УДК 373.167.1:512+512(075.3)
ББК 22.14я721
М34

Учебник допущен к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ начального общего, основного общего, среднего общего образования организациями, осуществляющими образовательную деятельность, в соответствии с Приказом Министерства просвещения Российской Федерации № 858 от 21.09.2022 г.

Авторы:
Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешков, С. Б. Суворова

Математика. Алгебра : 9-й класс : базовый уровень : учебник /
М34 Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешков, С. Б. Суворова ; под ред. С. А.Теляковского. — 15-е изд., перераб. — Москва: Просвещение, 2023. — 255, [1] с.: ил.

ISBN 978-5-09-102537-8.

Данный учебник является заключительной частью трёхлетнего курса алгебры для общеобразовательных организаций. Новое издание учебника дополнено и доработано. Его математическое содержание позволяет достичь планируемых результатов обучения, предусмотренных ФГОС ООО, утверждённым Приказом Министерства просвещения РФ №287 от 31.05.2021 г. В задачный материал включены новые по форме задания: задания для работы в парах и задачи-исследования. В конце учебника приводится список литературы, дополняющей его.

УДК 373.167.1:512+512(075.3)
ББК 22.14я721

ISBN 978-5-09-102537-8

Дорогие девятиклассники!

В этом году вам предстоит рассмотреть ряд новых тем из курса алгебры. Расширятся известные вам сведения об уравнениях и неравенствах. Вы получите представление об особенностях таких последовательностей, как арифметическая и геометрическая прогрессии, изучите свойства квадратичной функции. Также вы сможете попрактиковаться в решении задач практического содержания.

В учебнике подробно разъясняется новый материал, приводятся образцы решения задач. Проверить, как вы усвоили этот материал, помогут «Контрольные вопросы и задания», помещённые в конце каждого параграфа. Если вы забыли что-то из ранее изученного, то можете обратиться к разделу «Сведения из курса алгебры 7—8 классов».

В учебнике вам предлагаются разнообразные упражнения. Надеемся, что ваше внимание привлекут задачи-исследования и задания для работы в парах, при выполнении которых вы научитесь прислушиваться к мнению товарищей, чётко формулировать и отстаивать свою позицию. При подготовке к государственной итоговой аттестации по алгебре вам помогут включённые в каждый пункт учебника задания для повторения, а также помещённые в конце учебника «Упражнения для повторения курса 7—9 классов».

После окончания 9 класса вам придётся сделать выбор, где вы будете продолжать образование. Учащимся, которые хотят обучаться в классах с повышенной математической подготовкой, советуем обратить внимание на более сложные задания, включённые в каждый пункт учебника и помеченные специальным знаком, а также на дополнительные пункты под рубрикой «Для тех, кто хочет знать больше», помещённые в конце каждой главы. Специально для учащихся, увлечённых математикой, в конце учебника предлагаются «Задачи повышенной трудности». Решение таких задач поможет не только расширить кругозор, но и подготовиться к участию в математических олимпиадах.

Учащимся, которым любопытно знать, как зарождался и развивался тот или иной раздел математики, рекомендуем прочитать в учебнике «Исторические сведения».

Желаем вам успехов в изучении курса алгебры и предстоящей государственной итоговой аттестации.

В учебнике используются следующие условные обозначения:

— текст, который нужно запомнить

— материал, который важно знать

▶ — начало решения задачи

◁ — окончание решения задачи

● — начало обоснования утверждения или вывода формулы

○ — окончание обоснования утверждения или вывода формулы

11. — задание обязательного уровня

27. — задание повышенной трудности

П — упражнения для повторения

Глава I ЧИСЛА И ВЫЧИСЛЕНИЯ

При изучении главы вы вспомните основные числовые множества и соотношения между ними. В центре внимания будет множество действительных чисел: перечислены свойства действий над действительными числами, рассмотрен общий способ сравнения действительных чисел. Вы познакомитесь с такими понятиями, как абсолютная и относительная погрешности приближённого значения. Особое место в главе занимают задачи практического содержания, при решении которых вы сможете ещё раз убедиться в том, как тесно математика связана с реальной жизнью.

§ 1 ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

1. Действия над действительными числами

Современные знания о числах и способах вычислений складывались на протяжении многих столетий. Стимулом к развитию понятия числа послужили потребности человека, которые возникли у него в ходе практической деятельности.

Ещё в глубокой древности люди стали вести счёт предметов, что привело к возникновению натуральных чисел. Люди знали их так много тысячелетий тому назад, что знаменитый математик Леопольд Кронекер сказал: «Бог создал натуральные числа, а всё остальное — дело рук человека».

Множество натуральных чисел принято обозначать буквой N (первой буквой латинского слова *nature* — «природа»). В множестве натуральных чисел есть наименьшее число — это 1, но наибольшего числа нет: какое бы большое натуральное число мы ни взяли, найдётся натуральное число, большее взятого. Натуральных чисел *бесконечно много*.

В множестве N выполнимыми являются действия сложения и умножения: сумма и произведение любых двух натуральных чисел также будут числами натуральными. Иными словами, выполняя действия сложения и умножения, мы остаёмся в границах множества N. Говорят, что множество натуральных чисел *замкнуто* относительно сложения и умножения. В то же время действия вычитания и деления в множестве натуральных чисел выполняются не всегда: нельзя разделить одно натуральное число на другое, если первое число не кратно второму, и нельзя вычесть из меньшего натурального числа большее. Например, разность $60 - 70$ и частное $18 : 64$ натуральными числами не являются.

Потребность людей в измерении величин и то обстоятельство, что результат измерения не всегда выражается целым числом, привели к расширению множества натуральных чисел. Появились дробные числа. Сначала это были дроби, выражающие какую-либо долю единицы (половина, треть, четверть). Затем появились и другие дробные числа.

Однако не всегда толчком к развитию знаний о числах были исключительно практические потребности людей. К расширению понятия числа приводили также задачи самой математики. Именно так обстояло дело с появлением отрицательных чисел. Многие задачи, особенно решаемые с помощью уравнений, сводились к вычитанию из меньшего числа большего. Это потребовало введение новых чисел — отрицательных.

Наряду с отрицательными числами появилось и число нуль. Интересно, что долгое время нуль не считался полноправным числом. И лишь с введением системы координат нуль был признан числом.

Натуральные числа, противоположные им отрицательные числа и число 0 *образуют множество целых чисел.* Множество целых чисел обозначается буквой Z (первой буквой немецкого слова *Zahl* — «число»). В множестве целых чисел нет ни наименьшего, ни наибольшего числа.

Множество целых чисел включает в себя множество натуральных чисел: $N \subset Z$. Любое натуральное число является целым числом, но не любое целое число является натуральным. Например: $20 \in N$ и $20 \in Z$; $-20 \in Z$, но $-20 \notin N$.

Множество целых чисел Z замкнуто относительно операций сложения, вычитания и умножения: сумма, разность и произведение двух целых чисел также являются целыми числами. Однако частное двух целых чисел будет целым числом только в том случае, когда делимое кратно делителю. Например, частное $36 : 9$ — целое число, а частное $36 : 8$ целым числом не является.

Целые и дробные числа составляют множество рациональных чисел. Множество рациональных чисел обозначается буквой Q (первой буквой английского слова *quotient*, что в переводе означает «частное»). Это связано с тем, что любое рациональное число может быть представлено в виде отношения (частного) $\frac{m}{n}$, где m и n — целые числа, $n \neq 0$.

Множество рациональных чисел включает в себя множество целых чисел: $\boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{Q}$. Любое целое число является рациональным числом, но не всякое рациональное число является целым. Например, $12 \in \boldsymbol{Z}$ и $12 \in \boldsymbol{Q}$; $1{,}2 \in \boldsymbol{Q}$, но $1{,}2 \notin \boldsymbol{Z}$.

В множестве рациональных чисел $\boldsymbol{Q}$ выполнимы все четыре арифметических действия: сумма, разность, произведение и частное двух рациональных чисел (кроме случая деления на нуль) также являются рациональными числами.

● Докажем, например, что сумма двух рациональных чисел есть число рациональное.

Возьмём рациональные числа $\frac{m}{n}$ и $\frac{p}{q}$ (m, n, p и q — целые числа и $n \neq 0$, $q \neq 0$). Составим сумму этих чисел и преобразуем её:

$$\frac{m}{n}+\frac{p}{q}=\frac{mq+np}{nq}.$$

Очевидно, что числитель дроби $mq + np$ — целое число, знаменатель дроби nq — целое число, отличное от нуля. Значит, сумма $\frac{m}{n}+\frac{p}{q}$ равна отношению двух целых чисел, т. е. является рациональным числом. ○

Рациональные числа изображают точками на координатной прямой. Но если представить, что все рациональные точки нанесены на координатную прямую, то окажется, что на прямой есть точки, не имеющие рациональной координаты. Это, например, точка K — конец отрезка, равного диагонали единичного квадрата (рис. 1). Как известно из курса алгебры 8 класса, координата построенной точки K равна $\sqrt{2}$ и является иррациональным числом.

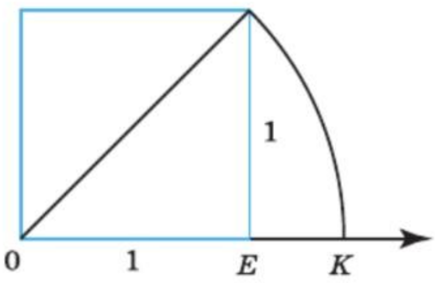


Рис. 1

Вообще, иррациональных чисел бесконечно много. Так, если n не является квадратом какого-либо натурального числа, то $\sqrt{n}$ — иррациональное число. Например, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{10}$ — иррациональные числа.

Иррациональные числа нельзя записать в виде дроби $\frac{m}{n}$, где m — целое число, а n — натуральное число.

Рациональные и иррациональные числа вместе составляют множество действительных чисел.

Множество действительных чисел принято обозначать буквой $\boldsymbol{R}$ (первой буквой английского слова *realis* — «реальный», «настоящий», «действительный»).

Множество действительных чисел $\boldsymbol{R}$ включает в себя множество рациональных чисел $\boldsymbol{Q}$: $\boldsymbol{Q} \subset \boldsymbol{R}$, следовательно, любое рациональное число является действительным числом. Но не всякое действительное число является рациональным. Например, $\frac{3}{7} \in \boldsymbol{Q}$ и $\frac{3}{7} \in \boldsymbol{R}$, $\sqrt{2} \in \boldsymbol{R}$, но $\sqrt{2} \notin \boldsymbol{Q}$.

Таким образом, числовые множества $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{Z}$, $\boldsymbol{Q}$ и $\boldsymbol{R}$ связаны отношением включения, которое может быть описано следующей цепочкой: $\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{Q} \subset \boldsymbol{R}$. Эта цепочка проиллюстрирована на рисунке 2.

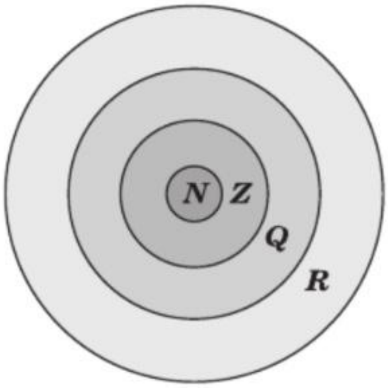


Рис. 2

Как вы знаете, действительные числа изображают точками на координатной прямой, причём между точками прямой и множеством действительных чисел существует *взаимно-однозначное соответствие*, а именно, каждой точке координатной прямой соответствует единственное действительное число и, наоборот, каждому действительному числу соответствует точка координатной прямой. При этом как бы близко на координатной прямой не были расположены две её точки, между ними существует бесконечное множество точек как с рациональными, так и с иррациональными координатами. Говорят, что множество действительных чисел обладает *свойством плотности*.

В множестве действительных чисел выполняются все четыре арифметических действия. При этом справедливы следующие свойства, которые называют *основными законами алгебры*:

$a + b = b + a$	— переместительное свойство сложения
$(a + b) + c = a + (b + c)$	— сочетательное свойство сложения
$a + 0 = a$	— свойство нуля при сложении
$a + (-a) = 0$	— существование противоположного числа
$a \cdot b = b \cdot a$	— переместительное свойство умножения
$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$	— сочетательное свойство умножения
$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$	— распределительное свойство умножения относительно сложения
$a \cdot 1 = a$	— свойство единицы при умножении
$a \cdot 0 = 0$	— свойство нуля при умножении
$a \cdot \frac{1}{a} = 1 (a \neq 0)$	— существование обратного числа

Упражнения

1. Найдите десять рациональных чисел, которые заключены между числами 0,001 и 0,01. Найдите несколько иррациональных чисел, находящихся в этом промежутке.

2. Среди чисел 1,38; 2,5; 0; 1,(5); –1,68; 1,68; $2\frac{3}{4}$; 4,05; 1,4; 1,8; 1,75 найдите такие, которые заключены между иррациональными числами $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$.

3. Какое из утверждений верно: «Если $a \in \boldsymbol{N}$, то $a \in \boldsymbol{Z}$» или «Если $a \in \boldsymbol{Z}$, то $a \in \boldsymbol{N}$»?

4. Найдите два значения x, при которых:
а) $x \in \boldsymbol{Z}$ и $x \notin \boldsymbol{N}$; б) $x \in \boldsymbol{Q}$ и $x \notin \boldsymbol{Z}$; в) $x \in \boldsymbol{Q}$ и $x \notin \boldsymbol{N}$.

5. Каким из множеств $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{Z}$, $\boldsymbol{Q}$ и $\boldsymbol{R}$ принадлежит:
а) 6; б) –1,98; в) 0,5(87); г) π?

6. Найдите три числа, которые принадлежат:
а) $\boldsymbol{Z}$ и $\boldsymbol{R}$; б) $\boldsymbol{R}$ и $\boldsymbol{N}$; в) $\boldsymbol{Q}$ и $\boldsymbol{R}$; г) $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{Q}$ и $\boldsymbol{R}$.

7. Представьте в виде бесконечной десятичной периодической дроби число:

а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{2}{3}$; в) $\frac{5}{6}$; г) $\frac{7}{9}$; д) $1\frac{8}{11}$; е) $2\frac{4}{15}$.

В каждом случае выделите период, заключив его в скобки.

8. Представьте число в виде бесконечной десятичной периодической дроби. Округлите результат до десятых; до сотых; до тысячных:

а) $\frac{1}{9}$; б) $\frac{3}{32}$; в) $\frac{2}{7}$; г) $\frac{13}{64}$; д) $\frac{37}{15}$; е) $\frac{87}{65}$.

9. Проверьте, выполнив деление, что верно равенство:

а) $2,(3) = 2\frac{1}{3}$; в) $7,(18) = 7\frac{2}{11}$;

б) $0,1(6) = \frac{1}{6}$; г) $3,4(6) = 3\frac{7}{15}$.

10. Докажите, что разность, произведение и частное двух рациональных чисел (делитель отличен от нуля) — числа рациональные.

11. Запишите, используя знак $\in$, утверждение:
а) Число 13 является натуральным;
б) число 0,8 является рациональным;
в) число $\sqrt{3}$ является действительным;
г) число 585 является натуральным;
д) число 0 является целым.

12. Среди чисел

-2; 0; $\sqrt{2}$; $8{,}83$; π; $\frac{1}{48}$; $-\sqrt{11}$; 200; -100; $\frac{2}{3}$; $-5{,}12$; $-\frac{3}{7}$; $0{,}0002$

найдите:

а) натуральные числа;
б) целые отрицательные числа;
в) целые неотрицательные числа;
г) рациональные числа;
д) иррациональные числа;
е) действительные числа.

13. Какое множество является:

а) объединением множеств $\boldsymbol{N}$ и $\boldsymbol{Z}$, их пересечением;
б) объединением множеств $\boldsymbol{Q}$ и $\boldsymbol{R}$, их пересечением;
в) объединением множеств $\boldsymbol{N}$ и $\boldsymbol{Q}$, их пересечением;
г) объединением множеств $\boldsymbol{Z}$ и $\boldsymbol{R}$, их пересечением?

14. Отметьте на координатной прямой точки, соответствующие числам:

$$\sqrt{7};\ -\sqrt{11};\ \sqrt{12{,}3};\ \frac{12}{13};\ \frac{1}{2};\ 3\frac{1}{3};\ 0;\ 1{,}6+\sqrt{2}.$$

15. Укажите пять значений переменной a, при которых число $\sqrt{a}$ является рациональным и пять значений, при которых это число является иррациональным.

16. Приведите пример числа, которое является:

а) рациональным и нецелым;
б) действительным, но не рациональным;
в) целым, но не натуральным.

17. Прочитайте утверждения и выберите верные:

$-18 \in \boldsymbol{Z}$;	$\frac{12}{15} \in \boldsymbol{N}$;	$3{,}38 \notin \boldsymbol{Q}$;
$205 \in \boldsymbol{Q}$;	$2{,}5 \notin \boldsymbol{R}$;	$2 + \sqrt{2} \in \boldsymbol{R}$;
$\sqrt{3} \notin \boldsymbol{N}$;	$\sqrt{2} \in \boldsymbol{Q}$;	$3\frac{1}{4} + 0{,}25 \in \boldsymbol{R}$;
$0{,}15 \in \boldsymbol{Z}$;	$0{,}(8) \in \boldsymbol{R}$;	$4 + \sqrt{4} \in \boldsymbol{Z}$.

18. Запишите с помощью знака $\subset$ соотношения между множествами:

а) $\boldsymbol{Q}$ и $\boldsymbol{N}$;
б) $\boldsymbol{Q}$ и $\boldsymbol{Z}$;
в) $\boldsymbol{R}$ и $\boldsymbol{N}$;
г) $\boldsymbol{R}$ и $\boldsymbol{Z}$.

П

19. Изобразите на координатной прямой множество чисел, удовлетворяющее неравенству:

а) $x < 3$;
б) $-2 < x < 4$;
в) $x \geqslant 1$;
г) $5 \leqslant x \leqslant 7{,}5$;
д) $0 < x \leqslant 2{,}5$;
е) $x \geqslant 10{,}5$.

20. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{a} - \sqrt{b}$, если $a = 1$, $b = 0{,}64$;

б) $\sqrt{a-b}$, если $a = 1$, $b = 0{,}64$;

в) $2\sqrt{a+4b}$, если $a = 0{,}12$, $b = 0{,}01$;

г) $\sqrt{3a-b}$, если $a = 0{,}6$, $b = 0{,}8$;

д) $\sqrt{a+\sqrt{b}}$, если $a = 0{,}7$, $b = 0{,}09$;

е) $-\sqrt{a-\sqrt{b}}$, если $a = 4{,}8$, $b = 0{,}64$.

21. Найдите значение выражения:

а) $(22{,}5 : 0{,}45) \cdot (5{,}27 + 1{,}93)$;

б) $(7{,}6 - 8{,}5) : (0{,}23 + 2{,}92)$;

в) $35{,}4 \cdot (62{,}4 - 49{,}9) - 12{,}5 \cdot 15{,}4$;

г) $12{,}48 : (1{,}23 + 1{,}17) - 14{,}7 : 0{,}49$.

2. Сравнение действительных чисел

Вам уже приходилось сравнивать действительные числа, при этом для каждого вида чисел использовался свой способ сравнения. Напомним некоторые из этих способов.

Из двух обыкновенных дробей с одинаковыми знаменателями больше та, у которой числитель больше. Например, сравним две дроби $\frac{5}{6}$ и $\frac{7}{9}$. Чтобы воспользоваться правилом, приведём их к общему знаменателю, получим: $\frac{5}{6}=\frac{15}{18}$, $\frac{7}{9}=\frac{14}{18}$, значит $\frac{5}{6}>\frac{7}{9}$.

Чтобы сравнить обыкновенную дробь и десятичную, нужно перейти к какой-нибудь одной форме представления дробей. Сравним, например, числа $\frac{5}{6}$ и 0,6. Число $\frac{5}{6}$ в виде десятичной дроби представить нельзя, поэтому запишем в виде обыкновенной дроби число 0,6. Получим: $0{,}6=\frac{3}{5}$; так как $\frac{5}{6}>\frac{3}{5}$, то $\frac{5}{6}>0{,}6$.

При сравнении чисел разных знаков пользуются правилом: всякое отрицательное число меньше положительного, например: $-100 < 0{,}0017$.

Правило сравнения двух отрицательных чисел таково: из двух отрицательных чисел больше то, у которого модуль меньше.

Например, $-250 > -350$, так как $|-250| < |-350|$.

При сравнении чисел, одно из которых или оба имеют вид $\sqrt{a}$, пользуются свойством: при увеличении подкоренного выражения значение арифметического квадратного корня возрастает. Сравним, например, числа 7 и $\sqrt{48}$. Так как $7=\sqrt{49}$ и $\sqrt{49}>\sqrt{48}$, то $7>\sqrt{48}$.

Удобно, однако, иметь общий способ сравнения чисел, который не зависит от их конкретного вида. Такой способ основан на десятичной записи.

Известно, что всякое действительное число можно представить в виде бесконечной десятичной дроби. Эта дробь периодическая, если число рациональное, и непериодическая, если число иррациональное.

Сравним, например, числа π и $\sqrt{10}$: $\pi = 3{,}1415\ldots$, а $\sqrt{10}=3{,}1622\ldots$. Цифры в разряде единиц и десятых совпадают, а в разряде сотых в первом числе стоит 4, а во втором — 6. Следовательно, $\pi<\sqrt{10}$.

Упражнения

22. Расположите в порядке возрастания числа:

$$-1\frac{1}{3};\ -1{,}3;\ 1{,}15;\ 1\frac{1}{8};\ -1{,}4.$$

23. Расположите в порядке убывания числа:

$$-5{,}28;\ -1{,}634\ldots;\ -1{,}34;\ -1{,}(3).$$

24. Какие целые числа расположены между числами:

а) $-4{,}122\ldots$ и $3{,}895\ldots$;
б) $-6{,}240\ldots$ и $-1{,}328\ldots$;
в) $-5{,}07$ и $-2{,}708$;
г) $-2{,}25$ и $0{,}62$?

25. Сравните числа:

а) $0{,}017$ и $0{,}099$;
б) $-4{,}9$ и $-4{,}25$;
в) $-8{,}48$ и $-8{,}84$;
г) $\frac{11}{16}$ и $0{,}6875$;
д) $-2{,}882$ и $-2\frac{13}{20}$;
е) $\frac{12}{13}$ и $\frac{13}{14}$;
ж) $-6{,}006$ и $6{,}066$;
з) $-34\frac{3}{4}$ и $-34{,}75$;
и) $0{,}653$ и $\frac{13}{20}$;
к) $\frac{3}{7}$ и $0{,}43$.

26. Сравните числа:

а) $2{,}5$ и -25;
б) $-3{,}01$ и $3{,}001$;
в) $-0{,}14$ и $-0{,}41$;
г) $-2{,}35$ и $-3{,}25$.

27. Сравните числа:

а) $2{,}3(4)$ и $2{,}(34)$;
б) $1{,}0(5)$ и $1{,}0(05)$;
в) $-1{,}34$ и $-1{,}(34)$;
г) $0{,}61$ и $0{,}61(1)$.

28. Сравните числа:

а) $0{,}5(45)$ и $0{,}(54)$;
б) $0{,}54(5)$ и $0{,}545$;
в) $0{,}(27)$ и $0{,}2(72)$;
г) $-7{,}(3)$ и $-7{,}123$;
д) $6{,}(347)$ и $6{,}1(743)$;
е) $0{,}1(0)$ и $0{,}0(9)$.

29. Сравните числа:

а) 5,48(5) и 5,4(85); б) –3,5(61) и –3,56(1).

30. Найдите два последовательных натуральных числа, между которыми заключено число: $\sqrt{3}$; $\sqrt{5}$; $\sqrt{8}$; $\sqrt{10}$; $\sqrt{20}$; $\sqrt{50}$; $\sqrt{75}$.

31. Сравните числа c и $\sqrt{c}$ при условии, что: а) $c > 1$; б) $0 < c < 1$. Существует ли значение c, при котором верно равенство $\sqrt{c} = c$?

32. Сравните числа:

а) $5\sqrt{3}$ и $3\sqrt{5}$; в) $0{,}3\sqrt{10}$ и $0{,}1\sqrt{80}$;

б) $0{,}1\sqrt{4500}$ и $\sqrt{45}$; г) $-4\sqrt{0{,}2}$ и $-\sqrt{0{,}7}$.

П

33. Найдите значение выражения:

а) $12\frac{2}{5} - 2\frac{2}{7} : 1\frac{19}{21}$; б) $\left(12\frac{2}{5} - 2\frac{2}{7}\right) : 1\frac{19}{21}$.

34. Найдите сумму, разность, произведение и частное чисел:

а) $2{,}4 \cdot 10^{-2}$ и $0{,}0125 \cdot 10^{3}$; в) $15{,}4 \cdot 10^{6}$ и $0{,}044 \cdot 10^{7}$;

б) $(1{,}3 \cdot 10^{-2})^2$ и $5{,}2 \cdot 10^{-5}$; г) $(3{,}5 \cdot 10^{-3})^2$ и $(7 \cdot 10^{-4})^2$.

35. Найдите значение выражения:

а) $7^5 \cdot (7^2)^4 : 7^{11}$; г) $10 : (5^{-2})^{13} : 25^{14}$;

б) $11^{-4} : 11^{13} : 11^{17}$; д) $\frac{15^5}{3^3 \cdot 5^4} : \frac{12^5}{3^6 \cdot 4^6}$;

в) $5^9 : 5^{-12} : 5^{20}$; е) $\frac{10^{10}}{2^8 \cdot 5^9} : \frac{17^6 \cdot 8^3}{34^7}$.

36. Вычислите:

а) $\frac{27^5 + 27^4}{9^8 + 9^7 + 9^6}$; б) $\frac{16^7 + 16^6}{8^{10} + 8^9 + 8^8}$; в) $\frac{4^{95} + 4^{94} + 4^{93}}{21 \cdot (16^2)^{23}}$.

3. Погрешность и точность приближения

По графику функции $y = x^2$ найдены приближённые значения этой функции при $x = 1{,}5$ и $x = 2{,}1$:

если $x = 1{,}5$, то $y \approx 2{,}3$;
если $x = 2{,}1$, то $y \approx 4{,}4$.

По формуле $y = x^2$ можно найти точные значения этой функции:

если $x = 1{,}5$, то $y = 1{,}5^2 = 2{,}25$;
если $x = 2{,}1$, то $y = 2{,}1^2 = 4{,}41$.

Приближённое значение отличается от точного значения в первом случае на 0,05, а во втором на 0,01, так как:

$$2{,}3 - 2{,}25 = 0{,}05; \qquad 4{,}41 - 4{,}4 = 0{,}01.$$

Чтобы узнать, на сколько приближённое значение отличается от точного, надо из большего числа вычесть меньшее, т. е. найти модуль разности точного и приближённого значений. Этот модуль разности называют *абсолютной погрешностью*.

Определение. Абсолютной погрешностью приближённого значения называют модуль разности точного и приближённого значений.

Так, в рассмотренном примере абсолютная погрешность приближённого значения, равного 2,3, есть 0,05, а абсолютная погрешность приближённого значения, равного 4,4, есть 0,01:

$$|2{,}25 - 2{,}3| = |-0{,}05| = 0{,}05; \qquad |4{,}41 - 4{,}4| = 0{,}01.$$

Найти абсолютную погрешность не всегда возможно. Пусть, например, при измерении длины отрезка AB, изображённого на рисунке 3, получен результат:

$$AB \approx 4{,}3 \text{ см.}$$

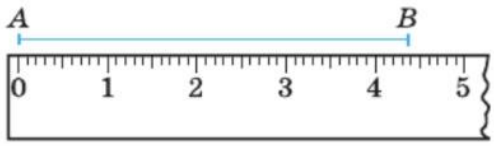


Рис. 3

Мы не можем найти абсолютную погрешность приближённого значения, так как не знаем точного значения длины отрезка AB. В подобных случаях важно указать такое число, больше которого абсолютная погрешность быть не может. В рассматриваемом примере в качестве такого числа можно взять число 0,1. В самом деле, цена деления линейки 0,1 см, и поэтому абсолютная погрешность приближённого значения, равного 4,3, не больше чем 0,1, т. е.

$$|AB - 4{,}3| \leqslant 0{,}1.$$

Говорят, что число 4,3 есть приближённое значение длины отрезка AB (в сантиметрах) с точностью до 0,1.

Вообще, если $x \approx a$ и абсолютная погрешность этого приближённого значения не превосходит некоторого числа h, то число a называют *приближённым значением x с точностью до h*. Пишут:

$$x \approx a \textit{ с точностью до } h.$$

Используют также такую запись:

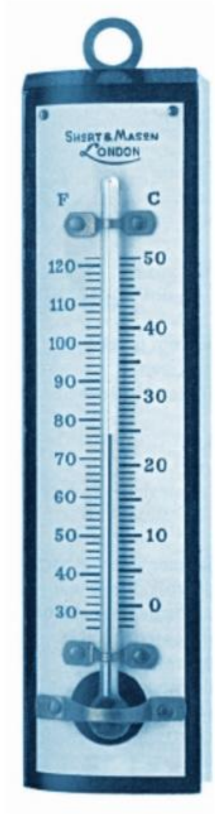
$$x = a \pm h.$$

Запись $x = a \pm h$ означает, что точное значение переменной x заключено между числами $a - h$ и $a + h$, т. е.

$$a - h \leqslant x \leqslant a + h.$$

Например, на рулоне обоев написано, что его длина равна $18 \pm 0{,}3$ м. Значит, если l — истинное значение длины рулона (в метрах), то

$$18 - 0{,}3 \leqslant l \leqslant 18 + 0{,}3, \text{ т. е. } 17{,}7 \leqslant l \leqslant 18{,}3.$$



Точность приближённого значения зависит от многих причин. В частности, если приближённое значение получено в процессе измерения, его точность зависит от прибора, с помощью которого выполнялось измерение. Например, на медицинском термометре деления нанесены через $0{,}1^\circ$. Это даёт возможность измерять температуру с точностью до $0{,}1^\circ$. Комнатный термометр, на котором деления нанесены через 1°, позволяет измерять температуру с точностью до 1°. На торговых весах, у которых цена деления шкалы 5 г, можно взвешивать с точностью до 5 г.

Для оценки качества измерения можно использовать *относительную погрешность* приближённого значения.

Определение. Относительной погрешностью приближённого значения называется отношение абсолютной погрешности к модулю приближённого значения.

Относительную погрешность принято выражать в процентах.

В тех случаях, когда абсолютная погрешность приближённого значения неизвестна, а известна только его точность, ограничиваются оценкой относительной погрешности.

Рассмотрим такой пример. При измерении (в сантиметрах) толщины b стекла и длины l книжной полки получили такие результаты:

$$b = 0{,}4 \pm 0{,}1; \qquad l = 100{,}0 \pm 0{,}1.$$

В первом случае относительная погрешность не превосходит $\frac{0{,}1}{0{,}4} \cdot 100\%$, т. е. 25%, а во втором не превосходит $\frac{0{,}1}{100} \cdot 100\%$, т. е. 0,1%. Говорят, что в первом случае измерение выполнено с относительной точностью до 25%, а во втором — с относительной точностью до 0,1%. Качество второго измерения намного выше, чем первого.

Упражнения

37. Округлите числа 17,26; 12,034; 8,654 до десятых и найдите абсолютную погрешность каждого из приближённых значений.

38. Найдите абсолютную погрешность приближённого значения, полученного в результате округления:

а) числа 9,87 до единиц;
б) числа 124 до десятков;
в) числа 0,453 до десятых;
г) числа 0,198 до сотых.

39. При выполнении вычислений дробь $\frac{1}{7}$ заменили десятичной дробью 0,14. Какова абсолютная погрешность этого приближения?

40. В каких границах заключено число y, если:

а) $y = 6{,}5 \pm 0{,}1$; б) $y = 1{,}27 \pm 0{,}2$?

41. На упаковке простокваши написано, что её надо хранить при температуре 4 ± 2 °C. В каких границах заключено значение температуры t °C, допустимое для хранения?

42. На упаковке товара указано, что его масса равна 420 г ± 3%. В каких границах заключена масса a г этого товара?

43. На коробке конфет указано, что она должна храниться при температуре 16 ± 3 °C. Удовлетворяет ли этому условию температура воздуха, равная:

а) 18 °C; б) 21 °C; в) 14,5 °C; г) 12,5 °C?

44. Определяя массу мешка картофеля с точностью до 1 кг, нашли, что она равна 32 кг. Может ли масса этого мешка, измеренная с точностью до 0,1 кг, оказаться равной:

а) 31,4; б) 32,5; в) 33,2; г) 30,7?

45. Начертите острый угол и измерьте его с помощью транспортира. Какова точность полученного результата?

46. При измерении длины стержня пользовались различными измерительными инструментами: линейкой с миллиметровыми делениями, штангенциркулем (цена деления 0,1 мм) и микрометром (цена деления 0,01 мм). При этом были получены результаты: 17,9 мм, 18 мм, 17,86 мм. Каким инструментом выполнено каждое из указанных измерений и какую точность даёт каждый инструмент?

47. Округлите число 2,525 до десятых. Найдите относительную погрешность приближения, полученного при округлении.

48. Выполняя лабораторную работу по определению плотности железа, ученик получил результат 7,6 г/см^3. Вычислите относительную погрешность экспериментального результата (табличное значение плотности железа равно 7,8 г/см^3).

49. Поверхность Земли равна 510,2 млн км^2 (с точностью до 0,1 млн км^2). Оцените относительную погрешность приближённого значения.

50. Измерили толщину человеческого волоса d и расстояние от Земли до Луны l. Получили $d \approx 0{,}15$ мм с точностью до 0,01 мм и $l \approx 384\,000$ км с точностью до 500 км. Сравните качество измерений, оценив относительные погрешности.

П

51. Сравнивая с нулём значения выражений, ученик получил следующие результаты:

1. $3\sqrt{2} - \sqrt{7} > 0$ 2. $4\sqrt{7} - 9\sqrt{2} < 0$

3. $6\sqrt{3} - 3\sqrt{6} > 0$ 4. $7\sqrt{11} - 6\sqrt{12} < 0$

При этом он допустил ошибку. Найдите её и исправьте.

52. Докажите неравенство:

а) $6a(a + 1) < (3a + 1)(2a + 1) + a$;

б) $(2p - 1)(2p + 1) + 3(p + 1) > (4p + 3)p$.

53. а) Разность корней уравнения $x^2 - 8x + q = 0$ равна 16. Найдите q.

б) Сумма квадратов корней уравнения $x^2 - 7x + q = 0$ равна 29. Найдите q.

Контрольные вопросы и задания

1. Назовите основные числовые множества. Запишите последовательность соотношений между этими множествами в виде цепочки включений и проиллюстрируйте её рисунком.
2. Сформулируйте и запишите в буквенном виде законы сложения и законы умножения чисел.
3. Сформулируйте и запишите в виде буквенного равенства свойства нуля при сложении, свойства нуля и единицы при умножении.
4. Что называется абсолютной погрешностью приближённого значения? Объясните смысл записи $x = a \pm h$.
5. Что называется относительной погрешностью приближённого значения?

§ 2 ПРИЛОЖЕНИЯ МАТЕМАТИКИ В РЕАЛЬНОЙ ЖИЗНИ

4. Размеры объектов и длительность процессов в окружающем мире

В природе существуют как очень большие объекты, так и очень малые. Их можно измерить и получить представление о различиях их величин с точки зрения математики. Среди малых объектов можно привести пример атомов, состоящих из электронов и ядер с размерами 1 Å (ангстрем или 10^{-10} м). Малыми размерами обладают вирусы, большинство из которых имеют длину от 20 до 300 нм (нанометр, т. е. одна миллиардная часть метра — 10^{-9} м). В то же время окружающая нас Вселенная огромна, и в ней находится очень много огромных объектов. Например, Юпитер — самая большая планета Солнечной системы, газовый гигант. Его экваториальный радиус равен 71,4 тыс. км, т. е. $7{,}14 \cdot 10^7$ м.

Различия касаются не только размеров окружающего мира, но и длительности процессов в нём. Супербыстрое или самое краткое событие, зафиксированное учёными в истории науки — это прохождение рентгеновского фотона через молекулу водорода. Оно равно 247 зептосекунд (1 зептосекунда равна 10^{-21} с), т. е. $2{,}47 \cdot 10^{-23}$ с. Среди животных, птиц и рыб очень разнится скорость их движения. Так, птица сапсан — король вертикального полёта, пикируя на добычу, развивает скорость до 360 км/ч или $3{,}6 \cdot 10^5$ м/ч. Не случайно его именем назван скоростной поезд. А морской конёк плавает со скоростью всего лишь 1,5 м/ч.

Упражнения

54. Приведите примеры очень больших и очень малых величин и укажите их размеры. (Для поиска информации воспользуйтесь данными из Интернета или из справочников.)

55. Приведите примеры процессов, различающихся по скорости их протекания: очень быстрых и очень медленных. (Для поиска информации воспользуйтесь данными из Интернета или из справочников.)

56. а) Расстояния между звёздами измеряют в световых годах. Световой год равен примерно 9460 млрд км. От звезды X до звезды Y расстояние a световых лет. Запишите это расстояние в тысячах километров.

б) Российские учёные из государственного научного центра вирусологии и биотехнологии «Вектор» сделали снимки нового вируса SARS-CoV-2 под микроскопом. Размер частиц составляет 100—120 нм. Запишите размер частиц этого вируса в метрах.

57. Одна секунда — мгновение для человека и целая эпоха с точки зрения атомов и электронов. Невооружённый человеческий взгляд может заметить явления, длящиеся буквально единицы миллисекунд (1 миллисекунда равна 10^{-3} с). Одна наносекунда ещё меньше и составляет 10^{-9} с. Посчитайте дистанцию, которую пройдёт частица со скоростью света за одну наносекунду, и результат запишите в миллиметрах.

58. Современные фотоаппараты делают огромное количество кадров за короткий промежуток времени. Рекорд составляет 6 миллионов кадров за секунду. Можно увидеть события, которые человеческий глаз никогда не сможет уловить. За какое время происходит один кадр в таком фотоаппарате? Результат запишите в наносекундах.

П

59. Упростите выражение:

а) $\left(\dfrac{2ab}{a^2-b^2}+\dfrac{a-b}{2a+2b}\right)\cdot\dfrac{2a}{a+b}+\dfrac{b}{b-a}$;

б) $\dfrac{y}{x-y}-\dfrac{x^3-xy^2}{x^2+y^2}\cdot\left(\dfrac{x}{(x-y)^2}-\dfrac{y}{x^2-y^2}\right)$.

60. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x-y=1, \\ xy=240; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2+y^2=65, \\ 2x-y=15. \end{cases}$

61. Сколько решений имеет уравнение:

а) $\dfrac{25}{x}=2x-5$; б) $x^3=|x|$?

5. Практико-ориентированные задачи

Часто, даже не подозревая об этом, вы сталкиваетесь в быту с необходимостью применить те или иные математические знания. Например, прикидывая, хватит ли вам наличных денег на покупку продуктов, или поместится ли телевизор с диагональю, длина которой указана в дюймах, в нишу шкафа. Рассчитывая время, которое вам понадобится, чтобы добраться до места встречи с другом, вы обязательно будете учитывать и скорость передвижения, и расстояние до места встречи. При приготовлении нового блюда вам потребуется, например, такое математическое понятие, как часть от числа, а также знания о переводе одних единиц измерения в другие. Если вы захотите положить свои деньги на вклад в банк, то обязательно появится мысль о том, в каком банке это выгоднее всего сделать, исходя из предлагаемой им процентной ставки. Изучая историю развития человечества, становится понятно, что развитие математики как науки началось во многом благодаря тому, что люди каждый день попадали в ситуации, когда надо было что-то складывать и вычитать, умножать и делить, находить значения различных величин, то есть каждый человек был вынужден искать решения *практико-ориентированных задач*, связанных с его жизнью и бытом. Оказалось, что процессы, происходящие в реальной жизни, проще всего описывать с помощью математических моделей, а умение решать практико–ориентированные задачи незаменимо в практической деятельности и повседневной жизни человека.

Рассмотрим некоторые практико-ориентированные задачи.

Задача 1. Надежда Михайловна решила сделать ремонт в гостиной, в которой имеются окно (120×130 см) и дверь ($800 \times$ $\times\ 2000$ мм). Она выбрала в магазине обои в рулонах (размер одного рулона $10{,}5 \times 1{,}06$ м) по цене 2300 р. за один рулон, а также ламинат по цене 1100 р. за упаковку. Хватит ли Надежде Михайловне 25 тыс. р. на покупку этих материалов, если гостиная имеет размеры $4{,}5 \times 6 \times 2{,}7$ (ш × д × в), а ламинат продаётся упаковками по $2{,}74$ м^2 в каждой?

▶ Каждая стена имеет форму прямоугольника, поэтому можно найти общую площадь стен:

$$4{,}5 \cdot 2{,}7 \cdot 2 + 6 \cdot 2{,}7 \cdot 2 = 2{,}7 \cdot 2 \cdot (4{,}5 + 6) = 5{,}4 \cdot 10{,}5 = 56{,}7 \text{ м}^2.$$

Учитывая, что дверь и окно не подлежат оклейке обоями, вычтем из найденной площади стен площадь окна и двери.
Имеем $S_{\text{окна}} = 120 \text{ см} \cdot 130 \text{ см} = 1{,}2 \text{ м} \cdot 1{,}3 \text{ м} = 1{,}56 \text{ м}^2$;
$S_{\text{двери}} = 800 \text{ мм} \cdot 2000 \text{ мм} = 0{,}8 \text{ м} \cdot 2 \text{ м} = 1{,}6 \text{ м}^2$,
Тогда $S_{\text{оклейки}} = 56{,}7 \text{ м}^2 - 1{,}56 \text{ м}^2 - 1{,}6 \text{ м}^2 = 53{,}54 \text{ м}^2$.
Найдём, какую площадь можно оклеить одним рулоном обоев:

$$10{,}5 \cdot 1{,}06 = 11{,}13 \ (\text{м}^2).$$

Тогда Надежде Михайловне понадобится $53{,}54 : 11{,}13 \approx 5$ рулонов, цена которых составит $2300 \cdot 5 = 11\,500$ р.
Найдём площадь пола:

$$S_{\text{пола}} = 4{,}5 \text{ м} \cdot 6 \text{ м} = 27 \text{ м}^2.$$

Отсюда получим, что для гостиной понадобится $27 : 2{,}74 \approx 10$ упаковок ламината, цена которых составит $1100 \cdot 10 = 11\,000$ р.
Таким образом, для покупки всех материалов необходимо $11\,500 + 11\,000 = 22\,500$ р., а значит, Надежде Михайловне хватит имеющейся у неё суммы. ◁

Задача 2. Мобильный оператор предлагает три тарифа сотовой связи.

Тариф	Условия тарифа	Абонентская плата	Плата сверх тарифа
«1500»	Входящие звонки — бесплатно, исходящие звонки — бесплатно 2000 мин в месяц, безлимитный Интернет	1500 р. в месяц	3,5 р. за минуту
«2000»	Входящие звонки — бесплатно, исходящие звонки — бесплатно 3000 мин в месяц, Интернет — бесплатно 10 Гб в месяц	2000 р. в месяц	1,5 р. за минуту, 40 р. за 1 Гб
«3000»	Входящие звонки — бесплатно, исходящие звонки — бесплатно, Интернет — бесплатно 30 Гб	3000 р. в месяц	30 р. за Гб

Антон тратит 2500 мин в месяц на исходящие звонки и 35 Гб Интернета. Какой тариф будет для него самым выгодным?

▶ Рассчитаем расходы Антона по каждому тарифу.
По первому тарифу они составят

$$1500 + 3{,}5 \cdot 500 = 3250 \text{ р.},$$

по второму тарифу —

$$2000 + 40(35 - 10) = 2000 + 40 \cdot 25 = 3000 \text{ р.},$$

а по третьему —

$$3000 + 30(35 - 30) = 3000 + 30 \cdot 5 = 3150 \text{ р.}$$

Тогда самым выгодным для Антона тарифом будет тариф «2000». ◁

Задача 3. Вера Николаевна вырастила большой урожай огурцов и решила замариновать их. В рецепте было указано, что для приготовления маринада ей понадобится 2%-й раствор уксуса. Но в наличии у неё оказался только 9%-й раствор, а магазины уже не работали. Сколько Вере Николаевне нужно добавить воды в 500 г 9%-го раствора уксуса, чтобы получить необходимую концентрацию для маринада?

