и десятичные дроби.

Дроби общего вида, у которых числители и знаменатели могут быть любыми натуральными числами, появляются в некоторых сочинениях древнегреческого учёного Архимеда (287—212 гг. до н. э.). Древние греки практически умели производить все действия над обыкновенными дробями. Однако современной записи дробей с помощью черты не было. Такая запись дроби была введена лишь в 1202 г. итальянским математиком Л. Фибоначчи (1180—1240) в его произведении «Книга абака». До этого дроби выражали словесно, применяли особую запись, в которой около числа, обозначающего знаменатель дроби, справа ставился штрих, использовались и другие способы записи. Долгое время дроби не называли числами. Иногда их называли «ломаными числами». Только в XVIII в. дроби стали воспринимать как числа. Этому способствовал выход в 1707 г. книги английского учёного И. Ньютона (1643—1727) «Всеобщая арифметика», в которой дроби не только признаются равноправными числами, но и происходит расширение понятия дроби как частного от деления одного выражения на другое. В этой книге, в частности, говорится:

«Запись одной из двух величин под другой, ниже которой между ними проведена черта, обозначает частное или же величину, возникающую при делении верхней величины на нижнюю. Так, $\frac{6}{2}$ означает величину, возникающую при делении 6 на 2..., $\frac{5}{8}$ — величину, возникающую при делении 5 на 8..., $\frac{a}{b}$ есть величина, возникающая при делении a на b..., $\frac{ab - bb}{a + x}$ означает величину, получающуюся при делении $ab - bb$ на $a + x$, и т. д. Величины такого рода называются дробями».

О действительных числах

Понятие числа зародилось в глубокой древности. На протяжении веков это понятие подвергалось расширению и обобщению. Необходимость выполнять измерения привела к появлению положительных рациональных чисел. Решение уравнений привело к появлению отрицательных чисел. Необходимость наряду с положительными числами рассматривать и отрицательные числа хорошо видна в задачах о прибылях и убытках. Впервые отрицательные числа появились в Китае.

Долгое время отрицательные числа считали «придуманными» и «ложными» и истолковывали их как «долг», как «недостачу».

Не сразу появилось и число нуль. Возможно, что специальный знак для нуля появился только в XIII в.

Правила действий над положительными и отрицательными числами длительное время рассматривались лишь для случаев сложения и вычитания. Например, индийские математики VII в. так формулировали эти правила: «Сумма двух имуществ есть имущество, сумма двух долгов есть долг, сумма имущества и долга равна их разности». Лишь в XVII в. с использованием метода координат, введённого Р. Декартом и П. Ферма, отрицательные числа были признаны в качестве равноправных с положительными.

С появлением отрицательных чисел операции сложения, вычитания и умножения чисел стали выполняться всегда.

Целые и дробные числа являются рациональными числами. Эти числа удобны для вычислений: сумма, разность, произведение и частное (при условии, что делитель отличен от нуля) двух рациональных чисел являются рациональным числом. Рациональные числа обладают свойством плотности, поэтому всякий отрезок можно с любой степенью точности измерить отрезком, принятым за единицу, и его долями и выразить результат измерения рациональным числом. Поэтому рациональные числа долгое время вполне обеспечивали (и обеспечивают до сих пор) практические потребности людей. Тем не менее задача измерения величин привела к появлению новых, иррациональных чисел. Ещё в Древней Греции в школе Пифагора (VI в. до н. э.) было доказано, что нельзя выразить рациональным числом диагональ квадрата, если за единицу измерения принять его сторону. Такие отрезки, как диагональ квадрата и его сторона, назвали несоизмеримыми. В дальнейшем (V—IV вв. до н. э.) древнегреческими математиками была доказана иррациональность $\sqrt{n}$ для любого натурального n, не являющегося точным квадратом.

Математики Индии, Ближнего и Среднего Востока, а позднее и Европы пользовались иррациональными величинами. Однако долгое время не признавали их за равноправные числа. Их признанию способствовало появление «Геометрии» Декарта. На координатной прямой каждое рациональное или иррациональное число изображается точкой, и, наоборот, каждой точке координатной прямой соответствует некоторое рациональное или иррациональное, т. е. действительное, число. С введением иррациональных чисел все «просветы» на координатной прямой оказались заполненными. Имея в виду это свойство, говорят, что множество действительных чисел (в отличие от множества рациональных чисел) является непрерывным.

Любое действительное число можно представить в виде бесконечной десятичной дроби (периодической или непериодической). В XVIII в. Л. Эйлер (1707—1783) и И. Ламберт (1728—1777) показали, что всякая бесконечная периодическая десятичная дробь является рациональным числом. Непериодическая бесконечная десятичная дробь представляет иррациональное число. Построение действительных чисел на основе бесконечных десятичных дробей было дано немецким математиком К. Вейерштрассом (1815—1897).

Другие подходы к изложению теории действительного числа были предложены немецкими математиками Р. Дедекиндом (1831—1916) и Г. Кантором (1845—1918).

О квадратных корнях

С давних пор наряду с отысканием площади квадрата по известной длине его стороны приходилось решать и обратную задачу: «Какой должна быть сторона квадрата, чтобы его площадь равнялась a?» Такую задачу умели решать ещё 4 тыс. лет назад вавилонские учёные. Они составляли таблицы квадратов чисел и имевшие большую точность таблицы квадратных корней из чисел.

Вавилоняне использовали метод приближённого извлечения квадратного корня, который состоял в следующем. Пусть a — некоторое число (имеется в виду натуральное число), не являющееся полным квадратом. Представим a в виде суммы $b^2 + c$, где c достаточно мало́ по сравнению с b^2. Тогда

$$\sqrt{a} = \sqrt{b^2 + c} \approx b + \frac{c}{2b}.$$

Например, если $a = 112$, то $\sqrt{112} = \sqrt{10^2 + 12} \approx 10 + \frac{12}{20} = 10{,}6.$

Проверка показывает, что $10{,}6^2 = 112{,}36$.

Указанный метод извлечения квадратного корня подробно описан древнегреческим учёным Героном Александрийским (I в. н. э.).

В эпоху Возрождения европейские математики обозначали корень латинским словом *Radix* (корень), а затем сокращённо буквой R (отсюда произошёл термин «радикал», которым принято называть знак корня). Некоторые немецкие математики XV в. для обозначения квадратного корня пользовались точкой. Эту точку ставили перед числом, из которого нужно извлечь корень. Позднее вместо точки стали ставить ромбик ♦, впоследствии знак $\vee$ и над выражением, из которого извлекается корень, проводили черту. Затем знак $\vee$ и черту стали соединять. Такие записи встречаются в «Геометрии» Декарта и «Всеобщей арифметике» Ньютона. Современная запись корня появилась в книге «Руководство алгебры» французского математика М. Ролля (1652—1719).

О квадратных уравнениях

Неполные квадратные уравнения и частные виды полных квадратных уравнений ($x^2 \pm x = a$) умели решать вавилоняне (около 2 тыс. лет до н. э.). Об этом свидетельствуют найденные клинописные тексты задач с решениями (в виде рецептов). Некоторые виды квадратных уравнений могли решать древнегреческие математики, сводя их решение к геометрическим построениям. Задачи на построения с помощью циркуля и линейки сводятся по существу к решению квадратных уравнений и рассмотрению выражений, содержащих квадратные корни.

Приёмы решения уравнений без обращения к геометрии даёт Диофант Александрийский (III в.). В дошедших до нас 6 из 13 книг «Арифметика» содержатся задачи с решениями, в которых Диофант объясняет, как надо выбрать неизвестное, чтобы получить решение уравнения вида $ax = b$ или $ax^2 = b$. Способ решения полных квадратных уравнений Диофант изложил в книгах «Арифметика», которые не сохранились.

Правило решения квадратных уравнений, приведённых к виду $ax^2 + bx = c$, где $a > 0$, дал индийский учёный Брахмагупта (VII в.). В трактате «Китаб аль-джебр валь-мукабала» хорезмский математик аль-Хорезми разъясняет приёмы решения уравнений, записываемых в современных обозначениях как уравнения вида $ax^2 = bx$, $ax^2 = c$, $ax^2 + c = bx$, $ax^2 + bx = c$, $bx + c = ax^2$ (буквами a, b и c обозначены лишь положительные числа, так как отрицательных чисел тогда не признавали), и отыскивает только положительные корни.

Общее правило решения квадратных уравнений, приведённых к виду $x^2 + bx = c$, было сформулировано немецким математиком М. Штифелем (1487—1567). Выводом формулы решения квадратных уравнений общего вида занимался Виет. Однако своё утверждение он высказывал лишь для положительных корней (отрицательных чисел он не признавал). После трудов нидерландского математика А. Жирара (1595—1632), а также Декарта и Ньютона способ решения квадратных уравнений принял современный вид.

Формулы, выражающие зависимость корней уравнения от его коэффициентов, были выведены Виетом в 1591 г. Для квадратного уравнения теорема Виета в современных обозначениях выглядела так: корнями уравнения $(a + b)x - x^2 = ab$ являются числа a и b.

О неравенствах

Понятия «больше» и «меньше» наряду с понятием равенства возникли в связи со счётом предметов и необходимостью сравнивать различные величины. Понятиями неравенства пользовались уже древние греки. Архимед, занимаясь вычислением длины окружности, установил, что «периметр всякого круга равен утроенному диаметру с избытком, который меньше седьмой части диаметра, но больше десяти семьдесят первых». Иначе говоря, Архимед указал границы числа π:

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}.$$

Ряд неравенств приводит в своём знаменитом трактате «Начала» Евклид. Он, например, доказывает, что среднее геометрическое двух положительных чисел не больше их среднего арифметического, т. е. что верно неравенство

$$\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}.$$

В «Математическом собрании» Паппа Александрийского (III в.) доказывается, что для положительных чисел a, b, c и d

$$\text{если } \frac{a}{b} > \frac{c}{d}, \text{ то } ad > bc.$$

Однако все эти рассуждения проводили словесно, опираясь в большинстве случаев на геометрическую терминологию. Современные знаки неравенств появились лишь в XVII—XVIII вв. Знаки $<$ и $>$ ввёл английский математик Т. Гарриот (1560—1621), знаки $\leqslant$ и $\geqslant$ — французский математик П. Буге (1698—1758).

СВЕДЕНИЯ ИЗ КУРСА АЛГЕБРЫ 7 КЛАССА

Выражения и их преобразования

1. Степенью числа a с натуральным показателем n, бо́льшим 1, называют произведение n множителей, каждый из которых равен a:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ раз}}.$$

Степенью числа a с показателем 1 называют само число a:

$$a^1 = a.$$

Степень числа $a \neq 0$ с показателем 0 равна 1:

$$a^0 = 1.$$

2. Свойства степеней с натуральными показателями:

а) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

При умножении степеней с одинаковыми основаниями основание оставляют прежним, а показатели складывают.

б) $a^m : a^n = a^{m-n}$, где $a \neq 0$, $m \geqslant n$.

При делении степеней с одинаковыми основаниями основание оставляют прежним, а из показателя степени делимого вычитают показатель степени делителя.

в) $(a^m)^n = a^{mn}$.