▶ Пусть x г воды надо добавить в 9%-й раствор уксуса для получения 2%-го раствора.

Составим таблицу.

Раствор	Масса раствора, г	Масса уксуса, г
9%-й	500	$500 \cdot 0{,}09 = 45$
2%-й	$500 + x$	$(500 + x) \cdot 0{,}02 = 10 + 0{,}02x$

Масса уксуса при добавлении воды не меняется, поэтому получим

$$10 + 0{,}02x = 45 \text{ (г)}.$$

Решив уравнение, узнаем, что $x = 1750$ г, значит, необходимо 500 г 9%-го раствора уксуса разбавить 1750 г воды для получения 2%-го раствора. ◁

Упражнения

62. В каких единицах в нашей стране обычно измеряют следующие величины:

1) высоту холодильника;
2) площадь поверхности тела человека;
3) ширину реки;
4) массу таблетки;
5) скорость движения черепахи;
6) заработный фонд крупной компании;
7) площадь страны;
8) массу атомного ледокола;
9) объём лёгких человека;
10) площадь футбольного поля;
11) диаметр колеса самоката;
12) массу собаки;
13) урожайность пшеницы за определённый год;
14) площадь дачного участка;
15) скорость пассажирского самолёта;
16) толщину волоса;
17) объём воды, поступившей через систему водоснабжения;
18) массу сахарного песка для приготовления пирога?

(Для ответа на вопросы задачи вы можете воспользоваться данными из Интернета или справочников.)

63. Родители дали Алине 500 р. на покупку тетрадей к новому учебному году. Сколько тетрадей она сможет купить, если стоимость одной тетради составляет 26 р. 50 к.?

64. Даниле родители дали 500 р. на покупку тетрадей к новому учебному году. Узнав, что в ближайшем магазине одна тетрадь стоит 26 р. 50 к., Данила решил поехать в гипермаркет, где цена одной тетради была на 20% меньше. На сколько больше тетрадей он сможет приобрести в гипермаркете, чем в магазине?

65. Елена Владимировна, накопив деньги к 25 февраля, решила приобрести холодильник за 45 000 р. и стиральную машину за 22 000 р. В магазине до конца февраля действует скидка 10% на любую покупку, с 1 марта по 15 марта действует скидка на стиральные машины 30%, а с 16 марта по 31 марта действует скидка 15% на холодильники. Когда Елене Владимировне выгоднее всего приобрести холодильник и стиральную машину в этом магазине?

66. В новом районе предполагается построить школу. Сколько учебных кабинетов для обучающихся начальной школы надо запланировать в проекте, если в одном кабинете помещается не более 24 учащихся, а в школу после постройки должны поступить 385 детей младшего школьного возраста?

67. 6 августа Артём устроился на работу. Зарплата Артёму будет поступать на его счёт два раза в месяц: 19-го числа каждого месяца Артёму будут перечислять аванс за работу в текущем месяце в размере 36 000 р., а 5-го числа следующего месяца — оставшуюся часть денег в размере 48 000 р. В месяц Артём собирается тратить 30 000 р. на продукты и товары для дома, 11 600 р. на оплату коммунальных услуг, 2000 р. на оплату сотовой связи, 700 р. на оплату Интернета, 6400 р. на бензин, а также 10 000 р. на непредвиденные расходы. За какое наименьшее число месяцев Артём сможет накопить 500 000 р. на первоначальный взнос по ипотеке, если будет придерживаться плана расходов?

68. С помощью рулетки измерьте длину своего шага (в сантиметрах). Подсчитайте количество шагов, которые вы совершаете, преодолевая расстояние от дома до школы, и запишите время, потраченное на этот путь. Зная длину шага и количество сделанных шагов, найдите расстояние от своего дома до школы (в метрах), а также вычислите среднюю скорость, с которой вы ходите в школу. (Чтобы узнать длину своего шага, измерьте расстояние от пятки до пятки.)

69. Для привлечения клиентов София на месяц снизила цены в своём магазине на 10%. На сколько процентов Софии необходимо будет их повысить через месяц, чтобы вернуться к уровню цен, который был до снижения?

70. Алексею Петровичу необходимо покрасить в два слоя стены на застеклённом балконе шириной 800 мм, длиной 2700 мм и высотой 3200 мм. Остекление балкона и балконный блок занимают $\frac{1}{4}$ площади его стен. Сколько литровых банок краски ему нужно купить, если расход краски составляет 250 мл на 1 м^2 при покраске в один слой?

71. Роман захотел заказать новые джинсы в интернет-магазине, но забыл, что должно быть написано на этикетке, чтобы они подошли ему по росту. Тогда Роман измерил длину старых брюк по внутреннему шву, и она оказалась равной 76 см. Длина джинсов по внутреннему шву указывается на этикетке в дюймах (1 дюйм = 2,54 см) и является чётным числом. Какое число должно быть написано на этикетке подходящих Роману джинсов?

72. Мария Александровна всегда заказывала на день рождения пирог с мясом стоимостью 1500 р. в кулинарии. Но ей подарили книгу рецептов, и она решила испечь пирог с мясом самостоятельно. Используя список ингредиентов и данные таблицы, подсчитайте, на сколько рублей выгоднее оказалось испечь пирог самостоятельно. Какие ещё блюда сможет приготовить Мария Александровна из оставшихся продуктов?

Список ингредиентов для пирога с мясом

Тесто:	**Начинка:**
• молоко — 125 мл; • сливочное масло — 80 г; • растительное масло — 30 мл; • сахарный песок — 20 г; • соль — 5 г; • сухие дрожжи — 15 г; • пшеничная мука высшего сорта — 350 г.	• свинина — 700 г; • репчатый лук — 1 шт. (130 г); • чёрный молотый перец — 10 г; • соль — 10 г; • сливочное масло — 25 г; • молоко — 150 мл; • растительное масло (для смазки сковороды) — 15 мл.

Стоимость продуктов

Продукт	Количество	Стоимость, р.
Молоко	1 л	80
Сливочное масло	250 г	156
Растительное масло	1 л	120
Сахарный песок	1 кг	53
Соль	500 г	45
Сухие дрожжи	12 г	17
Пшеничная мука	1 кг	47
Свинина	1 кг	450
Репчатый лук	1 кг	30
Чёрный молотый перец	25 г	40

73. Упростите выражение:

а) $\left(\dfrac{a-3}{a^2-3a+9}-\dfrac{6a-18}{a^3+27}\right):\dfrac{5a-15}{4a^3+108}$; б) $\dfrac{ab^2-a^2b}{a+b}\cdot\dfrac{a+\dfrac{ab}{a-b}}{a-\dfrac{ab}{a+b}}$.

74. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases}3y-2x=10,\\7x+5y=27;\end{cases}$ б) $\begin{cases}0{,}4x-0{,}2y=0{,}4,\\x+11y=12{,}5.\end{cases}$

75. Решите уравнение:

а) $5\sqrt{x}=1$; б) $\sqrt{x-4}=15$.

Контрольные вопросы и задания

1 Что такое нанометр и зептосекунда?

2 Составьте сами практико-ориентированную задачу.

Для тех, кто хочет знать больше

6. Точность представления действительных чисел в виде десятичных дробей. Число π

Рассмотрим вопросы точности представления действительных чисел в виде десятичных дробей. Любое рациональное число мы можем записать либо в виде конечной десятичной дроби, либо в виде бесконечной периодической десятичной дроби. При этом всегда можно указать цифру, стоящую на любой позиции после запятой. Но для иррационального числа в общем случае без использования вычислительных средств и соответствующих математических методов это сделать невозможно. Так, например, наиболее широко используемый в наши дни 12-разрядный калькулятор даёт для числа $\sqrt{2}$ только первые 10 точных десятичных знаков (значащих цифр) после запятой.

Интересно проследить, каких успехов достигли математики и вычислительная техника в вопросе представления действительных чисел десятичными дробями на примере вычисления количества значащих цифр после запятой числа π, равного отношению длины окружности к длине её диаметра. Название числа π произошло от первой буквы греческого слова περιφερεια («окружность»). Первым это обозначение использовал английский математик Уильям Джонс, но общепринятым оно стало после того, как его (начиная с 1737 года) стал систематически употреблять Леонард Эйлер.

Укажем основные этапы в истории вычисления числа π. Эти этапы характеризуются тем, что в каждом из них найденное количество значащих цифр возрастало на порядок, т. е. от одной цифры до десятков триллионов.

Персидский математик Джамшид ал-Каши в XV веке вычислил число π с точностью до 16 знаков.

В XVII веке голландский математик Лудольф ван Цейлен вычислил 35 знаков числа π, а в 1706 году профессор астрономии лондонского Грешем-колледжа Джон Мэчин вычислил 100 его знаков.

Следует отметить, что только в 1761 году немецкий математик Иоган Генрих Ламберт доказал, что число π является иррациональным, то есть не может быть выражено никакой простой дробью. Соответственно число π является бесконечным, у него нет конца, его можно лишь вычислить с нужной степенью точности. Есть ли у этого числа какая-то внутренняя структура, неизвестная закономерность? Узнать это хотели многие.

В 1844 г. немецкий математик Иоганн Мартин Дазе нашёл 200 знаков π в течение нескольких месяцев.

В 1873 г. британский учёный Уильям Шенкс продолжил исследование Дазе, опубликовав полученное им значение π с точностью до 707 знаков, хотя, начиная с 528-го, все остальные оказались неверными. Шенкс потратил на свой труд около 20 лет. Своеобразным рекордом стало и то, что ошибка Шенкса была обнаружена только через 91 год при сравнении его значений с приближением π до 530 знаков, вычисленным Д. Ф. Фергюсоном с помощью механического калькулятора.

С появлением компьютеров изучение числа π пошло значительно быстрее.

В 1949 году Джон фон Нейман, венгеро-американский математик, на компьютере ЭНИАК вычислил 2037 знаков числа, на что ушло 70 часов.

В 1957 г. британский учёный-компьютерщик Джордж Эрик Фелтон пытался вычислить 10 000 знаков π, но из-за ошибки компьютера правильными оказались только первые 7480 знаков. Рубеж в 10 000 знаков был достигнут годом позже Франсуа Женюи с помощью компьютера IBM 704.

В 1961 г. было вычислено 100 000 знаков π с помощью компьютера IBM 7090 менее чем за 9 часов.

Рубеж в миллион знаков был преодолён в 1973 году.

В 1999 году было вычислено 206 158 430 000, в 2002 году — более 1,24 триллиона, в 2011 году — 10 триллионов, а в 2013 году — уже 12,1 триллиона цифр после запятой.

В январе 2020 года было вычислено 50 триллионов цифр и последний рекорд установлен в августе 2021 года — 62,8 триллиона цифр после запятой с помощью высокопроизводительного компьютера за 108 дней и 9 часов.

На рисунке 4 представлена диаграмма, наглядно демонстрирующая по годам значимые шаги описанных вычислений.

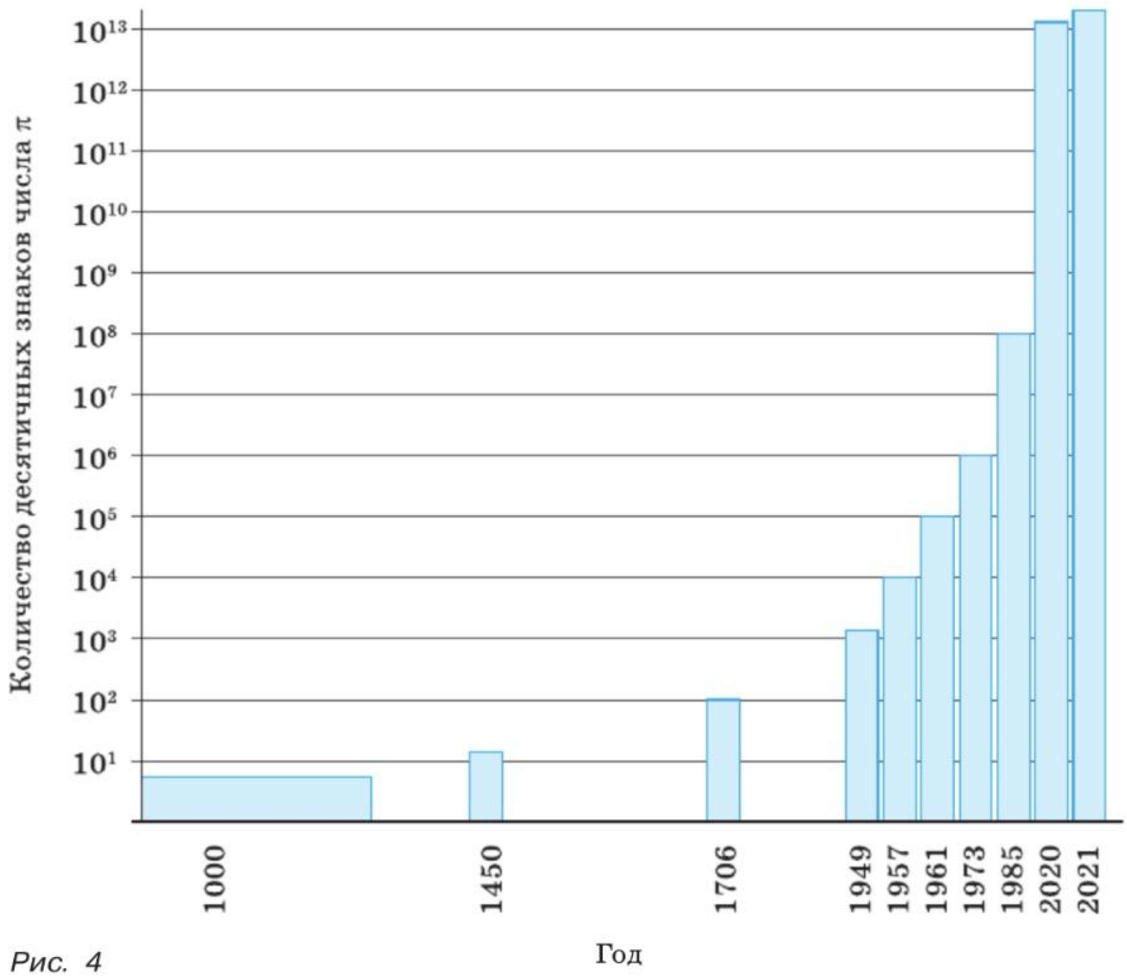


Рис. 4

Практическая ценность изучения числа π

Как вы уже успели убедиться на уроках геометрии и физики, для решения большинства задач достаточно знать первые 3 знака числа π (3,14). Но для более сложных случаев и там, где нужна бóльшая точность, необходимо знать больше, чем 3 цифры.

Ясно, что каждая известная нам десятичная цифра делает любое вычисление, связанное с числом π, более точным. Но сколько из них нам действительно нужно для достаточной точности? Легко посчитать, что когда число π округляется до 3, то относительная погрешность составляет примерно 4,51%. При использовании приближения 3,1 относительная погрешность составляет около 1,3%. Приближение 3,14 даёт ошибку примерно 0,5% от истинного значения, а значение 3,14159 отличается от истинного в пределах 0,000084%. Взяв 10 десятичных знаков 3,1415926536, можно вычислить окружность Земли с точностью менее миллиметра. А в программе, контролирующей и стабилизирующей космический корабль во время полётов, используется только 16 цифр числа π.

Какая же тогда польза от остальных 62,79 триллиона цифр? С практической точки зрения польза состоит в разработке и тестировании суперкомпьютеров и новых высокоточных алгоритмов умножения. Оптимизация вычисления числа π приводит к появлению компьютерного оборудования и программного обеспечения, которые приносят пользу во многих других сферах нашей жизни. Это наглядно показывает то, что последнее вычисление числа π было выполнено в 3,5 раза быстрее, чем предыдущее, несмотря на дополнительные 12 триллионов десятичных знаков. Этот результат по увеличению производительности суперкомпьютеров был достигнут всего за 18 месяцев. Также польза заключается в исследовании самой природы числа π. Несмотря на столетия исследований, до сих пор остаются без ответа фундаментальные вопросы о том, как ведут себя его цифры. Предполагается, что π — это «нормальное» число, то есть все возможные последовательности цифр должны встречаться одинаково часто.

Упражнения

76. Используя диаграмму на рисунке 4 и информацию из текста параграфа, заполните таблицу относительного прироста количества найденных значащих цифр после запятой в числе π для каждого столбца диаграммы в сравнении с предыдущим столбцом (результат в таблицу запишите с точностью до одной десятой).

Год	1450	1706	1949	1957	1961	1973	1985	2020	2021
Прирост									

77. Если радиус круга увеличить в 2 раза, а затем уменьшить на 1 см, то его площадь увеличится на π см^2. Найдите радиус круга.

78. Возьмите дома круглый предмет. Измерьте длину его окружности и диаметра. Разделите длину окружности на длину диаметра и узнайте, с какой точностью вам удалось экспериментально найти число π.

Дополнительные упражнения к главе I

К параграфу 1

79. На координатной прямой отмечена точка с координатой a (рис. 5). Перечертите рисунок в тетрадь, а затем отметьте на прямой точки, координаты которых равны:

$$2a;\ -a;\ a+1;\ a-2.$$

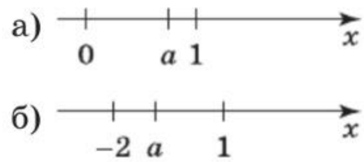


Рис. 5

80. Известно, что x и y — натуральные числа. Значения каких из выражений: $x + y$, $x - y$, $x \cdot y$, $\frac{x}{y}$ $(y \neq 0)$ также являются натуральными числами? Если условие не выполняется, то приведите пример.

81. Сколько целых чисел расположено между числами:

а) $-5\sqrt{6}$ и $\sqrt{83}$; в) $-5\sqrt{6}$ и $-\frac{1}{2}\sqrt{68}$;

б) $3\sqrt{3}$ и $4\sqrt{11}$; г) $-\frac{2}{3}\sqrt{54}$ и $\frac{6}{7}\sqrt{147}$?

82. Выясните, каким числом (рациональным или иррациональным) является значение выражения:

а) $\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{50}}$; в) $(3-\sqrt{5})^2+(3+\sqrt{5})^2$;

б) $(\sqrt{24}-\sqrt{54})\cdot\sqrt{12}$; г) $(\sqrt{13}+\sqrt{8})^2$.

83. Докажите, что значение выражения является рациональным числом:

а) $\sqrt{(7-4\sqrt{3})^2}-\sqrt{(4-2\sqrt{3})^2}$; б) $\sqrt{(37+12\sqrt{7})^2}+\sqrt{(37-12\sqrt{7})^2}$.

84. Установите соответствие между точками, отмеченными на координатной прямой (рис. 6, *а*), и числами $\sqrt{11}$; $\frac{123}{23}$; $\left(1\frac{2}{3}\right)^2$; $(0{,}8)^{-1}$.

85. Число a отмечено точкой на координатной прямой (рис. 6, *б*). Расположите в порядке убывания числа $a - 2$; $\frac{1}{a}$; a^2.

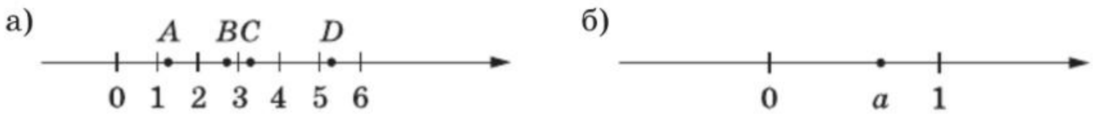


Рис. 6

86. Расположите в порядке убывания числа:

а) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-4}$; $\frac{2}{3}$; $\left(\frac{3}{2}\right)^{-4}$; $\left(\frac{3}{2}\right)^{0}$; в) $\left(\frac{4}{9}\right)^{-5}$; $\left(\frac{4}{9}\right)^{-6}$; $\frac{4}{9}$; $\left(\frac{4}{9}\right)^{0}$.

б) $(2{,}5)^{-3}$; $2{,}5$; $(2{,}5)^{-5}$; $(2{,}5)^{0}$;

87. Найдите $\frac{a}{b}$, если:

а) $\frac{2a+5b}{5a+2b}=1$; б) $\frac{a+2b}{b+2a}=-3$; в) $\frac{99a+8b}{4b-100a}=2$.

88. Найдите значение выражения:

а) $61a - 11b + 50$, если $\dfrac{2a - 7b + 5}{7a - 2b + 5} = 9$;

б) $\dfrac{a + 9b + 16}{a + 3b + 8}$, если $\dfrac{a}{b} = 3$;

в) $30a - 10b - 13$, если $\dfrac{3a - 7b + 4}{7a - 3b + 4} = 9$;

г) $\dfrac{a + 11b + 51}{a + b + 17}$, если $\dfrac{a}{b} = 4$.

89. Выясните, какое из равенств $|x| = x$ или $|x| = -x$ является верным, если:

а) $x = 7 - 2\sqrt{15}$; б) $x = 2\sqrt{13} - 7$.

90. Выясните, каким числом (рациональным или иррациональным) является значение выражения:

а) $(\sqrt{2} + \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{2} - \sqrt{3})$; г) $\dfrac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} - \dfrac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$;

б) $(\sqrt{2} + 2\sqrt{3}) \cdot (\sqrt{2} - \sqrt{3})$; д) $\dfrac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$;

в) $\dfrac{1}{2 + \sqrt{3}} + \dfrac{1}{2 - \sqrt{3}}$; е) $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} + \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5} + \sqrt{2}}$.

91. Найдите три первых десятичных приближения (с недостатком и избытком) каждого из чисел:

а) $\dfrac{13}{7}$; б) $-\dfrac{13}{7}$; в) $\dfrac{5}{16}$; г) $-\dfrac{5}{16}$; д) $\sqrt{3}$; е) $-\sqrt{3}$.

(Задания д) и е) рекомендуется выполнять с помощью калькулятора.)

92. Используя равенства $\sqrt{2} = 1{,}414...$, $\sqrt{3} = 1{,}732...$, $\sqrt{5} = 2{,}236...$ и $\sqrt{7} = 2{,}645...$, вычислите приближённое значение данного выражения с точностью до одной десятой; до одной сотой:

а) $\sqrt{5} + \sqrt{7}$; в) $\dfrac{11}{9} \cdot (-\sqrt{5})$; д) $\dfrac{3}{16} : \sqrt{3}$.

б) $\dfrac{4}{11} - \sqrt{8}$; г) $\sqrt{2} - \dfrac{5}{8}$;

К параграфу 2

93. Высота полёта стрелы меняется с течением времени по закону $h(t) = -5t^2 + 45t + 2$, где h — высота в метрах, t — время, прошедшее от начала полёта, в секундах. На какой высоте над землёй будет находиться стрела через 5 секунд от начала полёта; через 10 секунд от начала полёта?

94. Масса (в кг) стального вала, имеющего цилиндрическую форму, вычисляется по формуле $m = \rho\pi R^2 l$, где ρ — плотность металла, из которого изготовлен вал, l и R — его длина и радиус соответственно (рис. 7). Найдите массу вала, изготовленного из стали плотностью 7700 кг/м^3, имеющего длину 80 см и радиус 2,5 см. При вычислениях считать, что $\pi = 3{,}14$.

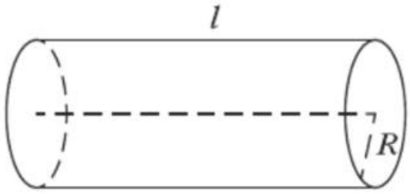


Рис. 7

95. Энергия заряженного конденсатора W (в Дж) вычисляется по формуле $W = \frac{CU^2}{2}$, где C — ёмкость конденсатора (в Ф), а U — разность потенциалов на обкладках конденсатора (в В). Найдите энергию конденсатора (в Дж) ёмкостью 10^{-3} Ф, если разность потенциалов на обкладках конденсатора равна 40 В.

96. Измерьте длину, ширину и высоту своей комнаты. Вычислите площади стен и пола. Рассчитайте, какую сумму нужно потратить на покупку обоев и ламината для вашей комнаты. Данные по стоимости и размерам обоев и ламината возьмите из задачи 1 пункта 5 на с. 20.

97. Евгения Владимировна хочет купить двухкомнатную квартиру в новом шестиэтажном доме. В доме 4 подъезда и 120 квартир. В каждом подъезде и на каждом этаже одинаковое количество квартир. В агентстве ей дали план придомовой территории (рис. 8). Сторона каждой клетки на плане 5 м.

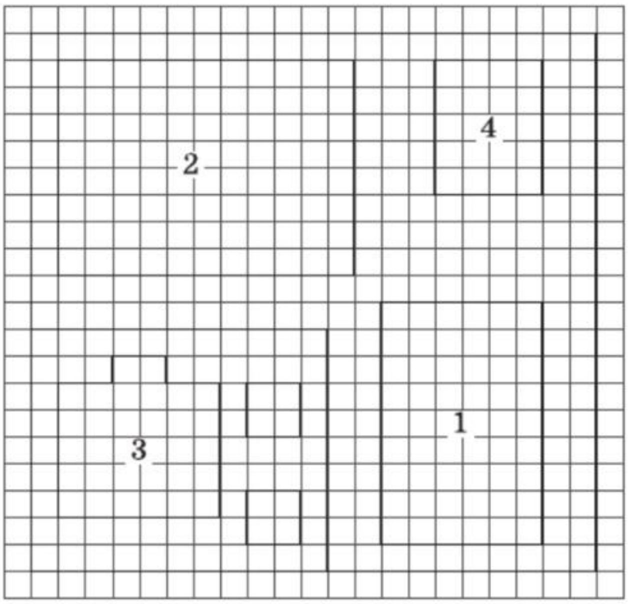


Рис. 8

У Евгении Владимировны двое маленьких детей, поэтому, прочитав описание, она сразу обратила внимание на обнесённый забором детский сад рядом с домом, а также на спортивную площадку, расположенную справа от детского сада и обозначенную на плане цифрой 1. Цифрой 4 на плане обозначен участок прямоугольной формы шириной 20 м под парковку для автомобилей.

1) Какой объект на плане обозначен цифрой 2 и какой — цифрой 3?
2) Какова площадь территории детского сада?
3) Евгении Владимировне предложили к просмотру квартиру 73. В каком подъезде и на каком этаже расположена эта квартира?
4) Минимальный размер машино-места для легкового автомобиля на парковке с учётом допустимых зазоров безопасности для легкового автомобиля составляет 5,3 на 2,5 м. Также обязателен проезд между рядами 6 м. Какое наибольшее количество автомобилей можно разместить на парковке, которая будет построена на участке, указанном в плане?
5) За какое наименьшее количество лет Евгения Владимировна сможет отдать ипотечный кредит на квартиру в размере 2 000 000 р., если погашение кредита происходит раз в год равными суммами (кроме, может быть, последней) после начисления процентов, ставка по кредиту составляет 10% годовых, а ежегодные выплаты не должны превышать 500 000 р.?

Глава II ФУНКЦИИ И ГРАФИКИ

Во многих науках изучают зависимости между величинами. Для описания этих реальных зависимостей на математическом языке служит понятие функции. В курсе алгебры 7 класса вы познакомились с этим важным математическим понятием, узнали некоторые свойства функций, рассмотрели её частные виды. В этой главе сведения о функциях будут расширены. Основное внимание будет уделено квадратичной функции, будут рассмотрены её график и свойства. С этой функцией вы уже знакомились на уроках физики, например формула $h = v_0t - \frac{gt^2}{2}$ задаёт квадратичную функцию. Вы узнаете также о свойстве параболоида — тела, которое получается при вращении параболы вокруг её оси. Вас, вероятно, заинтересует легенда о том, как использовал свойство параболоида древнегреческий учёный Архимед (III век до н. э.) при защите Сиракуз. При изучении свойств квадратичной функции рекомендуем использовать компьютер.

§3 ФУНКЦИИ И ИХ СВОЙСТВА

7. Свойства чётности и нечётности функций

Напомним, что *функцией называют такую зависимость переменной y от переменной x, при которой каждому значению переменной x соответствует единственное значение переменной y.* Если зависимость переменной y от переменной x является функцией, то коротко это записывается так: $y = f(x)$ (заметим, что символом $f(x)$ обозначают также значение функции, соответствующее значению аргумента, равному x). Все значения независимой переменной образуют *область определения функции*, а значения, которые принимает зависимая переменная, образуют *множество значений функции*. Область определения и множество значений функции $y = f(x)$ обозначают соответственно $D(f)$ и $E(f)$.

Вы узнали также такие свойства функции, как наличие у неё нулей, сохранение знака на промежутке (промежутки знакопостоянства), возрастание или убывание (промежутки монотонности), существование наибольшего и наименьшего значений.

О некоторых свойствах функции можно узнать по её графику. Рассмотрим, например, график функции $y = f(x)$, изображённый на рисунке 9.

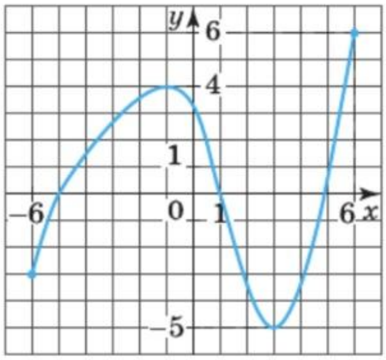


Рис. 9

Спроецировав график на ось x, получим отрезок $[-6; 6]$. Следовательно, $D(f) = [-6; 6]$.

График пересекает ось x в точках, абсциссы которых равны -5; 1; 5. Числа -5; 1; 5 — нули функции.

Нули разбивают область определения функции на четыре промежутка: $[-6; -5)$, $(-5; 1)$, $(1; 5)$ и $(5; 6]$. По графику легко определить знак функции на каждом из этих промежутков. Мы видим, что на промежутках $(-5; 1)$ и $(5; 6]$ значения функции положительны, а на промежутках $[-6; -5)$ и $(1; 5)$ её значения отрицательны.

Далее находим, что на промежутках $[-6; -1]$ и $[3; 6]$ функция возрастает, а на промежутке $[-1; 3]$ функция убывает. Наибольшее значение функция $y = f(x)$ принимает в точке $x = 6$, а наименьшее — в точке $x = 3$. Спроецировав график на ось y, получим отрезок $[-5; 6]$. Значит, $E(f) = [-5; 6]$.

Познакомимся теперь с новыми свойствами функции — *чётностью и нечётностью*.

Рассмотрим рисунок 10, на котором изображён график некоторой функции $y = f(x)$. Из рисунка видно, что график симметричен относительно оси y. Эта особенность графика является отражением свойства функции, которое называется *чётностью*.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется чётной, если выполняются следующие условия:
— область определения функции симметрична относительно оси ординат;
— противоположным значениям аргумента соответствуют равные значения функции.

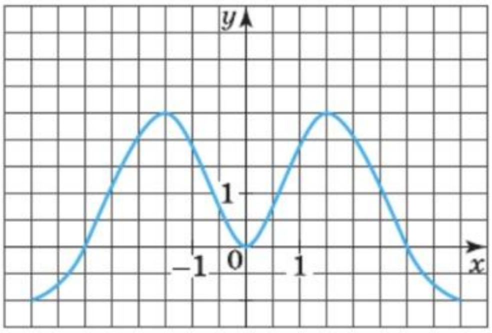


Рис. 10

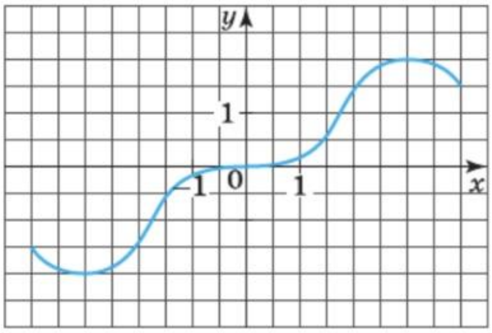


Рис. 11

Таким образом, функция $y = f(x)$ является чётной, если для любого $x \in D(f)$ справедливо равенство $f(-x) = f(x)$.

На рисунке 11 изображён график функции $y = \varphi(x)$, симметричный относительно начала координат.

Определение. Функция $y = \varphi(x)$ называется нечётной, если выполняются следующие условия:
— область определения функции симметрична относительно начала координат;
— противоположным значениям аргумента соответствуют противоположные значения функции.

Таким образом, функция $y = \varphi(x)$ — нечётная, если для любого $x \in D(\varphi)$ справедливо равенство $\varphi(-x) = -\varphi(x)$.

Простейшим примером чётной функции является функция, заданная формулой $y = x^2$, а нечётной — заданная формулой $y = x^3$.

Очевидно, что функция может не обладать ни свойством чётности, ни свойством нечётности. Например, линейная функция $y = kx + b$, где $k \neq 0$ и $b \neq 0$ этими свойствами не обладает.

Упражнения

98. Перечислите свойства функции, график которой изображён на:
а) рисунке 12; б) рисунке 13.

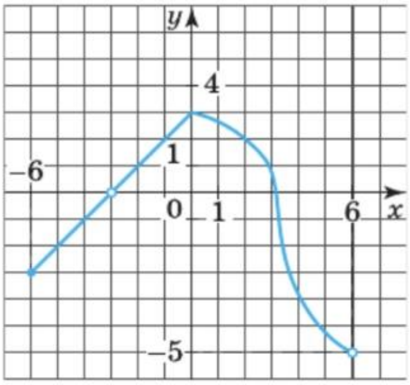


Рис. 12

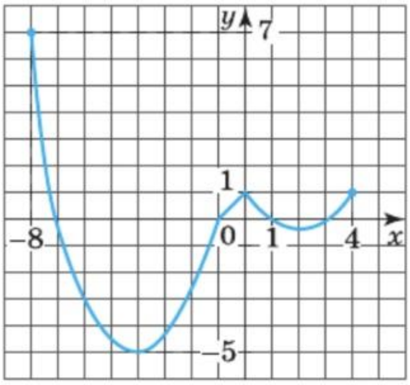


Рис. 13

99. Найдите область определения функции, заданной формулой:

а) $y = x^2 + 3x - 25$; в) $y = \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}$;

б) $y = \sqrt{5 - 3x}$; г) $y = \dfrac{x + 1}{x^2 + 1}$.

100. Найдите область определения функции, заданной формулой:

а) $y = \dfrac{5}{|x-1|}$; б) $y = \dfrac{\sqrt{x-1}}{x-2}$.

101. Найдите нули функции $y = f(x)$, если:

а) $y = 7x^2 - 6x - 1$; в) $y = \dfrac{2x+3}{9-4x^2}$;

б) $y = \sqrt{7-14x}$; г) $y = \dfrac{5x-1}{x^2+16}$.

102. Найдите нули функции $y = f(x)$, если:

а) $y = \dfrac{|x|-3}{|x+3|}$; б) $y = \dfrac{\sqrt{3-2x}}{x+5}$.

103. Докажите, что функция, заданная формулой $y = f(x)$, является чётной, если:

а) $f(x) = 6 - 5x^2 + x^4$; б) $f(x) = 5|x|$.

104. Докажите, что функция $y = f(x)$ является нечётной, если:

а) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$; б) $f(x) = 2x^3 - x$.

105. Определите, является ли функция $y = f(x)$ чётной или нечётной, если:

а) $f(x) = \dfrac{5}{x}$; в) $f(x) = x^3 - x$;

б) $f(x) = 5 - 3x^2$; г) $f(x) = 1 - |x|$.

106. Известно, что функция $y = f(x)$, заданная на отрезке, симметричном относительно начала координат, является чётной. На рисунке 14, *а*, *б* изображена только часть её графика. Достройте график этой функции, перечертив рисунок в тетрадь.

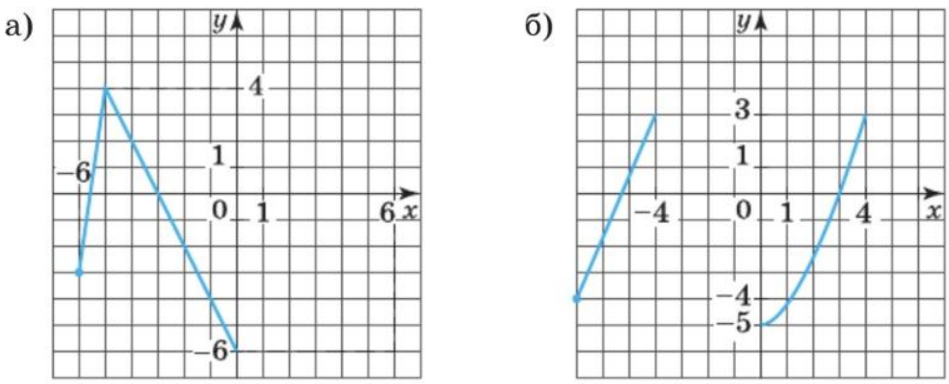


Рис. 14

107. Известно, что функция $y = f(x)$, заданная на отрезке, симметричном относительно начала координат, является нечётной. На рисунке 15, *а*, *б* изображена только часть её графика. Достройте график этой функции, перечертив рисунок в тетрадь.

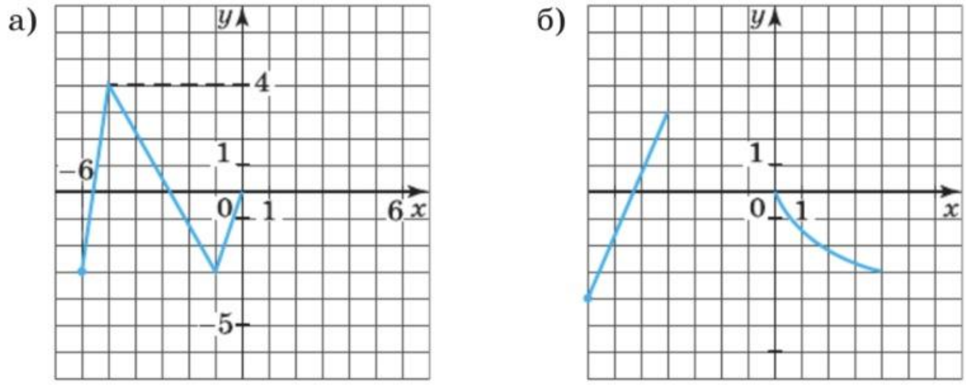


Рис. 15

108. Задайте формулой:

а) чётную функцию;

б) нечётную функцию;

в) функцию, которая не является ни чётной, ни нечётной.

Ответ обоснуйте.

109. Найдите координаты точек пересечения графиков функций, не выполняя построений:

а) $y = 0{,}4x + 3$ и $y = 5 - 0{,}6x$;

б) $y = \frac{1}{3}x + 11$ и $y = -\frac{2}{9}x + 4$.

110. Решите уравнение:

а) $x^2 + 2x - 15 = 0$;

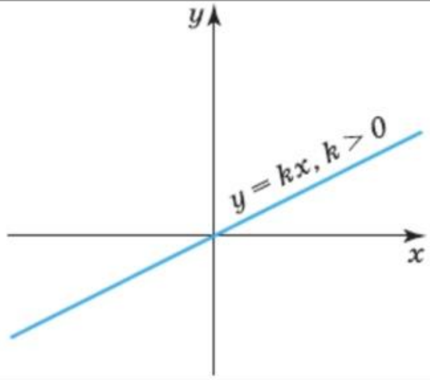
б) $2x^2 - x - 3 = 0$;

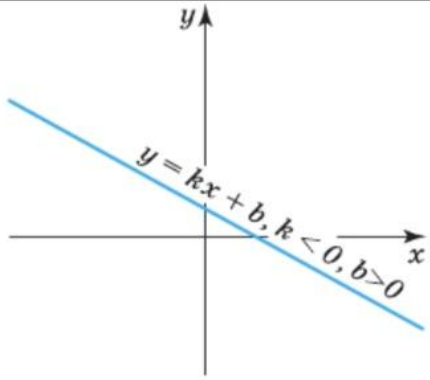
в) $3x^2 - 22x + 7 = 0$;

г) $3x^2 + 6x + 10 = 0$.

8. Графики и свойства некоторых видов функций

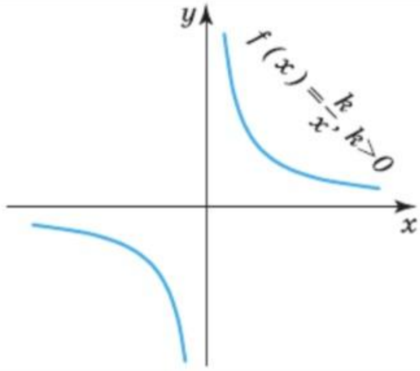
Рассмотрим некоторые из ранее изученных функций и укажем свойства, которыми они обладают.

Функция $f(x) = kx,\ k > 0$		
1	Область определения	Множество всех чисел, т. е. $D(f) = (-\infty;\ +\infty)$
2	Множество значений	Множество всех чисел, т. е. $E(f) = (-\infty;\ +\infty)$
3	Нули функции	$x = 0$
4	Промежутки знакопостоянства	$f(x) > 0$ при $x > 0$; $f(x) < 0$ при $x < 0$
5	Промежутки монотонности	Возрастает на $(-\infty;\ +\infty)$
6	Наибольшее/наименьшее значение	Не имеет
7	Чётность/нечётность	Нечётная

Функция $f(x) = kx + b,\ k < 0,\ b > 0$		
1	Область определения	$D(f) = (-\infty;\ +\infty)$
2	Множество значений	$E(f) = (-\infty;\ +\infty)$
3	Нули функции	$x = -\frac{b}{k}$
4	Промежутки знакопостоянства	$f(x) > 0$ при $x < -\frac{b}{k}$; $f(x) < 0$ при $x > -\frac{b}{k}$
5	Промежутки монотонности	Убывает на $(-\infty;\ +\infty)$
6	Наибольшее/наименьшее значение	Не имеет
7	Чётность/нечётность	Не является ни чётной, ни нечётной

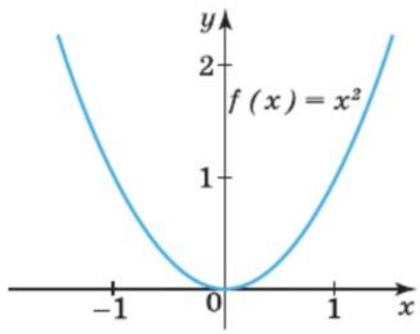
Продолжение

Функция $f(x) = \frac{k}{x},\ k > 0$



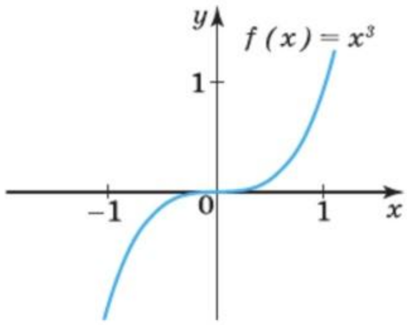
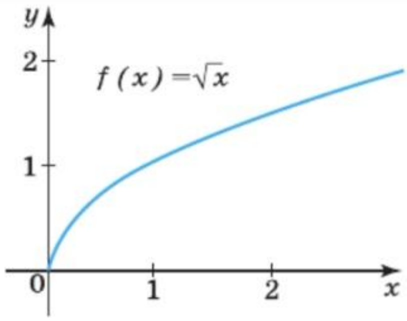
1	Область определения	$D(f) = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$, или иначе: $x \neq 0$
2	Множество значений	$E(f) = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$, или иначе: $y \neq 0$
3	Нули функции	Не имеет
4	Промежутки знакопостоянства	$f(x) > 0$ при $x > 0$; $f(x) < 0$ при $x < 0$
5	Промежутки монотонности	Убывает на $(-\infty;\ 0)$ и $(0;\ +\infty)$
6	Наибольшее/наименьшее значение	Не имеет
7	Чётность/нечётность	Нечётная

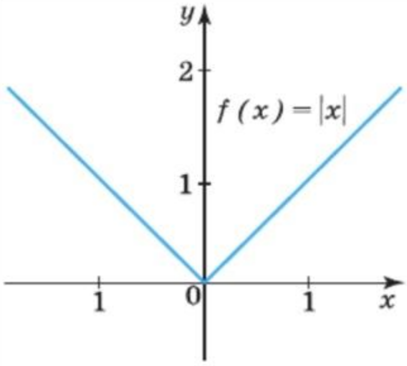
Функция $f(x) = x^2$



1	Область определения	$D(f) = (-\infty;\ +\infty)$
2	Множество значений	$E(f) = [0;\ +\infty)$
3	Нули функции	$x = 0$
4	Промежутки знакопостоянства	$f(x) > 0$ при $x \neq 0$
5	Промежутки монотонности	Убывает на $(-\infty;\ 0]$, возрастает на $[0;\ +\infty)$
6	Наибольшее/наименьшее значение	При $x = 0$ принимает наименьшее значение, равное нулю
7	Чётность/нечётность	Чётная

Продолжение

	Функция $f(x) = x^3$	
1	Область определения	$D(f) = (-\infty;\ +\infty)$
2	Множество значений	$E(f) = (-\infty;\ +\infty)$
3	Нули функции	$x = 0$
4	Промежутки знакопостоянства	$f(x) > 0$ при $x > 0$; $f(x) < 0$ при $x < 0$
5	Промежутки монотонности	Возрастает на $(-\infty;\ +\infty)$
6	Наибольшее/наименьшее значение	Не имеет
7	Чётность/нечётность	Нечётная
	Функция $f(x) = \sqrt{x}$	
1	Область определения	$D(f) = [0;\ +\infty)$
2	Множество значений	$E(f) = [0;\ +\infty)$
3	Нули функции	$x = 0$
4	Промежутки знакопостоянства	$f(x) > 0$ при $x > 0$
5	Промежутки монотонности	Возрастает на $[0;\ +\infty)$
6	Наибольшее/наименьшее значение	При $x = 0$ принимает наименьшее значение, равное нулю
7	Чётность/нечётность	Не является ни чётной, ни нечётной

Функция $f(x) = \lvert x \rvert$		
1	Область определения	$D(f) = (-\infty; +\infty)$
2	Множество значений	$E(f) = [0; +\infty)$
3	Нули функции	$x = 0$
4	Промежутки знакопостоянства	$f(x) > 0$ при $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; или иначе: $x \neq 0$
5	Промежутки монотонности	Убывает на $(-\infty; 0]$, возрастает на $[0; +\infty)$
6	Наибольшее/наименьшее значение	При $x = 0$ принимает наименьшее значение, равное 0
7	Чётность/нечётность	Чётная

Упражнения

111. Изобразите схематически графики функций $y = kx$, где $k < 0$, и $y = kx$, где $k > 0$. Запишите свойства функции в каждом случае.

112. Постройте график функции и опишите её свойства:

а) $y = -3x + 1$; г) $y = \dfrac{1}{2x}$;

б) $y = 5 + 2x$; д) $y = -x^2$;

в) $y = -\dfrac{3}{x}$; е) $y = -x^3$.

113. Используя график функции $y = x^3$, решите уравнение:

а) $x^3 = x + 1$; б) $x^3 = 2x$; в) $x^3 = 2x + 1$.

114. Постройте по точкам график функции и опишите её свойства:

а) $y = x^2 + 1$; б) $y = -x^2 + 4$.

115. Задайте уравнением:

а) функцию вида $y = kx + b$, график которой изображён на рисунке 16.

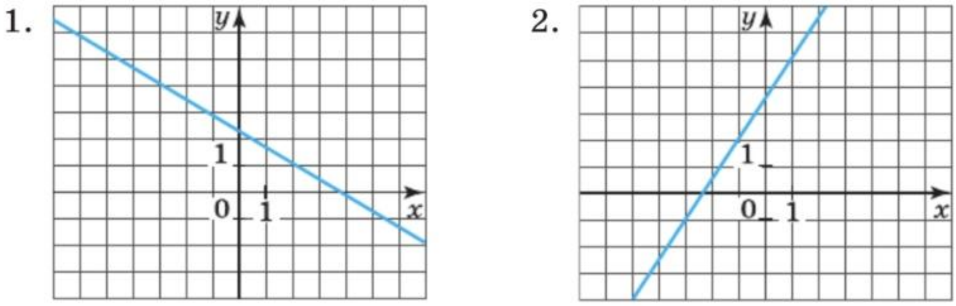


Рис. 16

б) функцию вида $y = \dfrac{k}{x}$, график которой изображён на рисунке 17.

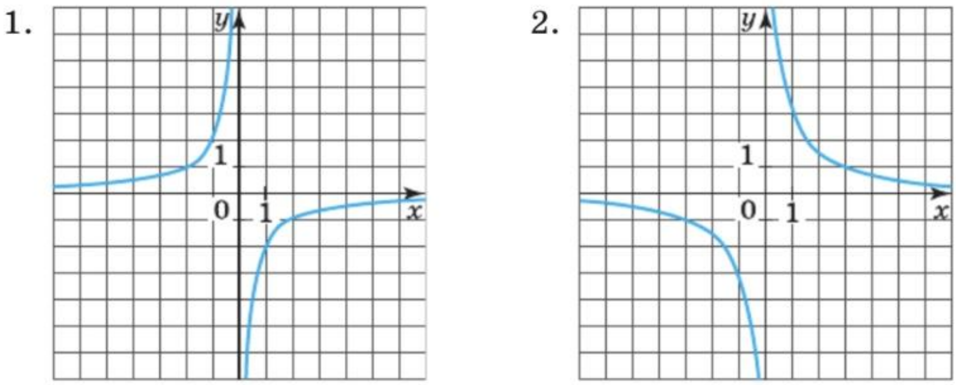


Рис. 17

в) функцию вида $y = \sqrt{kx}$, график которой изображён на рисунке 18.

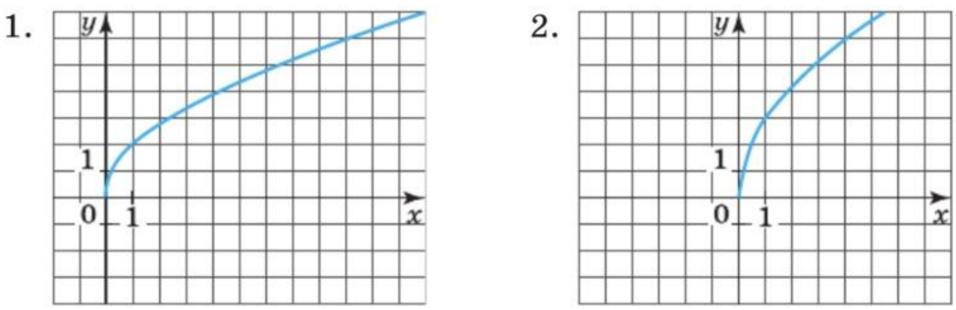


Рис. 18

П

116. Найдите первые четыре цифры длины окружности в сантиметрах, радиус которой равен 2,35 см.

117. За одну поездку израсходовали более трёх, но менее четырёх литров бензина. Укажите точность приближённого значения израсходованного бензина, если за приближённое значение принять:
а) 3 л; б) 4 л; в) среднее арифметическое 3 л и 4 л.

Контрольные вопросы и задания

1 Сформулируйте определение понятия функции. Что называют областью определения функции и множеством значений функции? Как обозначаются эти понятия?

2 Сформулируйте определения чётной функции, нечётной функции. Приведите примеры чётной функции, нечётной функции. Может ли функция не обладать ни свойством чётности, ни свойством нечётности?

3 Перечислите и проиллюстрируйте рисунком свойства функции:
а) $y = kx,\ k < 0$;
б) $y = kx + b,\ k > 0,\ b < 0$;
в) $y = \frac{k}{x},\ k < 0$;
г) $y = x^2$;
д) $y = x^3$;
е) $y = \sqrt{x}$;
ж) $y = |x|$.

§4 КВАДРАТИЧНАЯ ФУНКЦИЯ И ЕЁ ГРАФИК

9. Функция $y = ax^2$, её график и свойства

Одной из важных функций, к изучению которой мы переходим, является квадратичная функция.

Определение. Квадратичной функцией называется функция, которую можно задать формулой вида
$$y = ax^2 + bx + c,$$
где x — независимая переменная, a, b и c — некоторые числа, причём $a \neq 0$.

Областью определения квадратичной функции является множество всех чисел: $D(f) = (-\infty;\ +\infty)$.

Примером квадратичной функции является зависимость пути от времени при равноускоренном движении. Если тело движется с ускорением a (м/с^2) и к началу отсчёта времени t прошло путь s_0 (м), имея в этот момент скорость v_0 (м/с), то зависимость пройденного пути s (м) от времени t (с) выражается формулой

$$s = \frac{at^2}{2} + v_0 t + s_0.$$

Если, например, $a = 6$, $v_0 = 5$, $s_0 = 20$, то $s = 3t^2 + 5t + 20$.

Изучение квадратичной функции начнём с частного случая — функции $y = ax^2$.

При $a = 1$ формула $y = ax^2$ принимает вид $y = x^2$. С этой функцией вы уже встречались. Её графиком является *парабола*.

Построим график функции $y = 2x^2$. Составим таблицу значений этой функции.

x	-2	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	0	$0{,}5$	1	$1{,}5$	2
y	8	$4{,}5$	2	$0{,}5$	0	$0{,}5$	2	$4{,}5$	8

Построим точки, координаты которых указаны в таблице. Соединив их плавной линией, получим график функции $y = 2x^2$ (рис. 19, *а*).

При любом $x \neq 0$ значение функции $y = 2x^2$ больше соответствующего значения функции $y = x^2$ в 2 раза. Если переместить каждую точку графика функции $y = x^2$ вверх так, чтобы расстояние от этой точки до оси x увеличилось в 2 раза, то она перейдёт в точку графика функции $y = 2x^2$. При этом каждая точка графика функции $y = 2x^2$ может быть получена из некоторой точки графика функции $y = x^2$. Иными словами, график функции $y = 2x^2$ можно получить из параболы $y = x^2$ растяжением от оси x в 2 раза (рис. 19, *б*).

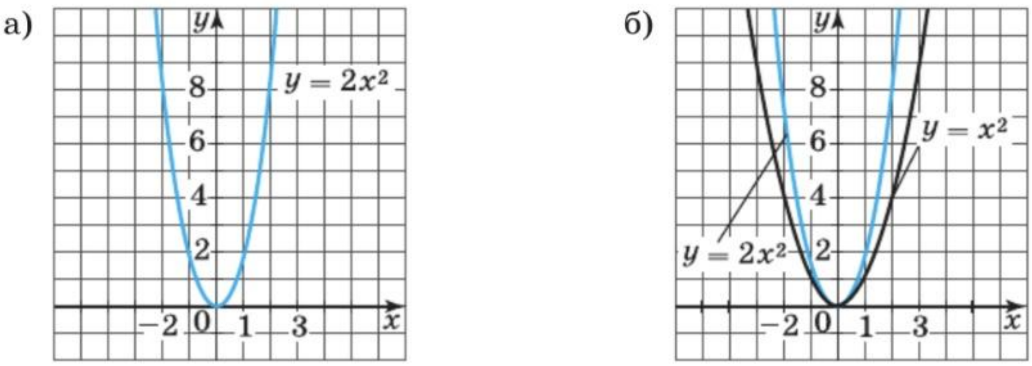


Рис. 19

Построим теперь график функции $y = \frac{1}{2}x^2$. Для этого составим таблицу её значений.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	8	$4{,}5$	2	$0{,}5$	0	$0{,}5$	2	$4{,}5$	8

Построив точки, координаты которых указаны в таблице, и соединив их плавной линией, получим график функции $y = \frac{1}{2}x^2$ (рис. 20, *а*).

При любом $x \neq 0$ значение функции $y = \frac{1}{2}x^2$ меньше соответствующего значения функции $y = x^2$ в 2 раза. Если переместить каждую точку графика функции $y = x^2$ вниз так, чтобы расстояние от этой точки до оси x уменьшилось в 2 раза, то она перейдёт в точку графика функции $y = \frac{1}{2}x^2$, причём каждая точка этого графика может быть получена из некоторой точки графика функции $y = x^2$ (рис. 20, *б*). Таким образом, график функции $y = \frac{1}{2}x^2$ можно получить из параболы $y = x^2$ сжатием к оси x в 2 раза.

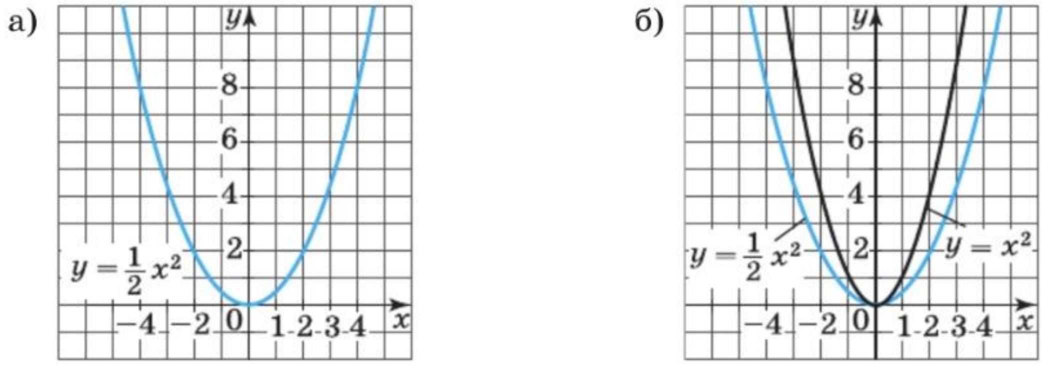


Рис. 20

Вообще график функции $y = ax^2$ можно получить из параболы $y = x^2$ растяжением от оси x в a раз, если $a > 1$, и сжатием к оси x в $\frac{1}{a}$ раза, если $0 < a < 1$.

Рассмотрим теперь функцию $y = ax^2$ при $a < 0$.

Построим график функции $y = -\frac{1}{2}x^2$, для чего составим таблицу значений этой функции.

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
y	−8	−4,5	−2	−0,5	0	−0,5	−2	−4,5	−8

Воспользовавшись этой таблицей, построим график функции $y = -\frac{1}{2}x^2$ (рис. 21, *а* на с. 46).

Сравним графики функций $y = -\frac{1}{2}x^2$ и $y = \frac{1}{2}x^2$ (рис. 21, *б*). При любом $x \neq 0$ значения этих функций являются противоположными числами. Значит, соответствующие точки графиков симме-

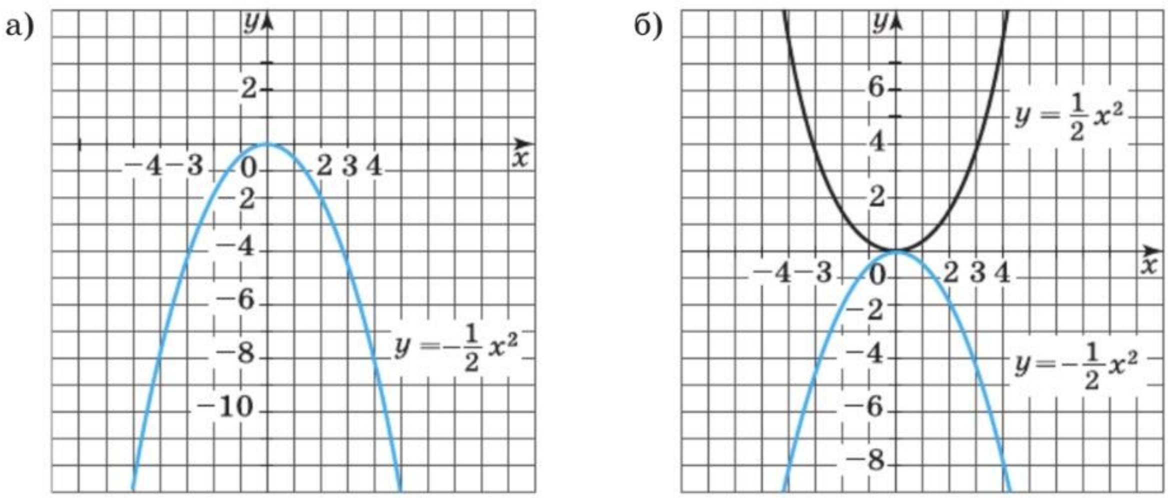


Рис. 21

тричны относительно оси x. Иными словами, график функции $y=-\frac{1}{2}x^2$ может быть получен из графика функции $y=\frac{1}{2}x^2$ с помощью симметрии относительно оси x.

Вообще графики функций $y=ax^2$ и $y=-ax^2$ (при $a \neq 0$) *симметричны относительно оси* x.

График функции $y=ax^2$, где $a \neq 0$, как и график функции $y=x^2$, называется *параболой*.

Сформулируем свойства функции $y=ax^2$ при $a>0$ и укажем, как они отражаются на её графике.

1. **Область определения функции** — множество всех чисел, т. е. $\boldsymbol{D(y)=(-\infty;+\infty)}$.
2. **Если $x=0$, то $y=0$.** График функции проходит через начало координат.
3. **Если $x \neq 0$, то $y>0$.** График функции расположен в верхней полуплоскости.
4. **Противоположным значениям аргумента соответствуют равные значения функции;** график функции симметричен относительно оси y. **Функция является чётной.**
5. **Функция убывает на промежутке $(-\infty; 0]$ и возрастает на промежутке $[0; +\infty)$.**
6. **Наименьшее значение, равное нулю, функция принимает при $x=0$, наибольшего значения функция не имеет.**
7. **Множество значений функции — множество неотрицательных чисел, т. е. $E(y)=[0;+\infty)$.**

Докажем свойство 5.

Пусть x_1 и x_2 — два значения аргумента, причём $x_2 > x_1$, а y_1 и y_2 — соответствующие им значения функции. Составим разность $y_2 - y_1$ и преобразуем её:

$$y_2 - y_1 = ax_2^2 - ax_1^2 = a(x_2^2 - x_1^2) = a(x_2 - x_1)(x_2 + x_1).$$

Так как $a > 0$ и $x_2 - x_1 > 0$, то произведение

$$a(x_2 - x_1)(x_2 + x_1)$$

имеет тот же знак, что и множитель $x_2 + x_1$.
Если числа x_2 и x_1 принадлежат промежутку $(-\infty; 0]$, то множитель $x_2 + x_1$ отрицателен.
Если числа x_2 и x_1 принадлежат промежутку $[0; +\infty)$, то множитель $x_2 + x_1$ положителен.
В первом случае $y_2 - y_1 < 0$, т. е. $y_2 < y_1$; во втором случае $y_2 - y_1 > 0$, т. е. $y_2 > y_1$.
Значит, в промежутке $(-\infty; 0]$ функция убывает, а в промежутке $[0; +\infty)$ возрастает.

Теперь сформулируем свойства функции $y = ax^2$ при $a < 0$ и укажем, как они отражаются на её графике.

1. **Область определения функции** — множество всех чисел, т. е. $D(y) = (-\infty; +\infty)$.
2. **Если $x = 0$, то $y = 0$.** График функции проходит через начало координат.
3. **Если $x \neq 0$, то $y < 0$.** График функции расположен в нижней полуплоскости.
4. **Противоположным значениям аргумента соответствуют равные значения функции;** график функции симметричен относительно оси y. **Функция является чётной.**
5. **Функция возрастает на промежутке $(-\infty; 0]$ и убывает на промежутке $[0; +\infty)$.**
6. **Наибольшее значение, равное нулю, функция принимает при $x = 0$, наименьшего значения функция не имеет.**
7. **Множество значений функции — множество неположительных чисел, т. е. $E(y) = (-\infty; 0]$.**

Доказательство свойства 5 проводится аналогично тому, как это было сделано для функции $y = ax^2$ при $a > 0$.

Из перечисленных свойств следует, что при $a > 0$ ветви параболы $y = ax^2$ направлены вверх, а при $a < 0$ — вниз. Ось y является осью симметрии параболы. Точку пересечения параболы с её осью симметрии называют *вершиной параболы*. Вершиной параболы $y = ax^2$ является начало координат.

Построение графика, симметричного данному относительно оси x, растяжение графика от оси x или сжатие к оси x — различные виды *преобразования графиков функции*. Преобразования графиков, рассмотренные нами для функции $y = ax^2$, применимы к любой функции.

График функции $y = -f(x)$ можно получить из графика функции $y = f(x)$ с помощью симметрии относительно оси x.

График функции $y = af(x)$ можно получить из графика функции $y = f(x)$ с помощью растяжения от оси x в a раз, если $a > 1$, и с помощью сжатия к оси x в $\frac{1}{a}$ раза, если $0 < a < 1$.

Упражнения

118. Постройте график функции $y = \frac{1}{4}x^2$. Найдите:

а) значение y при $x = -2{,}5;\ -1{,}5;\ 3{,}5$;
б) значения x, при которых $y = 5;\ 3;\ 2$;
в) промежуток возрастания и промежуток убывания функции.

119. Постройте график функции $y = -2x^2$ и найдите:

а) значение y при $x = -1{,}5;\ 0{,}6;\ 1{,}5$;
б) значения x, при которых $y = -1;\ -3;\ -4{,}5$;
в) промежуток возрастания и промежуток убывания функции.

120. Постройте в одной системе координат графики функций

$$y = x^2,\ y = 1{,}8x^2 \text{ и } y = \frac{1}{3}x^2.$$

Сравните значения этих функций при $x = 0{,}5$, $x = 1$ и $x = 2$.

121. Постройте в одной системе координат графики функций

$$y = 0{,}4x^2 \text{ и } y = -0{,}4x^2.$$

Какова область значений каждой из этих функций?

122. Покажите схематически, как расположен в координатной плоскости график функции:

а) $y = -1{,}5x^2$; б) $y = 0{,}8x^2$.

Перечислите свойства этой функции.

123. Изобразите схематически график и перечислите свойства функции:

а) $y = 0{,}2x^2$; б) $y = -10x^2$.

124. Пересекаются ли парабола $y = 2x^2$ и прямая:

а) $y = 50$; в) $y = -8$;
б) $y = 100$; г) $y = 14x - 20$?

Если точки пересечения существуют, то найдите их координаты.

125. Принадлежит ли графику функции $y = -100x^2$ точка:

а) $M(1{,}5;\ -225)$; б) $K(-3;\ -900)$; в) $P(2;\ 400)$?

126. Найдите координаты точек пересечения графиков функций $y = -x^2$ и $y = 2x - 3$. Выполните графическую иллюстрацию.

127. Изобразите схематически графики функций $y = 0{,}01x^2$ и $y = 10x$. Графики этих функций имеют общую точку $O(0;\ 0)$. Имеют ли графики этих функций другие общие точки? При положительном ответе найдите координаты этих точек.

128. При каких значениях k прямая $y = kx - 4$ имеет с параболой $y = x^2$ только одну общую точку?

129. Площадь круга S (см^2) вычисляется по формуле $S = \pi r^2$, где r (см) — радиус круга. Постройте график функции $S = \pi r^2$ и найдите по графику:

а) площадь круга, если его радиус равен 1,3 см; 0,8 см; 2,1 см;
б) радиус круга, площадь которого равна 1,8 см^2; 2,5 см^2; 6,5 см^2.

130. Площадь поверхности куба y (см^2) зависит от ребра куба x (см). Задайте эту зависимость формулой. Постройте её график и найдите по графику:

а) площадь поверхности куба, если его ребро равно 0,9 см; 1,5 см; 1,8 см;
б) длину ребра, если площадь поверхности куба равна 7 см^2; 10 см^2; 14 см^2.

П

131. Сколько корней имеет квадратный трёхчлен:

а) $3x^2 - 8x + 2$; б) $-\frac{1}{2}y^2 + 6y - 18$; в) $m^2 - 3m + 3$?

132. Сократите дробь:

а) $\dfrac{2a - 1}{10a^2 - a - 2}$; б) $\dfrac{6a^2 - 5a + 1}{1 - 4a^2}$.

133. Решите уравнение $(x + 3)^2 - (x - 3)^2 = (x - 2)^2 + (x + 2)^2$ и отметьте его корни на координатной прямой.

10. Графики функций $y = ax^2 + n$ и $y = a(x - m)^2$

Рассмотрим другие частные случаи квадратичной функции.

Пример 1. Выясним, что представляет собой график функции $y = \frac{1}{2}x^2 + 3$.

▶ С этой целью в одной системе координат построим графики функций $y = \frac{1}{2}x^2$ и $y = \frac{1}{2}x^2 + 3$.

Составим таблицу значений функции $y = \frac{1}{2}x^2$.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	8	4,5	2	0,5	0	0,5	2	4,5	8

(1)

График функции $y = \frac{1}{2}x^2$ изображён на рисунке 22, *а*.

Чтобы получить таблицу значений функции $y = \frac{1}{2}x^2 + 3$ при тех же значениях аргумента, следует к найденным значениям функции $y = \frac{1}{2}x^2$ прибавить 3.

Составим таблицу значений функции $y = \frac{1}{2}x^2 + 3$.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	11	7,5	5	3,5	3	3,5	5	7,5	11

(2)

Построим точки, координаты которых указаны в таблице (2), и соединим их плавной линией. Получим график функции $y = \frac{1}{2}x^2 + 3$ (рис. 22, *б*).

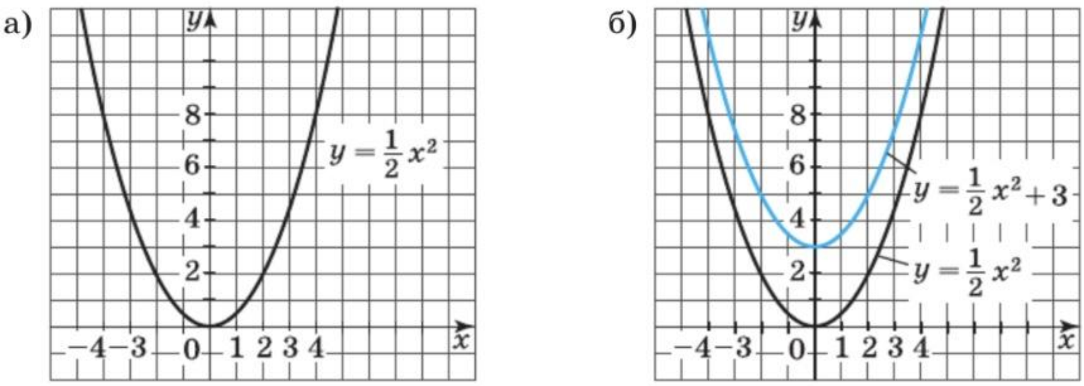


Рис. 22

Легко понять, что каждой точке $(x_0; y_0)$ графика функции $y = \frac{1}{2}x^2$ соответствует единственная точка $(x_0; y_0 + 3)$ графика функции $y = \frac{1}{2}x^2 + 3$ и наоборот. Значит, если переместить каждую точку графика функции $y = \frac{1}{2}x^2$ на 3 единицы вверх, то получим соответствующую точку графика функции $y = \frac{1}{2}x^2 + 3$. Иначе говоря, каждую точку второго графика можно получить из некоторой точки первого графика с помощью параллельного переноса на 3 единицы вверх вдоль оси y.

График функции $y = \frac{1}{2}x^2 + 3$ — парабола, полученная в результате сдвига вверх на 3 единицы графика функции $y = \frac{1}{2}x^2$. ◁

> Вообще график функции $y = ax^2 + n$ является параболой, которую можно получить из графика функции $y = ax^2$ с помощью параллельного переноса вдоль оси y на n единиц вверх, если $n > 0$, или на $-n$ единиц вниз, если $n < 0$.

П р и м е р 2. Арка моста имеет форму параболы (рис. 23, *а*). Мост удерживают три опоры, расположенные на одинаковом расстоянии друг от друга. Найдём длины этих опор, если известно, что $AB = 80$ м, $OC = 8$ м, $AK = KO = OL = LB$.

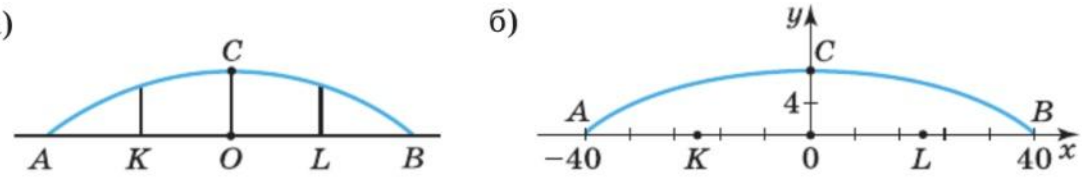


Рис. 23

▶ Составим уравнение параболы, выбрав систему координат так, как показано на рисунке 23, *б*. Очевидно, что это уравнение имеет вид $y = ax^2 + n$. Найдём координаты точек A, B и C. Имеем

$$A(-40;\ 0),\ B(40;\ 0),\ C(0;\ 8).$$

Вершиной параболы является точка $C(0; 8)$. Значит, $n = 8$. Для того, чтобы найти коэффициент a, подставим в уравнение $y = ax^2 + 8$ координаты точки $B(40; 0)$: $0 = a \cdot 1600 + 8$.

Отсюда $a = -\frac{8}{1600} = -0{,}005$. Мы получили уравнение параболы

$$y = -0{,}005x^2 + 8.$$

Теперь нетрудно найти длины опор:
если $x = -20$, то $y = 6$;
если $x = 0$, то $y = 8$;
если $x = 20$, то $y = 6$.
Значит, опоры моста имеют длины 6, 8 и 6 м. ◁

П р и м е р 3. Рассмотрим функцию $y = \frac{1}{2}(x - 5)^2$ и выясним, что представляет собой её график.

▶ Для этого в одной системе координат построим графики функций $y = \frac{1}{2}x^2$ и $y = \frac{1}{2}(x - 5)^2$.

Для построения графика функции $y = \frac{1}{2}x^2$ воспользуемся таблицей (1). Составим теперь таблицу значений функции $y = \frac{1}{2}(x - 5)^2$. При этом в качестве значений аргумента выберем те, которые на 5 больше соответствующих значений аргумента в таблице (1). Тогда соответствующие им значения функции $y = \frac{1}{2}(x - 5)^2$ будут те же, которые записаны во второй строке таблицы (1).

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	8	4,5	2	0,5	0	0,5	2	4,5	8

(3)

Построим график функции $y = \frac{1}{2}(x - 5)^2$, отметив точки, координаты которых указаны в таблице (3) (рис. 24). Нетрудно заметить, что каждой точке $(x_0; y_0)$ графика функции $y = \frac{1}{2}x^2$ соответствует единственная точка $(x_0 + 5; y_0)$ графика функции $y = \frac{1}{2}(x - 5)^2$ и наоборот.

Значит, если переместить каждую точку графика функции $y = \frac{1}{2}x^2$ на 5 единиц вправо, то получим соответствующую точку графика функции $y = \frac{1}{2}(x - 5)^2$.

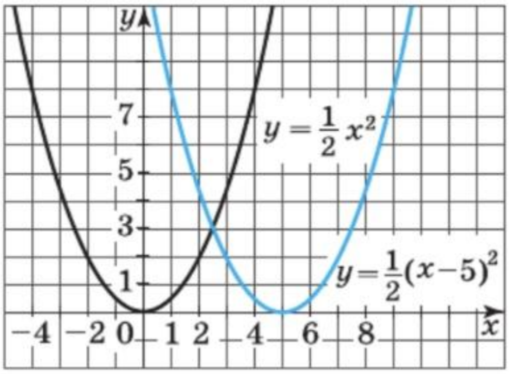


Рис. 24

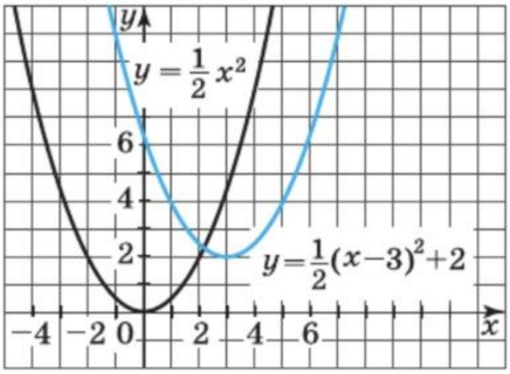


Рис. 25

Иначе говоря, каждую точку второго графика можно получить из соответствующей точки первого графика с помощью параллельного переноса на 5 единиц вправо вдоль оси x.

График функции $y = \frac{1}{2}(x - 5)^2$ — парабола, полученная в результате сдвига вправо на 5 единиц графика функции $y = \frac{1}{2}x^2$. ◁

Вообще график функции $y = a(x - m)^2$ является параболой, которую можно получить из графика функции $y = ax^2$ с помощью параллельного переноса вдоль оси x на m единиц вправо, если $m > 0$, или на $-m$ единиц влево, если $m < 0$.

Полученные выводы позволяют понять, что представляет собой график функции $y = a(x - m)^2 + n$. Рассмотрим, например, функцию $y = \frac{1}{2}(x - 3)^2 + 2$. Её график можно получить из графика функции $y = \frac{1}{2}x^2$ с помощью двух параллельных переносов — сдвига параболы $y = \frac{1}{2}x^2$ на 3 единицы вправо и на 2 единицы вверх (рис. 25).

Вообще график функции $y = a(x - m)^2 + n$ является параболой, которую можно получить из графика функции $y = ax^2$ с помощью двух параллельных переносов: сдвига вдоль оси x на m единиц вправо, если $m > 0$, или на $-m$ единиц влево, если $m < 0$, и сдвига вдоль оси y на n единиц вверх, если $n > 0$, или на $-n$ единиц вниз, если $n < 0$.

Заметим, что производить параллельные переносы можно в любом порядке: сначала выполнить параллельный перенос вдоль оси x, а затем — вдоль оси y или наоборот.

Полученные нами выводы о преобразовании графиков применимы к любым функциям.

График функции $y = f(x) + n$ можно получить из графика функции $y = f(x)$ с помощью параллельного переноса вдоль оси y на n единиц вверх, если $n > 0$, или на $-n$ единиц вниз, если $n < 0$.

График функции $y = f(x - m)$ можно получить из графика функции $y = f(x)$ с помощью параллельного переноса вдоль оси x на m единиц вправо, если $m > 0$, или на $-m$ единиц влево, если $m < 0$.

График функции $y = f(x - m) + n$ можно получить из графика функции $y = f(x)$ с помощью двух соответствующих параллельных переносов.

При вращении параболы вокруг её оси получается фигура, которую называют *параболоидом*. Если внутреннюю поверхность параболоида сделать зеркальной и направить на неё пучок лучей, параллельных оси симметрии параболы, то отражённые лучи соберутся в одной точке, которую называют *фокусом* (рис. 26).

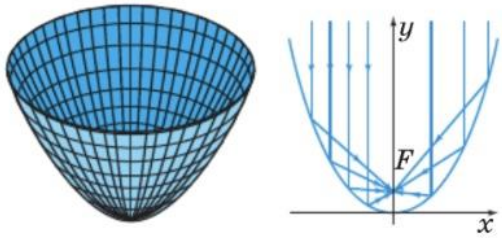


Рис. 26

В то же время если источник света поместить в фокусе, то отражённые от зеркальной поверхности параболоида лучи окажутся параллельными и не рассеиваются.

Первое свойство позволяет получить в фокусе параболоида высокую температуру. Согласно легенде это свойство использовал древнегреческий учёный Архимед (287—212 до н. э.). При защите Сиракуз в войне против римлян он построил систему параболических зеркал, которая позволила сфокусировать отражённые солнечные лучи на кораблях римлян. В результате температура в фокусах параболических зеркал оказалась настолько высокой, что на кораблях вспыхнул пожар и они сгорели. Но это не более, чем легенда. Вряд ли удалось получить столь высокую температуру указанным способом.

Второе свойство используется, например, при изготовлении прожекторов и автомобильных фар.

Упражнения

134. Изобразите схематически график каждой функции (отметьте вершину параболы и направление её ветвей):

а) $y = \frac{1}{2}x^2$, $y = \frac{1}{2}x^2 + 4$, $y = \frac{1}{2}x^2 - 3$;

б) $y = -\frac{1}{3}x^2$, $y = -\frac{1}{3}x^2 + 2$, $y = -\frac{1}{3}x^2 - 1$;

в) $y = \frac{1}{5}x^2$, $y = \frac{1}{5}(x - 3)^2$, $y = \frac{1}{5}(x + 3)^2$.

135. С помощью шаблона параболы $y = x^2$ постройте график функции:

а) $y = x^2 - 4$; в) $y = (x - 5)^2$;

б) $y = -x^2 + 3$; г) $y = (x + 3)^2$.

136. Используя шаблон параболы $y = x^2$, постройте график функции:

а) $y = x^2 + 2$; в) $y = (x + 4)^2$;

б) $y = -x^2 - 1$; г) $y = -(x - 3)^2$.

137. В каких координатных четвертях расположен график функции:

а) $y = 10x^2 + 5$; в) $y = -6x^2 + 8$; д) $y = -(x - 8)^2$;

б) $y = -7x^2 - 3$; г) $y = (x - 4)^2$; е) $y = -3(x + 5)^2$?

138. Изобразите схематически график функции:

а) $y = \frac{1}{2}(x - 2)^2 + 1$; в) $y = -4(x - 3)^2 + 5$;

б) $y = \frac{1}{2}(x + 3)^2 - 1$; г) $y = -4(x + 2)^2 - 2$.

139. Изобразите схематически график функции:

а) $y = \frac{1}{4}(x - 2)^2 - 3$; б) $y = -\frac{1}{4}(x + 2)^2 + 3$.

140. Используя шаблон параболы $y = x^2$, постройте график функции:

а) $y = (x - 2)^2 + 3$; б) $y = -(x - 3)^2 + 5$.

141. С помощью шаблона параболы $y = x^2$ постройте график функции:

а) $y = (x + 3)^2 - 4$; б) $y = -(x + 4)^2 - 2$.

142. Найдите нули функции (если они существуют):

а) $y = 12x^2 - 3$; б) $y = 6x^2 + 4$; в) $y = -x^2 - 4$.

143. При каких значениях a функция $y = ax^2 - 5$ имеет нули?

144. На рисунке 27 изображены графики функций:

а) $y = -\frac{1}{3}(x + 4)^2$; в) $y = \frac{1}{3}x^2 + 4$;

б) $y = \frac{1}{3}(x - 4)^2 - 1$; г) $y = -\frac{1}{3}x^2 - 2$.

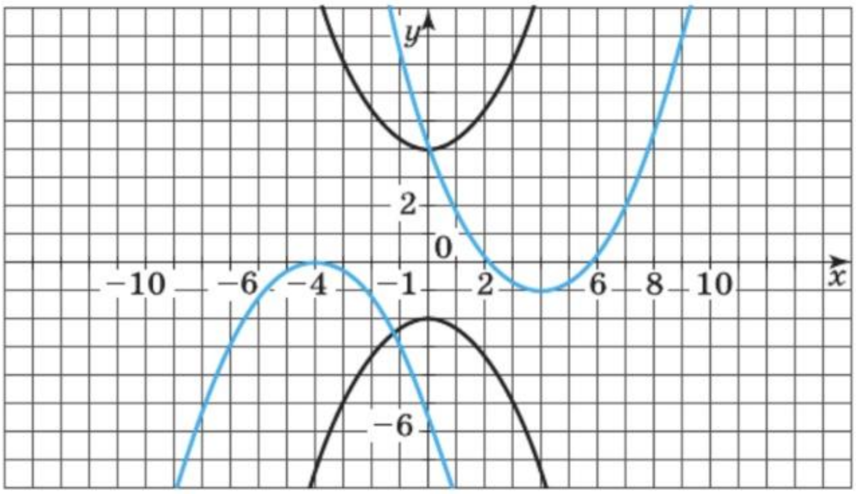


Рис. 27

Для каждого графика укажите соответствующую формулу.

145. На рисунке 28 изображён график функции $f(x) = a(x + b)^2$. Найдите $f(38)$.

146. На рисунке 29 изображён график функции $f(x) = ax^2 - b$. Найдите, при каком значении x значение функции равно 68.

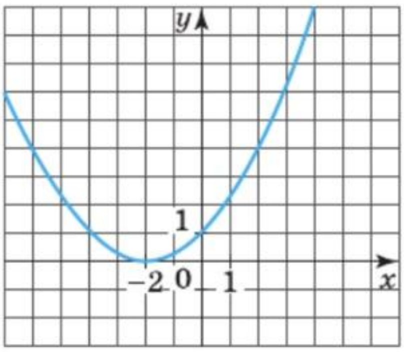


Рис. 28

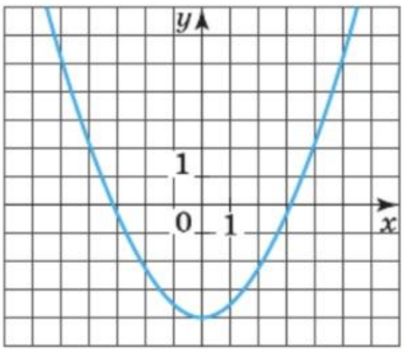


Рис. 29

147. Решите уравнение:

а) $0{,}6a - (a + 0{,}3)^2 = 0{,}27$;

б) $\dfrac{y^2 - 2y}{4} = 0{,}5y(6 - 2y)$.

148. Решите неравенство:

а) $5x - 0{,}7 < 3x + 5{,}1$;

б) $0{,}8x + 4{,}5 \geqslant 5 - 1{,}2x$;

в) $2x + 4{,}2 \leqslant 4x + 7{,}8$;

г) $3x - 2{,}6 > 5{,}5x - 3{,}1$.

11. Построение графика квадратичной функции

Для построения графика квадратичной функции запишем формулу $y = ax^2 + bx + c$ в виде $y = a(x - m)^2 + n$.

Выделим из трёхчлена $ax^2 + bx + c$ квадрат двучлена:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) =$$

$$= a\left(x^2 + 2x \cdot \frac{b}{2a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) =$$

$$= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

Отсюда $y = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2 - 4ac}{4a}$.

Мы получили формулу вида $y = a(x - m)^2 + n$, где $m = -\dfrac{b}{2a}$, $n = -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a}$.

Значит, график функции $y = ax^2 + bx + c$ есть парабола, которую можно получить из графика функции $y = ax^2$ с помощью двух параллельных переносов — сдвига вдоль оси x и сдвига вдоль оси y. Отсюда следует, что график функции $y = ax^2 + bx + c$ есть парабола, вершиной которой является точка $(m; n)$, где $m = -\dfrac{b}{2a}$, $n = -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a}$. Осью симметрии параболы служит прямая $x = m$, параллельная оси y. При $a > 0$ ветви параболы направлены вверх, а при $a < 0$ — вниз.

Чтобы построить график квадратичной функции, нужно:
1) определить направление ветвей параболы;
2) найти координаты вершины параболы и отметить её в координатной плоскости;
3) построить ещё несколько точек, принадлежащих параболе;
4) соединить отмеченные точки плавной линией.

Заметим, что абсциссу m вершины удобно находить по формуле $m = -\dfrac{b}{2a}$. Ординату n можно находить, подставив найденное значение абсциссы в формулу $y = ax^2 + bx + c$, так как при $x = m$

$$y = ax^2 + bx + c = a(x - m)^2 + n = n.$$

Построим графики некоторых квадратичных функций.

Пример 1. Построим график функции $y = 0{,}5x^2 + x - 4$.

▶ Графиком функции $y = 0{,}5x^2 + x - 4$ является парабола, ветви которой направлены вверх.
Так как $c = -4$, то график функции пересекает ось ординат в точке $(0; -4)$.
Найдём координаты m и n вершины параболы:

$$m = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2 \cdot 0{,}5} = -1;$$

$$n = 0{,}5 \cdot (-1)^2 + (-1) - 4 = -4{,}5.$$

Вершина параболы — точка $(-1; -4{,}5)$, а прямая $x = -1$ — ось симметрии.
Чтобы найти точки пересечения параболы с осью абсцисс, найдём нули функции. Для этого решим уравнение $0{,}5x^2 + x - 4 = 0$. Корнями этого уравнения являются числа -4 и 2, значит, парабола пересекает ось абсцисс в точках $(-4; 0)$ и $(2; 0)$.
Составим таблицу.

x	-5	-4	-2	-1	0	2	3
y	$3{,}5$	0	-4	$-4{,}5$	-4	0	$3{,}5$

Воспользовавшись этой таблицей, построим график функции $y = 0{,}5x^2 + x - 4$ (рис. 30). ◁

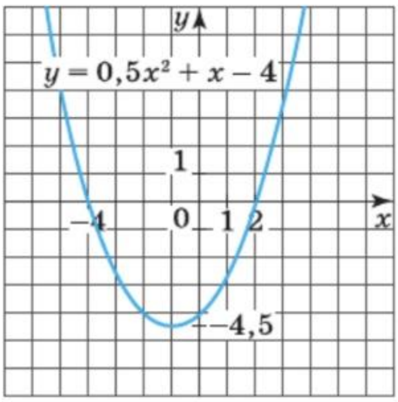


Рис. 30

При составлении таблицы и построении графика учитывалось, что прямая $x = -1$ является осью симметрии параболы.