При возведении степени в степень основание оставляют прежним, а показатели перемножают.

г) $(ab)^n = a^n b^n$.

При возведении в степень произведения возводят в эту степень каждый множитель и результаты перемножают.

3. Одночленами называют произведения чисел, переменных и их степеней, а также сами числа, переменные и их степени. Например, $5a^2x$, $-3a^2b^3$, 4, x, y^5 — одночлены.

Степенью одночлена называют сумму показателей степеней всех переменных, входящих в одночлен. Например, степень одночлена $-8a^2b^4$ равна 6.

4. Многочленом называют сумму одночленов. Например, $3x^5 - 4x^2 + 1$, $7a^3b - ab^2 + ab + 6$ — многочлены. Одночлены считают многочленами, состоящими из одного члена.

Степенью многочлена стандартного вида называют наибольшую из степеней входящих в него одночленов. Например, степень многочлена $5x^3y + 3x^2y^5 + xy$ равна степени одночлена $3x^2y^5$, т. е. равна 7.

Степенью произвольного многочлена называют степень тождественно равного ему многочлена стандартного вида.

5. При сложении многочленов пользуются правилом раскрытия скобок: если перед скобками стоит знак «плюс», то скобки можно опустить, сохранив знак каждого слагаемого, заключённого в скобки. Например,

$$(3ab + 5c^2) + (ab - c^2) = 3ab + 5c^2 + ab - c^2 = 4ab + 4c^2.$$

При вычитании многочленов пользуются правилом раскрытия скобок: если перед скобками стоит знак «минус», то скобки можно опустить, изменив знак каждого слагаемого, заключённого в скобки. Например,

$$(6x^2 - y) - (2x^2 - 8y) = 6x^2 - y - 2x^2 + 8y = 4x^2 + 7y.$$

Чтобы умножить одночлен на многочлен, нужно умножить этот одночлен на каждый член многочлена и полученные произведения сложить. Например,

$$a^2(3ab - b^3 + 1) = 3a^3b - a^2b^3 + a^2.$$

Чтобы умножить многочлен на многочлен, нужно каждый член одного многочлена умножить на каждый член другого многочлена и полученные произведения сложить. Например,

$$(5x - 1)(3x + 2) = 15x^2 - 3x + 10x - 2 = 15x^2 + 7x - 2.$$

6. Формулы сокращённого умножения:

а) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Квадрат суммы двух выражений равен квадрату первого выражения плюс удвоенное произведение первого и второго выражений плюс квадрат второго выражения.

б) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

Квадрат разности двух выражений равен квадрату первого выражения минус удвоенное произведение первого и второго выражений плюс квадрат второго выражения.

в) $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Куб суммы двух выражений равен кубу первого выражения плюс утроенное произведение квадрата первого выражения и второго плюс утроенное произведение первого выражения и квадрата второго плюс куб второго выражения.

г) $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

Куб разности двух выражений равен кубу первого выражения минус утроенное произведение квадрата первого выражения и второго плюс утроенное произведение первого выражения и квадрата второго минус куб второго выражения.

д) $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$.

Произведение разности двух выражений и их суммы равно разности квадратов этих выражений.

е) $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$.

Сумма кубов двух выражений равна произведению суммы этих выражений и неполного квадрата их разности.

ж) $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$.

Разность кубов двух выражений равна произведению разности этих выражений и неполного квадрата их суммы.

7. Разложением многочлена на множители называют представление многочлена в виде произведения многочленов.

Для разложения многочленов на множители применяют вынесение общего множителя за скобки, группировку, формулы сокращённого умножения. Например, многочлен $5x^3 - x^2y$ можно разложить на множители, вынеся за скобки x^2: $5x^3 - x^2y = x^2(5x - y)$. Многочлен $3x - 3y - ax + ay$ можно разложить на множители, используя способ группировки:

$$3x - 3y - ax + ay = (3x - 3y) - (ax - ay) =$$
$$= 3(x - y) - a(x - y) = (x - y)(3 - a).$$

Многочлен $a^4 - 25x^2$ можно разложить на множители, используя формулу разности квадратов двух выражений:

$$a^4 - 25x^2 = (a^2)^2 - (5x)^2 = (a^2 - 5x)(a^2 + 5x).$$

Иногда многочлен удаётся разложить на множители, применив последовательно несколько способов.

8. Целые и дробные числа составляют множество рациональных чисел. Всякое рациональное число можно представить в виде дроби $\frac{m}{n}$, где m — целое число, а n — натуральное.

Каждое рациональное число может быть представлено в виде бесконечной периодической десятичной дроби. Каждая бесконечная периодическая десятичная дробь представляет собой некоторое рациональное число.

Уравнения

9. Корнем уравнения с одной переменной называют значение переменной, при котором уравнение обращается в верное равенство. Например, число 8 — корень уравнения $3x + 1 = 5x - 15$, так как верно равенство $3 \cdot 8 + 1 = 5 \cdot 8 - 15$.

Решить уравнение с одной переменной — значит найти все его корни или доказать, что корней нет.

10. Уравнения с одной переменной, имеющие одни и те же корни, называют равносильными. Например, уравнения $x^2 = 25$ и $(x + 5)(x - 5) = 0$ равносильны. Каждое из них имеет два корня: -5 и 5. Уравнения, не имеющие корней, также считают равносильными.

При решении уравнений с одной переменной используются следующие свойства:

если в уравнении перенести слагаемое из одной части в другую, изменив его знак, то получится уравнение, равносильное данному;

если обе части уравнения умножить или разделить на одно и то же отличное от нуля число, то получится уравнение, равносильное данному.

11. Линейным уравнением с одной переменной называют уравнение вида $ax = b$, где x — переменная, a и b — числа.

Если $a \neq 0$, то уравнение $ax = b$ имеет единственный корень $\frac{b}{a}$. Например, уравнение $7x = 2$ имеет корень $\frac{2}{7}$.

Если $a = 0$ и $b \neq 0$, то уравнение $ax = b$ не имеет корней. Например, уравнение $0 \cdot x = 7$ не имеет корней.

Если $a = 0$ и $b = 0$, то корнем уравнения $ax = b$ является любое число.

12. Решением уравнения с двумя переменными называют пару значений переменных, обращающую это уравнение в верное равенство. Например, пара чисел $x = -1$, $y = 4$ — решение уравнения $5x + 3y = 7$.

Уравнения с двумя переменными, имеющие одни и те же решения, называют равносильными. Уравнения с двумя переменными, не имеющие решений, также считают равносильными.

В уравнении с двумя переменными можно переносить слагаемые из одной части в другую, изменяя их знаки, и обе части уравнения можно умножать или делить на одно и то же число, не равное нулю. При этом получаются уравнения, равносильные исходному.

13. Линейным уравнением с двумя переменными называют уравнение вида $ax + by = c$, где x и y — переменные, a, b и c — числа.

14. Графиком уравнения с двумя переменными называют множество точек координатной плоскости, координаты которых являются решениями этого уравнения.

Графиком линейного уравнения с двумя переменными, в котором хотя бы один из коэффициентов при переменных не равен нулю, является прямая.

15. Решением системы уравнений с двумя переменными называют пару значений переменных, обращающую каждое уравнение системы в верное равенство. Например, пара чисел $x = 7$, $y = -1$ — решение системы $\begin{cases} x + y = 6, \\ 2x - y = 15, \end{cases}$ так как является верным каждое из равенств $7 + (-1) = 6$ и $2 \cdot 7 - (-1) = 15$.

Решить систему уравнений — значит найти все её решения или доказать, что решений нет.

Системы уравнений с двумя переменными, имеющие одни и те же решения, называют равносильными. Системы, не имеющие решений, также считают равносильными.

16. Для решения систем линейных уравнений с двумя переменными используются графический способ, способ подстановки, способ сложения.

При графическом способе строят графики линейных уравнений (прямые) и анализируют их расположение:

если прямые совпадают, то система имеет бесконечно много решений, причём координаты любой точки прямой являются решением системы;

если прямые параллельны, то система не имеет решений;

если прямые пересекаются, то система имеет единственное решение, причём координаты точки пересечения прямых являются решением системы.

При решении системы двух линейных уравнений с двумя переменными способом подстановки поступают следующим образом:

выражают из какого-либо уравнения системы одну переменную через другую;

подставляют в другое уравнение системы вместо этой переменной полученное выражение;

решают получившееся уравнение с одной переменной;

подставляют значение найденной переменной в одно из уравнений и находят соответствующее значение другой переменной.

При решении системы двух линейных уравнений с двумя переменными способом сложения поступают следующим образом:

умножают почленно уравнения системы, подбирая множители так, чтобы коэффициенты при одной из переменных стали в уравнениях противоположными числами;

складывают почленно левые и правые части уравнений системы;

решают получившееся уравнение с одной переменной;

подставляют значение найденной переменной в одно из уравнений и находят соответствующее значение другой переменной.

Функции

17. Функциональная зависимость, или функция, — это такая зависимость между двумя переменными, при которой каждому значению независимой переменной соответствует единственное значение зависимой переменной.

Независимую переменную иначе называют аргументом, а о зависимой переменной говорят, что она является функцией этого аргумента. Все значения, которые принимает независимая переменная, образуют область определения функции.

Графиком функции называют множество всех точек координатной плоскости, абсциссы которых равны значениям аргумента, а ординаты — соответствующим значениям функции.

18. Линейной функцией называют функцию, которую можно задать формулой вида $y = kx + b$, где x — независимая переменная, k и b — числа.

Графиком линейной функции $y = kx + b$ является прямая. Число k называют угловым коэффициентом прямой, являющейся графиком функции $y = kx + b$.

Если $k \neq 0$, то график функции $y = kx + b$ пересекает ось x; если $k = 0$ и $b \neq 0$, то прямая — график функции $y = kx + b$ параллельна оси x; если $k = 0$ и $b = 0$, то график функции совпадает с осью x.

Графики двух линейных функций пересекаются, если их угловые коэффициенты различны, и параллельны, если их угловые коэффициенты одинаковы.

Линейную функцию, задаваемую формулой $y = kx$ при $k \neq 0$, называют прямой пропорциональностью.

График прямой пропорциональности есть прямая, проходящая через начало координат. При $k > 0$ график расположен в первой и третьей координатных четвертях, а при $k < 0$ — во второй и четвёртой координатных четвертях.

19. График функции $y = x^2$ — парабола. Этот график проходит через начало координат и расположен в первой и второй координатных четвертях. Он симметричен относительно оси y.

График функции $y = x^3$ проходит через начало координат и расположен в первой и третьей координатных четвертях. Он симметричен относительно начала координат.

20. График функции $y = |x|$ состоит из двух лучей. Этот график проходит через начало координат и расположен в первой и во второй координатных четвертях. Он симметричен относительно оси y.

ТАБЛИЦА КВАДРАТОВ

Десятки	Единицы									
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801

Список дополнительной литературы

1. Агаханов Н. Х. Математика. Районные олимпиады. 6—11 классы / Н. Х. Агаханов, О. К. Подлипский. — М.: Просвещение, 2010.
2. Баврин И. И. Старинные задачи / И. И. Баврин, Е. А. Фрибус. — М.: Просвещение, 1994.
3. Волошинов А. В. Мудрость Эллады / А. В. Волошинов. — М.: Просвещение, 2009.
4. Всероссийская олимпиада школьников по математике. Смотрите в Интернете по адресу: http://gotourl/11390
5. Галкин Е. В. Задачи с целыми числами: 7—11 кл. / Е. В. Галкин. — М.: Просвещение, 2011.
6. Глейзер Г. И. История математики в школе: VII—VIII кл. / Г. И. Глейзер. — М.: Просвещение, 1982.
7. Государственная (итоговая) аттестация выпускников 9-х классов в новой форме. 9 класс. Смотрите в Интернете по адресу: http://gotourl/12489
8. Дорофеева А. В. Страницы истории на уроках математики / А. В. Дорофеева. — М.: Просвещение, 2007.
9. Игнатьев Е. И. В царстве смекалки, или Арифметика для всех. Кн. 1 / Е. И. Игнатьев. — М.: Просвещение, 2008.
10. Игнатьев Е. И. В царстве смекалки, или Арифметика для всех. Кн. 2 / Е. И. Игнатьев. — М.: Просвещение, 2008.
11. Игнатьев Е. И. В царстве смекалки, или Арифметика для всех. Кн. 3 / Е. И. Игнатьев. — М.: Просвещение, 2008.
12. Кордемский Б. А. Великие жизни в математике: кн. для учащихся 8—11 кл. / Б. А. Кордемский. — М.: Просвещение, 1995.
13. Кордемский Б. А. Удивительный мир чисел: мат. головоломки и задачи для любознательных: кн. для учащихся / Б. А. Кордемский, А. А. Ахадов. — М.: Просвещение, 1996.
14. Московский центр непрерывного математического образования. Рекомендуем рубрики: «Олимпиады для школьников», «Журнал „Квант“». Смотрите в Интернете по адресу: http://gotourl.ru/11388, http://gotourl.ru/11391
15. Перельман Я. И. Занимательная алгебра. Занимательная геометрия / Я. И. Перельман. — М.: АСТ, Астрель, 2005.
16. Пичурин Л. Ф. За страницами учебника алгебры / Л. Ф. Пичурин. — М.: Просвещение, 1999.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОТВЕТЫ

Глава I

4. а) -10; б) 2,5. **8.** $t = \frac{s}{v_1 + v_2}$; а) 2,5 ч; б) 2 ч. **12.** д) Все числа, кроме 6 и -6; е) все числа, кроме 0 и -7. **19.** а) При $a = 0$; б) при $a = 3$. **20.** а) При $b = 0$; б) при $b = 2$. **27.** а) $\frac{2b}{a^2}$; б) $\frac{1}{2x^2y}$; в) $\frac{p^2q^2}{2}$; г) $2m$; д) $-\frac{8b}{3c}$; е) $\frac{1}{3}$. **29.** а) 1; б) 3. **31.** а) $\frac{a+4b}{2ab}$; б) $\frac{3b-4c}{2b}$; в) $\frac{2}{3}$; г) $\frac{5x}{6}$; д) $\frac{1}{a}$; е) $3x$. **32.** а) $\frac{y-4}{3}$; б) $\frac{5}{x+3y}$; в) $\frac{c+2}{7c}$; г) $\frac{6c}{d-3}$; д) $\frac{a+5}{a-5}$; е) $\frac{y+3}{y-3}$. **33.** а) $\frac{1}{a+b}$; б) $a^2 + ab + b^2$. **34.** а) 100; б) 1,5. **35.** а) $\frac{x-2}{x}$; б) $\frac{3y}{y+8}$; в) $\frac{1}{a-1}$; г) $\frac{1}{b^2-2b+4}$. **36.** а) $3x - y$; б) $\frac{a}{2b-1}$; в) $\frac{1}{x-2}$; г) $1 - a + a^2$. **37.** а) $\frac{b+2}{7}$; б) $\frac{4}{b-d}$; в) $\frac{y-1}{x+y}$; г) $\frac{a+c}{a-x}$. **40.** а) -1; б) 1; в) $b - a$; г) $\frac{1}{a-b}$; д) $a + b$; е) 1. **42.** в) $-\frac{3}{b}$; г) $-\frac{1}{3}$; д) $-\frac{a+5}{3}$; е) $\frac{3}{1-x}$; ж) $\frac{8a+8b}{b-a}$; з) $b - 2$. **43.** а) $\frac{a+b}{b}$; б) $\frac{2-b}{5}$. **44.** а) x^2; б) $-y^4$; в) $-b^5$; г) $c^3 + c^2$. **45.** а) $-\frac{1}{8}$; б) 0,01. **46.** а) $4a - 4b$; б) $9c + 27d$; в) $\frac{9x+18y}{5}$; г) $\frac{2x-y}{50x+25y}$. **52.** а) $-3{,}2$; б) 0,1; в) 12; г) $-0{,}5$; д) 5. **58.** а) $\frac{27-13x}{x}$; б) $\frac{15p-2}{3p^2}$; в) $\frac{y-1}{y}$; г) $\frac{2p-11q}{5p}$; д) $-\frac{d}{c}$; е) $\frac{12}{b}$. **61.** а) 16,25; б) 6. **62.** Нет, так как необходимо убедиться, что $a^2 - 3ab \neq 0$. **64.** а) $\frac{7p}{p-q}$; б) 5; в) 1; г) -1; д) $\frac{1}{a+3}$; е) $y + 1$. **66.** а) $\frac{x+5}{x-5}$; б) $\frac{1}{x-5}$. **67.** а) $\frac{x-4}{x+4}$; б) $\frac{8+a}{8-a}$. **70.** При $n = 1, 2, 3, 6$. **72.** а) 7; б) 3; в) 1; г) -20. **76.** б) $\frac{2}{15}$; г) $\frac{3y^2-4b^2}{120by}$. **77.** а) $\frac{41a+13b}{36a}$; б) $\frac{9x+16}{24y}$. **78.** д) $\frac{4a^2-3ab-3b^2}{a^2b^2}$; е) $\frac{x^2-xy-2y^2}{x^2y^2}$. **79.** а) $\frac{2x^2-3}{12x^3}$; б) $\frac{2b-1}{6ab^2}$; в) $\frac{5a^2-6}{15a^5}$; г) $\frac{b^2x-2b}{6x^6}$. **80.** в) 0; г) $\frac{a}{b}$. **81.** а) $\frac{z-y}{yz}$; б) $\frac{a^2-b^2}{3ab}$; в) $-\frac{p^2+q^2}{p^3q^3}$;

г) $\frac{3m^2-2n^2}{6m^2n^2}$. **82.** д) $\frac{b}{a}$; е) $-\frac{1}{2p}$; ж) $\frac{a^2+b^2}{2a}$; з) $-\frac{b^2+c^2}{2b}$. **83.** в) $\frac{2a+3b+3}{3}$; г) $\frac{b^2+5b-1}{b}$. **84.** в) $\frac{a-6}{6}$; г) $\frac{41a-5}{12}$; д) $\frac{5b-3a}{4}$; е) $\frac{ab-b^2}{a}$. **85.** а) $\frac{3x+3y}{4}$; б) $-\frac{2x+2}{x}$; в) $\frac{36-5x+7y}{12}$; г) $-\frac{17a+17b+30}{15}$. **86.** д) $-\frac{4a}{a^2-4}$; е) $\frac{2p}{9p^2-1}$. **88.** а) $\frac{px-3p}{6x^2-x-2}$; б) $\frac{8ax+2ay}{x^2-xy-2y^2}$; в) $\frac{11a}{30x-60}$; г) $\frac{23b}{48a-144}$. **90.** а) $\frac{a+x}{x}$; б) $\frac{2y-b}{y}$. **91.** а) $\frac{1}{ab}$; б) $-\frac{1}{ab}$. **92.** д) $\frac{x^2-6x}{x-3}$; е) $-\frac{2}{a^2-1}$. **93.** а) $\frac{8a}{(a-5)(b+8)}$; б) $\frac{2y^2}{(2y+3)(3x-2)}$. **94.** а) $\frac{b-c}{b+c}$; б) $\frac{a+1}{a^2-a}$. **95.** а) $\frac{2-b}{b^2+2b}$; б) $\frac{b-5a}{ab+5a^2}$; в) $\frac{x-4a}{x^2+4ax}$; г) $\frac{a-10y}{a^2+10ay}$. **96.** а) $\frac{6a+8}{a^3-4a}$; б) $\frac{3x}{x^2-16}$; в) 2; г) 0. **97.** а) $-\frac{8}{15}$; б) $-\frac{8}{27}$. **98.** а) $\frac{1}{y+2}$; б) $\frac{3}{a-6}$; в) $\frac{x^2+y^2}{2(x-y)^2}$; г) $\frac{a^2}{b(b-a)^2}$. **99.** а) $-\frac{8}{2a+b}$; б) $\frac{36}{(a-3)^2(a+3)^2}$; в) $\frac{2x-4}{x^2+2x+4}$; г) $\frac{1}{a-1}$. **100.** а) $\frac{2}{a-4b}$; б) $\frac{1}{b}$. **105.** $t=\frac{2sv}{v^2-25}$; а) 4 ч 10 мин; б) 5 ч 20 мин. **106.** $t=\frac{3sv-2s}{v(v-2)}$; 6 ч 40 мин. **113.** в) $\frac{8a^2}{m}$; г) $\frac{4b}{a}$. **114.** в) $-\frac{4}{15xy}$; г) $-\frac{10a^2x}{9by^2}$. **115.** в) $\frac{13mx}{3n}$; г) $\frac{11x^2}{3ab}$. **116.** а) $\frac{a^2x^2}{5b^3}$; б) $\frac{m^2}{p^4}$. **117.** в) $\frac{n^6}{1000m^3}$; г) $\frac{81a^6}{4b^4}$. **118.** в) $\frac{4a^4b^2}{9m^2n^6}$; г) $-\frac{27x^6}{8y^9}$. **119.** в) $-\frac{1000m^6}{n^6p^3}$; г) $\frac{b^6c^4}{64a^6}$. **120.** 14. **122.** в) $\frac{y^2-2y}{3y+6}$; г) $\frac{2a^2b+6ab^2}{a-3b}$. **123.** а) $\frac{1}{axy}$; б) $\frac{4}{x^2}$. **124.** а) $\frac{y-4}{6x}$; б) $-\frac{3b}{a+b}$. **125.** в) $\frac{x^2+5x+6}{6}$; г) $\frac{y^2-11y+30}{4}$. **126.** а) 1; б) $-1\frac{1}{9}$; $-\frac{2}{21}$. **127.** а) $\frac{2a-2b}{a^2+ab}$; б) $\frac{bx-5b}{ax+5a}$. **131.** $\frac{a-4b}{a-b}$. **132.** а) 3 ч; б) 2 ч 31 мин. **133.** а) $x=\frac{a-b}{3}$; б) $x=\frac{2b-a}{7}$; в) $x=ab-a$; г) $x=10b-10a$. **136.** в) $\frac{2x}{3my^3}$; г) $\frac{450x^3}{ab}$. **138.** а) $\frac{5m^8}{3n^8}$; б) $\frac{2y}{x^2}$. **139.** а) $\frac{1}{x-3y}$; б) $\frac{a-3b}{a+3b}$. **140.** в) $\frac{ax^2}{44}$; г) $\frac{9}{4m}$; д) $\frac{a}{21b}$; е) $\frac{x^2+2xy}{5}$; ж) $\frac{6a-3b}{2a^2+ab}$; з) $\frac{10m}{2m-3n}$. **141.** г) $-\frac{9p+3}{q}$. **142.** а) $\frac{10}{11}$; -1; б) 0,42. **144.** а) $\frac{x+1}{a-x}$; б) $\frac{2ap-6a}{p^2+2p+4}$. **145.** а) $c=\frac{ab}{a+b}$; б) $b=\frac{ac}{a-c}$. **146.** а) $\frac{2}{2b-3}$; б) $\frac{c-b}{ac-3a^2}$. **147.** 2 км/ч.