Поэтому мы брали точки, симметричные относительно прямой $x = -1$ (эти точки имеют одинаковые ординаты).

Пример 2. Построим график функции $y = -2x^2 + 12x - 19$.

▶ Графиком этой функции является парабола, ветви которой направлены вниз. Найдём координаты её вершины:

$$m = -\frac{b}{2a} = -\frac{12}{2 \cdot (-2)} = 3;$$

$$n = -2 \cdot 3^2 + 12 \cdot 3 - 19 = -1.$$

Прямая $x = 3$ — ось симметрии параболы.

Вычислив координаты ещё нескольких точек, получим таблицу.

x	1	2	3	4	5
y	-9	-3	-1	-3	-9

Соединив плавной линией точки, координаты которых указаны в таблице, получим график функции $y = -2x^2 + 12x - 19$ (рис. 31). ◁

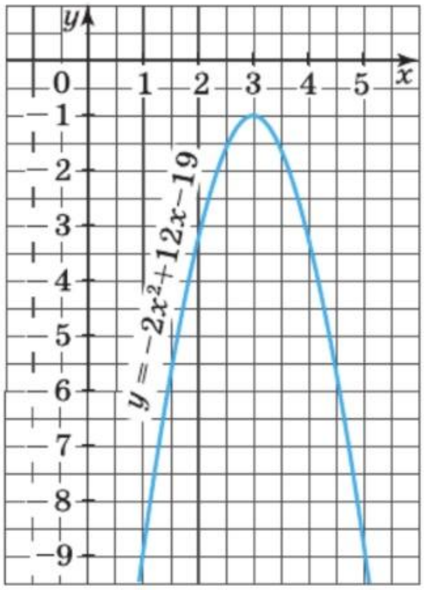


Рис. 31

Пример 3. Построим график функции $y = \frac{1}{4}x^2 + x + 1$.

▶ Графиком функции $y = \frac{1}{4}x^2 + x + 1$ является парабола, ветви которой направлены вверх. Найдём координаты её вершины:

$$m = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2 \cdot \frac{1}{4}} = -2;$$

$$n = \frac{1}{4} \cdot (-2)^2 - 2 + 1 = 0.$$

Прямая $x = -2$ — ось симметрии параболы.

Вычислив координаты ещё нескольких точек, получим таблицу.

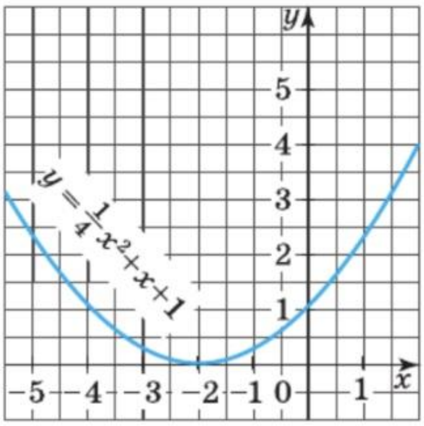


Рис. 32

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1
y	$2\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	$2\frac{1}{4}$

График функции $y = \frac{1}{4}x^2 + x + 1$ изображён на рисунке 32. ◁

Упражнения

149. Тело брошено вертикально вверх с начальной скоростью v_0 (м/с) с высоты h_0 (м). Высота h (м), на которой окажется тело через t (с), выражается формулой

$$h = -\frac{gt^2}{2} + v_0 t + h_0$$

($g \approx 10$ м/с^2).

На рисунке 33 показан график зависимости h от t для случая, когда $h_0 = 20$, $v_0 = 15$. Найдите по графику:

а) сколько времени тело поднималось вверх;
б) сколько времени оно опускалось вниз;
в) какой наибольшей высоты достигло тело;
г) через сколько секунд тело упало на землю.

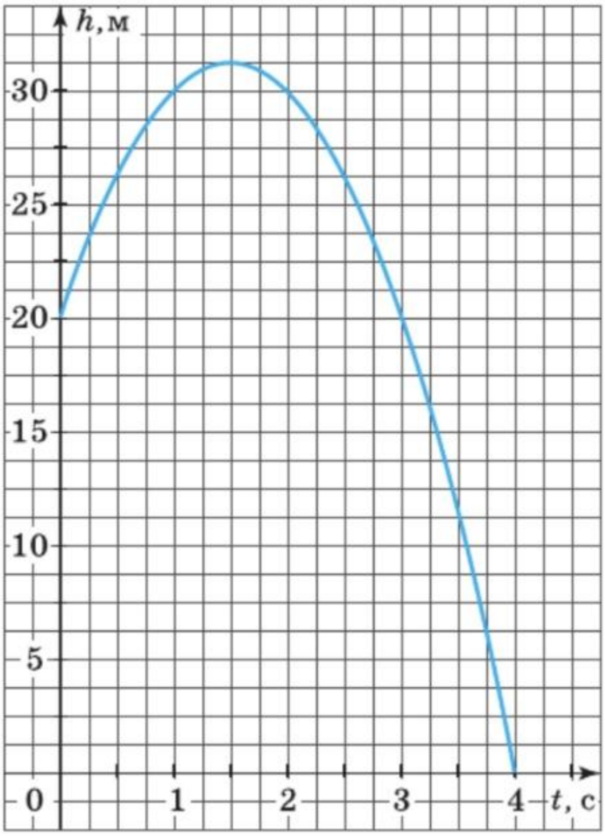


Рис. 33

150. Квадратичная функция задана формулой:

а) $y = x^2 - 4x + 7$;
б) $y = -2x^2 - 5x - 2$.

Найдите координаты вершины параболы. Наметив на координатной плоскости вершину параболы и её ось симметрии, изобразите схематически график.

151. Постройте график функции $y = -x^2 + 2x + 8$ и найдите, используя график:

а) значения функции при $x = 2{,}5$; $-0{,}5$; -3;
б) значения аргумента, при которых $y = 6$; 0; -2;
в) нули функции и промежутки знакопостоянства;
г) промежутки возрастания и убывания функции, множество значений функции.

152. Постройте график функции $y = 2x^2 + 8x + 2$ и найдите, используя график:

а) значения y при $x = -2{,}3$; $-0{,}5$; $1{,}2$;
б) значения x, при которых $y = -4$; -1; $1{,}7$;
в) нули функции и промежутки знакопостоянства;
г) промежутки возрастания и убывания функции, наименьшее значение функции.

153. Постройте график функции и опишите её свойства:

а) $y = \frac{1}{3}x^2 - 4x + 4$; б) $y = -\frac{1}{4}x^2 + x - 1$; в) $y = x^2 + 3x$.

154. Постройте график функции:

а) $y = -\frac{1}{2}x^2 + 5$; б) $y = x^2 - 4x$; в) $y = -x^2 + 6x - 9$.

155. Постройте график функции:

а) $y = 0{,}5x^2 - 2$; б) $y = x^2 - 4x + 4$; в) $y = -x^2 + 2x$.

156. Постройте график функции:

а) $y = (x - 2)(x + 4)$; б) $y = -x(x + 5)$.

157. Найдите

а) наименьшее значение функции $y = x^2 - 4x - 4$;

б) наибольшее значение функции $y = -x^2 - 4x + 5$;

в) наименьшее значение функции $y = x^2 - 6x - 6$;

г) наибольшее значение функции $y = -x^2 - 3x + 2$.

158. Выясните, график какой из функций $y = x^2 + 6x$, $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x$, $y = -x^2 - 6$ изображён на рисунке 34.

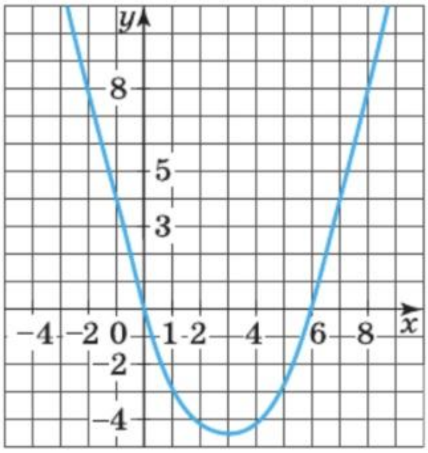


Рис. 34

159. Найдите значение b, при котором прямая $y = 6x + b$ касается параболы $y = x^2 + 8$.

160. При каком значении n графики функций $y = 2x^2 - 5x + 6$ и $y = x^2 - 7x + n$ имеют только одну общую точку? Найдите координаты этой точки.

161. Функции, графики которых изображены на рисунке 35, задаются уравнениями вида $y = ax^2 + bx + c$. Найдите значения коэффициентов a, b и c в каждом случае.

162. Покажите схематически, как расположен в координатной плоскости график функции $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, если:

1) $a > 0,\ D > 0$;
$a > 0,\ D = 0$;
$a > 0,\ D < 0$;

2) $a < 0,\ D > 0$;
$a < 0,\ D = 0$;
$a < 0,\ D < 0$.

(Буквой D обозначен дискриминант квадратичного трёхчлена $ax^2 + bx + c$.)

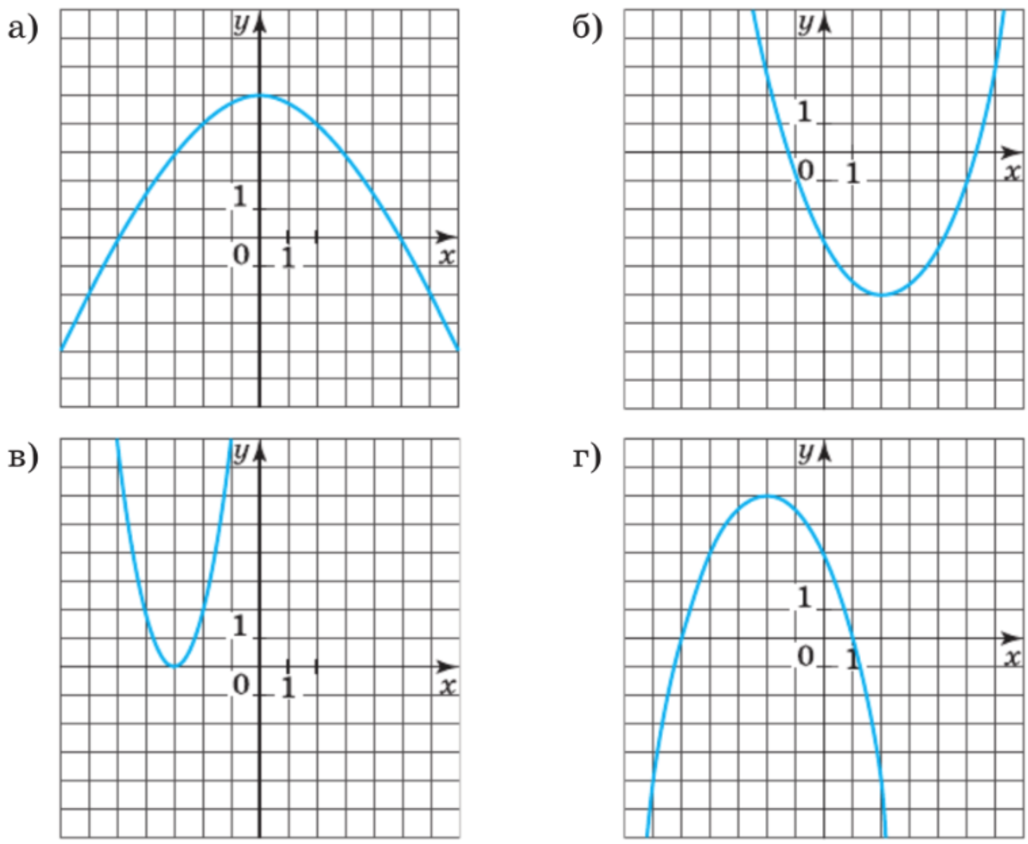


Рис. 35

163. (*Задача-исследование.*) По графику функции $y = ax^2 + bx + c$ (рис. 36) определите знаки коэффициентов a, b и c.
1) Объясните, как, пользуясь рисунком, можно определить знаки коэффициентов a и c. Укажите эти знаки.
2) Обсудите, как, пользуясь рисунком, можно определить знак коэффициента b. Укажите этот знак.

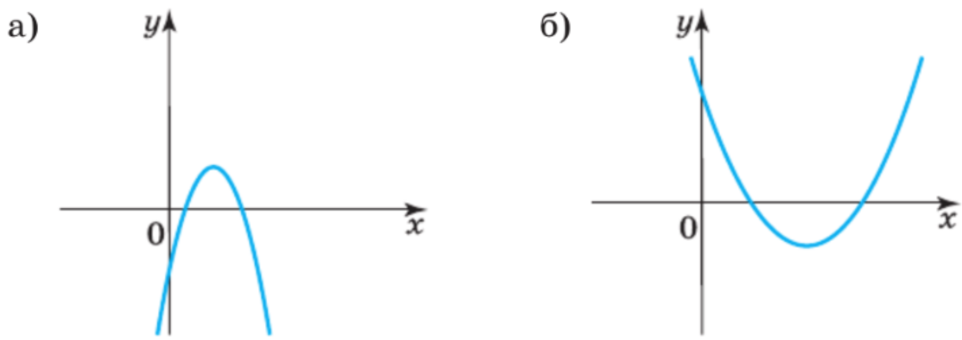


Рис. 36

164. Сократите дробь $\dfrac{(1-3a)^2}{3a^2+5a-2}$.

165. Решите уравнение:

а) $(x - 1)^2 + (x + 1)^2 = (x + 2)^2 - 2x + 2$;

б) $(2x - 3)(2x + 3) - 1 = 5x + (x - 2)^2$.

166. Если с каждого гектара участка соберут 35 ц пшеницы, то план недовыполнят на 20 т; если с каждого гектара будет получено 42 ц, то план перевыполнят на 50 т. Какова площадь участка?

167. Если на каждую машину грузить 3,5 т груза, то останется 4 т; если на каждую машину грузить 4,5 т, то для полной загрузки всех машин не хватит 4 т груза. Сколько было машин?

Контрольные вопросы и задания

1 Сформулируйте определение квадратичной функции.

2 Как выглядит график квадратичной функции $y = ax^2$ и какими свойствами обладает функция: а) при $a > 0$; б) при $a < 0$?

3 Как из графика функции $y = ax^2$ можно получить график функции: а) $y = ax^2 + n$; б) $y = a(x - m)^2$; в) $y = a(x - m)^2 + n$?

4 Что представляет собой график квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$?

На примере функции $y = 2x^2 - 12x + 16$ покажите, как строят график квадратичной функции.

Для тех, кто хочет знать больше

12. Дробно-линейная функция и её график

Вам известны свойства и график функции $y = \frac{k}{x}$ при $k > 0$. Отметим ещё одно свойство этой функции и особенность её графика.

При неограниченном возрастании положительных значений аргумента значения функции, оставаясь положительными, убывают и стремятся к нулю, т. е. если $x > 0$ и $x \to +\infty$, то $y \to 0$. Аналогично если $x < 0$ и $x \to -\infty$, то $y \to 0$. На графике это свойство проявляется в том, что точки графика по мере их удаления в бесконечность (т. е. при $x \to +\infty$ или $x \to -\infty$) неограниченно приближаются к оси x. Говорят, что ось x, т. е. прямая $y = 0$, является *асимптотой* графика функции $y = \frac{k}{x}$ при $k > 0$.

Вообще асимптотой кривой называется прямая, к которой приближаются как угодно близко точки кривой по мере их удаления в бесконечность.

Гипербола $y = \frac{k}{x}$ при $k > 0$ имеет ещё одну асимптоту — ось y, т. е. прямую $x = 0$. Нетрудно понять, что гипербола $y = \frac{k}{x}$ при $k < 0$ также имеет две асимптоты — ось x и ось y.

Теперь мы познакомимся с дробно-линейными функциями. Примерами таких функций могут служить функции, задаваемые формулами $y = \frac{2x - 5}{3x + 4}$, $y = \frac{6}{10x - 7}$, $y = \frac{x + 4}{2x}$. Правые части этих формул — дроби, у которых числитель — многочлен первой степени или число, отличное от нуля, а знаменатель — многочлен первой степени. Такие функции называют *дробно-линейными функциями*.

Вообще *дробно-линейной функцией называется функция, которую можно задать формулой вида* $y = \frac{ax + b}{cx + d}$, *где x — переменная, a, b, c и d — произвольные числа, причём $c \neq 0$ и $ad - bc \neq 0$.*

Ограничения $c \neq 0$ и $ad - bc \neq 0$ существенны. Если $c = 0$, то мы получим линейную функцию, а при $ad - bc = 0$ — сократимую дробь, значение которой равно $\frac{b}{d}$, т. е. получим константу.

Вы знаете, что график функции $y = f(x) + n$ можно получить из графика функции $y = f(x)$ с помощью параллельного переноса (сдвига) вдоль оси y на n единиц вверх, если $n > 0$, или на $-n$ единиц вниз, если $n < 0$. График функции $y = f(x - m)$ можно получить из графика функции $y = f(x)$ с помощью сдвига вдоль оси x на m единиц вправо, если $m > 0$, или на $-m$ единиц влево, если $m < 0$.

Покажем, что графиком дробно-линейной функции является гипербола, которую можно получить из гиперболы $y = \frac{k}{x}$ с помощью параллельных переносов вдоль координатных осей. Проиллюстрируем это на примерах построения графиков конкретных дробно-линейных функций.

Пример 1. Построим график функции $y = \frac{2x + 4}{x - 1}$.

▶ Для этого выделим из дроби $\frac{2x + 4}{x - 1}$ целую часть, представив дробь в виде $n + \frac{k}{x - m}$. Имеем

$$\frac{2x + 4}{x - 1} = \frac{2x - 2 + 6}{x - 1} = \frac{2(x - 1) + 6}{x - 1} = 2 + \frac{6}{x - 1}.$$

Здесь $k = 6$, $m = 1$, $n = 2$.

График функции $y = \dfrac{6}{x-1} + 2$ можно получить из графика функции $y = \dfrac{6}{x}$ с помощью двух параллельных переносов: сдвига гиперболы $y = \dfrac{6}{x}$ на 1 единицу вправо вдоль оси x и сдвига полученного графика $y = \dfrac{6}{x-1}$ на 2 единицы вверх в направлении оси y. При этом преобразовании сдвинутся и асимптоты гиперболы $y = \dfrac{6}{x}$: ось x перейдёт в прямую $y = 2$, а ось y — в прямую $x = 1$.

Для построения графика данной функции поступим так: проведём в координатной плоскости пунктиром асимптоты: прямую $x = 1$ и прямую $y = 2$. Так как гипербола состоит из двух ветвей, то для построения этих ветвей составим две таблицы: одну для $x < 1$, другую для $x > 1$.

x	-5	-3	-2	-1	0
y	1	$0{,}5$	0	-1	-4

x	2	3	4	5	7
y	8	5	4	$3{,}5$	3

Отметив в координатной плоскости точки, координаты которых указаны в первой таблице, и соединив их плавной непрерывной линией, получим одну ветвь гиперболы. Аналогично, используя

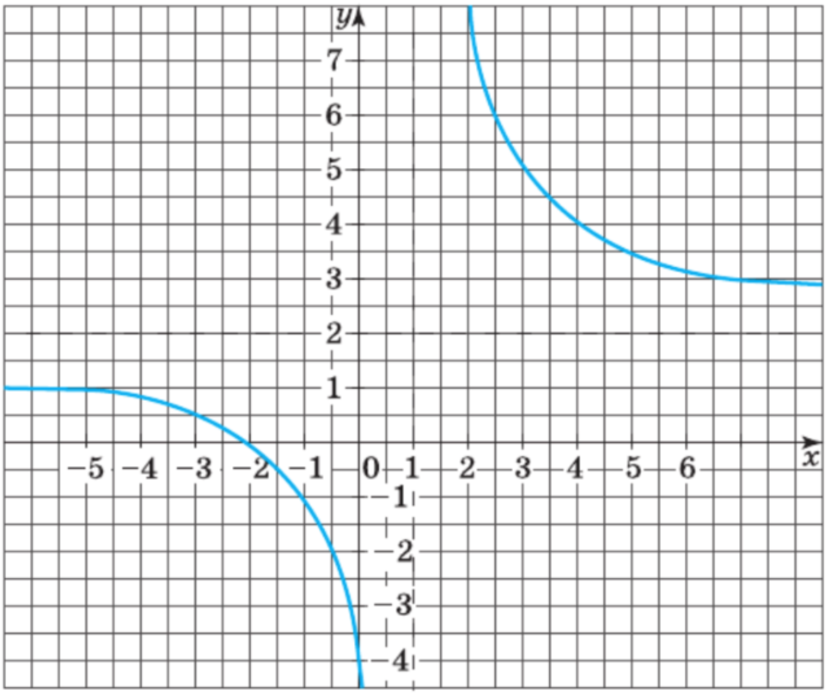


Рис. 37

вторую таблицу, получим вторую ветвь гиперболы. График функции $y = \dfrac{2x+4}{x-1}$ изображён на рисунке 37. ◁

П р и м е р 2. Построим график функции $y = -\dfrac{2x-1}{x+1}$.

▶ Так же как и в примере 1, выделим из дроби $-\dfrac{2x-1}{x+1}$ целую часть, т. е. представим дробь в виде $n + \dfrac{k}{x-m}$. Имеем

$$-\frac{2x-1}{x+1} = -\frac{2x+2-3}{x+1} = -\frac{2(x+1)-3}{x+1} = -\left(2 - \frac{3}{x+1}\right) = -2 + \frac{3}{x+1}.$$

В этом случае $k = 3$, $m = -1$, $n = -2$.

График функции $y = \dfrac{3}{x+1} - 2$ можно получить из графика функции $y = \dfrac{3}{x}$ с помощью двух параллельных переносов: сдвига гиперболы $y = \dfrac{3}{x}$ на 1 единицу влево и сдвига графика функции $y = \dfrac{3}{x+1}$ на 2 единицы вниз. При этом асимптотами гиперболы $y = \dfrac{3}{x+1} - 2$ станут прямые $y = -2$ и $x = -1$.

Далее поступим так. Проведём в координатной плоскости пунктиром асимптоты $y = -2$ и $x = -1$. Составим две таблицы: одну для $x < -1$, другую для $x > -1$.

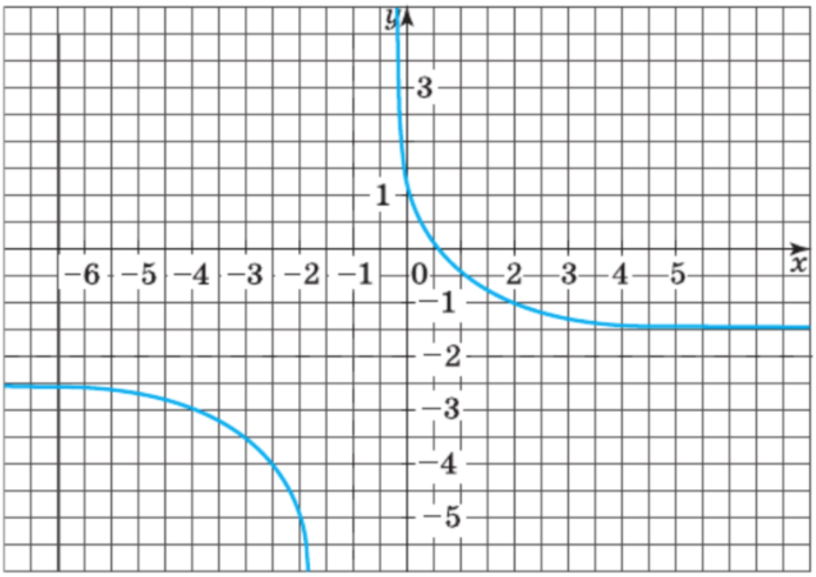


Рис. 38

x	-6	-4	-3	-2
y	$-2{,}6$	-3	$-3{,}5$	-5

x	0	1	2	5
y	1	$-0{,}5$	-1	$-1{,}5$

Отметив в координатной плоскости точки, координаты которых помещены в первой таблице, и соединив их плавной непрерывной линией, получим одну ветвь гиперболы. Используя вторую таблицу, получим вторую ветвь гиперболы. График функции $y = -\dfrac{2x-1}{x+1}$ изображён на рисунке 38 на с. 65. ◁

В примерах 1 и 2 мы установили, что графиком каждой из функций $y = \dfrac{2x+4}{x-1}$ и $y = -\dfrac{2x-1}{x+1}$ является гипербола, и показали один из способов построения графиков этих функций.

Можно доказать, что любую дробно-линейную функцию $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ можно представить в виде $y = \dfrac{k}{x-m} + n$.

Таким образом, графиком дробно-линейной функции является гипербола, которую можно получить из гиперболы $y = \dfrac{k}{x}$ с помощью двух параллельных переносов.

Упражнения

168. Укажите асимптоты гиперболы:

а) $y = \dfrac{10}{x-3} - 2$; б) $y = \dfrac{8}{x+2} - 3$.

169. Постройте график функции:

а) $y = \dfrac{4}{x-3}$; б) $y = \dfrac{4}{x} + 2$; в) $y = \dfrac{4}{x+3}$; г) $y = \dfrac{4}{x} - 2$.

170. Найдите асимптоты гиперболы:

а) $y = \dfrac{x+8}{x-2}$; б) $y = -\dfrac{x-8}{x+3}$.

171. Покажите схематически, как расположен график функции $y = \dfrac{k}{x-m} + n$, где $k < 0$, если:

а) $m > 0$, $n < 0$; б) $m < 0$, $n > 0$.

172. Постройте график функции $y = \dfrac{3x - 2}{x - 2}$. Найдите нули функции и промежутки знакопостоянства.

173. Укажите функции, графиками которых являются гиперболы:

1. $y = \dfrac{15}{x - 3}$ 2. $y = \dfrac{37 + x}{37 - x}$

3. $y = \dfrac{8x - 5}{25}$ 4. $y = \dfrac{8x - 40}{5x - 25}$

174. Докажите, что графику функции $y = \dfrac{2x + 5}{x - 3}$ принадлежат лишь две точки, у которых и абсцисса, и ордината — натуральные числа. Найдите координаты этих точек.

175. Найдите все точки графика функции $y = \dfrac{8x - 7}{x}$, у которых и абсцисса, и ордината являются целыми числами.

176. Решите графически уравнение $\dfrac{4x}{x + 2} = x - 3$.

177. Постройте график функции $g(x) = \dfrac{6}{|x - 2|}$.

Решите уравнение:

а) $g(x) = 3$; б) $g(x) = 6$; в) $g(x) = -2$.

178. Установите соответствие между функциями

$$y = \frac{x + 2}{x - 1},\ y = \frac{-x - 2}{x - 1}$$

и их графиками, представленными на рисунке 39.

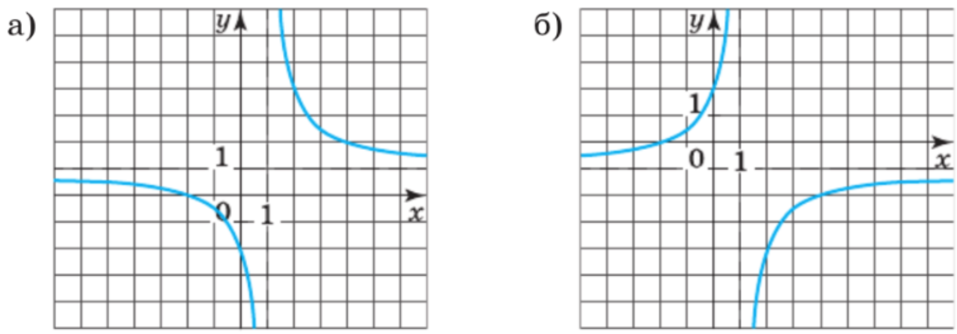


Рис. 39

Дополнительные упражнения к главе II

К параграфу 3

179. Постройте в одной и той же системе координат графики функций:

а) $y = x + 5$; $y = -0{,}5x + 5$; $y = 5$;
б) $y = 0{,}5x + 3$; $y = 0{,}5x$; $y = 0{,}5x - 2$.

180. Изобразите схематически график функции $f(x) = kx + b$ и перечислите её свойства, если:

а) $k > 0$, $b > 0$; б) $k < 0$, $b < 0$; в) $k > 0$, $b < 0$.

181. Постройте график функции:

а) $y = -\dfrac{12}{x}$; б) $y = \dfrac{10}{x}$.

182. Постройте график функции $y = \sqrt{kx}$ при k, равном: а) 2; б) 0,5. Как меняется характер графика в зависимости от коэффициента k?

183. Постройте в одной системе координат графики функций $y = \dfrac{1}{3}x^2$ и $y = -\dfrac{1}{3}x^2$. Найдите промежутки возрастания и убывания для каждой функции.

184. Изобразите схематически в одной системе координат графики функций $y = ax^2$ для случая: $a < 0$; $a > 0$. Перечислите свойства функции для каждого случая.

185. Постройте в одной системе координат графики функций $y = \dfrac{1}{9}x^3$ и $y = -\dfrac{1}{9}x^3$. Найдите промежутки возрастания и убывания для каждой функции.

186. Докажите, что:

а) сумма двух чётных функций есть функция чётная;
б) сумма двух нечётных функций — функция нечётная.

187. Докажите, что:

а) произведение двух чётных функций является чётной функцией;
б) произведение двух нечётных функций есть функция чётная;
в) произведение чётной и нечётной функций есть функция нечётная.

188. Задайте уравнением функцию $y = f(x)$, график которой представлен на рисунке 40, и опишите её свойства.

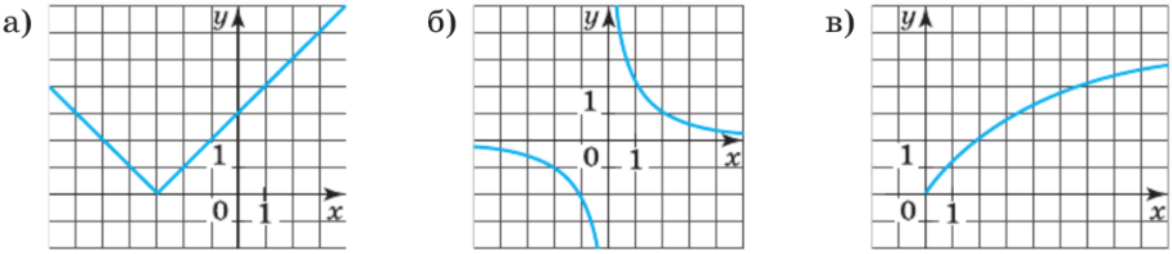


Рис. 40

189. Обладает ли функция $y = f(x)$ свойством чётности или свойством нечётности, если:

а) $f(x) = x^3 - 7x$; б) $f(x) = \dfrac{x^2 + 9}{x}$?

190. Постройте график функции и опишите её свойства:

а) $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$; б) $f(x) = \dfrac{x^2 - 6x - 7}{x + 1}$.

К параграфу 4

191. При каком значении a график функции $y = ax^2$ проходит через точку:

а) $(5; -7)$; б) $(-\sqrt{3}; 9)$; в) $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$; г) $(100; 10)$?

192. Постройте график функции, заданной формулой $y = -0{,}25x^2$, где $x \in [-6; 2]$. Каковы наибольшее и наименьшее значения этой функции?

193. При каких значениях a областью значений функции $y = ax^2$ является промежуток: а) $[0; +\infty)$; б) $(-\infty; 0]$?

194. Докажите, что графики функций $y = ax^2$ и $y = ax$, где $a \neq 0$, пересекаются в точке $(1; a)$. В какой ещё точке пересекаются эти графики?

195. Параболу $y = 7x^2$ сдвинули вверх на 5 единиц и влево на 8 единиц. Графиком какой функции является полученная парабола?

196. Какие преобразования надо выполнить, чтобы:

а) из графика функции $y = x^3$ получить графики функций $y = -x^3$, $y = (x - 3)^3$, $y = x^3 + 4$;

б) из графика функции $y = \sqrt{x}$ получить графики функций $y = -\sqrt{x}$, $y = \sqrt{x + 5}$, $y = \sqrt{x} - 1$?

197. Постройте в одной координатной плоскости графики функций $y = |x|$, $y = |x - 4|$, $y = |x - 4| - 3$.

198. Постройте график функции:

а) $f(x) = |x^2 - 2x|$; б) $f(x) = x^2 - 2|x|$.

199. Постройте график функции:

а) $y = x|x|$; б) $y = -\dfrac{x^3}{|x|}$.

200. При каких значениях c график функции $y = x^2 - 6x + c$ расположен выше прямой:

а) $y = 4$; б) $y = -1$?

201. При каких значениях b и c вершиной параболы $y = x^2 + bx + c$ является точка $(6; -12)$?

202. Найдите значение a, при котором осью симметрии параболы $y = ax^2 - 16x + 1$ является прямая $x = 4$.

203. При каких значениях a и c квадратичная функция $y = ax^2 + c$ имеет нули?

204. Найдите значения a и b, при которых график функции $y = ax^2 + bx - 18$ проходит через точки $M(1; 2)$ и $N(2; 10)$.

205. Постройте график функции и опишите её свойства:

а) $y = x^2 + 2x - 15$; г) $y = 6x - 2x^2$;
б) $y = 0{,}5x^2 - 3x + 4$; д) $y = (2x - 7)(x + 1)$;
в) $y = 4 - 0{,}5x^2$; е) $y = (2 - x)(x + 6)$.

206. Используя график, найдите множество значений функции:

а) $y = 3x^2 - 0{,}5x + \dfrac{1}{16}$; в) $y = -\dfrac{1}{2}x^2 + 4x - 5{,}5$;

б) $y = 2x^2 + 1{,}2x + 2$; г) $y = -3x^2 - 2x - 4\dfrac{2}{3}$.

207. Пусть h (м) — высота, на которой находится брошенный с земли вверх мяч, t (с) — время полёта мяча. Зависимость h от t выражается формулой $h = 24t - 4{,}9t^2$. Какой наибольшей высоты достиг мяч? В какой промежуток времени он поднимался и в какой опускался? Через сколько секунд после броска он упал на землю?

208. Задайте формулой какую-либо квадратичную функцию, которая:

а) в промежутке $(-\infty; -3]$ убывает, а в промежутке $[-3; +\infty)$ возрастает;
б) в промежутке $(-\infty; 6]$ возрастает, а в промежутке $[6; +\infty)$ убывает.

209. Функция задана формулой $y = x^2 + px + q$. Найдите значения p и q, если известно, что:

а) нули функции — числа 3 и 4;
б) график функции пересекает оси координат в точках $(0; 6)$ и $(2; 0)$;
в) наименьшее значение, равное 24, функция принимает при $x = 6$.

Глава III УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Вы уже научились решать целые уравнения с одной переменной первой и второй степени. Теперь вы встретитесь с более сложными случаями, когда нужно решить уравнение третьей или более высокой степени. Специальные приёмы для решения уравнений помогут при выполнении различных упражнений. В этой главе также будут рассматриваться дробные рациональные уравнения, решение которых сводится к решению целых уравнений третьей или более высокой степени. Кроме того, вы научитесь решать неравенства второй степени с одной переменной, а также использовать метод интервалов для решения более сложных неравенств.

§ 5 УРАВНЕНИЯ С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

13. Целое уравнение и его корни

> **Определение.** Целым уравнением с одной переменной называется уравнение, левая и правая части которого — целые выражения.

Например, уравнения

$$x + 3\frac{2}{3} = 5x - 4, \quad \frac{x^2+1}{6} - \frac{x+1}{3} = 10 \text{ и } (x+2)(x-3) = x(x+1) \text{ —}$$

целые, а уравнения

$$x + 3\frac{2}{3} = \frac{5}{x} - 4, \quad \frac{x^2+1}{6} - \frac{3}{x+1} = 10 \text{ и } \frac{x+2}{x-3} = \frac{x}{x+1}$$

целыми не являются.

Всякое целое уравнение можно заменить равносильным ему уравнением вида $P(x) = 0$, где $P(x)$ — многочлен стандартного вида. Так, линейное уравнение можно привести к виду $ax + b = 0$, а квадратное — к виду $ax^2 + bx + c = 0$.

Возьмём целые уравнения

$$(x^3 - 1)^2 + x^5 = x^6 - 2(x - 1), \qquad (1)$$

$$\frac{x^4 - 1}{4} - \frac{x^2 + 1}{2} = 3x^2 \qquad (2)$$

и преобразуем их к виду $P(x) = 0$.

В уравнении (1) раскроем скобки, перенесём все члены в левую часть и приведём подобные слагаемые:

$$x^6 - 2x^3 + 1 + x^5 = x^6 - 2x + 2,$$

$$x^6 - 2x^3 + 1 + x^5 - x^6 + 2x - 2 = 0,$$

$$x^5 - 2x^3 + 2x - 1 = 0.$$

Преобразуем уравнение (2). В этом случае сначала избавимся от дробей. Для этого умножим обе части уравнения на четыре:

$$x^4 - 1 - 2(x^2 + 1) = 12x^2.$$

Далее будем выполнять преобразования, аналогичные преобразованиям в примере (1):

$$x^4 - 1 - 2x^2 - 2 = 12x^2,$$

$$x^4 - 1 - 2x^2 - 2 - 12x^2 = 0,$$

$$x^4 - 14x^2 - 3 = 0.$$

Если уравнение с одной переменной записано в виде $P(x) = 0$, где $P(x)$ — многочлен стандартного вида, то степень этого многочлена называют *степенью уравнения*. Степенью произвольного целого уравнения называют степень равносильного ему уравнения вида $P(x) = 0$, где $P(x)$ — многочлен стандартного вида.

Например, уравнение (1) является уравнением пятой степени, а уравнение (2) — уравнением четвёртой степени.

Уравнение первой степени можно привести к виду $ax + b = 0$, где x — переменная, a и b — некоторые числа, причём $a \neq 0$. Из уравнения $ax + b = 0$ при $a \neq 0$ получаем, что $x = -\frac{b}{a}$. Число $-\frac{b}{a}$ — корень уравнения. Каждое уравнение первой степени имеет единственный корень.

Уравнение второй степени можно привести к виду $ax^2 + bx + c = 0$, где x — переменная, a, b и c — некоторые числа, причём $a \neq 0$. Число корней такого уравнения зависит от дискриминанта

$$D = b^2 - 4ac.$$

Если $D > 0$, то уравнение имеет два корня; если $D = 0$, то уравнение имеет один корень; если $D < 0$, то уравнение не имеет корней.

Таким образом, любое уравнение второй степени имеет не более двух корней. Для нахождения корней при $D \geqslant 0$ используется формула корней квадратного уравнения $x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$.

Уравнение третьей степени можно привести к виду

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

уравнение четвёртой степени — к виду

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0 \text{ и т. д.,}$$

где a, b, c, ... — некоторые числа, причём $a \neq 0$. Можно доказать, что уравнение третьей степени имеет не более трёх корней, уравнение четвёртой степени — не более четырёх корней. Вообще *уравнение n-й степени имеет не более n корней.*

Для уравнений третьей и четвёртой степеней известны формулы корней, но эти формулы очень сложны и неудобны для практического применения. Для уравнений пятой и более высоких степеней общих формул корней не существует.

Если стоит задача решения целого уравнения, степень которого выше двух, надо прежде всего пытаться воспользоваться какими-либо особенностями этого уравнения.

Пример 1. Решим два целых уравнения:

$$(x^2 - 4)^2 + (x^2 + x - 2)^2 = 0, \qquad (3)$$

$$(x^2 - 4)(x^2 + x - 2) = 0. \qquad (4)$$

▶ Сначала рассмотрим уравнение (3). Сумма двух квадратов равна нулю в том и только в том случае, когда каждое из слагаемых обращается в нуль. Значит, корнем уравнения (3) может служить лишь то значение x, при котором

$$x^2 - 4 = 0 \text{ И } x^2 + x - 2 = 0.$$

Решая каждое из этих уравнений, получим:

$$x_1 = 2,\ x_2 = -2 \text{ И } x_3 = -2,\ x_4 = 1.$$

Таким образом, уравнение (3) имеет единственный корень — число -2.

Решим теперь уравнение (4). Его левая часть — это произведение двух целых выражений. Такое произведение обращается в нуль, если хотя бы один из множителей равен нулю. Значит, корнем уравнения (4) может быть лишь такое число, при котором

$$x^2 - 4 = 0 \textbf{ или } x^2 + x - 2 = 0,$$

Получаем

$$x_1 = 2,\ x_2 = -2 \textbf{ или } x_3 = -2,\ x_4 = 1.$$

Значит, уравнение (4) имеет три корня. Это числа: 2; −2; 1.

Коротко решения уравнений (3) и (4) могут быть записаны так.

Уравнение (3): $\begin{cases} x^2 - 4 = 0, \\ x^2 + x - 2 = 0, \end{cases}$ $\begin{cases} x = 2, x = -2, \\ x = -2, x = 1. \end{cases}$

Ответ: −2.

Уравнение (4): $\left[\begin{array}{l} x^2 - 4 = 0, \\ x^2 + x - 2 = 0, \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x = 2, x = -2, \\ x = -2, x = 1. \end{array}\right.$

Ответ: 2; −2; 1. ◁

Вы видите, что уравнение (3) равносильно системе двух уравнений, а про уравнение (4) говорят, что оно равносильно *совокупности двух уравнений*.

Решением совокупности уравнений является то и только то значение переменной, которое удовлетворяет хотя бы одному из уравнений, входящих в совокупность.

Иногда целое уравнение, степень которого выше двух, удаётся решить, применив какой-либо специальный приём. Например, некоторые целые уравнения можно решить, применив приём разложения многочлена на множители.

Пример 2. Решим уравнение

$$x^3 - 8x^2 - x + 8 = 0. \tag{5}$$

▶ Разложим левую часть уравнения на множители:

$$x^2(x - 8) - (x - 8) = 0,$$

$$(x - 8)(x^2 - 1) = 0,$$

$$(x - 8)(x - 1)(x + 1) = 0.$$

НИЛЬС АБЕЛЬ (1802—1829) — норвежский математик. Основатель общей теории алгебраических функций. Он впервые доказал неразрешимость в общем случае в радикалах алгебраического уравнения пятой степени и более высоких степеней.

Отсюда найдём, что

$$x - 8 = 0, \text{ или } x - 1 = 0, \text{ или } x + 1 = 0.$$

Значит, уравнение (5) имеет три корня:

$$x_1 = 8,\ x_2 = 1,\ x_3 = -1.$$

Ответ: 8; 1; –1. ◁

Уравнения, степень которых выше двух, иногда удаётся решить, введя новую переменную. Рассмотрим примеры.

Пример 3. Решим уравнение

$$(x^2 - 5x + 4)(x^2 - 5x + 6) = 120. \tag{6}$$

▶ Если перенести все члены уравнения в левую часть и преобразовать получившееся выражение в многочлен стандартного вида, то получится уравнение

$$x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x - 96 = 0,$$

для которого трудно найти способ решения.
Однако можно воспользоваться следующей особенностью уравнения (6): в его левой части переменная x входит только в выражение $x^2 - 5x$, которое встречается в уравнении дважды. Это позволяет решить данное уравнение с помощью введения новой переменной.
Обозначим $x^2 - 5x$ через y:

$$x^2 - 5x = y.$$

Тогда уравнение (6) сведётся к уравнению с переменной y:

$$(y + 4)(y + 6) = 120,$$

которое после упрощения примет вид

$$y^2 + 10y - 96 = 0.$$

Решив полученное квадратное уравнение, найдём его корни:

$$y_1 = -16,\ y_2 = 6.$$

Отсюда

$$x^2 - 5x = -16 \text{ или } x^2 - 5x = 6.$$

ЭВАРИСТ ГАЛУА (1811—1832) — французский математик. Заложил основы современной алгебры, ввёл ряд фундаментальных её понятий. Нашёл необходимое и достаточное условие, которому удовлетворяет алгебраическое уравнение, разрешимое в радикалах.