150. а) $\frac{x-y}{y}$; б) $\frac{a^3}{m^4}$; в) $\frac{(a+b)^2}{b^2}$; г) 0. **151.** а) $\frac{2x+1}{2x-1}$; б) $-\frac{5y}{y+1}$; в) $-a$; г) x. **152.** а) $\frac{10}{2m+1}$; б) $\frac{2}{x-3}$. **153.** а) 6; б) 10. **154.** а) $\frac{16}{9-a^2}$; б) $\frac{6x-1}{4x^2-1}$; в) $-\frac{c}{a}$; г) $\frac{2a+2y}{ax-3a}$. **155.** а) $\frac{1+a}{1-a}$; б) $1{,}5x$; в) $\frac{a}{a+2}$; г) $y-5$. **156.** а) 1; б) a; в) x^2+1; г) $-m$. **157.** а) $2x^2+2xy$; б) $\frac{x-2y}{2xy}$. **158.** а) $\frac{3}{1-x}$; б) $\frac{a}{4a+8}$. **159.** При $a=1$; 36. **160.** При $b=0$; $\frac{1}{2}$. **165.** в) $\frac{2x^2+2y^2}{y^2}$; г) 4. **166.** а) $\frac{x-1}{x+1}$; б) 1; в) $\frac{x^3+y^3}{x^3-y^3}$; г) $\frac{ab+bc+ac}{a+b+c}$. **167.** а) $\frac{2x-a}{2x+a}$; б) $\frac{a-b+3c}{a+b-c}$; в) $\frac{y+x}{y-x}$; г) $\frac{xy}{x+y}$. **168.** а) $\frac{a^2}{b^2}$; б) $\frac{a}{b}$. **169.** а) $\frac{1}{x}$; б) $a+b$. **170.** а) 3; б) -1. **172.** а) 3,75; б) $3\frac{3}{7}$; в) 9,6. **173.** 72 км/ч. **174.** 4,8 ч. **175.** ≈ 10,2 км/ч. **177.** а) $y=3x+4$; б) $y=-\frac{1}{2}x$. **179.** 12 см и 32 см. **180.** Через 4 ч. **193.** а) $y=\frac{1}{x}$; б) $y=\frac{1{,}2}{x}$; в) $y=\frac{5}{x}$. **200.** $\frac{2}{x+7}$. **201.** $a=-6$, $b=12$. **204.** При a, равном -1, 1, 3, 5. **205.** а) -2; 2; б) -9; -8; 0; 1. **209.** $a=8$ и $b=56$; $a=14$ и $b=14$; $a=56$ и $b=8$. **210.** 30. **211.** $7\frac{21}{25}$. **213.** $v=\frac{60(10-t)}{t-3}$; 45 км/ч; 80 км/ч. **214.** д) Все числа, кроме -3 и 3; е) все числа. **218.** а) $\frac{a-c}{a+c}$; б) $\frac{(a+3)^2}{3-a}$; в) $-\frac{4y^2+2y+1}{2y^2+y}$; г) $\frac{25a}{5a+3b}$. **219.** а) $\frac{a-2}{a+b}$; б) $\frac{2x-y}{3x+2}$. **220.** а) $\frac{1}{b^7+1}$; б) $\frac{x^{11}-1}{x^{11}}$; в) $\frac{z}{xy-z^2}$; г) $1-ab$. **222.** а) $\frac{4}{9}$; б) $1\frac{1}{3}$; в) 45; г) $\frac{1}{9}$. **227.** а) При $n=1$, 2, 3, 6; б) при $n=3$, 4, 6, 12; в) при $n=1$, 2, 3. **228.** а) 6; б) 4; в) 0,2; г) 1,4. **229.** а) 2; б) $\frac{1}{3}$; в) 1; г) 0,5. **233.** а) $\frac{4}{2y+1}$; б) $\frac{20}{15a+8}$. **235.** а) $\frac{2y+30}{y^2-9}$; б) $\frac{8}{3-2a}$; в) $\frac{2m+1}{12m-6}$; г) $\frac{4y^2}{(x^2-y^2)^2}$; д) $\frac{6a^2+3}{a^3-1}$; е) $\frac{2x-2y}{x^2+xy+y^2}$. **237.** а) $\frac{1}{abc}$; б) 1. **239.** а) При $a=-6$; б) при $a=5$; в) при $a=6$; г) при $a=7$. **241.** а) При $n=\pm1$, ±3; б) при $n=\pm1$, ±3; ±9; в) при $n=-8$, -5, -4, -3, -1, 0, 1, 4. **242.** а) $a=2$, $b=3$; б) $a=8$, $b=3$. **243.** а) $\frac{(a+b)^2}{(a-b)^2}$; б) $\frac{(x-b)^2}{(x+b)^2}$. **247.** а) $\frac{ab}{a-b}$; б) $-xy$; в) $\frac{a}{(2a-b)^2}$; г) $\frac{(c+2)^2}{(c-2)^2}$. **248.** а) x^2-y^2; б) $-a$. **252.** а) $\frac{x-z}{y-z}$; б) $\frac{a^3+x^3}{a^3-x^3}$; в) $\frac{x+1}{2x+1}$; г) $x+1$. **254.** ≈ 9,4 ч. **255.** ≈ 68,6 км/ч.

Глава II

279. а) 3,2; б) 3,11; в) 3,115. **280.** а) 16,6; б) 16,56. **281.** 28,26 см. **282.** 314 м^2. **285.** б) $\frac{a}{b}$. **295.** д) 10; е) 6,2. **296.** д) −0,01; е) 0,09; ж) −0,7; з) 3. **300.** а) Точка A; б) точка B. **306.** а) При $x = 9{,}2$; б) при $x = 13{,}5$; в) при $x = 1{,}5$. **315.** г) −0,7 и 0,7; д) $-\sqrt{40}$ и $\sqrt{40}$; е) корней нет. **316.** а) Корней нет; б) −0,3 и 0,3; в) $-\sqrt{60}$ и $\sqrt{60}$; г) корней нет; д) 0, $-\sqrt{3}$ и $\sqrt{3}$; е) 0, $-\sqrt{11}$ и $\sqrt{11}$. **317.** а) −2 и 8; б) −7 и −1; в) $6-\sqrt{7}$ и $6+\sqrt{7}$; г) $-2-\sqrt{6}$ и $-2+\sqrt{6}$. **323.** а) 1,29; б) 19; в) 42; г) −17. **324.** а) 9; б) 28; в) 18; г) 56. **325.** а) −12; б) −45; в) 0; г) 2. **326.** а) −3; б) 3. **342.** а) −0,3; б) 6,6; в) 6,6; г) 9. **344.** а) $\frac{5-2a}{5+2a}$; б) $\frac{2y-3x}{2y+3x}$. **359.** а) 8,2; б) −5; в) 12; г) 36. **365.** а) 12; б) 0,0033; в) $1\frac{13}{27}$; г) $3\frac{1}{2}$. **366.** а) 9; б) 0,24; в) $\frac{8}{15}$; г) $1\frac{3}{8}$. **367.** а) 180; б) 50; в) 48; г) 28; д) 30; е) 6; ж) 24; з) 2,6. **368.** а) 60; б) 60; в) 42; г) 32. **369.** д) 12; е) 12. **370.** д) 6; е) $\frac{15}{16}$. **376.** д) 4,5; е) 3,1; ж) 0,22; з) 0,58. **377.** в) 0,27; г) 3,9. **378.** ж) 15; з) 2. **385.** а) 130; б) 7. **389.** в) $3c$; г) $-5y$; д) $-6x$; е) $3y$; ж) $-10x$; з) $-2a$. **394.** ж) 45; з) 392. **395.** д) 48; е) 1125; ж) 112; з) 675. **396.** а) 144; б) 225; в) 168; г) 825. **397.** а) 48; б) 135; в) 504. **412.** В первый день переплели 36 книг, во второй день — 48 книг, а в третий — 60 книг. **413.** а) −2,5; б) −7,2. **414.** б) $7\sqrt{2}$; в) $3\sqrt{2}$; г) $\sqrt{3}$; д) $2\sqrt{2}$. **415.** д) $-3\sqrt{2}$; е) $3\sqrt{2}$. **417.** в) 6; е) $42-8\sqrt{5}$. **418.** а) 14; б) 8. **419.** д) 6; е) −19; ж) 38; з) 2. **422.** в) $-\frac{1}{\sqrt{x}+2}$; е) $\frac{1}{2\sqrt{x}+3\sqrt{y}}$. **423.** д) $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$; е) $\frac{2-\sqrt{3}}{5}$. **433.** 20. **434.** а) −1; б) $8\frac{1}{8}$. **437.** а) $\sqrt{5}+1$; б) $\sqrt{7}-2$. **438.** а) 3; б) 5. **439.** а) $\sqrt{54}+1$; б) $\sqrt{65}-\sqrt{21}$. **440.** а) $\sqrt{10}$; б) $\sqrt{10}$. **442.** б) $\frac{\sqrt{2}(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{2}$. **443.** 1. **445.** а) $-\sqrt{2}$; б) 2. **446.** а) $\sqrt{a-1}+1$; б) 2. **453.** в) 0,(846153); г) 0,(037); д) 0,0(571428); е) −0,3(18); ж) 0,7(6); з) 0,2(18). **456.** г) $\frac{1}{8}$; д) 10,22. **458.** б) $\frac{1}{3}$; д) 40,5. **459.** 49. **464.** а) При $x > 0$; б) при $x \geqslant 0$; в) при $x \geqslant 0$, кроме $x = 1$. **469.** в) 9,1; г) 1,08. **470.** а) 8,5; б) $\frac{7}{96}$; в) $\frac{15}{29}$; г) $\frac{77}{135}$. **471.** а) 45; б) 0,9; в) 100; г) 0,04. **474.** г) 3,2; д) 8,1; е) 0,001; ж) −64; з) 0,025. **480.** г) $-0{,}5py^3$;