Решая уравнение $x^2 - 5x = -16$, придём к выводу, что оно не имеет корней.
Решая уравнение $x^2 - 5x = 6$, найдём, что оно имеет два корня:

$$x_1 = -1,\ x_2 = 6.$$

Значит, уравнение (6) имеет два корня: -1 и 6.

Ответ: -1; 6. ◁

Метод введения новой переменной позволяет легко решать уравнения четвёртой степени, имеющие вид $ax^4 + bx^2 + c = 0$.

Уравнения вида $ax^4 + bx^2 + c = 0$, *где* $a \neq 0$, *являющиеся квадратными относительно* x^2, *называют биквадратными уравнениями.*

Пример 4. Решим биквадратное уравнение

$$9x^4 - 10x^2 + 1 = 0. \qquad (7)$$

▶ Введём новую переменную. Обозначим x^2 через y: $x^2 = y$.
Получим квадратное уравнение с переменной y:

$$9y^2 - 10y + 1 = 0.$$

Решив его, найдём, что

$$y_1 = \frac{1}{9},\ y_2 = 1.$$

Значит,

$$x^2 = \frac{1}{9} \text{ или } x^2 = 1.$$

Из уравнения $x^2 = \frac{1}{9}$ находим, что $x_1 = -\frac{1}{3}$, $x_2 = \frac{1}{3}$.
Из уравнения $x^2 = 1$ находим, что $x_3 = -1$, $x_4 = 1$.
Итак, биквадратное уравнение (7) имеет четыре корня:

$$x_1 = -\frac{1}{3},\ x_2 = \frac{1}{3},\ x_3 = -1,\ x_4 = 1.$$

Ответ: $-\frac{1}{3}$; $\frac{1}{3}$; -1; 1. ◁

Упражнения

210. Какова степень уравнения:

а) $2x^2 - 6x^5 + 1 = 0$;
б) $x^6 - 4x^3 - 3 = 0$;
в) $\frac{1}{7}x^5 = 0$;
г) $(x + 8)(x - 7) = 0$;
д) $\frac{x}{2} - \frac{x}{4} = 5$;
е) $5x^3 - 5x(x^2 + 4) = 17$?

211. Решите уравнение:

а) $(8x - 1)(2x - 3) - (4x - 1)^2 = 38$;

б) $\dfrac{(15x - 1)(1 + 15x)}{3} = 2\dfrac{2}{3}$;

в) $0{,}5y^3 - 0{,}5y(y + 1)(y - 3) = 7$;

г) $x^4 \cdot x^2 = \dfrac{(1 + 2x^2)(2x^2 - 1)}{4}$.

212. Решите уравнение:

а) $(6 - x)(x + 6) - (x - 11)x = 36$;

б) $9x^2 - \dfrac{(12x - 11)(3x + 8)}{4} = 1$;

в) $\dfrac{1 - 3y}{11} - \dfrac{3 - y}{5} = 0$;

г) $\dfrac{(y + 1)^2}{12} - \dfrac{1 - y^2}{24} = 4$.

213. Докажите, что уравнение $5x^6 + 6x^4 + x^2 + 4 = 0$ не имеет корней.

214. Может ли отрицательное число быть корнем уравнения

$$12x^5 + 7x^3 + 11x - 3 = 121?$$

215. Если ребро куба увеличить на 3 см, то его объём увеличится на 513 см^3. Чему равно ребро куба?

216. Первое число на 5 больше второго, а его куб на 3185 больше куба второго. Найдите эти числа.

217. Решите уравнение:

а) $y^3 - 6y = 0$;

б) $6x^4 + 3{,}6x^2 = 0$;

в) $x^3 + 3x = 3{,}5x^2$;

г) $x^3 - 0{,}1x = 0{,}3x^2$;

д) $9x^3 - 18x^2 - x + 2 = 0$;

е) $y^4 - y^3 - 16y^2 + 16y = 0$;

ж) $p^3 - p^2 = p - 1$;

з) $x^4 - x^2 = 3x^3 - 3x$.

218. Решите уравнение:

а) $3x^3 - x^2 + 18x - 6 = 0$;

б) $2x^4 - 18x^2 = 5x^3 - 45x$.

219. Решите уравнение:

а) $x^3 + 7x^2 - 6 = 0$;

б) $x^3 + 4x^2 - 5 = 0$.

220. Найдите координаты точек пересечения графика функции $y = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ с осями координат.

221. Решите уравнение, используя введение новой переменной:

а) $(2x^2 + 3)^2 - 12(2x^2 + 3) + 11 = 0$;

б) $(t^2 - 2t)^2 - 3 = 2(t^2 - 2t)$;

в) $(x^2 + x - 1)(x^2 + x + 2) = 40$;

г) $(2x^2 + x - 1)(2x^2 + x - 4) + 2 = 0$.

222. Решите уравнение:

а) $(x^2 + 3)^2 - 11(x^2 + 3) + 28 = 0$;
б) $(x^2 - 4x)^2 + 9(x^2 - 4x) + 20 = 0$;
в) $(x^2 + x)(x^2 + x - 5) = 84$.

223. Решите биквадратное уравнение:

а) $x^4 - 5x^2 - 36 = 0$;
б) $y^4 - 6y^2 + 8 = 0$;
в) $t^4 + 10t^2 + 25 = 0$;
г) $4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$;
д) $9x^4 - 9x^2 + 2 = 0$;
е) $16y^4 - 8y^2 + 1 = 0$.

224. Найдите корни биквадратного уравнения:

а) $x^4 - 25x^2 + 144 = 0$;
б) $y^4 + 14y^2 + 48 = 0$;
в) $x^4 - 4x^2 + 4 = 0$;
г) $t^4 - 2t^2 - 3 = 0$;
д) $2x^4 - 9x^2 + 4 = 0$;
е) $5y^4 - 5y^2 + 2 = 0$.

225. Найдите координаты точек пересечения с осями координат графика функции:

а) $y = x^4 - 5x^2 + 4$;
б) $y = x^4 + 3x^2 - 10$;
в) $y = x^4 - 20x^2 + 100$;
г) $y = 4x^4 + 16x^2$.

226. Разложите на множители трёхчлен:

а) $x^4 - 47x^2 - 98$;
б) $x^4 - 85x^2 + 1764$.

227. Решите уравнение:

а) $(x^2 - 1)(x^2 + 1) - 4(x^2 - 11) = 0$;
б) $3x^2(x - 1)(x + 1) - 10x^2 + 4 = 0$.

228. Решите уравнение:

а) $x^5 + x^4 - 6x^3 - 6x^2 + 5x + 5 = 0$;
б) $x^5 - x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 3x + 3 = 0$.

229. Найдите корни уравнения:

а) $y^7 - y^6 + 8y = 8$;
б) $u^7 - u^6 = 64u - 64$.

П

230. Разложите на множители квадратный трёхчлен:

а) $3x^2 - 25x - 28$;
б) $2x^2 + 13x - 7$.

231. Решите неравенство:

а) $13(5x - 1) - 15(4x + 2) < 0$;
б) $6(7 - 0{,}2x) - 5(8 - 0{,}4x) > 0$.

П

232. Два сварщика, работая вместе, могут выполнить задание за 30 ч. За сколько часов сможет выполнить это задание каждый сварщик, если известно, что первому на выполнение всей работы потребуется времени на 11 ч больше, чем второму?

14. Дробные рациональные уравнения

В каждом из уравнений

$$\frac{x}{x^2-1}=\frac{5}{x+1}, \qquad \frac{\sqrt{3}}{x^2}=x+5, \qquad 2x-1=\frac{x}{x+12}$$

левая и правая части представляют собой рациональные выражения, причём либо оба выражения являются дробными, либо одно из них является дробным, а другое — целым выражением. Такие уравнения называют *дробными рациональными уравнениями*. Напомним определение дробного рационального равнения.

> Дробным рациональным уравнением называется уравнение, обе части которого — рациональные выражения, причём хотя бы одно из них является дробным выражением.

При решении дробных рациональных уравнений обычно поступают следующим образом:

- находят общий знаменатель дробей, входящих в уравнение;
- умножают обе части уравнения на этот знаменатель;
- решают получившееся целое уравнение;
- исключают из его корней те, которые обращают в нуль общий знаменатель дробей.

С простейшими примерами решения дробных рациональных уравнений вы уже встречались. Рассмотрим более сложные примеры.

Пример 1. Решим уравнение

$$\frac{6}{x^2+8}-\frac{9x}{(x^2+8)(9-x^2)}=\frac{x^3}{x^4-x^2-72}. \qquad (1)$$

▶ Общий знаменатель дробей, входящих в уравнение, равен x^4-x^2-72. Умножив обе части уравнения на общий знаменатель дробей, получим

$$6x^2-54+9x=x^3.$$

Отсюда

$$x^3 - 6x^2 - 9x + 54 = 0. \qquad (2)$$

Решим полученное целое уравнение, используя разложение левой части на множители.
Имеем

$$(x^3 - 6x^2) - (9x - 54) = 0,$$

$$x^2(x - 6) - 9(x - 6) = 0,$$

$$(x - 6)(x^2 - 9) = 0,$$

$$(x - 6)(x - 3)(x + 3) = 0.$$

Получим три корня:

$$x_1 = 6, \; x_2 = 3, \; x_3 = -3.$$

Теперь необходимо проверить, не обращают ли найденные корни в нуль общий знаменатель дробей, входящих в уравнение (1).
Если $x = 6$, то $x^4 - x^2 - 72 \neq 0$; если $x = 3$, то $x^4 - x^2 - 72 = 0$; если $x = -3$, то $x^4 - x^2 - 72 = 0$.
Значит, уравнение (1) имеет единственный корень — число 6.
Ответ: 6. ◁

Пример 2. Решим уравнение

$$\frac{1}{x-6} + \frac{1}{x-4} = \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-7}.$$

▶ Приведение дробей, входящих в уравнение, к общему знаменателю связано с громоздкими преобразованиями и не позволяет легко найти корни уравнения. Поступим иначе. Воспользуемся тем, что знаменатели дробей представляют собой двучлены вида $x + b$, где b — некоторое число. Преобразуем уравнение так, чтобы в левой и правой его частях были записаны разности дробей, и каждую из разностей заменим дробью.
Получим

$$\frac{1}{x-6} - \frac{1}{x+2} = \frac{1}{x-7} - \frac{1}{x-4},$$

$$\frac{x+2-x+6}{(x-6)(x+2)} = \frac{x-4-x+7}{(x-7)(x-4)},$$

$$\frac{8}{x^2-4x-12} = \frac{3}{x^2-11x+28}.$$

Отсюда

$$8(x^2 - 11x + 28) = 3(x^2 - 4x - 12),$$

$$8x^2 - 88x + 224 = 3x^2 - 12x - 36,$$
$$5x^2 - 76x + 260 = 0.$$

Решив это уравнение, найдём, что оно имеет два корня:

$$x_1 = 5{,}2 \text{ и } x_2 = 10.$$

Каждое из этих чисел не обращает в нуль знаменатели дробей, входящих в исходное уравнение. Следовательно, исходное уравнение имеет два корня: 5,2 и 10.

О т в е т: 5,2; 10. ◁

П р и м е р 3. Решим уравнение

$$\frac{2x^2}{x-2} + \frac{3x+2}{2-x} = x^2. \qquad (3)$$

▶ Умножив обе части уравнения на $x - 2$, получим целое уравнение

$$2x^2 - 3x - 2 = x^2(x - 2). \qquad (4)$$

Разложив на множители квадратный трёхчлен $2x^2 - 3x - 2$, представим это уравнение в виде

$$(x - 2)(2x + 1) = x^2(x - 2).$$

Отсюда

$$x^2(x - 2) - (x - 2)(2x + 1) = 0,$$
$$(x - 2)(x^2 - 2x - 1) = 0,$$
$$x - 2 = 0 \text{ или } x^2 - 2x - 1 = 0.$$

Решив полученные уравнения, найдём, что уравнение (4) имеет три корня: 2, $1 - \sqrt{2}$, $1 + \sqrt{2}$.

Остаётся проверить, не обращают ли они в нуль знаменатель $x - 2$. Если $x = 2$, то $x - 2 = 0$; если $x = 1 - \sqrt{2}$, то $x - 2 \neq 0$; если $x = 1 + \sqrt{2}$, то $x - 2 \neq 0$.

Значит, число 2 не является корнем уравнения (3), а числа $1 - \sqrt{2}$ и $1 + \sqrt{2}$ являются его корнями.

О т в е т: $1 - \sqrt{2}$; $1 + \sqrt{2}$. ◁

В отдельных случаях удаётся решить дробное рациональное уравнение, используя введение новой переменной.

П р и м е р 4. Решим уравнение

$$\frac{1}{x^2 + x - 2} + \frac{7}{x^2 + x - 20} + \frac{1}{4} = 0.$$

▶ Введём новую переменную $y = x^2 + x$. Получим

$$\frac{1}{y-2} + \frac{7}{y-20} + \frac{1}{4} = 0.$$

Отсюда

$$4y - 80 + 28y - 56 + y^2 - 22y + 40 = 0,$$

$$y^2 + 10y - 96 = 0.$$

Решив полученное квадратное уравнение, найдём, что

$$y = 6 \text{ или } y = -16.$$

Уравнение $x^2 + x = 6$ имеет два корня: -3 и 2.
Уравнение $x^2 + x = -16$ корней не имеет.
Каждое из чисел -3 и 2 не обращает в нуль знаменатели дробей исходного уравнения и, следовательно, является его корнем.
Ответ: -3; 2. ◁

Упражнения

233. При каких значениях a равно нулю значение дроби:

а) $\dfrac{a^3 - 9a}{a^2 + a - 12}$; б) $\dfrac{a^5 + 2a^4}{a^3 + a + 10}$; в) $\dfrac{a^5 - 4a^4 + 4a^3}{a^4 - 16}$?

234. Решите уравнение:

а) $\dfrac{5y^3 - 15y^2 - 2y + 6}{y^2 - 9} = 0$; в) $\dfrac{6x^3 + 48x^2 - 2x - 16}{x^2 - 64} = 0$;

б) $\dfrac{3y^3 - 12y^2 - y + 4}{9y^4 - 1} = 0$; г) $\dfrac{y^3 - 4y^2 - 6y + 24}{y^3 - 6y} = 0$.

235. Решите уравнение:

а) $\dfrac{2}{x-2} - \dfrac{10}{x+3} = \dfrac{50}{x^2 + x - 6} - 1$;

б) $\dfrac{x+5}{x-1} + \dfrac{2x-5}{x-7} - \dfrac{30-12x}{8x - x^2 - 7} = 0$.

236. Найдите корни уравнения:

а) $\dfrac{3x-2}{x-1} - \dfrac{2x+3}{x+3} = \dfrac{12x+4}{x^2 + 2x - 3}$;

б) $\dfrac{5x-1}{x+7} - \dfrac{2x+2}{x-3} + \dfrac{63}{x^2 + 4x - 21} = 0$;

в) $\dfrac{x}{x^2 + 4x + 4} = \dfrac{4}{x^2 - 4} - \dfrac{16}{x^3 + 2x^2 - 4x - 8}$.

237. При каких значениях a:

а) сумма дробей $\dfrac{a+1}{a-2}$ и $\dfrac{a-4}{a+1}$ равна дроби $\dfrac{3a+3}{a^2-a-2}$;

б) разность дробей $\dfrac{3a-5}{a^2-1}$ и $\dfrac{6a-5}{a-a^2}$ равна дроби $\dfrac{3a+2}{a^2+a}$?

238. Найдите корни уравнения:

а) $\dfrac{1}{x-7}-\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{1}{x-10}-\dfrac{1}{x-9}$;

б) $\dfrac{1}{x+3}-\dfrac{1}{x+9}=\dfrac{1}{x+5}-\dfrac{1}{x+21}$.

239. (*Для работы в парах.*) Решите уравнение:

а) $\dfrac{1}{x-4}+\dfrac{1}{x-2}=\dfrac{1}{x+4}+\dfrac{1}{x-5}$;

б) $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x+3}=\dfrac{1}{x+28}+\dfrac{1}{x}$.

1) Обсудите, в каком виде удобно представить уравнение в каждом случае, и выполните соответствующие преобразования.
2) Распределите, кто выполняет задание а), а кто — задание б), и выполните их.
3) Проверьте друг у друга, правильно ли найдены корни уравнения, и исправьте ошибки, если они допущены.

240. Найдите координаты точек пересечения графиков функций:

а) $y=x^2+x-9$ и $y=\dfrac{9}{x}$; б) $y=x^2+6x-4$ и $y=\dfrac{24}{x}$.

241. При каких значениях a:

а) равны значения выражений $\dfrac{5a+7-28a^2}{20a}$ и a^2;

б) являются противоположными числами значения выражений $\dfrac{2-18a^2-a}{3a}$ и $3a^2$?

242. (*Для работы в парах.*) Решите уравнение, используя введение новой переменной:

а) $\dfrac{12}{x^2-2x+3}=x^2-2x-1$;

б) $\dfrac{12}{x^2+x-10}-\dfrac{6}{x^2+x-6}=\dfrac{5}{x^2+x-11}$;

в) $\dfrac{16}{x^2-2x}-\dfrac{11}{x^2-2x+3}=\dfrac{9}{x^2-2x+1}$.

1) Выполните совместно задание а).
2) Распределите, кто выполняет задание б), а кто — задание в), и выполните их.
3) Проверьте друг у друга, правильно ли решены уравнения, и исправьте ошибки, если они допущены.

243. Найдите корни уравнения:

а) $\left(\frac{x+2}{x-4}\right)^2 + 16\left(\frac{x-4}{x+2}\right)^2 = 17;$

б) $\left(\frac{x+1}{x-3}\right)^2 + 18\left(\frac{x-3}{x+1}\right)^2 = 11.$

244. (*Задача-исследование.*) Существует ли такое положительное число, при сложении которого с числом, ему обратным, получится сумма, в 13 раз меньшая суммы кубов этих чисел?

1) Обсудите, значения каких выражений сравниваются, и составьте соответствующее уравнение.
2) Введите новую переменную и решите полученное уравнение.
3) Для каждого из найденных значений вспомогательной переменной вычислите корень составленного уравнения.
4) Выберите значения корней, соответствующие условию задачи.

245. Решите уравнение:

а) $x^2 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right) = 3\frac{1}{2};$

б) $x^2 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{3}\left(x + \frac{1}{x}\right) = 8.$

П

246. Сократите дробь:

а) $\frac{12 - 5x - 2x^2}{15 - 10x};$ б) $\frac{3x^2 - 36x - 192}{x^2 - 256}.$

247. Постройте график функции $y = x^2 - 3$. Укажите промежутки, в которых функция принимает:

а) положительные значения; б) отрицательные значения.

248. На строительстве работали две бригады. После 5 дней совместной работы вторую бригаду перевели на другой объект. Оставшуюся часть работы первая бригада закончила за 9 дней. За сколько дней могла бы выполнить всю работу каждая бригада, работая отдельно, если известно, что второй бригаде на выполнение всей работы потребовалось бы на 12 дней меньше, чем одной первой бригаде?

15. Решение задач с помощью уравнений

При решении задач алгебраическим методом, часто обозначают неизвестную величину буквой (вводят переменную) и составляют уравнение с одной неизвестной (с одной переменной). Приведём пример такой задачи.

Задача. Знаменатель обыкновенной дроби на 2 больше числителя. Если числитель дроби увеличить в 2 раза, а знаменатель увеличить на 16, то дробь уменьшится на $\frac{1}{4}$. Найдите эту дробь.

▶ Пусть числитель дроби равен x, тогда её знаменатель равен $x + 2$. После увеличения числителя в 2 раза, а знаменателя на 16 получается дробь $\frac{2x}{x+18}$. Так как полученная дробь меньше данной дроби $\frac{x}{x+2}$ на $\frac{1}{4}$, то

$$\frac{x}{x+2} - \frac{2x}{x+18} = \frac{1}{4}. \qquad (1)$$

Решим дробное рациональное уравнение. Умножим левую и правую части уравнения (1) на $4(x + 2)(x + 18)$. Выполнив далее тождественные преобразования и применив свойства уравнений, получим квадратное уравнение

$$5x^2 - 36x + 36 = 0.$$

Решим это уравнение:

$$\frac{1}{4}D = (-18)^2 - 5 \cdot 36 = 144,$$

$$x = \frac{18 \pm 12}{5}, \ x_1 = 6, \ x_2 = 1{,}2.$$

Так как при $x = 6$ и $x = 1{,}2$ значения выражений $x + 2$ и $x + 18$ отличны от нуля, то числа 6 и 1,2 являются корнями дробного рационального уравнения (1). Однако число 1,2 не удовлетворяет условию задачи, так как числитель обыкновенной дроби не может быть дробным числом.

Ответ: $\frac{6}{8}$. ◁

Заметим, что дробь $\frac{3}{4}$, которая получается при сокращении дроби $\frac{6}{8}$, не удовлетворяет условию задачи, так как её знаменатель лишь на 1 больше числителя.

Упражнения

249. Одно число на 6 больше другого. Если большее число разделить на меньшее и к частному прибавить результат от деления увеличеного в 4 раза меньшего числа на большее, то получится 4. Найдите эти числа.

250. Знаменатель обыкновенной дроби на 6 больше её числителя. Если из числителя вычесть 2, а к знаменателю прибавить 2, то дробь уменьшится на $\frac{1}{6}$. Найдите эту дробь.

251. Знаменатель обыкновенной дроби больше её числителя на 3. Если числитель дроби увеличить в 3 раза, а затем уменьшить на 7, а знаменатель увеличить в 2 раза, а затем уменьшить на 11, то получится дробь, обратная данной. Найдите эту дробь.

252. Из посёлка в город, до которого 150 км, выехали одновременно легковой и грузовой автомобили. Скорость легкового автомобиля была на 10 км/ч больше скорости грузового, поэтому он приехал в город на полчаса быстрее, чем грузовой автомобиль. Найдите скорость грузового автомобиля.

253. Мотоциклист проехал от села до озера 60 км. На обратном пути он уменьшил скорость на 10 км/ч, поэтому от озера в село он ехал на 0,3 ч дольше. Сколько времени мотоциклист ехал от озера до села?

254. На 80 км пути велосипедист тратит на 2 ч больше, чем мотоциклист, так как его скорость на 20 км/ч меньше, чем скорость мотоциклиста. Найдите скорость велосипедиста.

255. Первый лыжник прошёл дистанцию 30 км на $\frac{1}{2}$ ч быстрее, чем второй дистанцию 45 км, хотя скорость второго была на 3 км/ч больше. За какое время первый лыжник прошёл 30 км?

256. С первого участка собрали 80 ц проса, а со второго 90 ц проса, хотя площадь второго участка была на 2 га меньше. С каждого гектара второго участка собирали на 5 ц больше, чем с каждого гектара первого. Какова урожайность проса на каждом участке?

257. За 6 ч катер прошёл 36 км по течению реки и 48 км против течения. Какова скорость катера в стоячей воде, если скорость течения 3 км/ч?

258. Плот проплывает 60 км по течению реки на 5 ч быстрее, чем такое же расстояние проходит моторная лодка против течения. Найдите скорость лодки по течению, если её скорость в стоячей воде 10 км/ч.

259. Моторная лодка прошла по течению 70 км. За то же время она может пройти против течения 30 км. Найдите скорость течения, если скорость лодки в стоячей воде 10 км/ч.

260. Две швеи, работая вместе, выполнят полученный заказ за 6 дней. За сколько дней выполнит заказ каждая швея, работая отдельно, если одной из них для этого потребуется на 5 дней больше, чем другой?

261. Два слесаря выполнили задание за 12 ч. Если бы половину задания выполнил первый, а оставшуюся часть второй, то первому потребовалось бы времени на 5 ч больше, чем второму. За сколько часов каждый из них мог бы выполнить задание?

П

262. Сократите дробь:

а) $\dfrac{2ab + 2by + ay + y^2}{2ab - 2by + ay + y^2}$;

б) $\dfrac{9x^2 + 6x + 4}{27x^3 - 8}$.

263. В одной системе координат постройте графики функций $y = x^2$ и $y = x + 6$, с их помощью найдите решение уравнения

$$x^2 - x - 6 = 0.$$

Контрольные вопросы и задания

1 Какое уравнение с одной переменной называется целым? Приведите пример.

2 Как найти степень целого уравнения?

3 Дайте определение биквадратного уравнения. Объясните, как решают биквадратное уравнение.

4 Какое уравнение называется дробным рациональным? На примере уравнения $\dfrac{4}{x-1} + \dfrac{1}{x-3} = \dfrac{x^2 - 7}{x^2 - 4x + 3}$ объясните, как решают дробные рациональные уравнения.

§ 6 НЕРАВЕНСТВА С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

16. Решение неравенств второй степени с одной переменной

Неравенства вида

$$ax^2 + bx + c > 0 \text{ и } ax^2 + bx + c < 0,$$

где x — переменная, a, b и c — некоторые числа и $a \neq 0$, называют *неравенствами второй степени с одной переменной.*

Решение неравенства

$$ax^2 + bx + c > 0 \text{ или } ax^2 + bx + c < 0$$

можно рассматривать как нахождение промежутков, в которых функция $y = ax^2 + bx + c$ принимает положительные или отрицательные значения. Для этого достаточно проанализировать, как расположен график функции $y = ax^2 + bx + c$ в координатной плоскости: куда направлены ветви параболы — вверх или вниз, пересекает ли парабола ось x и если пересекает, то в каких точках.

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Решим неравенство $5x^2 + 9x - 2 < 0$.

▶ Рассмотрим функцию $y = 5x^2 + 9x - 2$. Графиком этой функции является парабола, ветви которой направлены вверх.

Выясним, как расположена эта парабола относительно оси x. Для этого решим уравнение $5x^2 + 9x - 2 = 0$.

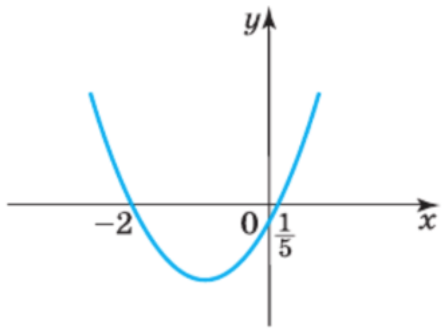


Рис. 41

Это уравнение имеет два корня:

$$x_1 = -2,\ x_2 = \frac{1}{5}.$$

Значит, парабола пересекает ось x в двух точках, абсциссы которых равны -2 и $\frac{1}{5}$.

Покажем схематически, как расположена парабола в координатной плоскости (рис. 41). Из рисунка видно, что функция принимает отрицательные значения, когда $x \in \left(-2; \frac{1}{5}\right)$. Следовательно, множеством решений неравенства $5x^2 + 9x - 2 < 0$ является числовой промежуток $\left(-2; \frac{1}{5}\right)$.

Ответ: $\left(-2; \frac{1}{5}\right)$. ◁

Заметим, что при рассмотренном способе решения неравенства нас не интересовала вершина параболы. Важно лишь было знать, куда направлены ветви параболы — вверх или вниз и каковы абсциссы точек её пересечения с осью x.

Пример 2. Решим неравенство $3x^2 - 11x - 4 > 0$.

▶ График функции $y = 3x^2 - 11x - 4$ — парабола, ветви которой направлены вверх.

Для того чтобы выяснить, пересекает ли парабола ось x и в каких точках, решим уравнение

$$3x^2 - 11x - 4 = 0.$$

Это уравнение имеет корни

$$x_1 = -\frac{1}{3},\ x_2 = 4.$$

Покажем схематически, как расположена парабола в координатной плоскости (рис. 42). Из рисунка видно, что данное неравенство верно, если x принадлежит промежутку $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right)$ или промежутку $(4; +\infty)$, т. е. множеством решений неравенства является объединение промежутков $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right)$ и $(4; +\infty)$.

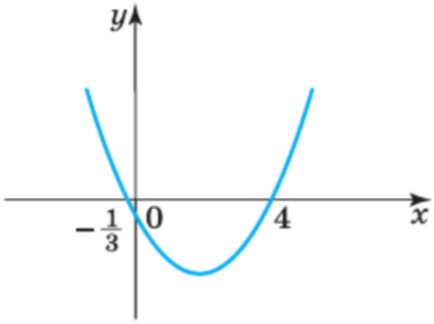


Рис. 42

Ответ: $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right) \cup (4; +\infty)$. ◁

Пример 3. Решим неравенство $-\frac{1}{4}x^2 + 2x - 4 < 0$.

▶ Рассмотрим функцию $y = -\frac{1}{4}x^2 + 2x - 4$.

Её графиком является парабола, ветви которой направлены вниз.

Выясним, как расположен график относительно оси x. Решим для этого уравнение $-\frac{1}{4}x^2 + 2x - 4 = 0$.

Это уравнение имеет единственный корень $x = 4$. Значит, парабола касается оси x.

Изобразив схематически параболу (рис. 43), найдём, что функция принимает отрицательные значения при любом x, кроме 4.

Ответ: $(-\infty; 4) \cup (4; +\infty)$. ◁

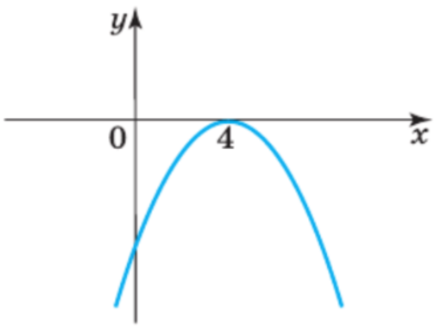


Рис. 43

Пример 4. Решим неравенство $x^2 - 3x + 4 > 0$.

▶ Графиком функции $y = x^2 - 3x + 4$ является парабола, ветви которой направлены вверх.

Чтобы выяснить, как расположена парабола относительно оси x, решим уравнение

$$x^2 - 3x + 4 = 0.$$

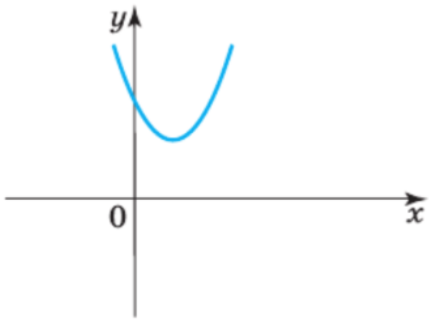


Рис. 44

Находим, что

$$D = 9 - 4 \cdot 4 = -7 < 0,$$

т. е. это уравнение не имеет корней. Значит, парабола не имеет общих точек с осью x.

Показав схематически расположение параболы в координатной плоскости (рис. 44), найдём, что функция принимает положительные значения при любом x.

Ответ: $(-\infty; +\infty)$. ◁

Итак, для решения неравенств вида

$$ax^2 + bx + c > 0 \text{ и } ax^2 + bx + c < 0$$

поступают следующим образом:

1) находят дискриминант квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$ и выясняют, имеет ли трёхчлен корни;
2) если трёхчлен имеет корни, то отмечают их на оси x и через отмеченные точки проводят схематически параболу, ветви которой направлены вверх при $a > 0$ или вниз при $a < 0$; если трёхчлен не имеет корней, то схематически изображают параболу, расположенную в верхней полуплоскости при $a > 0$ или в нижней при $a < 0$;
3) находят на оси x промежутки, для которых точки параболы расположены выше оси x (если решают неравенство $ax^2 + bx + c > 0$) или ниже оси x (если решают неравенство $ax^2 + bx + c < 0$).

Упражнения

264. Решите неравенство:

а) $x^2 + 2x - 48 < 0$;
б) $2x^2 - 7x + 6 > 0$;
в) $-x^2 + 2x + 15 > 0$;
г) $-5x^2 + 11x - 6 > 0$;
д) $4x^2 - 12x + 9 > 0$;
е) $25x^2 + 30x + 9 < 0$;
ж) $-10x^2 + 9x > 0$;
з) $-2x^2 + 7x < 0$.

265. Найдите множество решений неравенства:

а) $2x^2 + 3x - 5 \geqslant 0$; б) $-6x^2 + 6x + 36 \geqslant 0$; в) $-x^2 + 5 \leqslant 0$.

266. Решите неравенство:

а) $2x^2 + 13x - 7 > 0$; г) $-2x^2 - 5x + 18 \leqslant 0$;
б) $-9x^2 + 12x - 4 < 0$; д) $3x^2 - 2x > 0$;
в) $6x^2 - 13x + 5 \leqslant 0$; е) $8 - x^2 < 0$.

267. Найдите, при каких значениях x трёхчлен:

а) $2x^2 + 5x + 3$ принимает положительные значения;
б) $-x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{36}$ принимает отрицательные значения.

268. Решите неравенство:

а) $x^2 < 16$; в) $0{,}2x^2 > 1{,}8$; д) $3x^2 < -2x$;
б) $x^2 \geqslant 3$; г) $-5x^2 \leqslant x$; е) $7x < x^2$.

269. Решите неравенство:

а) $0{,}01x^2 \leqslant 1$; в) $4x \leqslant -x^2$; д) $5x^2 > 2x$;
б) $\frac{1}{2}x^2 > 12$; г) $\frac{1}{3}x^2 > \frac{1}{9}$; е) $-0{,}3x < 0{,}6x^2$.

270. При каких значениях b уравнение имеет два корня:

а) $3x^2 + bx + 3 = 0$; б) $x^2 + 2bx + 15 = 0$?

271. При каких значениях t уравнение не имеет корней:

а) $2x^2 + tx + 18 = 0$; б) $4x^2 + 4tx + 9 = 0$?

272. Найдите множество решений неравенства:

а) $3x^2 + 40x + 10 < -x^2 + 11x + 3$;
б) $9x^2 - x + 9 \geqslant 3x^2 + 18x - 6$;
в) $2x^2 + 8x - 111 < (3x - 5)(2x + 6)$;
г) $(5x + 1)(3x - 1) > (4x - 1)(x + 2)$.

273. Решите неравенство:

а) $2x(3x - 1) > 4x^2 + 5x + 9$;
б) $(5x + 7)(x - 2) < 21x^2 - 11x - 13$.

274. Найдите область определения функции:

а) $y = \sqrt{12x - 3x^2}$; б) $y = \frac{1}{\sqrt{2x^2 - 12x + 18}}$.

275. (*Для работы в парах.*) Докажите, что при любом значении переменной верно неравенство:

а) $7x^2 - 10x + 7 > 0$; г) $\frac{1}{4}x^2 - 8x + 64 \geqslant 0$;
б) $-6y^2 + 11y - 10 < 0$; д) $-9y^2 + 6y - 1 \leqslant 0$;
в) $4x^2 + 12x + 9 \geqslant 0$; е) $-5x^2 + 8x - 5 < 0$.

1) Обсудите, при каком условии неравенство $ax^2 + bx + c > 0$, где a, b, c — некоторые числа, верно при любом значении переменной x. Укажите аналогичные условия для неравенства $ax^2 + bx + c < 0$.

2) Распределите, кто выполняет задания а), в), д), а кто — задания б), г), е), и выполните их.

3) Проверьте друг у друга, правильно ли выполнено доказательство неравенств, и исправьте ошибки, если они допущены.

276. Какое из данных выражений принимает положительное значение при любом значении y?

1. $(y - 2)(y - 3) - 4$ 2. $(5 - y)(1 - y) + 4$
3. $(5 - y)(1 - y) + 10$ 4. $(y - 8)(y - 7) - 60$

277. Докажите, что:

а) $x^2 + 7x + 1 > -x^2 + 10x - 1$ при любом x;

б) $-2x^2 + 10x < 18 - 2x$ при $x \neq 3$.

278. Одна сторона прямоугольника на 7 см больше другой. Какой может быть меньшая сторона, если площадь прямоугольника не превосходит 60 см^2?

279. Длина прямоугольника на 5 см больше ширины. Какую ширину должен иметь прямоугольник, чтобы его площадь была больше 36 см^2?

280. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} x^2 - 2x - 8 < 0, \\ x^2 - 9 < 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3x^2 + x - 2 \leqslant 0, \\ x^2 + 4x - 12 \leqslant 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x^2 - 13x + 6 < 0, \\ x^2 - 4x > 0; \end{cases}$ д) $\begin{cases} 2x^2 + 4x + 15 \geqslant 0, \\ x^2 - 9x + 8 \leqslant 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2 - 6x - 16 > 0, \\ x^2 + 2x - 120 < 0; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 2x^2 + 5x - 3 < 0, \\ 3x^2 + x + 11 < 0. \end{cases}$

281. Укажите все целые значения x, принадлежащие области определения функции:

а) $y = \sqrt{25 - x^2} + \sqrt{9x - x^2 - 14}$;

б) $y = \sqrt{8x - x^2 - 12} + \sqrt{16 - x^2}$.

П

282. Функция задана формулой $y = \dfrac{0{,}5x - 2}{3}$. Не выполняя построения, найдите координаты точек пересечения её графика с осью x; с осью y. Является ли эта функция возрастающей или убывающей?

283. Решите уравнение:

а) $y^4 - 24y^2 - 25 = 0$; б) $x^4 - 9x^2 + 18 = 0$.

284. Слиток массой 3 кг, содержащий 80% олова и 20% свинца, сплавили с куском олова, после чего процентное содержание олова в слитке составило 94%. Сколько олова добавили в слиток?

17. Решение неравенств методом интервалов

Рассмотрим функцию $f(x) = (x + 2)(x - 3)(x - 5)$.

Областью определения этой функции является множество всех чисел. Нулями функции служат числа -2, 3, 5. Они разбивают область определения функции на промежутки $(-\infty; -2)$, $(-2; 3)$, $(3; 5)$ и $(5; +\infty)$ (рис. 45, *а*).

Выясним, каковы знаки этой функции на каждом из указанных промежутков.

Рис. 45

Выражение $(x + 2)(x - 3)(x - 5)$ представляет собой произведение трёх множителей. Знак каждого из этих множителей в рассматриваемых промежутках указан в таблице.

	$(-\infty; -2)$	$(-2; 3)$	$(3; 5)$	$(5; +\infty)$
$x + 2$	−	+	+	+
$x - 3$	−	−	+	+
$x - 5$	−	−	−	+

Отсюда ясно, что:

если $x \in (-\infty; -2)$, то $f(x) < 0$;

если $x \in (-2; 3)$, то $f(x) > 0$;

если $x \in (3; 5)$, то $f(x) < 0$;

если $x \in (5; +\infty)$, то $f(x) > 0$.

Мы видим, что на каждом из промежутков $(-\infty; -2)$, $(-2; 3)$, $(3; 5)$, $(5; +\infty)$ функция сохраняет знак, а при переходе через точки -2, 3 и 5 её знак изменяется (рис. 45, *б*).

Вообще пусть функция задана формулой

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n),$$

где x — переменная, а x_1, x_2, ..., x_n — не равные друг другу числа. Числа x_1, x_2, ..., x_n являются нулями функции. На каждом из промежутков, на которые область определения разбивается нулями функции, знак функции сохраняется, а при переходе через нуль её знак изменяется.

Это свойство используется для решения неравенств вида

$$\begin{aligned}(x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n) > 0,\\ (x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n) < 0,\end{aligned} \qquad (1)$$

где x_1, x_2, ..., x_n — не равные друг другу числа.

Пример 1. Решим неравенство $(x + 6)(x + 1)(x - 4) < 0$.

▶ Это неравенство является неравенством вида (1), так как в левой части записано произведение $(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$, где $x_1 = -6$, $x_2 = -1$ и $x_3 = 4$. Для его решения удобно воспользоваться рассмотренным выше свойством чередования знаков функции.

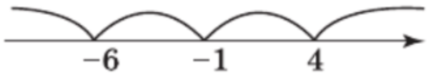
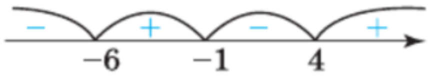
а)  б) 

Рис. 46

Отметим на координатной прямой нули функции

$$f(x) = (x + 6)(x + 1)(x - 4)$$

(рис. 46, *а*). Найдём знаки этой функции на каждом из промежутков $(-\infty; -6)$, $(-6; -1)$, $(-1; 4)$ и $(4; +\infty)$. Для этого достаточно знать, какой знак имеет функция на одном из этих промежутков, и, пользуясь свойством чередования знаков, определить знаки на всех остальных промежутках. При этом удобно начинать с крайнего справа промежутка $(4; +\infty)$, так как на нём значения функции $f(x) = (x + 6)(x + 1)(x - 4)$ заведомо положительны. Это объясняется тем, что при значениях x, расположенных правее всех нулей функции, каждый из множителей $x + 6$, $x + 1$ и $x - 4$ положителен. Используя свойство чередования знаков, определим, двигаясь по координатной прямой справа налево, знаки данной функции на каждом из остальных промежутков (рис. 46, *б*).

Из рисунка видно, что множеством решений неравенства является объединение промежутков $(-\infty; -6)$ и $(-1; 4)$.

Ответ: $(-\infty; -6) \cup (-1; 4)$. ◁

Рассмотренный способ решения неравенств называют *методом интервалов.*

Приведём примеры решения неравенств методом интервалов.

Пример 2. Решим неравенство $x(0{,}5 - x)(x + 4) < 0$.

▶ Приведём данное неравенство к виду (1). Для этого в двучлене $0{,}5 - x$ вынесем за скобку множитель -1. Получим

$$-x(x - 0{,}5)(x + 4) < 0,$$

отсюда

$$x(x - 0{,}5)(x + 4) > 0.$$

Мы получили неравенство вида (1), равносильное данному. Отметим на координатной прямой нули функции

$$f(x) = x(x - 0{,}5)(x + 4)$$

(рис. 47, *а*). Покажем знаком «плюс», что на крайнем справа промежутке функция принимает положительное значение, а затем, двигаясь справа налево, укажем знак функции на каждом из промежутков (рис. 47, *б*). Получим, что множеством решений неравенства является объединение промежутков $(-4; 0)$ и $(0{,}5; +\infty)$.

Рис. 47

О т в е т: $(-4;\ 0) \cup (0{,}5;\ +\infty)$. ◁

П р и м е р 3. Решим неравенство $(5x + 1)(5 - x) \geqslant 0$.

▶ Приведём неравенство к виду (1). Для этого в первом двучлене вынесем за скобки множитель 5, а во втором −1, получим

$$-5\left(x + \frac{1}{5}\right)(x - 5) \geqslant 0.$$

Разделив обе части неравенства на −5, будем иметь

$$\left(x + \frac{1}{5}\right)(x - 5) \leqslant 0.$$

Отметим на координатной прямой нули функции

$$f(x) = \left(x + \frac{1}{5}\right)(x - 5),$$

т. е. точки $-\frac{1}{5}$ и 5, и укажем знаки функции на образовавшихся промежутках (рис. 48). Мы видим, что множество решений неравенства состоит из чисел $-\frac{1}{5}$ и 5 и чисел, заключённых между ними, т. е. представляет собой промежуток $\left[-\frac{1}{5}; 5\right]$.

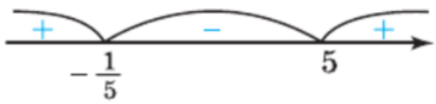


Рис. 48

О т в е т: $\left[-\frac{1}{5}; 5\right]$. ◁

Заметим, что данное неравенство можно решить иначе, используя свойства графика квадратичной функции.

П р и м е р 4. Решим неравенство $\frac{7-x}{x+2} < 0$.

▶ Так как при всех значениях x, при которых дробь $\frac{7-x}{x+2}$ имеет смысл, знак этой дроби совпадает со знаком произведения $(7 - x)(x + 2)$, то данное неравенство равносильно неравенству

$$(7 - x)(x + 2) < 0.$$

Приведя неравенство

$$(7 - x)(x + 2) < 0$$

к виду (1) и используя метод интервалов, найдём, что множеством решений этого неравенства, а значит, и исходного неравенства $\frac{7-x}{x+2} < 0$ является объединение промежутков $(-\infty; -2)$ и $(7; +\infty)$.

О т в е т: $(-\infty; -2) \cup (7; +\infty)$. ◁

П р и м е р 5. Решим неравенство $\frac{17-2x}{x-4} \geqslant 0$.

▶ Знак дроби $\frac{17-2x}{x-4}$ совпадает со знаком произведения $(17 - 2x)(x - 4)$ при всех значениях x, при которых дробь имеет смысл. Поэтому данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} (17-2x)(x-4) \geqslant 0, \\ x-4 \neq 0. \end{cases}$$

Неравенство $(17 - 2x)(x - 4) \geqslant 0$ приведём к виду

$$(x - 8{,}5)(x - 4) \leqslant 0.$$

Решив это неравенство методом интервалов и исключив из множества его решений число 4, найдём, что множеством решений исходного неравенства является промежуток $(4; 8{,}5]$.

О т в е т: $(4; 8{,}5]$. ◁

Упражнения

285. Решите неравенство, используя метод интервалов:

а) $(x + 8)(x - 5) > 0$;
б) $(x - 14)(x + 10) < 0$;
в) $(x - 3{,}5)(x + 8{,}5) \geqslant 0$;
г) $\left(x + \frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{1}{8}\right) \leqslant 0$.

286. Решите неравенство:

а) $(x + 25)(x - 30) < 0$;
б) $(x + 6)(x - 6) > 0$;
в) $\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{1}{5}\right) \leqslant 0$;
г) $(x + 0{,}1)(x + 6{,}3) \geqslant 0$.

287. Решите неравенство:

а) $(x-2)(x-5)(x-12)>0$;
б) $(x+7)(x+1)(x-4)<0$;
в) $x(x+1)(x+5)(x-8)>0$.

288. Найдите, при каких значениях x:

а) произведение $(x+48)(x-37)(x-42)$ положительно;
б) произведение $(x+0{,}7)(x-2{,}8)(x-9{,}2)$ отрицательно.

289. Решите неравенство:

а) $(x+9)(x-2)(x-15)<0$;
б) $x(x-5)(x+6)>0$;
в) $(x-1)(x-4)(x-8)(x-16)<0$.

290. Найдите множество решений неравенства:

а) $5(x-13)(x+24)<0$;
б) $-\left(x+\frac{1}{7}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)\geqslant 0$;
в) $(x+12)(3-x)>0$;
г) $(6+x)(3x-1)\leqslant 0$.

291. Решите неравенство:

а) $2(x-18)(x-19)>0$;
б) $-4(x+0{,}9)(x-3{,}2)<0$;
в) $(7x+21)(x-8{,}5)\leqslant 0$;
г) $(8-x)(x-0{,}3)\geqslant 0$.

292. Найдите область определения функции:

а) $y=\sqrt{(5-x)(x+8)}$;
б) $y=\sqrt{(x+12)(x-1)(x-9)}$.

293. При каких значениях x имеет смысл выражение:

а) $\sqrt{(2x+5)(x-17)}$;
б) $\sqrt{x(x+9)(2x-8)}$?

294. Решите неравенство:

а) $\frac{x-5}{x+6}<0$;
б) $\frac{1{,}4-x}{x+3{,}8}<0$;
в) $\frac{2x}{x-1{,}6}>0$;
г) $\frac{5x-1{,}5}{x-4}>0$;
д) $\frac{5x+1}{x-2}>0$;
е) $\frac{3x}{2x+9}<0$.

295. Решите неравенство:

а) $\frac{x-21}{x+7}<0$;
б) $\frac{x+4{,}7}{x-7{,}2}>0$;
в) $\frac{6x+1}{3+x}>0$;
г) $\frac{5x}{4x-12}<0$.

296. Найдите множество решений неравенства:

а) $\frac{x-1}{x-3}\geqslant 0$;
б) $\frac{x+6}{x-5}\leqslant 0$;
в) $\frac{2-x}{x}\geqslant 0$;
г) $\frac{3-2x}{x-1}\leqslant 0$;
д) $\frac{7x-2}{1-x}\geqslant 0$;
е) $\frac{1-11x}{2x-3}\leqslant 0$.

297. Решите неравенство:

а) $\dfrac{x-8}{x+4} > 2$; в) $\dfrac{7x-1}{x} > 5$;

б) $\dfrac{3-x}{x-2} < 1$; г) $\dfrac{6-2x}{x+4} > 3$.

298. Решите неравенство:

а) $\dfrac{5x+4}{x} < 4$; в) $\dfrac{x}{x-1} \geqslant 2$;

б) $\dfrac{6x+1}{x+1} > 1$; г) $\dfrac{3x-1}{x+2} \geqslant 1$.

П

299. Напишите уравнение прямой, которая:

а) проходит через начало координат и точку $A(0{,}6;\ -2{,}4)$;
б) пересекает оси координат в точках $B(0;\ 4)$ и $C(-2{,}5;\ 0)$.

300. Два сосуда были наполнены растворами соли, причём в первом сосуде содержалось на 1 л меньше раствора, чем во втором. Концентрация раствора в первом сосуде составляла 10%, а во втором — 20%. После того как растворы слили в третий сосуд, получили новый раствор, концентрация которого составила 16%. Сколько раствора было в каждом сосуде первоначально?

Контрольные вопросы и задания

1 На примере неравенств $3x^2 + 5x - 2 < 0$ и $x^2 + 2x + 6 > 0$ расскажите, как можно решить неравенство второй степени, используя свойства графика квадратичной функции.

2 На примере неравенства $(x - 5)(x + 7)(x + 9) < 0$ расскажите, как решают неравенства методом интервалов.

Для тех, кто хочет знать больше

18. Некоторые приёмы решения целых уравнений

При решении целых уравнений бывает полезна теорема о корне многочлена, которую мы примем без доказательства.

ТЕОРЕМА 1 о корне многочлена

Если число a является корнем многочлена

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n, \text{ где } a_0 \neq 0,$$

то этот многочлен можно представить в виде произведения $(x - a)\,P_1(x)$, где $P_1(x)$ — многочлен $(n - 1)$-й степени.

Эта теорема позволяет свести решение целого уравнения n-й степени, для которого известен один из корней, к решению уравнения $(n - 1)$-й степени, в частности от уравнения третьей степени перейти к квадратному.

Если целое уравнение с одной переменной с целыми коэффициентами имеет целый корень, то его можно найти, используя теорему о целых корнях целого уравнения.

ТЕОРЕМА 2 о целых корнях целого уравнения

Если уравнение

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n = 0,$$

в котором все коэффициенты — целые числа, причём свободный член отличен от нуля, имеет целый корень, то этот корень является делителем свободного члена.

● Пусть x_0 — целый корень данного уравнения. Тогда верно равенство

$$a_0x_0^n + a_1x_0^{n-1} + ... + a_{n-1}x_0 + a_n = 0.$$

Отсюда

$$a_n = -a_0x_0^n - a_1x_0^{n-1} - ... - a_{n-1}x_0,$$

$$a_n = x_0(-a_0x_0^{n-1} - a_1x_0^{n-2} - ... - a_{n-1}).$$

Число, записанное в этом равенстве в скобках, является целым, так как x_0 и все коэффициенты $-a_0$, $-a_1$, ..., $-a_{n-1}$ — целые числа. Значит, при делении a_n на x_0 получается целое число, т. е. x_0 — делитель свободного члена. ○

Приведём примеры решения целых уравнений с использованием указанных теорем.

Один из приёмов решения уравнения вида $P(x) = 0$, где $P(x)$ — многочлен третьей или более высокой степени, состоит, как известно, в разложении многочлена $P(x)$ на множители.

Пример 1. Решим уравнение

$$x^3 - 8x^2 + 13x - 2 = 0.$$

▶ Если это уравнение имеет целый корень, то в силу теоремы 2 он является делителем числа -2, т. е. равен одному из чисел $1,\ -1,\ 2,\ -2$. Проверка убеждает нас, что корнем уравнения является число 2. Значит, в силу теоремы 1 многочлен $x^3 - 8x^2 + 13x - 2$ можно представить в виде произведения $(x-2)\cdot P(x)$, где $P(x)$ — многочлен второй степени.
Для того чтобы найти многочлен $P(x)$, разделим многочлен $x^3 - 8x^2 + 13x - 2$ на двучлен $x - 2$. Деление многочленов выполним уголком:

$$
\begin{array}{r|l}
\underline{-\begin{array}{r} x^3 - 8x^2 + 13x - 2 \\ x^3 - 2x^2 \end{array}} & \begin{array}{l} x - 2 \\ \hline x^2 - 6x + 1 \end{array} \\
\underline{-\begin{array}{r} -6x^2 + 13x \\ -6x^2 + 12x \end{array}} & \\
\underline{-\begin{array}{r} x - 2 \\ x - 2 \end{array}} & \\
0 &
\end{array}
$$

Значит, исходное уравнение можно представить в виде

$$(x-2)(x^2 - 6x + 1) = 0.$$

Отсюда

$$x - 2 = 0 \text{ или } x^2 - 6x + 1 = 0.$$

Первое уравнение имеет единственный корень — число 2. Второе уравнение имеет два корня: $3-\sqrt{8};\ 3+\sqrt{8}$.

Ответ: $2;\ 3-\sqrt{8};\ 3+\sqrt{8}$. ◁

Ещё один приём, который используется при решении целых уравнений третьей и более высоких степеней, состоит во введении новой переменной.

Пример 2. Решим уравнение

$$2007(x^4 - 6x^2 + 9) + 2006(x^2 - 3) - 1 = 0.$$

▶ Имеем $2007(x^2-3)^2 + 2006(x^2-3) - 1 = 0$. Используем подстановку $y = x^2 - 3$. Получим квадратное уравнение

$$2007y^2 + 2006y - 1 = 0.$$

Применение формулы корней квадратного уравнения приводит здесь к громоздким вычислениям. Поступим иначе. Попытаемся найти целый корень уравнения, если он существует. По теореме 2 он является делителем числа -1, т. е. равен 1 или -1. Подставляя в уравнение числа 1 и -1, убеждаемся, что корнем уравнения является число -1. Второй корень квадратного уравнения найдём, используя теорему Виета. Так как $y_1 \cdot y_2 = -\frac{1}{2007}$ и $y_1 = -1$, то $y_2 = \frac{1}{2007}$.

Из равенств

$$x^2 - 3 = -1 \text{ и } x^2 - 3 = \frac{1}{2007}$$

найдём корни исходного уравнения:

$$x_1 = -\sqrt{2},\ x_2 = \sqrt{2},\ x_3 = -\sqrt{3\frac{1}{2007}},\ x_4 = \sqrt{3\frac{1}{2007}}.$$

Ответ: $-\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$; $-\sqrt{3\frac{1}{2007}}$; $\sqrt{3\frac{1}{2007}}$. ◁

Метод введения новой переменной находит применение при решении возвратных уравнений.

Возвратным уравнением называется уравнение вида

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0,$$

в котором коэффициенты членов уравнения, одинаково отстоящих от начала и конца, равны, т. е. $a_k = a_{n-k}$, где $k = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Рассмотрим пример решения возвратного уравнения четвёртой степени.

Пример 3. Решим уравнение

$$x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 5x + 1 = 0.$$

▶ Воспользуемся тем, что коэффициенты членов многочлена, записанного в левой части уравнения, одинаково удалённых от начала и конца, равны между собой.

Разделив обе части уравнения на x^2, получим равносильное ему уравнение

$$x^2 - 5x + 6 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} = 0.$$

Сгруппируем первый член с последним и второй с четвёртым, причём во второй сумме вынесем множитель -5 за скобки. Получим

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 6 = 0.$$

Введём новую переменную: $y = x + \frac{1}{x}$. Тогда

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = y^2.$$

Отсюда

$$x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = y^2,$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2.$$

Выполнив подстановку, получим

$$(y^2 - 2) - 5y + 6 = 0,$$

$$y^2 - 5y + 4 = 0.$$

Полученное квадратное уравнение имеет два корня: $y_1 = 1$ и $y_2 = 4$.
Значит,

$$x + \frac{1}{x} = 1 \text{ или } x + \frac{1}{x} = 4.$$

Решая эти уравнения, найдём, что первое из них не имеет корней, а второе имеет два корня: $x_1 = 2 - \sqrt{3}$ и $x_2 = 2 + \sqrt{3}$.
Значит, исходное возвратное уравнение имеет два корня: $2 - \sqrt{3}$ и $2 + \sqrt{3}$.
О т в е т: $2 - \sqrt{3}$; $2 + \sqrt{3}$. ◁

Иногда удаётся решить целое уравнение, воспользовавшись свойством возрастания или убывания функций.

П р и м е р 4. Решим уравнение $x^5 + x - 2 = 0$.

▶ Если данное уравнение имеет целый корень, то в силу теоремы 2 он является делителем числа -2. Проверка убеждает нас, что корнем уравнения является число 1. Покажем, что других корней это уравнение не имеет. Для этого представим его в виде $x^5 = -x + 2$. Функция $y = x^5$ является возрастающей, а функция $y = -x + 2$ — убывающей. Значит, уравнение $x^5 + x - 2 = 0$ имеет единственный корень. Это хорошо видно на рисунке 49, на котором схематически изображены графики функций $y = x^5$ и $y = -x + 2$.
Итак, исходное уравнение имеет единственный корень — число 1.
О т в е т: 1. ◁

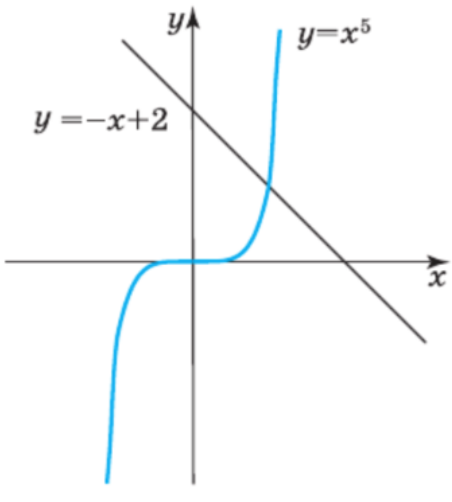


Рис. 49

П р и м е р 5. Решим уравнение $(x^2 - 9)^2 + (x^2 - 2x - 3)^2 = 0$.

▶ Раскрытие скобок привело бы к уравнению 4-й степени. Поэтому будем рассуждать иначе.

Левая часть уравнения — сумма двух квадратов, поэтому корнем уравнения может быть то и только то число, при котором

$$(x^2 - 9)^2 = 0 \text{ И } (x^2 - 2x - 3)^2 = 0.$$

Из уравнения $(x^2 - 9)^2 = 0$ получим: $x^2 - 9 = 0$; $x = 3$ и $x = -3$.

Из уравнения $(x^2 - 2x - 3)^2 = 0$ получим: $x^2 - 2x - 3 = 0$; $x = 3$ и $x = -1$.

Значит, оба слагаемых в левой части уравнения одновременно обращаются в нуль только при $x = 3$.

Таким образом, уравнение имеет единственный корень, равный 3.

Запись решения может быть такой: $\begin{cases} x^2 - 9 = 0, \\ x^2 - 2x - 3 = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 3, \\ x = -3, \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x = 3, \\ x = -1. \end{array}\right. \end{cases}$

Ответ: 3. ◁

Упражнения

301. Из данных чисел

$$1,\ -1,\ 2,\ -2,\ 3,\ -3,\ 4,\ -4,\ 7,\ -7$$

выберите те, которые являются корнями уравнения

$$x^4 - x^3 - 51x^2 + 49x + 98 = 0.$$

Какие из них можно исключить сразу, не подставляя их в уравнение?

302. Решите уравнение:

а) $x^3 - 4x^2 + 3x + 2 = 0$;

б) $x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12 = 0$.

303. При каких значениях p равны значения двучленов:

а) $p^3 - p^2$ и $8p - 12$; б) $p^3 - 3p$ и $p^2 + 1$?

304. Найдите координаты точек пересечения графика функции $y = x^3 + 4x^2 + x - 6$ с осями координат.

305. Известно, что график функции $y = x^4 - ax^3 - 10x^2 + 80x - 96$ пересекает ось x в точке (4; 0). Найдите a и координаты других точек пересечения графика функции с осью x.

306. Решите уравнение:

а) $718x^4 - 717x^2 - 1 = 0$; б) $206x^4 - 205x^2 - 1 = 0$.

307. Решите уравнение, используя введение новой переменной:

а) $(x^2 + 8x)^2 - 4(x + 4)^2 = 256$;

б) $2(x^2 - 6x)^2 - 120(x - 3)^2 = 8$.

308. Решите уравнение:

а) $x^3 + 11x - 108 = 0$; б) $x^5 + 6x + 44 = 0$.

309. Из данных уравнений выберите то, которое имеет один и только один целый корень.

1. $x^3 - x + 3 = 0$ 2. $x^4 + 5x^2 + 4 = 0$
3. $x^4 + x^2 - 20 = 0$ 4. $x^3 - 5x + 4 = 0$

310. Решите возвратное уравнение

$$10x^4 - 77x^3 + 150x^2 - 77x + 10 = 0.$$

311. Докажите, что если число m является корнем уравнения $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$, где a, b, c — некоторые числа, причём $a \neq 0$, то обратное ему число также является корнем этого уравнения.

312. Решите уравнение:

а) $(x^2 - 4x - 12)^2 + (x^2 - 10x + 24)^2 = 0$;

б) $|x^2 + 15x + 50| + |x^2 + 7x + 10| = 0$.

313. Найдите корень уравнения $x^2 - 13x - \sqrt{5-x} = -\sqrt{5-x} - 30$. Если оно имеет два корня, то в ответе укажите больший из них.

314. Найдите корень уравнения $40 + \sqrt{x+2} = x^2 + 6x + \sqrt{x+2}$. Если оно имеет два корня, то в ответе укажите меньший из них.

Дополнительные упражнения к главе III

К параграфу 5

315. Решите уравнение:

а) $x^5 - x^3 = 0$; в) $0,5x^3 = 32x$;

б) $x^6 = 4x^4$; г) $0,2x^4 = 4x^2$.

316. Найдите корни уравнения:

а) $(a - 2)(a + 2)(a^2 + 4) = 25a^2 - 16$;

б) $(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1) = 6x^2 - 1$.

317. Решите уравнение:

а) $x^3 - x^2 - 4(x - 1)^2 = 0$; в) $5x^3 - 19x^2 - 38x + 40 = 0$;

б) $2y^3 + 2y^2 - (y + 1)^2 = 0$; г) $6x^3 - 31x^2 - 31x + 6 = 0$.

318. Решите уравнение:

а) $x^3 + 2x^2 + 3x + 2 = 0$;

б) $x^3 + 4x^2 - 3x - 6 = 0$.

319. Решите уравнение $x^3 = x$ двумя способами: графическим и аналитическим.

320. С помощью графиков выясните, сколько решений может иметь уравнение $x^3 + ax + b = 0$ при различных значениях a и b.

321. Решите уравнение, используя введение новой переменной:
а) $(x^2 + 6x)^2 - 5(x^2 + 6x) = 24$;
б) $(x^2 - 2x - 5)^2 - 2(x^2 - 2x - 5) = 3$;
в) $(x^2 + 3x - 25)^2 - 2(x^2 + 3x - 25) = -7$;
г) $(y + 2)^4 - (y + 2)^2 = 12$;
д) $(x^2 + 2x)(x^2 + 2x + 2) = 3$;
е) $(x^2 - x - 16)(x^2 - x + 2) = 88$;
ж) $(2x^2 + 7x - 8)(2x^2 + 7x - 3) - 6 = 0$.

322. Решите уравнение:
а) $y^7 - y^6 + y = 1$; б) $y^7 + y^6 - 27y = 27$.

323. Решите уравнение:
а) $2x^7 + x^6 + 2x^4 + x^3 + 2x + 1 = 0$;
б) $x^7 - 2x^6 + 2x^4 - 4x^3 + x - 2 = 0$.

324. Найдите сумму корней биквадратного уравнения:
а) $x^4 - 9x^2 + 18 = 0$; в) $4x^4 - 12x^2 + 1 = 0$;
б) $x^4 + 3x^2 - 10 = 0$; г) $12y^4 - y^2 - 1 = 0$.

325. Является ли число:
а) $\sqrt{3 + \sqrt{5}}$ корнем биквадратного уравнения $x^4 - 6x^2 + 3 = 0$;
б) $\sqrt{5 - \sqrt{2}}$ корнем биквадратного уравнения $x^4 - 10x^2 + 23 = 0$?

326. Разложите на множители трёхчлен:
а) $x^4 - 20x^2 + 64$; г) $x^4 - 3x^2 - 4$;
б) $x^4 - 17x^2 + 16$; д) $9x^4 - 10x^2 + 1$;
в) $x^4 - 5x^2 - 36$; е) $4x^4 - 17x^2 + 4$.

327. Решите уравнение:
а) $\dfrac{3y^3 + 12y^2 - 27y - 108}{y^2 - 16} = 0$; б) $\dfrac{y^3 + 6y^2 - y - 6}{y^3 - 36y} = 0$.

328. При каких значениях x разность дробей $\dfrac{1}{x+2}$ и $\dfrac{1}{x+4}$ равна разности дробей $\dfrac{1}{x+8}$ и $\dfrac{1}{x+20}$?

329. Решите уравнение, используя выделение целой части из дроби:

а) $\dfrac{x^2-5x+3}{x-5}-\dfrac{x^2+5x+1}{x+5}=\dfrac{1}{4}$;

б) $\dfrac{x^2+6x+10}{x+3}-\dfrac{x^2-6x+7}{x-3}=7\dfrac{1}{8}$.

330. Найдите корни уравнения:

а) $\dfrac{1}{x^2-6x+8}-\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{10}{x^2-4}=0$;

б) $\dfrac{3}{x^2-x-6}+\dfrac{3}{x+2}=\dfrac{7}{x^2-9}$.

331. Решите уравнение

$$\frac{1}{x^3-x^2+x-1}+\frac{4x^2+21}{x^3+x^2+x+1}=\frac{4x^3-3x^2+14x-4}{x^4-1}.$$

332. Найдите корни уравнения:

а) $x^2=\dfrac{7x-4}{4x-7}$;   б) $x^2=\dfrac{5x-3}{3x-5}$.

333. Решите уравнение, обозначив одно из слагаемых через t, а другое через $\dfrac{1}{t}$:

а) $\dfrac{x^2+1}{x}+\dfrac{x}{x^2+1}=2\dfrac{1}{2}$;   б) $\dfrac{x^2+2}{3x-2}+\dfrac{3x-2}{x^2+2}=2\dfrac{1}{6}$.

334. Решите уравнение, используя подстановку $y=x^2$:

а) $\dfrac{x^4}{x^2-2}+\dfrac{1-4x^2}{2-x^2}+4=0$;

б) $\dfrac{x^2+3}{x^2+1}+\dfrac{2}{x^2-4}+\dfrac{10}{x^4-3x^2-4}=0$.

335. Решите уравнение:

а) $\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)^2-16\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)^2=15$;   б) $\left(\dfrac{x+3}{x-5}\right)^2-9\left(\dfrac{x-5}{x+3}\right)^2=8$.

336. Решите уравнение, используя введение новой переменной:

а) $2\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)-\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=2$;   б) $9x^2-18x+\dfrac{9}{x^2}-\dfrac{18}{x}=22$.

337. При каких значениях a сумма чисел a и $\frac{1}{a}$ в $3\frac{1}{4}$ раза меньше суммы их кубов?

338. Решите уравнение:

а) $x^3 + \frac{1}{x^3} = 22\left(x + \frac{1}{x}\right)$; б) $x^3 - \frac{1}{x^3} = 19\left(x - \frac{1}{x}\right)$.

К параграфу 6

339. Решите неравенство:

а) $x^2 - 5x - 50 < 0$; г) $8p^2 + 2p \geqslant 21$;
б) $-m^2 - 8m + 9 \geqslant 0$; д) $12x - 9 \leqslant 4x^2$;
в) $3y^2 + 4y - 4 > 0$; е) $-9x^2 < 1 - 6x$.

340. Докажите, что при любом значении x верно неравенство:

а) $2(x + 1)(x - 3) > (x + 5)(x - 7)$;
б) $\frac{1}{4}(x + 5)(x - 7) \leqslant (x + 2)(x - 4)$.

341. Найдите область определения функции:

а) $y = \frac{1}{\sqrt{144 - 9x^2}}$; б) $y = \frac{\sqrt{16 - 24x + 9x^2}}{x + 2}$.

342. При каких значениях a уравнение $(a + 2)x^2 + 8x + a - 4 = 0$ имеет два корня?

343. При каких значениях b уравнение $(b - 1)x^2 + 6x + b - 3 = 0$ не имеет корней?

344. При каких значениях c не имеет корней уравнение:

а) $x^4 - 12x^2 + c = 0$; б) $x^4 + cx^2 + 100 = 0$?

345. (*Задача-исследование.*) При каких значениях k биквадратное уравнение $x^4 - 13x^2 + k = 0$:

а) имеет четыре корня;
б) имеет два корня;
в) не имеет корней?

1) Обозначьте x^2 через y. Выясните, при каких значениях k полученное квадратное уравнение имеет два корня; имеет один корень; не имеет корней.
2) Укажите знаки корней квадратного уравнения с переменной y, если корни существуют.
3) Сделайте вывод о числе корней заданного уравнения в зависимости от значения k.

346. Найдите общие решения неравенств

$$x^2 + 6x - 7 \leqslant 0 \text{ и } x^2 - 2x - 15 \leqslant 0.$$

347. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} 4x^2 - 27x - 7 > 0, \\ x > 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} -3x^2 + 17x + 6 < 0, \\ x < 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x + 1 < 0, \\ 2x^2 - 18 > 0; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x - 4 > 0, \\ 3x^2 - 15x < 0. \end{cases}$

348. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} x^2 + x - 6 < 0, \\ -x^2 + 2x + 3 > 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2 + 4x - 5 > 0, \\ x^2 - 2x - 8 < 0. \end{cases}$

349. Решите неравенство:

а) $(x + 1{,}2)(6 - x)(x - 4) > 0$;

б) $\left(\frac{1}{3} - x\right)\left(\frac{1}{2} - x\right)\left(\frac{1}{7} - x\right) < 0$;

в) $(x + 0{,}6)(1{,}6 + x)(1{,}2 - x) > 0$;

г) $(1{,}7 - x)(1{,}8 + x)(1{,}9 - x) < 0$.

350. При каких значениях x произведение $(3x - 5)(x + 4)(2 - x)$:

а) равно нулю; б) положительно; в) отрицательно?

351. Решите неравенство:

а) $(18x - 36)(x - 7) > 0$;

б) $(x - 7{,}3)(9{,}8 - x) > 0$;

в) $(x + 0{,}8)(4 - x)(x - 20) < 0$;

г) $(10x + 3)(17 - x)(x - 5) \geqslant 0$.

352. Решите неравенство, разложив его левую часть на множители:

а) $(x^2 - 16)(x + 17) > 0$;

б) $\left(x - \frac{2}{3}\right)(x^2 - 121) < 0$;

в) $x^3 - 25x < 0$;

г) $x^3 - 0{,}01x > 0$;

д) $(x^2 - 9)(x^2 - 1) > 0$;

е) $(x^2 - 15x)(x^2 - 36) < 0$.

353. Решите неравенство:

а) $(x^2 + 17)(x - 6)(x + 2) < 0$;

б) $(2x^2 + 1)x(x - 4) > 0$;

в) $(x - 1)^2(x - 24) < 0$;

г) $(x + 7)(x - 4)^2(x - 21) > 0$.

354. Найдите область определения функции:

а) $y = \dfrac{4}{\sqrt{(3x - 1)(6x + 1)}}$;

б) $y = \dfrac{7}{\sqrt{(11x + 2)(x - 4)}}$.

355. Равносильны ли неравенства:

а) $\dfrac{x-3}{x+1} \geqslant 0$ и $(x-3)(x+1) \geqslant 0$;

б) $\dfrac{x+5}{x-8} \leqslant 0$ и $(x+5)(x-8) \leqslant 0$?

356. Решите неравенство:

а) $\dfrac{x-8}{x+4} > 0$; в) $\dfrac{x+1}{3-x} \geqslant 0$; д) $\dfrac{2x-4}{3x+3} \leqslant 0$;

б) $\dfrac{x+16}{x-11} < 0$; г) $\dfrac{6-x}{x-4} \leqslant 0$; е) $\dfrac{5x-1}{2x+3} \geqslant 0$.

357. Решите неравенство:

а) $\dfrac{6x+2}{x+4} < 5$; в) $\dfrac{3-2x}{3x+2} \leqslant 1$;

б) $\dfrac{5x+8}{x} > 1$; г) $\dfrac{5x-4}{x+8} \geqslant 15$.

Глава IV УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

В этой главе в центре внимания системы уравнений с двумя переменными, в которых одно или оба уравнения второй степени. Вы знаете, что если в системе есть уравнение первой степени, то её можно будет решить способом подстановки. Если же система составлена из двух уравнений второй степени, то найти её решение бывает затруднительно. Лишь в редких случаях это удаётся сделать, используя графический способ или алгебраический — подстановки или сложения. Вам предлагается более широкий круг текстовых задач, которые вы сможете решить с помощью уравнения или систем уравнений второй степени. Советуем обратить внимание на имеющие важное прикладное значение задачи на смеси и сплавы. Кроме того, вы встретитесь с неравенствами с двумя переменными. Это интересный материал, при изучении которого вы будете изображать на координатной плоскости множество решений неравенств с двумя переменными и их систем. При изучении этого материала вам окажется полезным использование компьютера.

§ 7 УРАВНЕНИЯ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ И ИХ СИСТЕМЫ

19. Уравнение с двумя переменными и его график

При изучении алгебры вы уже встречались с уравнениями с двумя переменными. Вот примеры таких уравнений:

$$y - 5x = 3, \; s = 5t^2, \; 2a + 3b = 0, \; \frac{u}{v} = -1.$$

Напомним, что *решением уравнения с двумя переменными называется пара значений переменных, обращающая это уравнение в верное равенство*. Например, пара (5; −4) является решением уравнения $x^2 - y^2 = 9$, а пара (4; −5) его решением не является. Заметим, что при использовании скобок для записи решений уравнения на первое место всегда ставят значение той переменной, которая по алфавиту идёт раньше.

Уравнению, содержащему две переменные, соответствует некоторое множество точек координатной плоскости — *график* этого уравнения.

Графиком уравнения с двумя переменными называется множество точек координатной плоскости, координаты которых обращают это уравнение в верное равенство.

В курсе ранее уже были рассмотрены некоторые уравнения с двумя переменными. Прежде всего это линейное уравнение, т. е. уравнение вида $ax + by = c$, где x и y — переменные, a, b, c — некоторые числа. Если хотя бы один из коэффициентов a и b при переменных отличен от нуля, то графиком линейного уравнения является прямая. На рисунке 50 изображены прямые — графики уравнений вида $ax + by = c$ при различных значениях коэффициентов a и b.

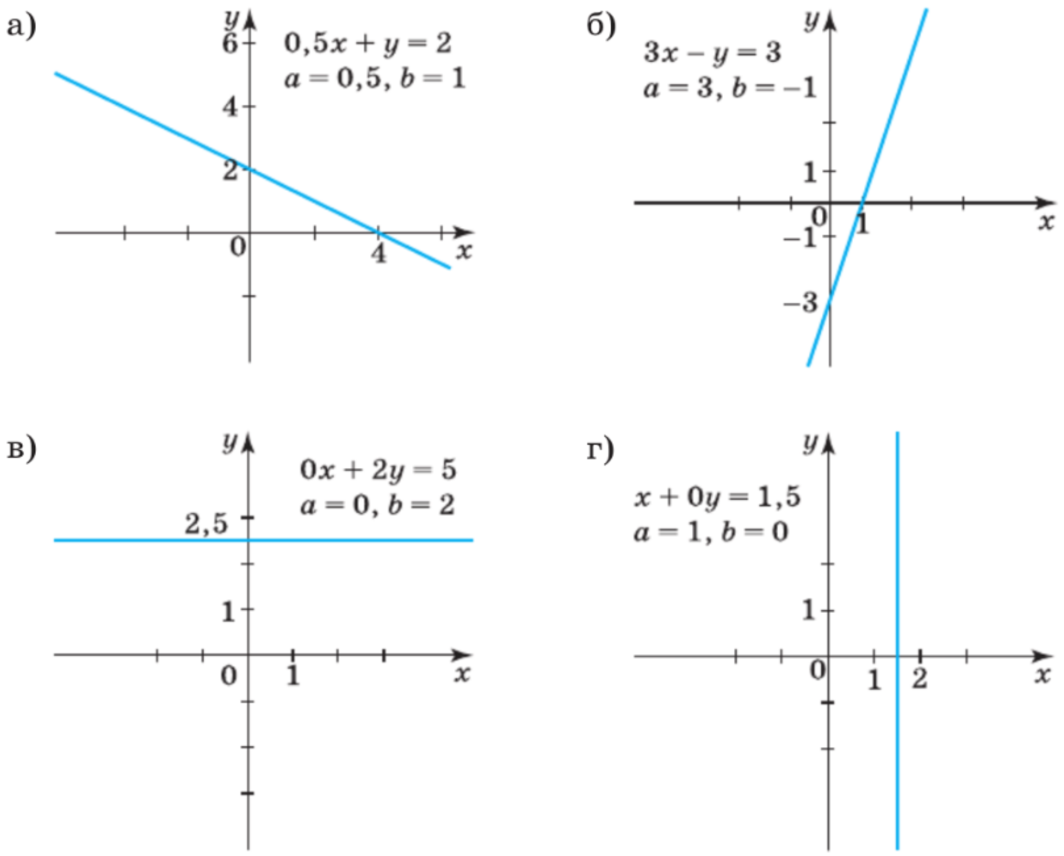


Рис. 50

Если коэффициенты при переменных одного знака оба положительные или оба отрицательные, то угловой коэффициент прямой, равный $-\frac{a}{b}$, отрицателен, и прямая при движении по оси x слева направо опускается вниз (рис. 50, *а*). Если же коэффициенты при переменных разных знаков, то угловой коэффициент прямой положителен и прямая поднимается вверх (рис. 50, *б*). Заметим, что если в уравнении $ax + by = c$ оба коэффициента a и b равны 0, то либо решением уравнения является любая пара значений x и y (его геометрический образ в этом случае — вся плоскость), либо уравнение решений не имеет.

Кроме линейного уравнения рассматривались также уравнения параболы $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ и гиперболы $xy = k$, $k \neq 0$.

Положение параболы в координатной плоскости определяется знаком коэффициента a и значением дискриминанта D трёхчлена $ax^2 + bx + c$. При $a > 0$ ветви параболы направлены вверх, а при $a < 0$ — вниз. Если $D > 0$, то парабола пересекает ось x. При $D = 0$ она касается оси x. При $D < 0$ парабола не имеет с осью x общих точек (рис. 51).

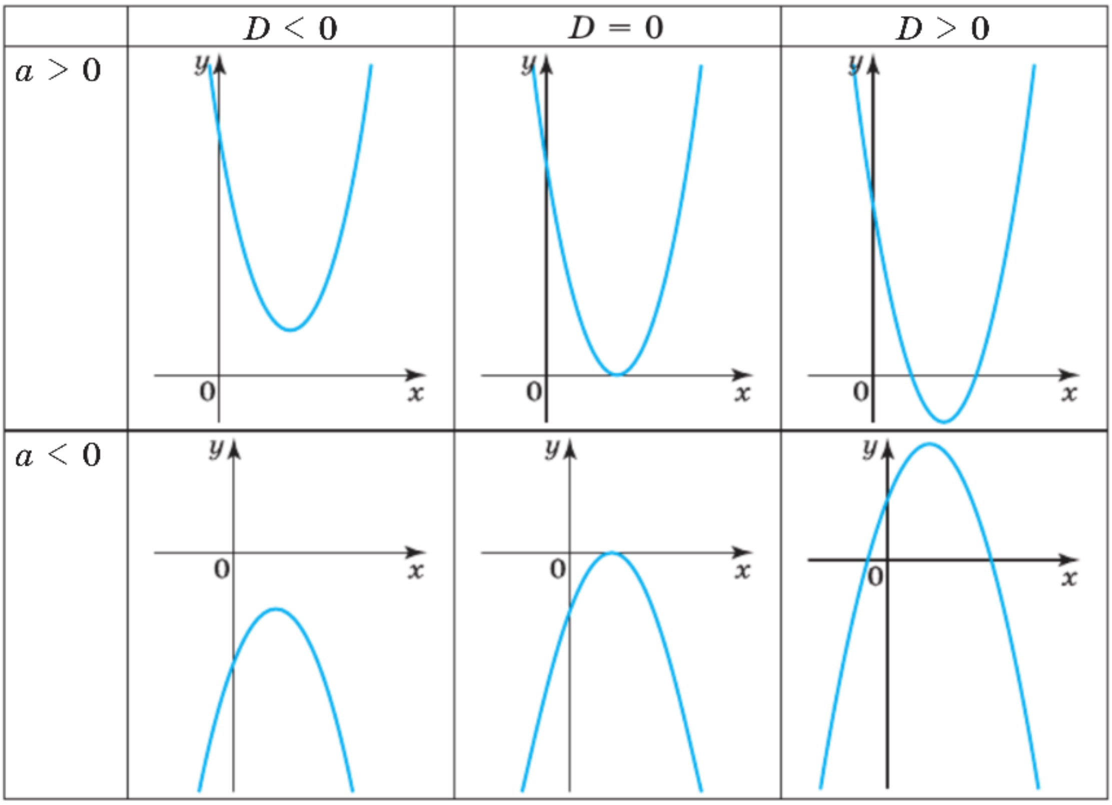


Рис. 51

Положение в координатной плоскости гиперболы $xy = k$ определяется знаком числа k. Если $k > 0$, то ветви гиперболы располагаются в первой и третьей координатных четвертях (рис. 52, *а*), если $k < 0$ — то во второй и четвёртой (рис. 52, *б*).

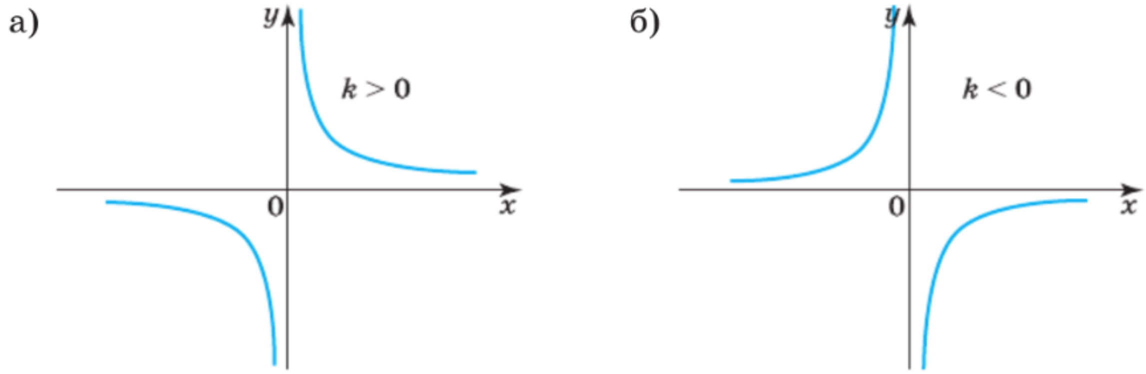


Рис. 52

С увеличением значений $|x|$ ветви гиперболы всё больше приближаются к оси абсцисс. Чем ближе к нулю значение аргумента x, тем меньше становится расстояние гиперболы от оси ординат. Но общих точек ни с осью x, ни с осью y гипербола не имеет.

Рассмотрим ещё одно уравнение второй степени, а именно уравнение $x^2 + y^2 = r^2$, где r — некоторое положительное число. Докажем, что графиком этого уравнения является окружность радиуса r с центром в начале координат (рис. 53).

Пусть точка $B(x;\ y)$ — произвольная точка этой окружности, не принадлежащая ни одной из координатных осей. Тогда из прямоугольного треугольника AOB имеем $AO^2 + AB^2 = BO^2$. Так как $AO = |x|$, $AB = |y|$, $BO = r$, то $|x|^2 + |y|^2 = r^2$, или, опустив знак модуля, получим

$$x^2 + y^2 = r^2. \qquad (1)$$

Легко убедиться, что если точка окружности находится на одной из координатных осей, то её координаты также удовлетворяют уравнению (1). Например, подставив в уравнение (1) координаты точки $C(0;\ -r)$, получим верное равенство $0^2 + (-r)^2 = r^2$.

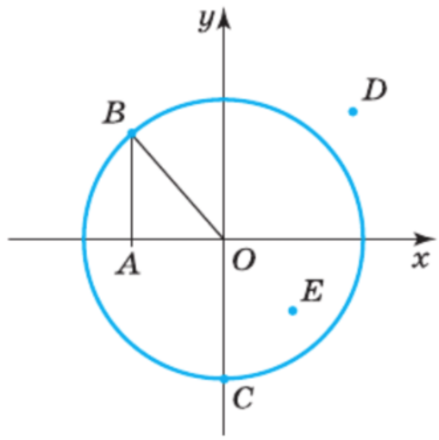


Рис. 53

Можно доказать, что если точка не принадлежит окружности, как, например, точка D или точка E, то её координаты не удовлетворяют уравнению (1).

Значит, равенство $x^2 + y^2 = r^2$ верно тогда и только тогда, когда точка с координатами x и y принадлежит окружности радиуса r с центром в начале координат. Отсюда следует, что графиком уравнения $x^2 + y^2 = r^2$ является окружность радиуса r с центром в начале координат.

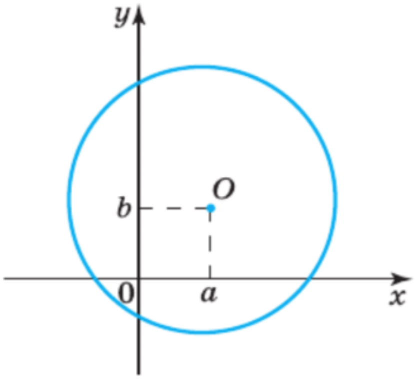


Рис. 54

Если каждую точку этой окружности перенести параллельно оси x на a единиц вправо при $a > 0$ или на $-a$ единиц влево при $a < 0$ и параллельно оси y на b единиц вверх при $b > 0$ или на $-b$ единиц вниз при $b < 0$, то получим окружность того же радиуса с центром в точке $O(a;\ b)$ (рис. 54). Уравнение этой окружности имеет вид $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

Упражнения

358. Среди данных уравнений найдите уравнения прямых, уравнения гипербол, уравнения парабол, уравнения окружностей. Есть ли среди заданных уравнений те, которые не относятся ни к одному из перечисленных видов?

а) $\frac{x + y}{3} = 1$; д) $x^2 - 2x - y = 0$; и) $2x = 3y$;
б) $x^2 + 0{,}5y = 4$; е) $xy = 6$; к) $8x + 3y = 0$.
в) $8 + 3xy = 4$; ж) $x^2 - y^2 = 0$;
г) $x^2 + y^2 - 16 = 0$; з) $x^2 + y^2 = 4$;

359. Найдите координаты точек пересечения графика данного уравнения с осью x и с осью y. Постройте этот график.

а) $x - 2y = 3$; в) $4x - 0{,}5y = 2$;
б) $y + 5x = -10$; г) $2 - 2x = y$.

360. Покажите схематически, в каких координатных четвертях располагается график линейного уравнения:

а) $5x - 8y = -2$; в) $3x + 4y = 25$; д) $15x - 18 = 0$;
б) $5x + 8y = 2$; г) $3x + 12y = -20$; е) $10y + 5 = 0$.

ПАФНУТИЙ ЛЬВОВИЧ ЧЕБЫШЁВ (1821—1894) — русский математик и механик, основатель знаменитой петербургской математической школы. Основные его труды относятся к теории чисел, математическому анализу, теории вероятностей и другим вопросам математики и смежных областей знаний.

361. Изобразив схематически графики линейных уравнений, выясните, в какой координатной четверти находятся точки их пересечения:

а) $\begin{cases} 2x+5y=8, \\ y-3x=5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x-2y=2, \\ x+0{,}5y=4. \end{cases}$

362. Составьте уравнение с двумя переменными, график которого изображён на рисунке 55.