е) $\frac{4a^6}{b^5}$; ж) $\frac{2x}{y^3}$; з) $-\frac{c^3}{3a}$. **483.** а) $|a|\sqrt{15}$; б) $21x^2\sqrt{3}$; в) $0{,}5x\sqrt{6x}$; г) $3a^2\sqrt{a}$; д) $3a|a|\sqrt{2b}$; е) $-4m^3\sqrt{3a}$. **486.** б) $x+\sqrt{xy}$; г) $m\sqrt{n}-n\sqrt{m}$; е) $3a-\sqrt{ab}-2b$; з) $6x-5x\sqrt{2}$. **487.** в) $m\sqrt{m}-n\sqrt{n}$; г) $x^3+y\sqrt{y}$. **490.** в) 2; г) $3\frac{1}{4}$. **494.** 2. **495.** а) $x+\sqrt{xy}+y$; б) $\frac{1}{a-\sqrt{ab}+b}$. **497.** а) $\sqrt{2}$; б) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$. **501.** а) $\frac{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}{x-y}$; б) $\frac{27-a\sqrt{a}}{9-a}$; в) $\frac{1+8x\sqrt{x}}{1-4x}$; г) $\frac{a^3b\sqrt{b}-8}{a^2b-4}$. **502.** а) $\frac{x-y}{x+\sqrt{xy}}$; б) $\frac{a^2-b}{a^2\sqrt{b}-ab}$; в) $\frac{49-a}{343+a\sqrt{a}}$; г) $\frac{mn-1}{mn\sqrt{mn}-1}$. **503.** а) $\frac{2+\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$; б) $\frac{\sqrt{5}-3\sqrt{3}+2\sqrt{15}+4}{22}$. **504.** При $x=0$. **505.** а) $-\sqrt{10}$; б) $5\sqrt{15}$; в) $\sqrt{3}$; г) $3{,}5\sqrt{6}$. **506.** а) $-\frac{1}{x}$; б) $\sqrt{ab}(a-b)$.

Глава III

510. г) Уравнение равносильно квадратному уравнению $x^2+x-1=0$. **516.** а) 0; $-1{,}5$; б) $-\frac{1}{3}\sqrt{6}$; $\frac{1}{3}\sqrt{6}$; в) 0; $\frac{4}{5}$; г) 0; $\frac{1}{2}$; д) $-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$; е) $-\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$. **519.** а) 0; 2; б) -1; 1; в) 0; $\frac{1}{4}$; г) 0. **520.** а) 0; 1; б) $-\frac{1}{2}\sqrt{6}$; $\frac{1}{2}\sqrt{6}$; в) $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$; $\frac{1}{2}\sqrt{2}$; г) $-\sqrt{5}$; $\sqrt{5}$. **521.** а) 0; -9; б) $-\frac{1}{2}\sqrt{5}$; $\frac{1}{2}\sqrt{5}$; в) -2; 2; г) корней нет. **522.** 2 и 3. **523.** 40 м и 20 м. **524.** 12 см. **525.** ≈ 2,5 ч. **526.** ≈ 4 с. **527.** 280 м. **528.** 20 и 15 дюймов; ≈ 50,8 см и ≈ 38,1 см. Указание. Обозначьте стороны прямоугольника через $4x$ и $3x$. **530.** 3,96; 59. **532.** а) 1; $1\frac{1}{3}$; б) 0,6; 1; в) 2; $2\frac{1}{3}$; г) 2; 2,5; д) 0,2; 1; е) -3; $2\frac{3}{4}$; ж) -2; 12; з) -10; 9. **533.** а) $-\frac{1}{7}$; $\frac{1}{2}$; б) $\frac{3-\sqrt{29}}{2}$; $\frac{3+\sqrt{29}}{2}$; в) корней нет; г) $\frac{1}{9}$; д) -8; 19; е) корней нет. **534.** а) 0,2; 2; б) -6; 2,5; в) $1\frac{2}{3}$; г) $-\frac{1}{5}$; $\frac{1}{7}$; д) $\frac{1-\sqrt{41}}{4}$; $\frac{1+\sqrt{41}}{4}$; е) $\frac{1}{4}$. **535.** а) При $x=5$ и $x=6$; б) при $x=\frac{7-\sqrt{41}}{2}$ и $x=\frac{7+\sqrt{41}}{2}$; в) при $x=0$ и $x=3$; г) при $x=-1$ и $x=1$. **536.** а) При $x=2$ и $x=9$; б) при $x=0{,}5$ и $x=2$. **537.** а) 2; $2\frac{2}{3}$; б) 0,2; 3; в) -10; 8; г) -1; 23; д) 3,5; 5,5; е) -1; $2\frac{7}{15}$; ж) $\frac{10-\sqrt{2}}{7}$; $\frac{10+\sqrt{2}}{7}$; з) $5-5\sqrt{2}$; $5+5\sqrt{2}$. **538.** а) $\frac{1}{2}$; $1\frac{1}{4}$; б) $-1\frac{1}{2}$; $\frac{1}{6}$;

в) $-\frac{1}{2}$; г) −6; 14; д) $-3-2\sqrt{7}$; $-3+2\sqrt{7}$; е) −6; 0,8; ж) 17; з) $-6\frac{2}{3}$; −4. **539.** а) $-\frac{1}{2}$; 3; б) 1; $1\frac{2}{3}$; в) −1; −0,8; г) $\frac{1}{6}$; д) корней нет; е) −11; 2; ж) 4; 8; з) 0,7; 0,9. **540.** а) −0,2; 2; б) −7; 2; в) $3-3\sqrt{2}$; $3+3\sqrt{2}$; г) −4; 5; д) 16; 36; е) −1; $2\frac{7}{15}$; ж) $\frac{1}{5}$; з) $-1\frac{1}{4}$; 1. **541.** а) 1; 25; б) −10; $\frac{1}{3}$; в) −8; 12; г) $\frac{1}{3}$; 3; д) $20-10\sqrt{5}$; $20+10\sqrt{5}$; е) корней нет. **542.** а) −0,2; 1,7; б) $\frac{7-\sqrt{13}}{6}$; $\frac{7+\sqrt{13}}{6}$; в) $5-\sqrt{5}$; $5+\sqrt{5}$; г) −4; 0,5. **543.** а) −8; 3; б) $1\frac{3}{4}$; 4; в) $-2\frac{2}{3}$; −2; г) $\frac{1}{15}$; д) −91; 87; е) −59; 53; ж) 0; 2; з) −2; 3. **544.** а) −1; 23; б) 2; $2\frac{1}{3}$; в) $\frac{1}{26}$; 1; г) −5; −3. **545.** а) $x_1 \approx -0{,}36$, $x_2 \approx 0{,}56$; б) $x_1 \approx -2{,}78$, $x_2 \approx -0{,}72$; в) $y_1 \approx -1{,}26$, $y_2 \approx 1{,}59$; г) $y_1 \approx -9{,}20$, $y_2 \approx 1{,}20$. **548.** а) $x_1 \approx 1{,}35$, $x_2 \approx 6{,}65$; б) $y_1 \approx 0{,}78$, $y_2 \approx 3{,}22$. **549.** а) −1; $2\frac{6}{7}$; б) −7; 5; в) −0,2; 1,8; г) корней нет; д) 25; е) −9; 3. **550.** а) 7; б) 0,6; 2; в) $-\frac{3}{4}$; $2\frac{1}{2}$. **553.** а) Не существует; б) не существует; в) a — любое число. **554.** 7,5. **555.** а) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$; б) $2+3\sqrt{5}$. **558.** 32 см. **559.** 140 м. **561.** 8 см, 15 см. **562.** 11 и 12. **563.** 30 см. **564.** 5 см и 8 см. **565.** 15 см. **566.** 26 рядов. **567.** 16 или 48 обезьян. **568.** 50 обезьян. **569.** В десятиугольнике. **570.** 9 команд. **571.** 10 участников. **572.** 10 см. **573.** 16, 17, 18 или −18, −17, −16. **574.** б) $\frac{x-4}{3-x}$. **575.** 1. **576.** а) 0; 6; б) $-1\frac{3}{4}$; 0. **583.** −5; $p = -2$. **584.** 0,5; $q = 6{,}25$. **585.** 0,6; $b = -43$. **586.** −2; $c = -106$. **587.** 35. **588.** −8,75. **590.** −28. **594.** а) 0; $-\frac{1}{3}$; б) $-\frac{2}{3}$; $\frac{1}{3}$; в) −6; 0,8; г) −2; $-\frac{2}{9}$; д) при любом x; е) $-1\frac{2}{5}$; $\frac{1}{7}$. **595.** 9,6 м^2. **596.** 90 см. **597.** 16 см и 30 см. **599.** а) 0; 7; б) 2,5; в) −2; 0; 2; г) −2; 2. **602.** а) −3; 2; б) $\frac{1}{3}$; $\frac{2}{3}$; в) −20; 5; г) $-\frac{1}{4}$; д) корней нет; е) 0; 5. **603.** а) −1; $\frac{1}{2}$; б) 3; в) $1-\sqrt{5}$; $1+\sqrt{5}$; г) −1; 1. **606.** 1; 4. **611.** При $x = 1$; наименьшее значение равно 4. **612.** При $x = -3$; наименьшее значение равно 1. **614.** 145 м. **617.** в) $\frac{1}{6}(x+1)(x+2)$; д) $-(y-1)(y-15) = (1-y)(y-15)$; ж) $2(x-1)\left(x-\frac{3}{2}\right) = (x-1)(2x-3)$. **618.** а) $2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$; б) $-(3x-2)^2$; в) $(4a+3)^2$; г) $(0{,}5m-2)^2$. **619.** б) $-(m-2)(m-3) = (2-m) \times (m-3)$; в) $3\left(x-\frac{1}{3}\right)(x+2) = (3x-1)(x+2)$; г) $6\left(x-\frac{2}{3}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right) = (3x-2)(2x-3)$. **622.** Нельзя. **623.** Например, x^2+3x+2. **624.** а) $\frac{4}{3x-1}$; б) $\frac{2a+1}{3}$;