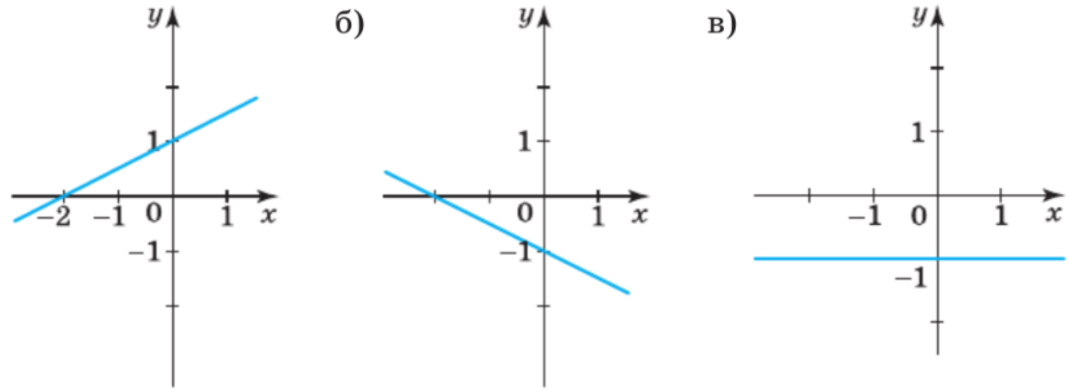


Рис. 55

363. Постройте график уравнения $(y-5x)(x+y+4)=0$.

364. Постройте график уравнения:

а) $2y-0{,}5x^2=0$; в) $4x^2=8-y$;

б) $x^2-3y=6$; г) $-5x^2+2y=3$.

365. Постройте график уравнения:

а) $3xy=12$; в) $2xy=-8$;

б) $\frac{1}{2}xy=6$; г) $\frac{1}{2}xy=-6$.

366. График уравнения $xy=k$ проходит через точку $(-2;\ 4)$. Найдите число k и постройте этот график.

367. Запишите уравнение окружности с центром в начале координат, зная, что она проходит через точку:

а) $A(-2;\ \sqrt{5})$; б) $B(3;\ 4)$; в) $C(8;\ 0)$.

368. Напишите уравнение окружности, зная, что её центр находится в точке $K(2;\ -5)$ и она проходит через точку:

а) $A(-1;\ -1)$; б) $B(-3;\ 7)$; в) $C(1;\ -4)$.

369. Докажите, что графиком уравнения $x^2+y^2-6(x-y)=7$ является окружность.

370. Что является графиком уравнения $\frac{(2x + y)^2}{4} - (x - 0,5y)^2 = 24$?

Выберите верный ответ.

1. Окружность
2. Гипербола
3. Парабола
4. Пара прямых

371. При каких значениях m графиком уравнения

$$(x - 4)^2 + (y + m)^2 = 15$$

является окружность, центр которой расположен в четвёртой координатной четверти?

372. При каких значениях r окружность $(x - 5)^2 + (y - 7)^2 = r^2$:

а) касается оси x; б) касается оси y?

373. Составьте уравнение окружности с центром в точке (3; 8), зная, что она касается:

а) оси x; б) оси y.

374. Постройте графики уравнений:

а) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 16$; в) $x^2 + (y - 3) = 25$;

б) $(x + 2)^2 + y^2 = 4$; г) $(x + 5)^2 + (y + 7)^2 = 49$.

375. Проходит ли через точку $A(0,1; -0,1)$ график уравнения:

а) $x^2 + y^2 = 0,02$; б) $x^2 - y^2 = 0$?

376. При каком значении a точка $B(a; 1 - a)$ принадлежит графику уравнения:

а) $x^2 - y^2 = 14$; б) $x^2 + y^2 = 1$?

377. Составьте уравнения окружностей, симметричных окружности $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 9$ относительно оси абсцисс; относительно оси ординат; относительно начала координат.

378. Дана окружность с центром в точке (5; 8) и радиусом, равным 4.

а) Составьте её уравнение.

б) Составьте уравнение окружностей, симметричных данной окружности относительно оси ординат; относительно оси абсцисс; относительно начала координат.

379. Составьте уравнение двух концентрических окружностей, радиусы которых равны 2 и 5 и общий центр которых находится:

а) в начале координат; в) в точке (0; 4);

б) в точке (3; 0); г) в точке (–1; 2).

380. Две концентрические окружности, заданные уравнениями $x^2 + y^2 = 9$ и $x^2 + y^2 = 16$, делят плоскость на три области:

кольцо, ограниченное окружностями, часть плоскости, ограниченную малой окружностью, и часть плоскости, находящуюся за пределами круга, ограниченного большой окружностью. В какой из трёх областей расположены точки: $M(5;\ 5)$, $N(1;\ -2)$, $P(3{,}6;\ 0)$, $Q(4{,}001;\ -0{,}5)$? Сделайте схематический рисунок.

П

381. Решите неравенство:

а) $25x^2 + 6x \leqslant 0$;
б) $x^2 - 169 > 0$;
в) $4x^2 - 225 \leqslant 0$;
г) $y^2 < 10y + 24$;
д) $15y^2 + 30 > 22y + 7$;
е) $3y^2 - 7 \leqslant 26y + 70$.

382. Решите систему уравнений способом подстановки:

а) $\begin{cases} 11x - 9y = 37, \\ x = 1 + 2y; \end{cases}$
б) $\begin{cases} 16x - 4y = 5, \\ 3x - y = 2. \end{cases}$

383. Решите систему уравнений способом сложения:

а) $\begin{cases} 5x + 2y = 30, \\ 3x + 4y = -3; \end{cases}$
б) $\begin{cases} 2x - y = 85, \\ 5x - 2y = 200. \end{cases}$

20. Решение систем уравнений с двумя переменными

Рассмотрим несколько примеров решения систем двух уравнений с двумя переменными, при этом будем использовать как аналитический, так и графический способы решения.

Пример 1. Решим систему уравнений $\begin{cases} 7x^2 + y^2 - 4 = 0, \\ 3x + y - 2 = 0. \end{cases}$

▶ Эта система содержит линейное уравнение, поэтому для её решения воспользуемся способом подстановки.
Выразим из второго уравнения системы переменную y через x. Получим: $y = 2 - 3x$. Подставив в первое уравнение системы вместо y выражение $2 - 3x$, придём к уравнению:

$$7x^2 + (2 - 3x)^2 - 4 = 0.$$

Выполнив преобразования, получим квадратное уравнение

$$7x^2 + 4 - 12x + 9x^2 - 4 = 0.$$

После упрощения получим квадратное уравнение:

$$16x^2 - 12x = 0;$$

$$4x(4x - 3) = 0.$$

Корни этого уравнения: $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{3}{4}$.

Подставив в уравнение $y = 2 - 3x$ значение $x_1 = 0$, найдём $y_1 = 2$.

Подставив в уравнение $y = 2 - 3x$ значение $x_2 = \frac{3}{4}$, получим $y_2 = -\frac{1}{4}$.

Ответ: $(0;\ 2)$, $\left(\frac{3}{4};\ -\frac{1}{4}\right)$. ◁

Пример 2. Решим систему уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13, \\ xy = 6. \end{cases}$

▶ В этом случае, как и в предыдущем примере, можно было бы воспользоваться способом подстановки. Тогда, выразив одну из переменных из уравнения $xy = 6$, мы пришли бы к биквадратному уравнению. Но для данной системы существует и другой приём, который позволит избежать громоздких преобразований. Умножим второе уравнение системы на 2, получим равносильную систему:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 13, \\ 2xy = 12. \end{cases}$$

Далее сложим левые и правые части уравнений системы, а затем вычтем из первого уравнения системы второе. Получим:

$$\begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 = 25, \\ x^2 - 2xy + y^2 = 1; \end{cases} \qquad \begin{cases} (x + y)^2 = 25, \\ (x - y)^2 = 1. \end{cases}$$

Последняя система распадается на четыре системы, содержащие два линейных уравнения с переменными x и y:

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ x - y = 1; \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = -5, \\ x - y = 1; \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = 5, \\ x - y = -1; \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = -5, \\ x - y = -1. \end{cases}$$

В каждой системе уравнений почленно сложим уравнения, а затем почленно вычтем из первого уравнения второе. Получим четыре решения:

$$\begin{cases} x_1 = 3, \\ y_1 = 2; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = -2, \\ y_2 = -3; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_3 = 2, \\ y_3 = 3; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_4 = -3, \\ y_4 = -2. \end{cases}$$

Ответ: $(3;\ 2)$, $(-2;\ -3)$, $(2;\ 3)$, $(-3;\ -2)$. ◁

Пример 3. Решим графически систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ y = -x^2 + 2x + 5. \end{cases}$$

▶ Построим в одной системе координат графики уравнений

$$x^2 + y^2 = 25 \text{ и } y = -x^2 + 2x + 5$$

(рис. 56). Координаты любой точки окружности являются решением уравнения $x^2 + y^2 = 25$, а координаты любой точки параболы — решением уравнения $y = -x^2 + 2x + 5$. Значит, координаты любой точки пересечения окружности и параболы удовлетворяют как первому уравнению системы, так и второму, т. е. являются решением рассматриваемой системы. Используя рисунок, находим приближённые значения координат точек пе-

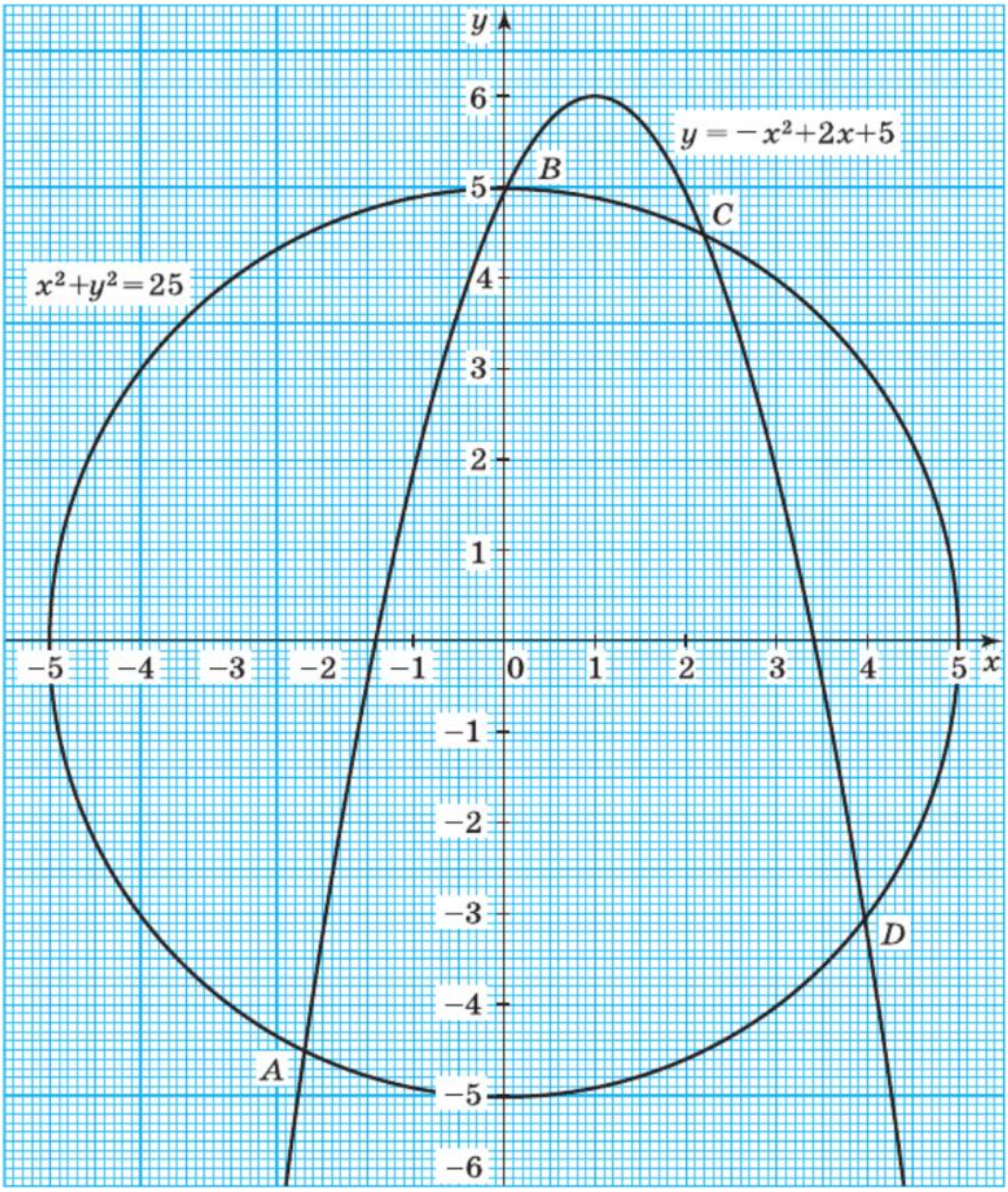


Рис. 56

ресечения графиков: $A(-2{,}2;\ -4{,}5)$, $B(0;\ 5)$, $C(2{,}2;\ 4{,}5)$, $D(4;\ -3)$. Следовательно, система уравнений имеет четыре решения:

$$x_1 \approx -2{,}2,\ y_1 \approx -4{,}5; \qquad x_2 \approx 0,\ y_2 \approx 5;$$
$$x_3 \approx 2{,}2,\ y_3 \approx 4{,}5; \qquad x_4 \approx 4,\ y_4 \approx -3.$$

Подставив найденные значения x и y в уравнения системы, можно убедиться, что второе и четвёртое решения являются точными, а первое и третье — приближёнными. ◁

Пример 4. Выясним, сколько решений имеет система уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ y = a, \end{cases}$ где a — некоторое число.

▶ График первого уравнения — окружность с центром в начале координат и радиусом, равным 2; график второго уравнения — прямая, параллельная оси x.

Возможны следующие случаи:

если $|a| > 2$, то прямая не имеет с окружностью общих точек (рис. 57, *а*, *б*);

если $|a| = 2$, то прямая касается окружности (рис. 57, *в*, *г*);

если $|a| < 2$ (например, $a = 1$), то прямая пересекает окружность (рис. 57, *д*).

Ответ: если $|a| > 2$, то система решений не имеет;
если $|a| = 2$, то система имеет одно решение;
если $|a| < 2$, то система имеет два решения.

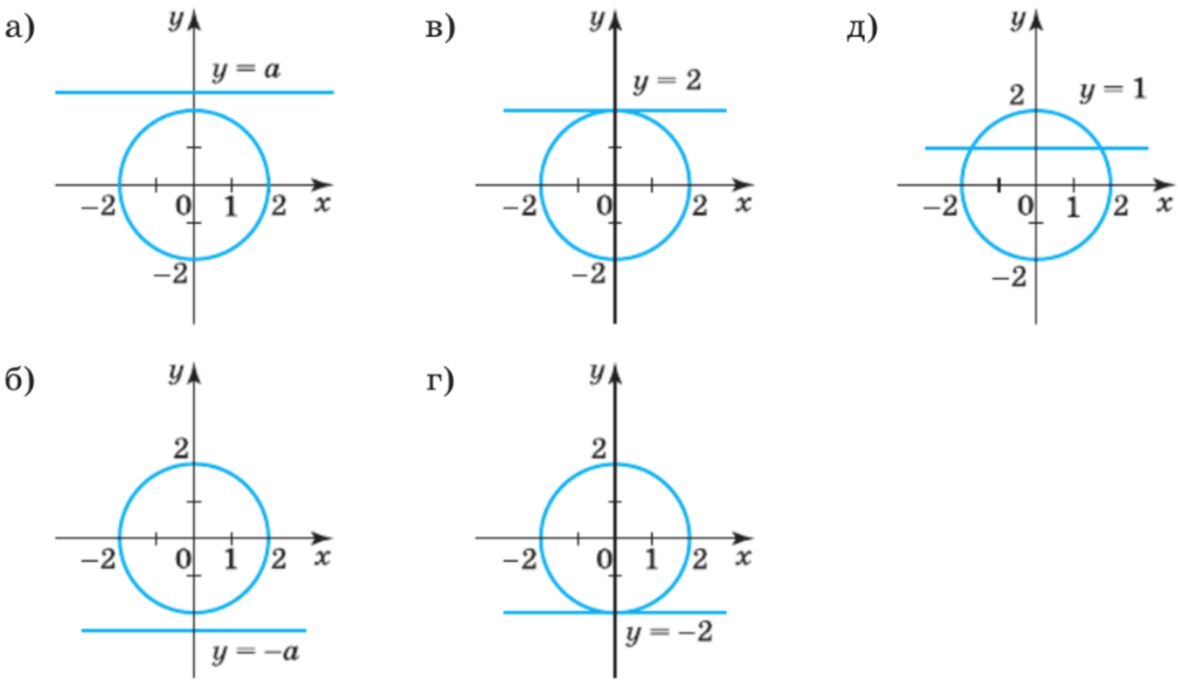


Рис. 57

Упражнения

384. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x^2+y^2=9, \\ x-y=3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x-y=4, \\ xy=12; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x-y=-1, \\ x+y^2=10. \end{cases}$

385. Решите систему уравнений графически и аналитически:

а) $\begin{cases} x^2+y^2=16, \\ x-y=4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y=x^2+1, \\ x+2y=5. \end{cases}$

386. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} (x-2)(y+3)=160, \\ y-x=1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} (x-1)(y+10)=9, \\ x-y=11. \end{cases}$

387. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 6(y-x)-50=y, \\ y-xy=24; \end{cases}$ б) $\begin{cases} p+5t=2(p+t), \\ pt-t=10. \end{cases}$

388. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x^2-4=0, \\ xy=6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2-5x+6=0, \\ y^2-6y+5=0. \end{cases}$

389. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} y^2+2x-4y=0, \\ 2y-x=2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2+xy+y^2=7, \\ y+2x=1. \end{cases}$

390. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x^2+xy-y^2=11, \\ x-2y=1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2+xy-3y=9, \\ 3x+2y=-1. \end{cases}$

391. Решите способом подстановки систему уравнений:

а) $\begin{cases} x^2+y^2=12, \\ xy=-6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x^2-y^2=34, \\ xy=20. \end{cases}$

392. Решите систему уравнений, используя способ сложения:

а) $\begin{cases} x^2-2y^2=14, \\ x^2+2y^2=18; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2+y^2=61, \\ x^2-y^2=11; \end{cases}$ в) $\begin{cases} xy+x=56, \\ xy+y=54. \end{cases}$

393. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2+y^2=10, \\ xy=3. \end{cases}$

394. Не выполняя построения, найдите координаты точек пересечения:
а) окружности $x^2 + y^2 = 36$ и параболы $y = x^2 + 6$;
б) окружностей $x^2 + y^2 = 16$ и $(x - 2)^2 + y^2 = 36$;
в) окружности $x^2 + y^2 = 25$ и прямой $4x - y = 0$.

395. Окружность $(x - 4)^2 + (y - 6)^2 = 25$ и прямая $y = kx$ имеют общую точку $M(1; 2)$. Найдите координаты другой общей точки, если такая точка существует.

396. Покажите с помощью графиков, что система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ y = x^2 - 6 \end{cases}$$

имеет четыре решения, и найдите их.

397. Решите графически систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 100, \\ y = \frac{1}{2}x^2 - 10. \end{cases}$$

398. (*Для работы в парах.*) С помощью графиков решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} xy = 6, \\ 2x - 3y = 6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} (x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 4, \\ y - x^2 = 0. \end{cases}$

1) Обсудите, какое множество точек задаёт на плоскости каждое уравнение системы в заданиях а) и б).
2) Распределите, кто выполняет задание а), а кто — задание б), и выполните их.
3) Проверьте друг у друга, правильно ли построены графики уравнений и определены координаты точек пересечения графиков.

399. Решите графически систему уравнений:

а) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 16, \\ x + y + 2 = 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} xy - 3 = 0, \\ 2y - 3x = 3; \end{cases}$

б) $\begin{cases} xy = 8, \\ x + y + 3 = 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2 - y = 0, \\ (9x + 4)(y - 9) = 0. \end{cases}$

400. Изобразите схематически графики уравнений, выясните, сколько решений имеет система уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ (x - 10)^2 + y^2 = 16. \end{cases}$

401. Решите графически систему уравнений:

а) $\begin{cases}(x-4)^2+(y-5)^2=9,\\ y=x;\end{cases}$ б) $\begin{cases}y-x^2=0,\\ x+y=6.\end{cases}$

402. Пересекаются ли графики уравнений $x-y=-7$ и $x^2+y^2=36$? Найдите ответ графическим способом, а затем аналитическим.

403. Сколько общих точек имеют окружность и прямая, заданные соответственно уравнениями:

а) $(x-6)^2+(y+4)^2=4$ и $y=-2$;

б) $(x-3)^2+(y-2)^2=9$ и $x=7$?

404. Пересекаются ли окружность $x^2+y^2=9$ и гипербола $xy=-3$? Если пересекаются, то сколько общих точек они имеют?

405. Сколько общих точек имеют окружность и прямая:

а) $\begin{cases}x^2+y^2=9,\\ y=2x+3;\end{cases}$ б) $\begin{cases}x^2+y^2=7,\\ y-4x=2;\end{cases}$ в) $\begin{cases}x^2+y^2=5,\\ y+4x=-5?\end{cases}$

406. Укажите три значения c, при которых прямая $y=c$ и окружность $x^2+y^2=9$: а) пересекаются; б) не имеют общих точек. При каких значениях c прямая касается окружности?

П

407. Составьте уравнение, графиком которого является:

а) пара прямых $y=2x$ и $y=-2x$;

б) парабола $y=x^2$ и прямая $y=-2$.

408. При каком значении b пара чисел (18; 3) является решением системы уравнений

$$\begin{cases}x-2y=4b,\\ 2x+y=39?\end{cases}$$

409. При каких значениях a решением системы уравнений

$$\begin{cases}x+y=a+1,\\ 3x-y=a-1\end{cases}$$

является пара положительных чисел?

410. Докажите, что при $a>-1$ выражение $\left(\frac{a+1}{a-1}-\frac{a-1}{a+1}\right):\frac{4a}{5a-5}$ принимает положительные значения при всех допустимых значениях a.

411. Из деревни в город, находящийся на расстоянии 72 км, отправился велосипедист. Спустя 15 мин навстречу ему из города выехал другой велосипедист, проезжающий в час на 2 км больше первого. Найдите, с какой скоростью ехал каждый из них, если известно, что они встретились в середине пути.

21. Исследование системы двух линейных уравнений с двумя переменными

Вопрос об исследовании системы двух линейных уравнений с двумя переменными уже рассматривался в курсе алгебры 7 класса, при этом основу выбранного способа исследования составили графические соображения. Было установлено, что система может иметь единственное решение, не иметь решений, иметь бесчисленное множество решений. Теперь будет показано, как этот же вывод можно получить алгебраическим способом без опоры на графики.

Возьмём систему двух линейных уравнений с двумя переменными:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2, \end{cases} \tag{1}$$

где a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 — некоторые числа, причём в каждом из уравнений хотя бы один из коэффициентов при переменных отличен от нуля. Будем считать также, что в парах a_1, a_2 и b_1, b_2 числа не равны нулю одновременно.

Умножим первое уравнение системы на b_2, а второе — на $-b_1$. Получим систему, равносильную исходной:

$$\begin{cases} b_2a_1x + b_2b_1y = b_2c_1, \\ -b_1a_2x - b_1b_2y = -b_1c_2. \end{cases} \tag{2}$$

Сложим левые и правые части уравнений этой системы, получим:

$$(b_2a_1 - b_1a_2)x + (b_2b_1 - b_1b_2)y = b_2c_1 - b_1c_2,$$

откуда

$$(b_2a_1 - b_1a_2)x = b_2c_1 - b_1c_2. \tag{3}$$

Далее возможны три варианта.

1. Если $b_2a_1 - b_1a_2 \neq 0$, то уравнение (3), а значит, и исходная система (1), имеют единственное решение. Из условия $b_2a_1 - b_1a_2 \neq 0$ получаем, что в этом случае $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$.

2. Если $b_2a_1 - b_1a_2 = 0$, а $b_2c_1 - b_1c_2 \neq 0$, то уравнение (3), а значит, и исходная система (1) не имеют решений. Из условия $b_2a_1 - b_1a_2 = 0$ следует, что $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$, а из условия $b_2c_1 - b_1c_2 \neq 0$ следует, что $\frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$. Отсюда получаем: $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$.

3. Если $b_2a_1 - b_1a_2 = 0$ и $b_2c_1 - b_1c_2 = 0$, то уравнение (3), а значит, и исходная система (1) имеют бесконечно много решений. Значит, при выполнении условия $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ система (1) имеет бесконечно много решений. Для каждого значения x либо из первого

уравнения системы (1), либо из второго можно найти соответствующее значение y.

Таким образом, может быть сделан следующий вывод: система двух линейных уравнений с двумя переменными $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$

- имеет единственное решение, если отношение коэффициентов при одной переменной не равно отношению коэффициентов при другой переменной: $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$;
- не имеет решений, если отношение коэффициентов при одной переменной равно отношению коэффициентов при другой переменной, но не равно отношению свободных членов: $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$;
- имеет бесчисленное множество решений, если отношение коэффициентов при одной переменной равно отношению коэффициентов при другой переменной и равно отношению свободных членов: $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$.

Приведём примеры:

система $\begin{cases} 6x-4y=1, \\ 3x+2y=5 \end{cases}$ имеет единственное решение, так как $\frac{6}{3} \neq \frac{-4}{2}$;

система $\begin{cases} 4x+6y=1, \\ 2x+3y=5 \end{cases}$ не имеет решения, так как $\frac{4}{2} = \frac{6}{3} \neq \frac{1}{5}$;

система $\begin{cases} 4x+6y=8, \\ 2x+3y=4 \end{cases}$ имеет бесконечное множество решений, так как $\frac{4}{2} = \frac{6}{3} = \frac{8}{4}$.

Упражнения

412. Не решая систему уравнений, выясните, имеет ли система решения и если имеет, то сколько:

а) $\begin{cases} 2x+3y=4, \\ 3x+2y=2; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 3x-6y=2, \\ -x+2y=-1; \end{cases}$ д) $\begin{cases} 3y=4, \\ 4x+6y=1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x+3y=4, \\ 4x+6y=2; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x=5, \\ 3x+2y=2; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 3x+5y=-6, \\ 9x+15y=-18. \end{cases}$

413. Определите число решений системы уравнений:

а) $\begin{cases} 2x+2y+7=0, \\ 10x-4y+14=0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 8x-4y-15=0, \\ 10x-5y-28=0. \end{cases}$

б) $\begin{cases} x+3y+6=0, \\ 10x+30y+60=0; \end{cases}$

414. Известно одно уравнение системы двух линейных уравнений с двумя переменными $3x - 2y = 1$. Подберите второе уравнение так, чтобы система:

а) имела единственное решение;
б) не имела решений;
в) имела бесчисленное множество решений.

415. Дана система уравнений $\begin{cases} kx + 4y = 6, \\ 5x + 8y = 3. \end{cases}$ Подберите такое число k, чтобы система имела единственное решение. Существует ли такое значение k, при котором данная система не имеет решения; имеет бесконечное множество решений?

416. В системе уравнений $\begin{cases} 4x - 5y = 8, \\ kx + 15y = m \end{cases}$ подберите такие значения коэффициентов k и m, чтобы система:

а) не имела решений;
б) имела бесчисленное множество решений;
в) имела единственное решение.

417. Известно, что точка $B(2; -1)$ принадлежит графику функции $y = f(x)$. Найдите k, если:

а) $f(x) = kx + 1$; б) $f(x) = 2x + k$.

418. Найдите координаты точки пересечения графиков функций:

а) $y = 5x - 7$ и $y = 3x + 1$;
б) $y = -3x - 2$ и $y = 8x - 9$;
в) $y = 0{,}4x - 5$ и $y = -0{,}1x - 3$;
г) $y = 23x - 6$ и $y = -2x + 9$;
д) $y = 98x$ и $y = -102x - 3$;
е) $y = -3$ и $y = 36x + 1$.

419. В трёх кусках 75 м ткани. В первом куске в 1,5 раза больше ткани, чем во втором и третьем вместе. Сколько ткани в каждом куске, если во втором на 10 м больше, чем в третьем?

22. Решение задач с помощью систем уравнений второй степени

Задача. Периметр прямоугольника равен 80 см. Если основание прямоугольника увеличить на 8 см, а высоту — на 2 см, то площадь прямоугольника увеличится в полтора раза. Каковы стороны прямоугольника?

▶ Пусть основание прямоугольника равно x см, а высота равна y см.
Так как периметр прямоугольника равен 80 см, то

$$2x + 2y = 80.$$

Площадь прямоугольника равна xy см^2. После увеличения основание прямоугольника будет равно $(x + 8)$ см, высота будет равна $(y + 2)$ см, а площадь будет равна $(x + 8)(y + 2)$ см^2. По условию задачи площадь прямоугольника увеличится в полтора раза, т. е.

$$(x + 8)(y + 2) = 1{,}5xy.$$

Итак, имеем систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + 2y = 80, \\ (x + 8)(y + 2) = 1{,}5xy. \end{cases}$$

Решив её, найдём, что $x_1 = 28$, $y_1 = 12$ или $x_2 = 24$, $y_2 = 16$. Задача имеет два решения. Стороны прямоугольника равны 28 см и 12 см или 24 см и 16 см. ◁

Упражнения

420. Сумма двух чисел равна 12, а их произведение равно 35. Найдите эти числа.

421. Одно число на 7 больше другого, а их произведение равно -12. Найдите эти числа.

422. Диагональ прямоугольника равна 10 см, а его периметр равен 28 см. Найдите стороны прямоугольника.

423. Прямоугольный участок земли площадью 2400 м^2 обнесён изгородью, длина которой равна 200 м. Найдите длину и ширину этого участка.

424. Периметр прямоугольного треугольника равен 84 см, а его гипотенуза равна 37 см. Найдите площадь этого треугольника.

425. Из некоторого пункта вышли одновременно два отряда. Один направился на север, а другой — на восток. Спустя 4 ч расстояние между отрядами было равно 24 км, причём первый отряд прошёл на 4,8 км больше, чем второй. С какой скоростью шёл каждый отряд?

426. От вершины прямого угла по его сторонам начинают одновременно двигаться два тела. Через 15 с расстояние между ними стало равно 3 м. С какой скоростью двигалось каждое тело, если известно, что первое прошло за 6 с такое же расстояние, какое второе прошло за 8 с?

427. На каждой из сторон прямоугольника построен квадрат. Сумма площадей квадратов равна 122 см^2. Найдите стороны прямоугольника, если известно, что его площадь равна 30 см^2.

428. Площадь прямоугольного треугольника равна 24 см^2, а его гипотенуза равна 10 см. Каковы катеты треугольника?

429. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 13 см. Если один из его катетов увеличить на 4 см, то гипотенуза увеличится на 2 см. Найдите катеты треугольника.

430. Один комбайнёр может убрать урожай пшеницы с участка на 24 ч быстрее, чем другой. При совместной же работе они закончат уборку урожая через 35 ч. Сколько времени потребуется каждому комбайнёру, чтобы одному убрать урожай?

431. Одна из дорожных бригад может заасфальтировать участок дороги на 4 ч быстрее, чем другая. За сколько часов может заасфальтировать участок каждая бригада, если за 24 ч совместной работы они заасфальтировали бы 5 таких участков?

432. Положив в банк некоторую сумму денег, вкладчик получил через год на 40 000 р. больше. Оставив эти деньги в банке ещё на год под такой же процент, он снял со своего счёта всю сумму, которая составила 583 200 р. Какая сумма денег была положена в банк и сколько процентов годовых начислял банк?

433. Два экскаватора, работая одновременно, выполняют некоторый объём земляных работ за 3 ч 45 мин. Один экскаватор, работая отдельно, может выполнить этот объём работ на 4 ч быстрее, чем другой. Сколько времени требуется каждому экскаватору в отдельности для выполнения того же объёма земляных работ?

434. Груз массой 30 кг производит давление на опору. Если массу груза уменьшить на 2 кг, а площадь опоры уменьшить на 1 дм^2, то масса, приходящаяся на каждый квадратный дециметр опоры, увеличится на 1 кг. Найдите площадь опоры.

435. Рационализаторы цеха внедрили в производство усовершенствованный тип детали. Определите массу детали нового и старого типов, если известно, что деталь нового типа на 0,2 кг легче детали старого типа, причём из 22 кг металла стали делать деталей нового типа на две больше, чем делали деталей старого типа из 24 кг металла.

436. Из пунктов A и B, расстояние между которыми равно 40 км, вышли одновременно навстречу друг другу два пешехода. Через 4 ч им осталось пройти до встречи 4 км. Если бы из пункта A пешеход вышел на 1 ч раньше, то встреча произошла бы на середине пути. С какой скоростью шёл каждый пешеход?

437. Из пункта M в пункт N, расстояние между которыми равно 18 км, вышли одновременно два туриста. Один из них прибыл в пункт N на 54 мин позже, чем другой. Найдите скорость каждого туриста, если известно, что скорость одного из них на 1 км/ч меньше, чем скорость другого.

438. Из населённых пунктов M и N, удалённых друг от друга на 50 км, выехали одновременно навстречу друг другу два мотоциклиста и встретились через 30 мин. Найдите скорость каждого мотоциклиста, если известно, что один из них прибыл в пункт M на 25 мин раньше, чем другой в пункт N.

439. После того как смешали 12 г одной жидкости и 14 г другой жидкости большей плотности, получили смесь, плотность которой равна 1,3 г/см^3. Какова плотность каждой жидкости, если известно, что плотность одной из них на 0,2 г/см^3 больше плотности другой?

440. Из куска олова массой 356 г и куска меди массой 438 г сделали сплав. Известно, что плотность олова на 1,6 г/см^3 больше плотности меди. Найдите объём каждого куска металла, если объём куска олова на 20 см^3 меньше объёма куска меди.

441. К раствору, содержащему 50 г соли, добавили 150 г воды. После этого его концентрация уменьшилась на 7,5%. Сколько воды содержал раствор и какова была его концентрация?

442. К 70%-му раствору некоторого вещества добавили 30%-й раствор того же вещества. Концентрация нового раствора — 40%. Найдите отношение массы первого раствора к массе второго.

П

443. Приведите пример какого-либо числа, отвечающего указанным характеристикам и покажите положение соответствующей точки на координатной прямой:

а) отрицательное, не являющееся рациональным;
б) рациональное, заключённое между числами $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$;
в) иррациональное отрицательное;
г) иррациональное, большее $\frac{1}{3}$ и меньшее $\frac{1}{2}$.

444. Запишите без знака модуля:

а) $|2 - \sqrt{3}|$; в) $|\sqrt{2} - 1{,}5|$;
б) $|\sqrt{5} - 3|$; г) $|\sqrt{3} - 1{,}7|$.

П

445. В каких координатных четвертях нет ни одной точки графика функции:

а) $y = -3{,}5x^2 - 2{,}6$; б) $y = x^2 - 12x + 34$?

446. Решите неравенство:

а) $x^2 - 6x < 0$; б) $8x + x^2 \geqslant 0$; в) $x^2 \leqslant 4$; г) $x^2 > 6$.

Контрольные вопросы и задания

1 Что называется решением уравнения с двумя переменными?

2 Что называется графиком уравнения с двумя переменными?

3 Объясните, как решают систему двух уравнений с двумя переменными, в которой одно уравнение второй степени и одно уравнение первой степени. В качестве примера возьмите систему

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ x - y = 1. \end{cases}$$

§ 8 НЕРАВЕНСТВА С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ И ИХ СИСТЕМЫ

23. Неравенства с двумя переменными

Рассмотрим неравенство $2x^2 - y < 6$. При $x = 2$, $y = 5$ это неравенство обращается в верное числовое неравенство $2 \cdot 2^2 - 5 < 6$. Говорят, что пара (2; 5) является решением этого неравенства.

Решением неравенства с двумя переменными называется пара значений этих переменных, обращающая данное неравенство в верное числовое неравенство.

Рассмотрим, как изображается на координатной плоскости множество решений неравенства с двумя переменными.

Сначала выясним, как найти множество решений линейного неравенства с двумя переменными, т. е. неравенства вида $ax + by < c$ или $ax + by > c$, где x и y — переменные, a, b и c — некоторые числа, причём хотя бы один из коэффициентов a или b отличен от нуля.

Рассмотрим, например, неравенство $x + 2y > 4$ и заменим его равносильным неравенством

$$y > -0{,}5x + 2.$$

Выберем произвольно значение x, например $x = 2$, и найдём соответствующее ему значение выражения $-0{,}5x + 2$. Получим $-0{,}5 \cdot 2 + 2 = 1$. Пара чисел $(2; 1)$ является решением уравнения $y = -0{,}5x + 2$, так как её координаты удовлетворяют этому уравнению. Любые пары чисел вида $(2; y)$, где $y > 1$, например пары $(2; 1{,}8)$, $(2; 4)$, $(2; 100)$ и т. д., являются решениями рассматриваемого неравенства. Мы нашли лишь некоторые решения неравенства $y > -0{,}5x + 2$. Чтобы найти все решения данного неравенства, будем рассуждать аналогично.

Пусть x_0 — произвольно выбранное значение x. Вычислим соответствующее ему значение выражения $-0{,}5x + 2$. Получим $-0{,}5 \cdot x_0 + 2$. Пара чисел $(x_0; y_0)$, где $y_0 = -0{,}5x_0 + 2$, является решением уравнения $y = -0{,}5x + 2$. Тогда пары чисел $(x_0; y)$, где $y > -0{,}5x_0 + 2$ (т. е. $y > y_0$), и только эти пары, образуют множество решений данного неравенства.

Теперь выясним, что представляет собой множество точек, координаты которых являются решениями неравенства $x + 2y > 4$. Для этого построим прямую $y = -0{,}5x + 2$, отметим на ней произвольную точку $M(x_0; y_0)$ и проведём через неё прямую, перпендикулярную оси x (рис. 58). Координаты точки M удовлетворяют уравнению $y = -0{,}5x + 2$ (так как точка M принадлежит этой прямой), а координаты любой точки $K(x_0; y)$, где $y > y_0$, т. е. точки, расположенной выше точки M, удовлетворяют неравенству $y > -0{,}5x + 2$.

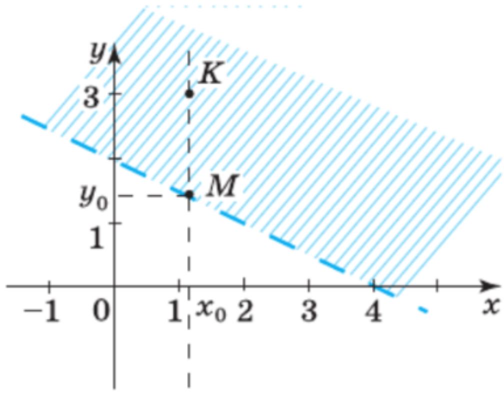


Рис. 58

Значит, неравенством $x + 2y > 4$ задаётся множество точек координатной плоскости, расположенных выше прямой $y = -0{,}5x + 2$, т. е. открытая полуплоскость (полуплоскость без граничной прямой) (см. рис. 58). Чтобы показать, что прямая $y = -0{,}5x + 2$ не принадлежит полуплоскости, она на рисунке изображена штриховой линией.

Можно сделать такой вывод. Прямая $x + 2y = 4$ разбивает множество не принадлежащих ей точек координатной плоскости на две области: область, расположенную выше данной прямой, и область, расположенную ниже данной прямой. Координаты точек первой области удовлетворяют неравенству $x + 2y > 4$, а координаты точек второй области удовлетворяют неравенству $x + 2y < 4$.

Мы выяснили на частном примере, что представляет собой множество точек координатной плоскости, удовлетворяющих неравенствам $ax + by < c$ и $ax + by > c$, в случае, когда $b \neq 0$.

Рассмотрим примеры неравенств с двумя переменными второй степени.

Пример 1. Изобразим на координатной плоскости множество решений неравенства $y \geqslant (x - 2)^2$.

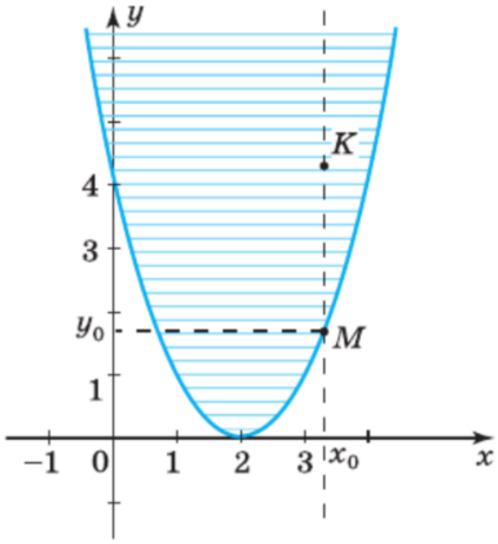


Рис. 59

▶ Построим график уравнения $y = (x - 2)^2$. Отметим на параболе $y = (x - 2)^2$ произвольную точку $M(x_0; y_0)$ и проведём через эту точку перпендикуляр к оси x (рис. 59). Координаты точки M удовлетворяют уравнению $y = (x - 2)^2$, а координаты точки $K(x_0; y)$, где $y > y_0$, удовлетворяют неравенству $y > (x - 2)^2$. Значит, решениями данного неравенства являются координаты точек, принадлежащих параболе $y = (x - 2)^2$, и координаты точек, расположенных выше её. Множество решений этого неравенства изображено на рисунке 59. ◁

Пример 2. Изобразим на координатной плоскости множество решений неравенства $x^2 + y^2 \leqslant 16$.

▶ Неравенству $x^2 + y^2 \leqslant 16$ удовлетворяют те и только те пары чисел (значений x и y), сумма квадратов которых не превосходит 16.

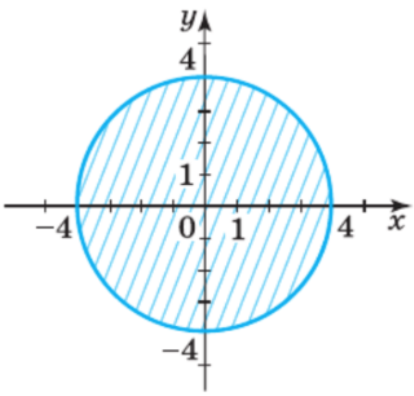


Рис. 60

Графиком уравнения $x^2 + y^2 = 16$ является окружность с центром в начале координат и радиусом, равным 4. Эта окружность разбивает координатную плоскость на две области: множество точек, расположенных внутри круга, и множество точек, расположенных вне круга. Первая область (рис. 60) вместе с окружностью является множеством точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $x^2 + y^2 \leqslant 16$, а координаты точек второй области удовлетворяют неравенству $x^2 + y^2 > 16$. ◁

Пример 3. Выясним, какое множество точек задаётся неравенством $xy > 6$.

▶ Графиком уравнения $xy = 6$ является гипербола. Этот график разбивает координатную плоскость на три области: A, B и C (рис. 61).

Область A расположена выше ветви гиперболы, лежащей в первой координатной четверти, область B — между ветвями гиперболы, область C — ниже ветви гиперболы, лежащей в третьей координатной четверти.

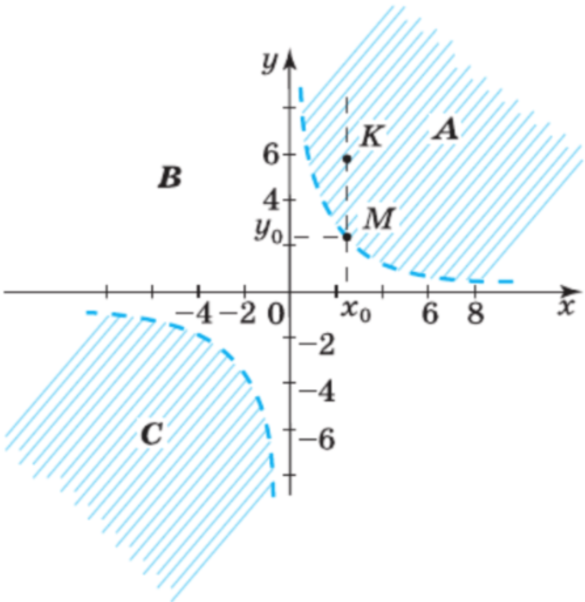


Рис. 61

Отметим на ветви гиперболы, расположенной в первой координатной четверти, точку $M(x_0; y_0)$. Координаты точки M удовлетворяют уравнению $xy = 6$, а координаты точки $K(x_0; y)$, где $y > y_0$, удовлетворяют неравенству $xy > 6$, так как произведение координат каждой точки области A больше 6. Значит, координаты точек, расположенных в области A, удовлетворяют неравенству $xy > 6$.

Если точка принадлежит области C, то произведение координат такой точки также больше 6. Значит, координаты точек области также удовлетворяют неравенству $xy > 6$.