в) $-\frac{4+b}{b+3}$; г) $\frac{2y+1}{y-3}$; д) $\frac{1-p}{p+2}$; е) $-\frac{x+6}{x+5}$. **626.** а) $-0{,}3$; $-0{,}93$; $-0{,}993$; б) 3; $1\frac{2}{7}$; $1\frac{1}{6}$. **628.** а) -1; 23; б) 2; $2\frac{1}{3}$. **631.** г) 1; д) -27; -1; е) $-0{,}2$; ж) $-0{,}5$; 1; з) $\frac{2}{9}$; и) 0; $\frac{1}{6}$. **632.** а) $-12{,}5$; б) 3; 4; в) 6; г) -1; 3,5; д) -2; $1\frac{1}{3}$; е) 0; -8; ж) 1; 1,5; з) 0; 1,5. **633.** в) $\frac{2}{11}$; г) 1; 10; д) -1; 1; е) 1; 2; ж) $-3\frac{1}{4}$; 1; з) $-3{,}5$; 5. **634.** а) $3-\sqrt{5}$; $3+\sqrt{5}$; б) -6; 5; в) $-4\frac{1}{3}$; г) -9; 1; д) корней нет; е) 4. **636.** а) 6; б) -3; $\frac{2}{3}$; в) корней нет; г) 5; д) -6; 6; е) -4; 4. **637.** а) 2; б) 1; в) -11; г) 6. **638.** а) -3; б) $-1\frac{2}{3}$; 0; в) 3; г) -3; 3; д) 9; 13; е) $1\frac{1}{3}$; $2\frac{1}{3}$. **639.** а) 1; 7; б) $1-\sqrt{14}$; $1+\sqrt{14}$; в) $\frac{5-\sqrt{17}}{4}$; $\frac{5+\sqrt{17}}{4}$; г) $-\frac{1}{9}$; 1. **640.** б) $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$; $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$; в) $\frac{7-3\sqrt{6}}{10}$; $\frac{7+3\sqrt{6}}{10}$. **641.** а) $-\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$; б) -3; 3. **646.** а) $\sqrt{y}$; б) $\sqrt{y}$. **648.** $\frac{2}{5}$. **649.** 60 км/ч и 40 км/ч. **650.** 12 км/ч и 10 км/ч. **651.** 80 км/ч и 70 км/ч. **652.** 80 км/ч. **653.** 30 ц с гектара. **654.** 20 р. **655.** 220 акций. **656.** 7 человек. **657.** 12 человек. **658.** 6 км/ч или 5 км/ч. **659.** 2,5 км/ч. **660.** 2 км/ч. **661.** 500 г. **662.** 60 г. **663.** 15 ч и 10 ч. **664.** 7 ч. **665.** 10 км/ч. **666.** 50 км/ч. **668.** а) 0,1; б) 3,5. **669.** 16. **671.** а), в), г) Да; б) нет. **673.** а) 2; б) 6; в) 5; г) 1. **678.** $2x + y = 6$. **679.** а) $(x-1)(y-1)=0$; б) $(x-y)(x+1)=0$; в) $(x+2)(x-1)=0$; г) $(y+1)(y-2)=0$. **680.** а) $(x-3)(y-3)=0$; б) $(x+2)(y+2)=0$; в) $(y+2)(y-2)=0$; г) $(x-4)(x+2)=0$. **683.** а) (1; 2), (-1; -2), (2; 1), (-2; -1); б) (2; -1), (2; 1); (-2; 1); (-2; -1). **684.** $\left(1\frac{1}{3}a+\frac{3}{4}b\right)$ км. **685.** а) $\frac{1}{4}$; б) 4. **686.** а) $\frac{x-1}{4x^3}$; б) $\frac{48n^2-3}{8n^3}$; в) $-\frac{x}{5y}$. **687.** а), в), г), е) — единственное решение; б), д) — бесконечно много решений. **689.** а), б) — единственное решение; в) решений нет. **690.** 1) $x+y=5$; $\frac{1}{4}y-4x=0$; $0{,}6x-3y=-1{,}2$; 2) $6y+3x=10$; $2x+4y=9$; $0{,}5y+0{,}25x=4{,}8$; 3) $2x+4y=10$; $15-3x=6y$. **692.** 1) $k=0{,}5$; $b=1{,}5$; 2) $k=b=0$; 3) $k=-1$; $b=-3$. **693.** 720 км. **695.** а) $(4m-5n^2)(4m+5n^2)$; б) $(0{,}3a^2-3b)(0{,}3a^2+3b)$; в) $(2a+1)(2a+5)$; г) $5(x+1)(7-5x)$. **696.** а) нет; б) да. **698.** а) не имеет решений; б) два решения; в) одно решение. **701.** а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{3b-4a}{2ab}$; в) $\frac{2x+3y}{3xy}$. **702.** а) (2; -1), (5; 2); б) (6; 5), (-4; 5); в) (1; -5), (4; -2); г) (4; 5), (13; -4). **703.** а) (10; -7), (-3; 6); б) (-1; 0), (-2; -1); в) (2; 10), (-3; 5); г) (2; 2), (1; 3).**704.** а) (2; -1), (1; -2); б) (1,5; 1), (1; 1,5); в) (-1; 0), (0; -1); г) (5,25; 3,25).

705. а) (10; −2), (−2; 10); б) (−1,2; −2), (2; 1,2); в) (3; −1); г) (−1;−2), (−2; −1). **706.** а) (1; 4), (−0,6; 0,8); б) (2,5; −0,5), $\left(2\frac{2}{9};\ \frac{1}{3}\right)$; в) (−32; −18), (−10; 4); г) (−1;2), $\left(1\frac{6}{7};\ \frac{4}{7}\right)$. **709.** (−2; 0), (4; 6). **711.** а) (15; 10), (2; −3); б) (12; −6), (2; 4); в) $\left(\frac{2}{5};\ -\frac{1}{5}\right)$, $\left(-\frac{1}{3};\ 2\right)$; г) (6; 2), (− 1; −1,5). **712.** а) пересекает в точках (6; 4) и $\left(2\frac{2}{3};\ 1\frac{7}{9}\right)$; б) пересекает оси в точках (−5; 0), (0,5; 0); (0; −5). **715.** При $k = -2; 2$. **716.** а) два; б) три. **717.** а) $x_1 = -3\frac{1}{3}$; $x_2 = 3\frac{1}{3}$; в) $m_1 = -\frac{2}{3}$; $m_2 = \frac{2}{3}$. **719.** 30 л. **720.** Таких чисел не существует. **721.** 25 спортивных костюмов и 65 курток. **722.** Неправильно. **723.** 5 км/ч. **724.** 12 пятирублёвых и 16 двухрублёвых монет. **725.** 7 пятиместных лодок. **726.** Дачник шёл со скоростью 5 км/ч и ехал со скоростью 12 км/ч. **727.** 18. **728.** 3 см и 30 см. **729.** Вес гири 16 кг, вес гантели 5 кг. **730.** 60 и 60 мячей. **735.** При $a = 2$ x — любое число; при $a \neq 2$ $x = a^2 - 9$. **736.** $\frac{2 \pm \sqrt{4-2b}}{2}$ при $b < 2$; 1 при $b = 2$; корней нет при $b > 2$. **737.** а) $4a$ и a при $a \neq 0$; 0 при $a = 0$; б) $3a$ и $\frac{a}{3}$ при $a \neq 0$; 0 при $a = 0$. **738.** а) 6 и −6; б) 20 и −20; в) 0 и 9; г) 0 и $-\frac{1}{8}$. **739.** 5 при $a = 1$. **740.** −1 при $a = 1$; −1 и $\frac{a+1}{1-a}$ при $a \neq 1$. **741.** $2k - 2$, $2k + 3$. **742.** $b = 4$. **743.** а) 0; 1; б) 0; 6,8; в) −1,2; 1,2; г) 0. **747.** а) −1; $-\frac{3}{4}$; б) −8; 7; в) −7; 8; г) 1,6; 2; д) $-3\frac{1}{8}$; 3; е) −1; $4\frac{2}{3}$; ж) $-5\frac{2}{3}$; 2; з) $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$; $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. **748.** а) −1,2; 0,2; б) $-4\frac{2}{3}; -1\frac{2}{3}$; в) $2\frac{2}{3}$; 4; г) $-2\frac{3}{11}$; −1; д) $-\frac{3}{5}; -\frac{2}{5}$; е) −1; 1; ж) −2,5; 2,5; з) при любом x. **753.** 10, 11, 12, 13, 14 или −2, −1, 0, 1, 2. **754.** −2, 0, 2 или 6, 8, 10. **755.** 7 и 8. **756.** 4 см и 10 см. **757.** 1 см. **758.** 0,25 м. **759.** 60 или 40 пистолей. **760.** 0,36 м³ или 0,81 м³. **761.** 54 см и 36 см. **762.** 18 и 17. **763.** 13 и 11. **764.** а) $2\sqrt{2}$; $3\sqrt{2}$; б) $-6\sqrt{3}$; $4\sqrt{3}$; в) $3-\sqrt{2}$; $3+\sqrt{2}$; г) $5-3\sqrt{2}$; $5+3\sqrt{2}$. **771.** $b = \pm 12$. **772.** 21 или −21. **773.** $c = 3{,}12$. **774.** $b = = -2$, $c = 0$. **775.** $b = 1$, $c = -2$. **777.** 36. **778.** 42 или −42. **781.** а) $x^2 + 3px + 9q = 0$; б) $x^2 + (p - 4)x + (q - 2p + 4) = 0$. **782.** $qx^2 - (p - 2q)x + q = 0$. **798.** а) 11; 13; б) −14; 5; в) −3; 7; г) −5; $4\frac{1}{3}$; д) 12; е) корней нет; ж) −5; 3; з) корней нет. **803.** а) $\frac{2}{3}$; 1; б) 0,4; 0,5. **804.** а) $\frac{-5-\sqrt{77}}{4}$; $\frac{-5+\sqrt{77}}{4}$; б) −1,5; 1; в) корней нет; г) 9; д) 0; е) $-\frac{1}{3}$; ж) $2-\sqrt{35}$; $2+\sqrt{35}$; з) 0; −1,5. **806.** 10 ч. **807.** 9 ч. **808.** 50 км/ч. **809.** 60 км/ч. **810.** 2 км/ч. **811.** 3 км/ч.

812. 3 км/ч. **813.** 2,4 км/ч или 3 км/ч. **814.** 3 км/ч. **815.** 50 км/ч. **816.** 40 км/ч. **817.** 4 ч 40 мин. **818.** 160 км или 200 км. **819.** 450 км. **820.** 18 км/ч. **821.** 48 км/ч или 9 км/ч. **822.** 60 см и 80 см. **823.** 10 костюмов. **824.** 32 пылесоса. **825.** 24 кг и 36 кг. **826.** 25 кг или 12 кг. **827.** 15 дней и 10 дней. **828.** 15 дней и 10 дней. **829.** 12 ч. **830.** 25 ч и 20 ч. **831.** 15 мин и 10 мин.

Глава IV

853. Указание. Сравните квадраты левой и правой частей неравенства. **856.** Коля. **857.** $3\frac{1}{15}$. **858.** а) $\frac{5-x}{7}$; б) 1. **859.** а) 1; 5; б) 0,3; 2. **879.** $\frac{1}{16}$; 22; 0. **880.** а) −1; 1; б) 2; в) −6; 3; г) −1; 5. **895.** 6 × 6 дм. **896.** $\frac{1}{6}$. **902.** а) Отрезок CB; б) отрезок AD. **906.** б) $A \cap B = B$; $A \cup B = A$. **909.** −3; $\frac{2}{3}$. **910.** 12 ц и 10 ц. **922.** а) −9; б) 16; в) 31; г) 7. **924.** а) (5; 8); б) [−4; 4]; в) (7; +∞); г) (−∞; 6). **928.** а) $\frac{1}{x^2}$; б) $-\frac{1}{2a^4}$. **930.** 40 км/ч; 45 км/ч. **931.** $\frac{3}{4}$. **935.** а) (5; +∞); б) (4; +∞); в) (−∞; −1]; г) (−∞; 3]; д) (−∞; 0,15); е) $\left[\frac{4}{9}; +\infty\right)$; ж) (−∞; −0,25); з) (−∞; 0]; и) (−8; +∞); к) (0; +∞); л) (18; +∞); м) (7; +∞). **936.** а) (−∞; 8,5); б) [−0,6; +∞); в) (4; +∞); г) (7,5; +∞); д) $\left(1\frac{1}{3}; +\infty\right)$; е) (1,8; +∞); ж) $\left(-\infty; \frac{1}{4}\right]$; з) (−∞; −2,4]; и) (−∞; 12); к) (0; +∞); л) [−30; +∞); м) [−20; +∞). **939.** а) (−∞; 0,4); б) (−∞; −0,4); в) [−5; +∞); г) $\left[\frac{1}{3}; +\infty\right)$; д) (−1,4; +∞); е) (−∞; −1]; ж) (−∞; 12,6]; з) [−13; +∞). **940.** а) (−∞; 1); б) (−∞; 2); в) [6; +∞); г) $\left(-\infty; \frac{1}{4}\right)$; д) (−∞; 0); е) (−∞; 9); ж) (−13; +∞); з) $\left(2\frac{1}{3}; +\infty\right)$. **941.** а) При $x > \frac{1}{2}$; б) при $y > 7$; в) при $c < -25$. **942.** а) При $a < 2,5$; б) при $p > 5$. **943.** а) $\left(-\infty; -\frac{7}{8}\right]$ б) (9; +∞); в) (−∞; −3,1]; г) (−∞; 0,8]; д) $\left(-\infty; 1\frac{3}{4}\right)$; е) (−∞; 22,5); ж) (−∞; 2]. **944.** б) [0; +∞); в) (1; +∞); г) $\left[2\frac{2}{3}; +\infty\right)$; д) (−∞; 4,7]; е) [4,8; +∞). **945.** а) (6; +∞); б) (0; +∞); в) (−∞; −5]; г) (−3; +∞). **946.** а) (−∞; 2); б) (2; +∞); в) (−0,4; +∞); г) $\left(-\infty; \frac{2}{15}\right)$. **947.** а) $\left(-\infty; 14\frac{1}{3}\right)$; б) $\left(-\frac{1}{8}; +\infty\right)$; в) (−∞; 14]; г) (−17; +∞). **948.** а) (2,5; +∞);

б) $(-\infty;\ 6)$; в) $[0;\ +\infty)$; г) $(3;\ +\infty)$; д) $(-4;\ +\infty)$; е) $\left(-\infty;\ -\frac{2}{3}\right)$; ж) $\left(-\infty;\ 1\frac{5}{7}\right]$; **949.** а) $[0;\ +\infty)$; б) $\left(1\frac{1}{3};\ +\infty\right)$; в) $\left(\frac{1}{6};\ +\infty\right)$; г) $\left(-\infty;\ 2\frac{3}{4}\right]$; д) $[14;\ +\infty)$; е) $(-\infty;\ 20{,}5)$. **950.** а) При $y < 3$; б) при $y > 7$; в) при $y > \frac{3}{17}$; г) при $y < 0{,}1$. **951.** а) $(-\infty;\ 6)$; б) $\left[1\frac{5}{7};\ +\infty\right)$; в) $(-\infty;\ 12)$; г) $(2;\ +\infty)$; д) $\left[-1\frac{2}{3};\ +\infty\right)$; е) $(0;\ +\infty)$. **952.** а) $(-\infty;\ 0{,}2)$; б) $(-\infty;\ 0{,}5]$; в) $(-\infty;\ 40]$; г) $(-\infty;\ -10]$. **953.** б) $\left(-\infty;\ \frac{2}{13}\right]$; в) $[1{,}5;\ +\infty)$; г) $(-\infty;\ 3{,}5]$; д) $(-\infty;\ -10)$; е) $(9;\ +\infty)$. **954.** а) $\left(-\infty;\ \frac{1}{6}\right)$; б) $[-5;\ +\infty)$; в) $(-\infty;\ -0{,}6]$; г) $\left(-\infty;\ -3\frac{5}{6}\right)$; **955.** а) При $a > 0{,}7$; б) при $b < 3$. **956.** а) x — любое число; б), в), г) решений нет. **958.** а) При $x \geqslant 2$; б) при $a \leqslant \frac{2}{3}$; в) при $a \geqslant -\frac{1}{3}$; г) при $a \leqslant 1{,}4$; д) при $x \geqslant 0{,}2$; е) при $x \geqslant 6$. **959.** а) $(-\infty;\ -8) \cup (-8;\ 0{,}5]$. **960.** а) 3; б) 24. **961.** а) 1; 2; 3; 4; б) 1; 2. **962.** $(-\infty;\ -5{,}2)$. **963.** $\left(1\frac{1}{3};\ 4\right) \cup (4;\ +\infty)$. **964.** Меньше 2 см. **965.** Меньше 12,15 дм. **966.** 11 книг. **967.** 755 р. **968.** Не более $26\frac{2}{3}$ км. **969.** 3. **970.** а) 1; 4; б) 0; 1. **972.** 12 км/ч. **976.** а) $(6;\ +\infty)$; б) $(-\infty;\ -1)$; в) $\left(0;\ 3\frac{1}{3}\right)$; г) решений нет. **977.** а) $(0{,}8;\ +\infty)$; б) $[2;\ 4]$; в) $\left(\frac{1}{5};\ \frac{1}{3}\right)$; г) $(0{,}1;\ 0{,}2)$. **978.** а) $[2;\ 2{,}5]$; б) $(1{,}5;\ 3)$; в) $\left(13\frac{1}{3};\ 25\right)$; г) $\left(-\infty;\ \frac{4}{9}\right]$; **979.** а) $(-12;\ 2]$; б) решений нет; в) $(0;\ 15)$; г) $(-\infty;\ -3)$. **980.** а) $(-1;\ 0{,}8)$; б) $(-\infty;\ -1{,}5]$; в) $\left(\frac{1}{4};+\infty\right)$; г) $[3;\ 6{,}7)$. **981.** а) $(-\infty;\ 2{,}4)$; б) решений нет; в) $\left[-8;1\frac{1}{3}\right)$; г) $[1{,}5;\ +\infty)$. **982.** а) $(-\infty;\ 1]$; б) $\left[\frac{1}{3};\ +\infty\right)$; в) $[3;\ 6]$; г) $[-1;\ 1{,}5]$. **983.** а) $[2{,}5;\ 11) \cup (11;\ +\infty)$; б) $[0{,}5;\ 2) \cup (2;\ +\infty)$. **984.** а) $(3;\ +\infty)$; б) $(-\infty;\ -3)$; в) $[-11;\ 3]$; г) решений нет. **985.** а) $\left(2;\ 3\frac{4}{7}\right)$; б) $(0{,}1;\ +\infty)$; в) $(-0{,}24;\ +\infty)$; г) $(-\infty;\ -1{,}8)$. **986.** а) $-4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$; б) 2, 3, 4, 5, 6; в) -1, 0, 1, 2, 3; г) -2, -1, 0. **987.** а) 0, 1, 2, 3; б) 4, 5, 6, 7; в) 1; г) 1. **988.** а) $(-\infty;\ 2{,}8)$; б) решений нет. **989.** а) $(-\infty;\ 6)$; б) $(1;\ 15)$; в) $[0{,}6;\ 5]$; г) $(2;\ 16]$. **990.** а) $\left(\frac{1}{13};\ 9\right)$; б) $(-2;\ -1)$; в) решений нет; г) $\left[\frac{2}{11};\ 2\right]$. **991.** а) $(-1;\ 2)$; б) $(-12;\ 17)$; в) $(0{,}5;\ 2)$; г) $(-1;\ 3)$. **992.** а) $\left(-2\frac{5}{7};\ 5\right]$; б) $[-11;\ 7)$; в) $\left[-5;\ \frac{1}{3}\right]$;

г) $\left[-\frac{2}{3};\ 2\right]$. **993.** а) $[-1;\ 2)$; б) $[3;\ 9]$; в) $(-0{,}7;\ 1{,}1)$; г) $\left(-1\frac{1}{4};\ \frac{1}{4}\right]$. **994.** а) При $1\frac{1}{3} < y < 2$; б) при $0{,}5 \leqslant b \leqslant 6{,}5$. **995.** $-4 < a < 4$. **996.** $b < -1\frac{1}{3}$. **998.** а) $(-\infty;\ 2)$; б) $(1;\ 4)$. **999.** а) $(1;\ 7)$; б) $(1;\ 3)$. **1000.** а) $x \leqslant 0{,}48$; б) $x > 2{,}2$; в) $x \neq \frac{2}{3}$. **1001.** 1, 2, 3, 4, 6, 12. **1003.** 10 км/ч и 15 км/ч. **1006.** Указание. Можно воспользоваться соотношением между средним арифметическим и средним геометрическим двух положительных чисел. **1009.** Указание. Сравните квадраты левой и правой частей неравенства. **1011.** Указание. Воспользуйтесь соотношениями вида $\sqrt{4x+1} \leqslant \sqrt{4x+1+4x^2} = |2x+1|$. **1012.** Указание. Можно воспользоваться тем, что $\sqrt{a+1} - \sqrt{a-1} > \sqrt{a+1} - \sqrt{a}$ при $a > 1$. **1013.** Не успел. **1021.** Смирнов. **1029.** а) $-6 < a + 2b < -3$; б) $-11{,}5 < \frac{1}{2}a - b < -9$. **1030.** $5{,}2 < \frac{AB}{2} < 5{,}25$. **1031.** $4{,}8 \leqslant \frac{a+c}{2} \leqslant 4{,}9$. **1039.** а) $(-\infty;\ -60)$; б) $(4{,}8;\ +\infty)$; в) $(0{,}56;\ +\infty)$; г) $\left(-\infty;\frac{1}{16}\right]$; д) $(-\infty;\ -1)$; е) $\left(1\frac{2}{3};+\infty\right)$. **1040.** а) $(-\infty;\ -115)$; б) $(0{,}2;\ +\infty)$; в) $(-\infty;\ 15)$; г) $(-\infty;\ 1{,}4)$. **1041.** а) $(-\infty;\ 0{,}325)$; б) $(-1;\ +\infty)$. **1042.** а) 1, 2, 3, 4; б) 1, 2, 3, 4, 5. **1043.** а) Таких значений нет; б) при любом значении x. **1044.** а) $(-\infty;\ +\infty)$; б) $(-\infty;\ +\infty)$. **1045.** а) При $a > 0$; б) при $a > 2$; в) при $a > -3$; г) при $a > -7$. **1046.** а) При $b < 0$; б) при $b < -4$; в) при $b < -3$; г) при $b < -0{,}2$. **1047.** а) При $m \geqslant 8$; б) при $m < 2$; в) при $m \leqslant -6$; г) при $m < 3{,}5$. **1049.** а) Не более 5. **1050.** Более 6 км/ч. **1051.** Более 18 км/ч. **1053.** а) $\left(\frac{1}{8};+\infty\right)$; б) $(0{,}1;\ 5)$; в) решений нет; г) $(0{,}8;\ +\infty)$; д) $(-\infty;\ -0{,}2)$; е) $\left(1\frac{5}{11};+\infty\right)$; **1054.** а) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9; б) -10; в) 1; г) 2, 3, 4, 5. **1055.** а) $(-3;\ 6)$; б) $(1{,}5;\ 2{,}5)$. **1056.** а) При $1{,}5 < x < 4{,}5$; б) при $5 \leqslant x \leqslant 15$. **1057.** а) $\left(0;\ \frac{1}{6}\right)$; б) положительных решений нет. **1058.** а) $(-1;\ 0)$; б) $(-5;\ 0)$. **1059.** $a > 3{,}5$. **1060.** $-3 < b < 5$. **1061.** Более 10 км, но менее $16\frac{1}{4}$ км. **1062.** Более 60 км/ч, но не более 90 км/ч.

Глава V

1063. а) 7; б) 10; в) $9\frac{1}{3}$. **1065.** а) 115; б) 54; в) -2; г) -37. **1066.** 24. **1068.** а) 0 и -4; б) -1. **1069.** а) -2; б) -14; в) не существует. **1071.** а), б), д) — все числа; в) все числа, кроме 5; г) все числа, кроме -1 и 4; е) все числа, больше или равные 5. **1076.** а) 36 км; б) = 490 м/с. **1081.** $1 \leqslant f(x) \leqslant 7$; $-7 \leqslant g(x) \leqslant 14$. **1084.** $P = 2n + 20$, область определения (10; 40], множество значений (40; 100]. **1089.** а) 3,5 и −3,5; б) (−2; 2); в) (−∞; −4] ∪ [4; +∞). Наименьшее значение 0, наибольшего нет, множество значений [0; +∞). **1094.** а) $\frac{2}{3}$; б) 5. **1096.** а) $x = -4$; −3; б) $x = -5$; 7; в) $x = -\frac{1}{2}$; 3; г) $x = 1$; $1\frac{1}{3}$. **1102.** Нули функции: −8; −3; 4; 8. а) [−10; −8), (−3; 4), (8; 10]; б) [−5; 0], [6; 10]. **1106.** а) 15; б) −6 и $3\frac{1}{2}$; в) −2; г) нулей нет. **1109.** а) Пересекаются в точках (−2; 1) и (1; 2); б) не пересекаются. **1112.** −0,36. **1119.** 2), 4). **1121.** а) I, II, III; б) I, II, IV; в) I и II. **1123.** а) 0; 6; б) $-\sqrt{5}$; $\sqrt{5}$; в) −8,5; 0; г) корней нет. **1126.** 1), 2), 3). **1035.** (15; +∞). **1145.** $y = 10x$, $10 < x \leqslant 5$. **1147.** Нет; да, в точке (0; 1); I и II. **1150.** а) −5, 5; б) нулей нет; в) −2 и 2. **1153.** а) 4; б) 1. **1155.** График функции $y = \sqrt{1-x}$. **1160.** а) $a > 2$; б) $a < 2$; в) $a = 2$. **1171.** а) (−1; 1), (1; −1); б) (1; 2), (−2; −1).

Глава VI

1178. г) $\frac{27}{64}$; д) $-39\frac{1}{16}$; е) $-\frac{4}{25}$. **1185.** а) $\frac{1}{2}$; б) $-\frac{1}{16}$; в) $\frac{1}{18}$; г) $\frac{3}{13}$; д) 6; е) 125. **1188.** в) $\frac{1-a^2b^2}{ab}$; г) $\frac{2x^2y^2-3xy-2}{xy}$. **1189.** а) $\frac{1}{ab}$; б) $\frac{a+b}{a^2b^2(b-a)}$. **1190.** а) (2; +∞); б) (−∞; 2). **1191.** При $n = 1$ и $n = 49$. **1194.** б) 3; г) 25; е) 0,001. **1199.** а) 64; б) $\frac{1}{8}$; в) 8; г) 4. **1201.** а) 1; б) 27; в) 1000; г) $\frac{1}{25}$; д) 2; е) 1; ж) 81; з) 15 625. **1202.** а) 5; б) 1; в) $\frac{1}{36}$; г) 144; д) $\frac{1}{2}$; е) $\frac{1}{81}$. **1203.** а) 5; б) $\frac{2}{3}$. **1206.** а) x^{-2}; б) x^5; в) x^{n+7}; г) x^{4-n}. **1208.** а) −1; б) 6. **1209.** а) 0,224; б) 125. **1213.** а) $\frac{1}{3}x^4y^7$; б) $81ab^7$; в) $15x^5y^5$; г) $\frac{5}{4}p^5q^{10}$. **1214.** а) $\frac{1}{3}xy^{11}$; б) $\frac{7}{5}a^4b^4$; в) $5c^3p^3$; г) $2x^{-8}y^9$. **1215.** а) $4x$; б) $3b$; в) $4a^4b^2c^4$; г) $\frac{8}{3}x^{-2}y^5z$. **1216.** а) $27x^3y$; б) $20a^6b^{-2}$; в) $4a^{-10}b^{12}$; г) $\frac{1}{2}x^{-5}y^6$. **1217.** $n = 1$. **1218.** −4; 2. **1219.** а) (−∞; 0); б) (0; +∞). **1220.** $\frac{1}{11}$. **1228.** а) $4{,}55 \cdot 10^5$; б) $2{,}288 \cdot 10^2$. **1231.** $1{,}404 \cdot 10^3$ кг. **1237.** 1. **1238.** При $m = 18$. **1239.** −3, −2, −1. **1247.** а) $a = 51$, $b = 256$. **1248.** а) x_0^2, x_0, x_0^0, x_0^{-1}, x_0^{-2}; б) x_0^{-2}, x_0^{-1}, x_0^0, x_0, x_0^2. **1249.** а) Общих точек нет; б) две точки; в) четыре точки; г) одна точка. **1250.** а) Один; б) два; в) один; г) не имеет корней. **1251.** а) −1600; б) −0,08; в) −1000; г) 11; д) 7; е) 5. **1253.** а) $\frac{x^3-y^3}{x^2y^2}$;

б) $\frac{xy + y^2}{x^2}$; в) $\frac{n^2}{(m - n)^2}$; г) $\frac{y^2 - x^2}{x^2y^2}$. **1254.** а) $\frac{1}{x^2y + xy^2}$; б) $-(a + b)$. **1260.** а) x^{17}; б) a^{12}. **1262.** а) 3^n; б) 2^{-n}. **1264.** $n = 6$. **1266.** а) $2{,}38 \cdot 10^4$; б) $1{,}62 \cdot 10^{-1}$; в) $3 \cdot 10^3$; г) $8 \cdot 10^{17}$.

Задачи повышенной трудности

1271. а) $\frac{x^2 + ax + a^2}{x + a}$; б) $\frac{2a + 1}{4a^3 + 2a^2 + a}$. **1272.** $x = 2$, $y = 1$, $z = 3$; $u = -1$, $v = -2$. **1274.** $\frac{8}{21}$. **1275.** Цифрой 2. **1276.** $x = 1$, $y = 2$. **1278.** $\frac{1}{2}\left(-3 \pm \sqrt{5}\right)$, $\frac{1}{2}(5 \pm \sqrt{21})$. **1279.** 12, 18, 24, 27, 36, 45, 48. **1280.** $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$. Указание. Докажите, что сумма этих дробей больше 1, но меньше 3, т. е. равна 2. **1281.** -7, -6, -3, 2, 4, 9, 12, 13. **1282.** 0, 2, 4. **1283.** $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) \times \times \left(x^2 - x\sqrt{3} + 1\right)$. **1284.** $\left(\frac{p}{q}\right)^{p+q}$; где p и q — целые числа, причём $p \neq 0$, $q \neq 0$, $|p| \neq 1$, $|q| \neq 1$. **1286.** $x = 35$, $y = 34$ или $x = 13$, $y = 10$. **1288.** Указание. Возведите обе части уравнения $\left(x + y\sqrt{2}\right)\left(x - y\sqrt{2}\right) = 1$ в n-ю степень ($n \in N$). **1289.** При $m = -6$. **1290.** $x_1 = a - 1$, $x_2 = a + 1$. **1291.** 5 при $a = \frac{1}{2}(7 \pm \sqrt{17})$. **1292.** $p = -16$ или $p = 16$. **1293.** При $a = 2$. **1296.** 160 км. **1297.** 10 м. **1298.** 60 ч. **1299.** 10 км. **1300.** 72 км. **1301.** 4,5 ч или 3,6 ч. **1302.** В 1,2 раза. **1303.** За 12 ч и 15 ч. **1304.** За 28 ч и 21 ч. **1305.** 41. **1306.** $x_1 = 18$, $x_2 = 12$, $x_3 = 15$, $x_4 = 10$ или $x_1 = -12$, $x_2 = -18$, $x_3 = -10$, $x_4 = -15$. **1307.** Через 2 ч. **1318.** 10 точек. **1324.** а) $(2; -1)$. **1325.** а) $(1; 3)$, $\left(\frac{3}{5}; 4\frac{1}{5}\right)$; б) $(19; 8)$, $\left(2; -\frac{1}{2}\right)$. **1326.** а) $\left(\sqrt{\frac{2}{3}}; 1\frac{1}{3}\right)$, $\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}; -1\frac{1}{3}\right)$, $(-2; -2)$; б) $(2; 4)$, $(-1; -14)$. **1327.** а) $(-1; -2)$, $\left(\frac{11}{9}; \frac{22}{9}\right)$; б) $\left(\frac{1}{2}; 0\right)$, $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$. **1328.** $(-1; 2)$, $(2; -1)$, $\left(-1 + \sqrt{3}; -1 - \sqrt{3}\right)$, $\left(-1 - \sqrt{3}; -1 + \sqrt{3}\right)$. **1330.** а) $(2; 1)$, $(-2; -1)$, $(-2; 3)$, $(2; -3)$; б) $(1; 1)$, $(-1; -1)$. **1331.** 15 км/ч и 30 км/ч. **1332.** 6 чел., 5 ч. **1333.** 21 ц и 25 ц, 7 га и 6 га. **1334.** 40 или 60 пистолей. **1335.** 10%. **1337.** Около 41%. **1338.** 15 мин. **1339.** 6 ч и 12 ч. **1340.** 90 км/ч и 60 км/ч.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Макарычев Юрий Николаевич
Миндюк Нора Григорьевна
Нешков Константин Иванович
Суворова Светлана Борисовна

МАТЕМАТИКА

АЛГЕБРА

8 класс
Базовый уровень

Учебник

Центр математики

Ответственный за выпуск *П. А. Зубкова*
Редактор *П. А. Зубкова*
Художественный редактор *Т. В. Глушкова*
Компьютерная графика *М. А. Тамазовой*
Технический редактор *М. И. Решетникова*
Компьютерная вёрстка *О. С. Ивановой, О. В. Сиротиной*
Корректор *О. Н. Леонова*

Подписано в печать 10.10.2022. Формат 70 × 90/16.
Гарнитура Школьная. Уч.-изд. л. 14,24. Усл. печ. л. 23,4.
Тираж экз. Заказ № .

Акционерное общество «Издательство «Просвещение».
Российская Федерация, 127473, г. Москва, ул. Краснопролетарская, д. 16,
стр. 3, этаж 4, помещение I.

Адрес электронной почты «Горячей линии» — **vopros@prosv.ru**.