Аналогично можно доказать, что координаты каждой точки, расположенной в области B, удовлетворяют неравенству $xy < 6$, т. е. они не являются решениями неравенства $xy > 6$.

Отсюда следует, что множеством точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $xy > 6$, является объединение областей A и C (см. рис. 61). ◁

Упражнения

447. Является ли пара чисел $(-2; 3)$ решением неравенства:

а) $2x - 3y + 16 > 0$;
б) $x^2 + 3xy - y^2 < 20$;
в) $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 < 2$;
г) $(x + y)(y - 8) < 1$;
д) $x^2 + y^2 - x - y \geqslant 0$;
е) $3x^2 - 5y^2 + x - y < 11$?

448. Найдите два каких-нибудь решения неравенства:

а) $y > 2x - 3$;
б) $y < 3x - 5$;
в) $y \leqslant x^2 - 1$;
г) $x^2 + y^2 \leqslant 9$.

449. Изобразите на координатной плоскости множество точек, заданное неравенством:

а) $y \geqslant x$; б) $y \leqslant x - 1$; в) $y > \frac{1}{4}x - 1$; г) $y < \frac{1}{3}x - 3$.

450. Изобразите на координатной плоскости множество точек, заданное неравенством $ax + by > c$, если:

а) $a = 0,\ b = 1,\ c = 3$; б) $a = 1,\ b = 0,\ c = 3$.

451. Изобразите на координатной плоскости множество точек, заданное неравенством:

а) $x \geqslant 3$; б) $y < -1$; в) $1 < x < 4$; г) $-3 \leqslant y \leqslant 3$.

452. Изобразите на координатной плоскости множество решений неравенства:

а) $y \leqslant x^2 - 4$; в) $x^2 + y^2 \leqslant 25$;

б) $y \geqslant (x - 2)^2 - 1$; г) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 \leqslant 4$.

453. (*Для работы в парах.*) Изобразите на координатной плоскости множество решений неравенства:

а) $xy < 4$; б) $xy > -6$.

1) Разберите совместно пример 3, приведённый в пункте 23.
2) Распределите, кто выполняет задание а), а кто — задание б), и выполните их.
3) Проверьте друг у друга правильность выполнения задания и исправьте ошибки, если они допущены.

454. Какое множество точек задаётся неравенством:

а) $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 13 \leqslant 0$;

б) $x^2 - 4x - y + 5 \geqslant 0$?

455. Задайте неравенством с двумя переменными:

а) круг с центром в точке (2; 0) и радиусом, равным 3;

б) множество точек, расположенных вне круга с центром в точке (0; 4) и радиусом, равным 2.

456. Опишите неравенством множество точек координатной плоскости, расположенных:

а) выше параболы $y = x^2 - 9$; б) ниже параболы $y = (x + 2)^2$.

457. Изобразите на координатной плоскости множество решений неравенства:

а) $xy \geqslant 0$; б) $xy < 0$.

П

458. Постройте график уравнения:

а) $x^2 - y^2 = 0$; б) $\dfrac{x^2 - y}{x} = 0$.

459. Представьте в виде рациональной дроби:

$$\frac{x - 1}{x + 2} - \frac{1 - x}{x^2 + 3x + 2}.$$

460. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 5x - y - 2 = 0, \\ x^2 - 2xy + y^2 = 4. \end{cases}$$

24. Системы неравенств с двумя переменными

Рассмотрим систему неравенств с двумя переменными

$$\begin{cases} x \leqslant y^2, \\ y < x + 2. \end{cases}$$

Пара чисел (1; 2) значений переменных x и y является решением как первого, так и второго неравенства системы, т. е. является *общим* решением неравенств этой системы. Такую пару чисел называют *решением системы неравенств с двумя переменными.* Множеством решений системы неравенств с двумя переменными является пересечение множеств решений входящих в неё неравенств. На координатной плоскости множество решений системы неравенств изображается множеством точек, представляющих собой общую часть множеств, задаваемых неравенствами, входящими в систему.

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Выясним, какое множество точек задаёт на координатной плоскости система неравенств

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 4, \\ x + y \geqslant 1. \end{cases}$$

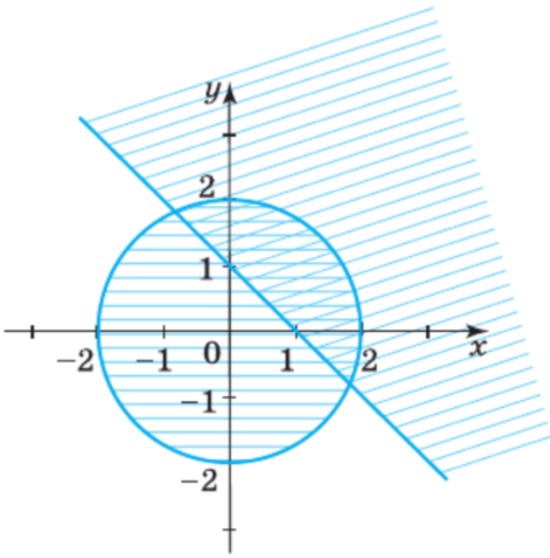


Рис. 62

▶ Первое неравенство системы задаёт на координатной плоскости круг с центром в начале координат и радиусом, равным 2. На рисунке 62 это множество точек показано горизонтальной штриховкой. Второе неравенство задаёт полуплоскость, которая показана на рисунке 62 наклонной штриховкой. Множество решений системы изображено двойной штриховкой.

Итак, множеством точек, которое задаёт система неравенств

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 4, \\ x + y \geqslant 1, \end{cases}$$

является сегмент, показанный на рисунке 62 двойной штриховкой. ◁

Остановимся подробнее на примерах систем, состоящих из двух линейных неравенств.

Пример 2. Изобразим на координатной плоскости множество решений системы

$$\begin{cases} y \geqslant x - 2, \\ y \geqslant -1{,}5x + 3. \end{cases}$$

▶ Множество точек, задаваемое первым неравенством, — полуплоскость, расположенная выше прямой $y = x - 2$. Множество точек, задаваемое вторым неравенством, — полуплоскость, расположенная выше прямой $y = -1{,}5x + 3$. Пересечение этих множеств представляет собой угол, отмеченный на координатной плоскости двойной штриховкой (рис. 63). ◁

Пример 3. Выясним, какое множество точек задаёт на координатной плоскости система неравенств

$$\begin{cases} y \leqslant 2x + 1, \\ y \geqslant 2x - 2. \end{cases}$$

▶ Множество точек, задаваемое первым неравенством, — полуплоскость, расположенная ниже прямой $y = 2x + 1$. Множество точек, задаваемое вторым неравенством, — полуплоскость, рас-

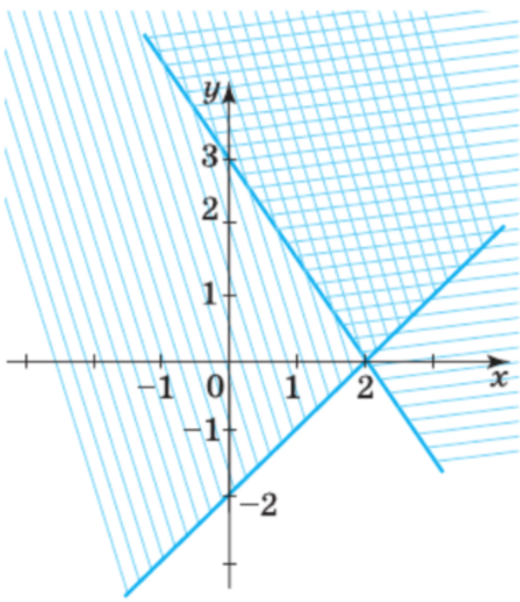


Рис. 63

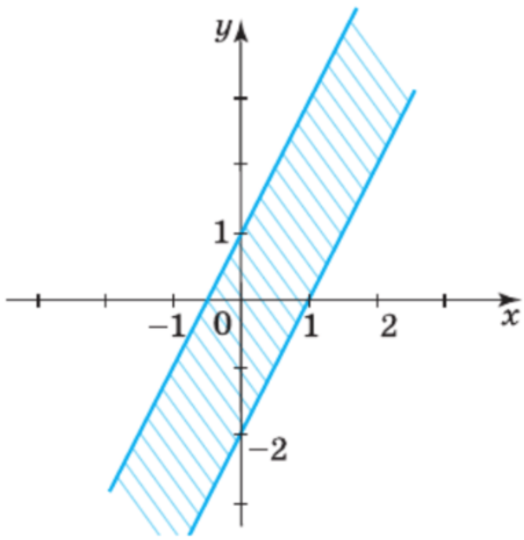


Рис. 64

положенная выше прямой $y = 2x - 2$. Так как угловые коэффициенты прямых

$$y = 2x + 1 \text{ и } y = 2x - 2$$

равны, то прямые параллельны. Следовательно, пересечением указанных полуплоскостей является полоса, изображённая на рисунке 64. ◁

Упражнения

461. Является ли решением системы неравенств

$$\begin{cases} x^2 - 2y > 7, \\ 3x + y > 3 \end{cases}$$

пара чисел:

а) (4; 2); б) (–5; 1); в) (–2; –1); г) (6; –5)?

462. (*Для работы в парах.*) Покажите штриховкой на координатной плоскости множество решений системы неравенств:

а) $\begin{cases} y \geqslant x - 3, \\ y \leqslant -x + 3; \end{cases}$ в) $\begin{cases} -2x + y < -1, \\ x - y > 3; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x - 2y < 4, \\ x + y < 3; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x + y \geqslant 3, \\ x - y < 2. \end{cases}$

1) Обсудите, к какому виду удобно привести неравенства системы в заданиях б), в) и г).
2) Распределите, кто выполняет задания а) и в), а кто — задания б) и г), и выполните их.
3) Проверьте друг у друга, правильно ли показано множество решений системы неравенств в каждом случае.

463. Изобразите на координатной плоскости множество решений системы неравенств:

а) $\begin{cases} x \geqslant 2, \\ x \geqslant 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x < -1, \\ y > 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x + 2 \geqslant 0, \\ y - 3 \leqslant 0. \end{cases}$

464. Задайте системой неравенств:

а) первую координатную четверть (включая оси координат);
б) третью координатную четверть (включая оси координат).

465. Изобразите на координатной плоскости множество решений системы:

а) $\begin{cases} y \geqslant x^2, \\ y \leqslant 4; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 9, \\ (x - 3)^2 + y^2 \leqslant 9; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 4, \\ x - y \geqslant 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} (x - 2)^2 + (y + 1)^2 \geqslant 1, \\ (x - 2)^2 + (y + 1)^2 \leqslant 9. \end{cases}$

466. (*Задача-исследование.*) При каких значениях k и b система неравенств $\begin{cases} y \leqslant 3x - 1, \\ y \geqslant kx + b \end{cases}$ задаёт на координатной плоскости:

а) полосу; б) угол; в) прямую?

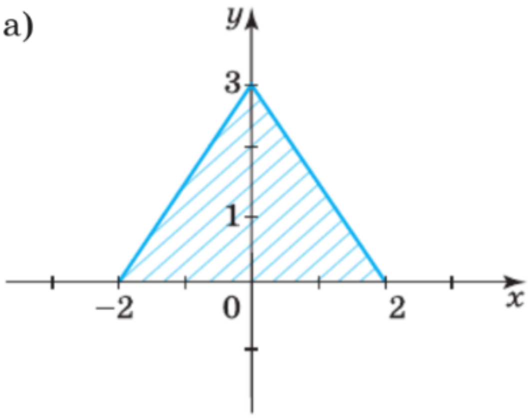
Может ли эта система не иметь решений?

1) Обсудите, какое множество точек задаёт на координатной плоскости каждое неравенство системы.
2) Выясните, при каких значениях k и b система неравенств задаёт полосу; угол; прямую.
3) Для каждого случая проиллюстрируйте свой ответ рисунком.
4) Приведите пример, когда такая система неравенств не имеет решений.

467. Задайте системой неравенств:

а) треугольник, изображённый на рисунке 65, *а*;
б) кольцо, изображённое на рисунке 65, *б*.

а)



б)

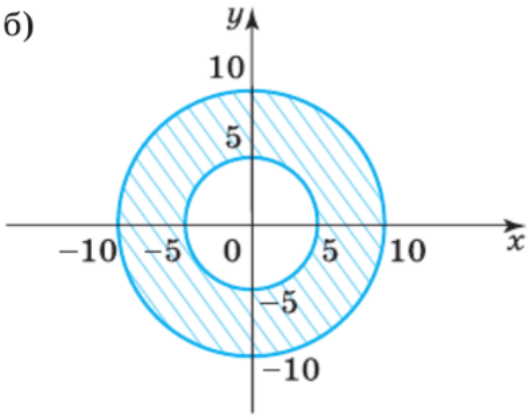


Рис. 65

468. Одна из сторон острого угла проходит через точки (0; 0) и (3; 3), а другая — через точки (0; –2) и (3; –2). Задайте этот угол системой неравенств.

П

469. Решите уравнение:

а) $(x + 2)^2 + 9(x + 2) + 20 = 0$;
б) $(x - 5)^2 + 2(x - 5) - 63 = 0$.

470. Найдите область определения функции $y = \sqrt{x - 5} + \sqrt{15 - x}$.

471. Докажите, что для любого значения x верно неравенство

$$6x(x + 8) - (5x - 27)(x + 17) > 0.$$

Контрольные вопросы и задания

1. Что называется решением неравенства с двумя переменными?
2. Какую пару чисел называют решением системы неравенств с двумя переменными?
3. Изобразите на координатной плоскости множество решений неравенства: а) $x + y \geqslant 4$; б) $xy \geqslant 4$.
4. Изобразите на координатной плоскости множество решений системы неравенств

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 36, \\ x + y \leqslant 6. \end{cases}$$

Для тех, кто хочет знать больше

25. Некоторые приёмы решения систем уравнений второй степени с двумя переменными

Рассмотрим на примерах некоторые приёмы решения систем уравнений, в которых оба уравнения второй степени.

Пример 1. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 9y^2 - x + 3y = 0, \\ x^2 - xy + y = 7. \end{cases}$$

▶ В этой системе многочлен, записанный в левой части первого уравнения, можно разложить на линейные множители:

$$x^2 - 9y^2 - x + 3y =$$
$$= (x - 3y)(x + 3y) - (x - 3y) =$$
$$= (x - 3y)(x + 3y - 1).$$

Система уравнений примет вид

$$\begin{cases} (x - 3y)(x + 3y - 1) = 0, \\ x^2 - xy + y = 7. \end{cases}$$

Произведение $(x - 3y)(x + 3y - 1)$ равно нулю тогда и только тогда, когда $x - 3y = 0$ или $x + 3y - 1 = 0$.
Решениями исходной системы являются те пары значений переменных x и y, которые удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} x - 3y = 0, \\ x^2 - xy + y = 7, \end{cases} \tag{1}$$

или системе уравнений

$$\begin{cases} x + 3y - 1 = 0, \\ x^2 - xy + y = 7. \end{cases} \tag{2}$$

Поэтому множеством решений исходной системы является объединение множеств решений систем (1) и (2). Говорят, что данная система равносильна *совокупности систем уравнений* (1) и (2):

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x - 3y = 0, \\ x^2 - xy + y = 7, \end{cases} \\ \begin{cases} x + 3y - 1 = 0, \\ x^2 - xy + y = 7. \end{cases} \end{array}\right.$$

Решим первую систему. Выполнив подстановку $x = 3y$, получим квадратное уравнение $6y^2 + y - 7 = 0$, корнями которого являются числа $y_1 = -1\frac{1}{6}$, $y_2 = 1$. Подставив их значения в первое уравнение, найдём, что $x_1 = -3\frac{1}{2}$, $x_2 = 3$. Значит, система (1) имеет решения $\left(-3\frac{1}{2}; -1\frac{1}{6}\right)$ и $(3; 1)$.

Решим систему (2). Выполнив подстановку $x = -3y + 1$, получим квадратное уравнение

$$(-3y + 1)^2 - y(-3y + 1) + y - 7 = 0,$$

которое после упрощения примет вид

$$2y^2 - y - 1 = 0,$$

откуда $y_3 = -\frac{1}{2}$, $y_4 = 1$. Подставив эти значения в первое уравнение системы (2), найдём, что $x_3 = 2{,}5$, $x_4 = -2$. Значит, система (2) имеет решения $(2{,}5; -0{,}5)$, $(-2; 1)$.
Исходная система имеет 4 решения.

Ответ: $\left(-3\frac{1}{2}; -1\frac{1}{6}\right)$, $(3; 1)$, $(2{,}5; -0{,}5)$, $(-2; 1)$. ◁

Таким образом, мы решили исходную систему уравнений, заменив её совокупностью двух систем.

Пример 2. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} 2x^2 + 3y = xy, \\ x^2 - y = 3xy. \end{cases}$$

▶ Воспользуемся способом сложения. Первое уравнение оставим без изменения, а второе умножим на 3. Затем сложим почленно левые и правые части уравнений. Получим уравнение $5x^2 = 10xy$, которое можно представить в виде $x(x - 2y) = 0$. Значит, исходную систему можно заменить равносильной ей совокупностью двух систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x = 0,\\ x^2 - y = 3xy,\end{cases}\\ \begin{cases}x = 2y,\\ x^2 - y = 3xy.\end{cases}\end{array}\right.$$

Первая система имеет единственное решение: (0; 0), вторая система имеет два решения: (0; 0) и (–1; –0,5).
Исходная система имеет два решения.
Ответ: (0; 0), (–1; –0,5). ◁

Пример 3. Решим систему уравнений

$$\begin{cases}3x^2 + 4xy + y^2 = 0,\\ x^2 - 5xy - 3y - 7 = 0.\end{cases}$$

▶ Левая часть первого уравнения системы — однородный многочлен, т. е. многочлен, каждый член которого имеет одну и ту же степень.
Разделим обе части первого уравнения на y^2, предполагая, что $y \neq 0$. Получим квадратное относительно $\frac{x}{y}$ уравнение $3\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 4\frac{x}{y} + 1 = 0$. При этом мы потеряем решение (0; 0) первого уравнения системы. Но так как пара (0; 0) не является решением второго уравнения, то система

$$\begin{cases}3\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 4\frac{x}{y} + 1 = 0,\\ x^2 - 5xy - 3y - 7 = 0\end{cases}$$

является равносильной исходной системе.

Обозначив $\frac{x}{y}$ буквой t, получим уравнение $3t^2 + 4t + 1 = 0$.

Решив его, найдём, что $t_1 = -1$, $t_2 = -\frac{1}{3}$, т. е. $\frac{x}{y} = -1$ или $\frac{x}{y} = -\frac{1}{3}$.

Отсюда $x = -y$ или $x = -\frac{1}{3}y$.

Таким образом, решение исходной системы можно свести к решению совокупности двух систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x = -y,\\ x^2 - 5xy - 3y - 7 = 0,\end{cases}\\ \begin{cases}x = -\dfrac{1}{3}y,\\ x^2 - 5xy - 3y - 7 = 0.\end{cases}\end{array}\right.$$

Решив первую систему, найдём, что

$$x_1 = \frac{-3+\sqrt{177}}{12},\ y_1 = \frac{3-\sqrt{177}}{12};\ x_2 = \frac{-3-\sqrt{177}}{12},\ y_2 = \frac{3+\sqrt{177}}{12}.$$

Решив вторую систему, найдём, что

$$x_3 = \frac{7}{16},\ y_3 = -1\frac{5}{16};\ x_4 = -1,\ y_4 = 3.$$

Ответ:

$\left(\frac{-3+\sqrt{177}}{12};\ \frac{3-\sqrt{177}}{12}\right)$, $\left(\frac{-3-\sqrt{177}}{12};\ \frac{3+\sqrt{177}}{12}\right)$, $\left(\frac{7}{16};\ -1\frac{5}{16}\right)$, $(-1;\ 3)$. ◁

Пример 4. Решим систему уравнений

$$\begin{cases}x^2 + 3xy + y^2 = 11,\\ xy + x + y = 5.\end{cases}$$

▶ Уравнения в этой системе содержат сумму переменных $x + y$, произведение xy и сумму квадратов $x^2 + y^2$. Если в этой системе заменить x на y, а y на x, то получим ту же систему. Такие системы называют *симметрическими системами*. Их удобно решать, вводя новые переменные.

Пусть $x + y = u$, $xy = v$. Тогда

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = u^2 - 2v.$$

В результате получим систему

$$\begin{cases}u^2 - 2v + 3v = 11,\\ v + u = 5,\end{cases} \text{ т. е. } \begin{cases}u^2 + v = 11,\\ v + u = 5.\end{cases}$$

Решив эту систему способом подстановки, найдём, что $u_1 = -2$, $v_1 = 7$, $u_2 = 3$, $v_2 = 2$. Выполнив обратную замену, получим совокупность систем

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x + y = -2,\\ xy = 7,\end{cases}\\ \begin{cases}x + y = 3,\\ xy = 2.\end{cases}\end{array}\right.$$

Первая система не имеет решений. Вторая имеет решения (1; 2) и (2; 1).
Ответ: (1; 2), (2; 1). ◁

Упражнения

472. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases}(x-2y)(x+3y)=0,\\ x^2-y^2=12;\end{cases}$ б) $\begin{cases}x^2-4xy+3y^2+2x-6y=0,\\ x^2-xy+y^2=7.\end{cases}$

473. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases}x^2+xy-2y^2-x+y=0,\\ x^2+y^2=8;\end{cases}$ б) $\begin{cases}x^2-6xy+5y^2-x+5y=0,\\ x^2-20y^2=5.\end{cases}$

474. Найдите все решения системы уравнений:

а) $\begin{cases}x^2-3xy+14=0,\\ 3x^2+2xy-24=0;\end{cases}$ б) $\begin{cases}2x^2-6y=xy,\\ 3x^2-8y=0{,}5xy.\end{cases}$

475. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases}x^2+3xy-10y^2=0,\\ x^2-4xy+3y=0;\end{cases}$ б) $\begin{cases}x^2+xy-6y^2=0,\\ x^2+3xy+2y-6=0.\end{cases}$

476. Найдите все решения системы уравнений:

а) $\begin{cases}\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{25}{12},\\ x^2-y^2=7;\end{cases}$ б) $\begin{cases}\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}=2{,}1,\\ x^2+y^2=29.\end{cases}$

477. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases}x^2+xy=6,\\ y^2+xy=3;\end{cases}$ б) $\begin{cases}x^2-xy=7,\\ y^2-xy=9.\end{cases}$

478. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases}x^2+y^2=25,\\ xy=12;\end{cases}$ б) $\begin{cases}x^2+y^2=26,\\ x+y=6.\end{cases}$

479. Найдите множество решений системы:

а) $\begin{cases}x^2+xy+y^2=7,\\ x+xy+y=5;\end{cases}$ б) $\begin{cases}x^2+xy+y^2=19,\\ x+xy+y=1.\end{cases}$

480. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases}4x(x+y)+y^2=49,\\ 4x(x-y)+y^2=81;\end{cases}$ б) $\begin{cases}3x(3x-4y)+4y^2=64,\\ 3x(3x+4y)+4y^2=16.\end{cases}$

Дополнительные упражнения к главе IV

К параграфу 7

481. Докажите, что уравнение не имеет решений:

а) $x^2 + 4xy + 4y^2 + 5 = 0$; в) $x^2 - 2x + y^2 - 4y + 6 = 0$;

б) $x^2 - 2xy + 8 + y^2 = 0$; г) $x^2y^2 - 2xy + 3 = 0$.

482. Докажите, что уравнение имеет единственное решение:

а) $x^2 + y^2 + 2x + 1 = 0$; б) $x^2 - 2x + y^2 + 4y + 5 = 0$.

483. Составьте уравнение, графиком которого является:

а) пара прямых $y = x + 5$ и $y = x - 5$;

б) окружность $x^2 + y^2 = 4$ и пара прямых $y = -3$ и $y = 3$;

в) гипербола $xy = 6$ и окружность $x^2 + y^2 = 1$.

484. Постройте график уравнения:

а) $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5 = 0$; б) $y^2 - x^4 = 0$.

485. Постройте график уравнения:

а) $\frac{y - x}{x - 2} = 0$; в) $\frac{x^2 + y^2 - 16}{y^2 - 4} = 0$;

б) $\frac{y - x^2}{x^2 - 1} = 0$; г) $\frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 - y^2} = 0$.

486. При каком значении a окружность $(x - a)^2 + (y - 3)^2 = 16$ проходит через точку:

а) $A(2; 3)$; б) $B(7; -1)$; в) $C(-2; 7)$; г) $D(1; 5)$?

487. Найдите целые решения уравнения:

а) $x^2 - y^2 = 5$; б) $x^2 - y^2 = 8$.

488. Решите графически систему уравнений:

а) $\begin{cases} y + x + x^2 = 0, \\ x - y = 10; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10, \\ xy = 3; \end{cases}$

б) $\begin{cases} (x - 2)^2 + y^2 = 9, \\ y = x^2 - 4x + 4; \end{cases}$ д) $\begin{cases} x + y = 8, \\ (x + 1)^2 + y^2 = 81; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ y = 2x^2 - 14; \end{cases}$ е) $\begin{cases} y = -x^2 + 4, \\ y = |x|. \end{cases}$

489. Изобразив схематически графики уравнений, определите, имеет ли решения система уравнений и сколько:

а) $\begin{cases} x^2 - y + 11 = 0, \\ y + x^2 = 4; \end{cases}$

б) $\begin{cases}(x+3)^2+(y+4)^2=1,\\(x-2)^2+(y-1)^2=4;\end{cases}$

в) $\begin{cases}y=|x|,\\\frac{1}{2}x^3-y=0.\end{cases}$

490. Сколько решений может иметь система уравнений

$$\begin{cases}x^2+y^2=r^2,\\y=-x^2+4,\end{cases}$$

где r — положительное число?

491. При каких значениях m система уравнений

$$\begin{cases}x^2+y^2=5,\\x-y=m\end{cases}$$

имеет: а) одно решение; б) два решения?

492. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases}x+3y=-1,\\x^2+2xy+y=3;\end{cases}$ г) $\begin{cases}2x^2-3y^2-5x-2y=26,\\x-y=4;\end{cases}$

б) $\begin{cases}2x-y=1,\\xy-y^2+3x=-1;\end{cases}$ д) $\begin{cases}4x^2-9y^2+x-40y=19,\\2x-3y=5;\end{cases}$

в) $\begin{cases}2x+y-11=0,\\2x+5y-y^2-6=0;\end{cases}$ е) $\begin{cases}3x^2+y^2+8x+13y=5,\\x-y+2=0.\end{cases}$

493. Найдите все решения системы уравнений:

а) $\begin{cases}x-y=4,\\(x-1)(y+1)=2xy+3;\end{cases}$ в) $\begin{cases}2x-y=5,\\(x+1)(y+4)=2xy-1;\end{cases}$

б) $\begin{cases}y-x=1,\\(2y+1)(x-1)=xy+1;\end{cases}$ г) $\begin{cases}x+y=1,\\(x-1)(y+5)=y^2-12.\end{cases}$

494. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases}x^2+y^2=40,\\xy=-12;\end{cases}$ б) $\begin{cases}x^2+2y^2=228,\\3x^2-2y^2=172.\end{cases}$

495. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases}x^2+3x-4y=20,\\x^2-2x+y=-5;\end{cases}$

б) $\begin{cases}y^2+3x-y=1,\\y^2+6x-2y=1.\end{cases}$

496. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x + y + xy = 5, \\ xy + x - y = 13; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + xy + y = 10, \\ xy - 2x - 2y = 2. \end{cases}$

497. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} (x + y)(x - y) = 0, \\ 2x - y = 1; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ (x - 3)(y - 5) = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 100, \\ (x - 7y)(x + 7y) = 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 50, \\ x(y + 1) = 0. \end{cases}$

498. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{6}, \\ 2x - y = 5; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x + y = 14, \\ \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 2\frac{1}{12}; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{20}, \\ x + 2y = 14; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x - y = 2, \\ \frac{x}{y} - \frac{y}{x} = \frac{5}{6}. \end{cases}$

499. Имеет ли решения система уравнений

$$\begin{cases} 3x - 4y = -2, \\ 3x + y^2 = 10, \\ x^2 - y^2 - x + y = 100? \end{cases}$$

500. Имеют ли общую точку графики уравнений

$$x + y = 7,\ 2x - y = 2,\ x^2 + xy - y^2 - y = 1?$$

501. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 18, \\ x^2 - y^2 + x - y = 6; \end{cases}$ в) $\begin{cases} (x + y)^2 - 2(x + y) = 15, \\ x + xy + y = 11; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2y^2 + xy = 72, \\ x + y = 6; \end{cases}$ г) $\begin{cases} (x + y)^2 - 4(x + y) = 45, \\ (x - y)^2 - 2(x - y) = 3. \end{cases}$

502. Если умножить квадратный трёхчлен $ax^2 - 2x + b$ на квадратный трёхчлен $x^2 + ax - 1$, то получится многочлен четвёртой степени, в котором коэффициенты при x^2 и x соответственно равны 8 и -2. Найдите a и b.

503. Сумма двух положительных чисел в 5 раз больше их разности. Найдите эти числа, если известно, что разность их квадратов равна 180.

504. Произведение двух чисел в 15 раз больше их суммы. Если к первому числу прибавить удвоенное второе число, то получится 100. Найдите эти числа.

505. Разность квадратов двух чисел равна 100. Если из утроенного первого числа вычесть удвоенное второе число, то получится 30. Найдите эти числа.

506. Найдите двузначное число, которое в 4 раза больше суммы его цифр и в 2 раза больше произведения его цифр.

507. Если числитель обыкновенной дроби возвести в квадрат, а знаменатель уменьшить на 1, то получится дробь, равная 2. Если же числитель дроби уменьшить на 1, а знаменатель увеличить на 1, то получится дробь, равная $\frac{1}{4}$. Найдите эту дробь.

508. Если числитель обыкновенной дроби увеличить на 7, а знаменатель возвести в квадрат, то получится дробь, равная $\frac{3}{4}$. Если же числитель оставить без изменения, а знаменатель увеличить на 6, то получится дробь, равная $\frac{1}{2}$. Найдите эту дробь.

509. Диагональ прямоугольника равна 15 см. Если одну из его сторон уменьшить на 6 см, а другую уменьшить на 8 см, то периметр уменьшится в 3 раза. Найдите стороны прямоугольника.

510. Бассейн наполняется через первую трубу на 5 ч быстрее, чем через вторую. Бассейн можно наполнить, если открыть сначала одну первую трубу на 5 ч, а затем одну вторую на 7,5 ч. За сколько часов наполнится бассейн при совместной работе обеих труб?

511. Чтобы наполнить бассейн, сначала открыли одну трубу и через 2 ч, не закрывая её, открыли вторую. Через 4 ч совместной работы труб бассейн был наполнен. Одна вторая труба могла бы наполнить бассейн в 1,5 раза быстрее, чем одна первая. За сколько часов можно наполнить бассейн через каждую трубу?

512. Из двух городов, расстояние между которыми равно 270 км, одновременно навстречу друг другу выходят два поезда и встречаются через 3 ч. На весь путь один из поездов тратит на 1 ч 21 мин больше, чем другой. Найдите скорость каждого поезда.

513. Из пунктов M и N выехали одновременно навстречу друг другу два автомобиля. Один из них приехал в пункт N через 1 ч 15 мин после встречи, а другой — в пункт M через 48 мин после встречи. Расстояние между пунктами M и N равно 90 км. Найдите скорости автомобилей.

514. Двое туристов идут навстречу друг другу из пунктов A и B. Первый вышел из пункта A на 6 ч позже, чем второй из пункта B, и при встрече оказалось, что он прошёл на 12 км меньше второго. Продолжая движение с той же скоростью, первый пришёл в пункт B через 8 ч, а второй — в пункт A через 9 ч после встречи. Найдите скорость каждого туриста.

К параграфу 8

515. Изобразите на координатной плоскости множество решений неравенства:

а) $y - 2x > 2$; б) $x + y < -1$.

516. Изобразите на координатной плоскости множество точек, заданное неравенством:

а) $(x - 3)^2 + (y + 3)^2 \leqslant 4$; б) $y \leqslant x^2 - 5x + 6$.

517. Где на координатной плоскости расположены точки, у которых:

а) абсцисса больше ординаты;
б) ордината больше абсциссы?

518. Какое множество точек координатной плоскости задаётся неравенством:

а) $x^2 + y^2 - 4x - 8y \leqslant 0$; б) $x^2 - 6x + y + 4 > 0$?

519. Изобразите на координатной плоскости множество решений неравенства:

а) $y \geqslant |x|$; б) $y \leqslant |x - 2|$.

520. Какое множество точек задаёт на координатной плоскости неравенство:

а) $(x - 1)(y - 1) \geqslant 0$; б) $x^2 - y^2 > 0$?

521. Докажите, что неравенством $|x| + |y| \leqslant 1$ на координатной плоскости задаётся фигура, изображённая на рисунке 66.

522. Изобразите на координатной плоскости множество решений системы неравенств:

а) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 25, \\ xy \leqslant 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + y^2 \geqslant 9, \\ xy \geqslant 0. \end{cases}$

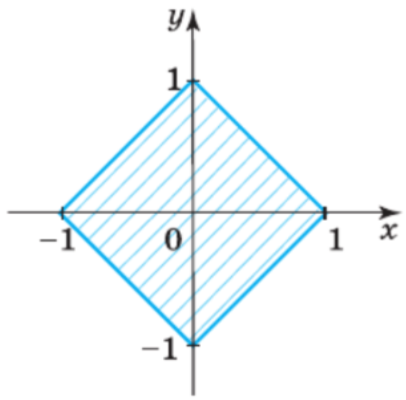


Рис. 66

523. Укажите какие-нибудь значения k и b, при которых система неравенств

$$\begin{cases} y \leqslant 2x + 3, \\ y \geqslant kx + b \end{cases}$$

задаёт на координатной плоскости:

а) полосу; б) угол.

524. Каким множеством точек изображается множество решений неравенства:

а) $y(x^2 + y^2 - 1) \geqslant 0$; б) $x(x^2 - y) \leqslant 0$?

Глава V АРИФМЕТИЧЕСКАЯ И ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИИ

Вам уже приходилось встречаться с простейшими примерами числовых последовательностей. В этой главе вы узнаете о способах задания последовательностей, научитесь вычислять члены последовательности, заданной с помощью формулы n-го члена или рекуррентным способом. Вы познакомитесь со свойствами интересных последовательностей — арифметической и геометрической прогрессий, с формулами n-го члена и суммы первых n членов этих прогрессий. Советуем обратить внимание на связь арифметической прогрессии с линейной функцией, а геометрической — с показательной функцией. Вам придётся выполнять разнообразные упражнения, в которых изученные сведения о прогрессиях находят применение. Среди заданий на прогрессии вам встретятся различные задачи с практическим содержанием, с сюжетами, взятыми из курсов геометрии и физики. Вас, безусловно, привлекут задачи на вычисление сложных процентов, находящие широкое применение на практике, в частности в банковских расчётах.

§ 9 АРИФМЕТИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ

26. Последовательности

Будем выписывать в порядке возрастания положительные чётные числа. Первое такое число — 2, второе — 4, третье — 6, четвёртое — 8 и т. д. Получим *последовательность*

$$2;\ 4;\ 6;\ 8;\ \ldots .$$

Ясно, что на пятом месте в этой последовательности будет число 10, на десятом — число 20, на сотом — число 200. Вообще для любого натурального числа n можно указать соответствующее ему положительное чётное число; оно равно $2n$.

Рассмотрим ещё одну последовательность. Будем выписывать в порядке убывания правильные дроби с числителем, равным 1:

$$\frac{1}{2};\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{5};\ \frac{1}{6};\ \ldots\ .$$

Для любого натурального числа n мы можем указать соответствующую дробь, стоящую в этой последовательности на n-м месте; она равна $\frac{1}{n+1}$. Так, на шестом месте должна стоять дробь $\frac{1}{7}$, на тридцатом — дробь $\frac{1}{31}$, на тысячном — дробь $\frac{1}{1001}$.

Числа, образующие последовательность, называют *членами последовательности*. Члены последовательности обычно обозначают буквами с индексами, указывающими порядковый номер члена, например, a_1, a_2, a_3, a_4 и т. д. (читают: «a первое, a второе, a третье, a четвёртое...»). Вообще член последовательности с номером n, или, как говорят, *n-й член последовательности*, обозначают a_n. Саму последовательность будем обозначать так: (a_n).

В рассмотренных примерах мы имели дело с последовательностями, содержащими бесконечно много членов. Такие последовательности называют *бесконечными*. Однако последовательность может содержать и конечное число членов. В таком случае её называют *конечной*. Например, конечной является последовательность двузначных чисел

$$10;\ 11;\ 12;\ 13;\ \ldots;\ 98;\ 99.$$

Чтобы задать последовательность, нужно указать способ, позволяющий найти член последовательности с любым номером.

Часто последовательность задают с помощью *формулы n-го члена*. Например, последовательность положительных чётных чисел можно задать формулой $a_n = 2n$, последовательность правильных дробей с числителем, равным 1, — формулой $b_n = \frac{1}{n+1}$.

Приведём другие примеры задания последовательности формулой n-го члена.

Пример 1. Пусть последовательность задана формулой

$$y_n = n^2 - 3n.$$

Подставляя вместо n натуральные числа 1, 2, 3, 4, 5 и т. д., получаем

$$y_1 = -2,\ y_2 = -2,\ y_3 = 0,\ y_4 = 4,\ y_5 = 10,\ \ldots\ .$$

Рассматриваемая последовательность начинается так:

$$-2;\ -2;\ 0;\ 4;\ 10;\ \ldots\ .$$

Пример 2. Пусть последовательность задана формулой

$$x_n = (-1)^n \cdot 10.$$

Все члены этой последовательности с нечётными номерами равны -10, а с чётными номерами равны 10:

$$x_1 = -10,\ x_2 = 10,\ x_3 = -10,\ x_4 = 10,\ \dots .$$

Получаем последовательность

$$-10;\ 10;\ -10;\ 10;\ -10;\ \dots .$$

Пример 3. Формулой $c_n = 5$ задаётся последовательность, все члены которой равны 5:

$$5;\ 5;\ 5;\ 5;\ 5;\ \dots .$$

Рассмотрим ещё один способ задания последовательности. Он состоит в том, что указывают её первый член или первые несколько членов и формулу, выражающую любой член последовательности, начиная с некоторого, через предыдущие (один или несколько). Такую формулу называют *рекуррентной* (от латинского слова *recurro* — «возвращаться»), а соответствующий способ задания последовательности — *рекуррентным способом*.

Приведём пример задания последовательности рекуррентным способом.

Пример 4. Пусть (u_n) — последовательность, в которой $u_1 = 1$, $u_2 = 1$, $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$ при $n > 2$.

Выпишем первые несколько её членов:

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ \dots .$$

Эта последовательность описана в работах итальянского математика Леонардо из Пизы, известного под именем Леонардо Фибоначчи (1180—1240). Члены этой последовательности называют *числами Фибоначчи*.

Упражнения

525. Выпишите первые несколько членов последовательности натуральных чисел, кратных 3, взятых в порядке возрастания. Укажите первый, пятый, десятый, сотый и n-й члены этой последовательности.

526. Известно, что (c_n) — последовательность, все члены которой с нечётными номерами равны -1, а с чётными равны 0. Выпишите первые восемь членов этой последовательности. Найдите c_{10}, c_{25}, c_{200}, c_{253}, c_{2k}, c_{2k+1} (k — произвольное натуральное число).

527. Пусть (a_n) — последовательность квадратов натуральных чисел. Выпишите первые десять членов этой последовательности. Найдите a_{20}, a_{40}, a_n.

528. Какой член последовательности a_1, a_2, a_3, ... :

а) следует за членом a_{99}, a_{200}, a_n, a_{n-1}, a_{n+1}, a_{2n};

б) предшествует члену a_{71}, a_{100}, a_{n-2}, a_{n+3}, a_{3n}?

529. Перечислите члены последовательности (x_n), которые расположены между:

а) x_{31} и x_{35}; б) x_n и x_{n+6}; в) x_{n-4} и x_n; г) x_{n-2} и x_{n+2}.

530. Найдите первые шесть членов последовательности, заданной формулой n-го члена:

а) $x_n = 2n - 1$; в) $x_n = \frac{n}{n+1}$; д) $x_n = 2^{n-3}$;

б) $x_n = n^2 + 1$; г) $x_n = (-1)^{n+1} \cdot 2$; е) $x_n = 0{,}5 \cdot 4^n$.

531. Последовательность (b_n) задана формулой $b_n = 2n^2 + 3n$. Найдите:

а) b_5; б) b_{10}; в) b_{50}.

532. Последовательность (a_n) задана формулой $a_n = n^2 - n - 20$. Укажите номера отрицательных членов последовательности и вычислите эти члены.

533. Вычислите второй, третий, четвёртый и пятый члены последовательности (b_n), если известно, что:

а) первый член равен 10, а каждый следующий на 3 больше предыдущего, т. е. $b_1 = 10$ и $b_{n+1} = b_n + 3$;

б) первый член равен 40, а каждый следующий равен предыдущему, делённому на 2, т. е. $b_1 = 40$ и $b_{n+1} = \frac{b_n}{2}$.

534. Выпишите первые пять членов последовательности (a_n), если:

а) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + 1$; в) $a_1 = 16$, $a_{n+1} = -0{,}5a_n$;

б) $a_1 = 1000$, $a_{n+1} = 0{,}1a_n$; г) $a_1 = 3$, $a_{n+1} = a_n^{-1}$.

535. Выпишите первые четыре члена последовательности (b_n), если:

а) $b_1 = 5$, $b_{n+1} = b_n + 5$; б) $b_1 = 5$, $b_{n+1} = b_n \cdot 5$.

П

536. Найдите пару положительных чисел x и y, удовлетворяющих уравнению $x^2 + y^2 = 45$, если известно, что y вдвое больше x.

537. Решите уравнение:

а) $4x^4 + 4x^2 - 15 = 0$; б) $2x^4 - x^2 - 36 = 0$.

538. Решите неравенство:

а) $x^2 + x - 42 \leqslant 0$; б) $(x + 11)(x + 4)(x - 1) > 0$.

539. Представьте выражение в виде степени с основанием 3 и найдите его значение:

а) $81 \cdot 3^{-6}$; б) $\dfrac{(-3^{-3})^3}{-9^{-2}}$; в) $9^{-5} \cdot \left(\dfrac{1}{9}\right)^{-3}$; г) $(-3^{-3})^2 \cdot 27^3$.

27. Определение арифметической прогрессии. Формула n-го члена арифметической прогрессии

Рассмотрим числовую последовательность:

$$1;\ 5;\ 9;\ 13;\ 17;\ 21;\ \dots .$$

Каждый её член, начиная со второго, получается прибавлением к предыдущему члену числа 4. Эта последовательность является примером *арифметической прогрессии*.

> **Определение.** Арифметической прогрессией называется последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему члену, сложенному с одним и тем же числом.

Иначе говоря, последовательность (a_n) — арифметическая прогрессия, если для любого натурального n выполняется условие

$$a_{n+1} = a_n + d,$$

где d — некоторое число.

Из определения арифметической прогрессии следует, что разность между любым её членом, начиная со второго, и предыдущим членом постоянна и равна d, т. е. при любом натуральном n верно равенство

$$a_{n+1} - a_n = d.$$

Число d называют *разностью арифметической прогрессии*.

Чтобы задать арифметическую прогрессию, достаточно указать её первый член и разность d. Приведём примеры.

Если $a_1 = 1$ и $d = 1$, то получим арифметическую прогрессию

$$1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ \dots ,$$

члены которой — последовательные натуральные числа.

Если $a_1 = 1$ и $d = 2$, то получим арифметическую прогрессию

$$1;\ 3;\ 5;\ 7;\ 9;\ \dots ,$$

которая является последовательностью положительных нечётных чисел.

Если $a_1 = -2$ и $d = -2$, то получим арифметическую прогрессию

$$-2;\ -4;\ -6;\ -8;\ -10;\ \ldots,$$

которая является последовательностью отрицательных чётных чисел.

Если $a_1 = 7$ и $d = 0$, то имеем арифметическую прогрессию

$$7;\ 7;\ 7;\ 7;\ 7;\ \ldots,$$

все члены которой равны между собой.

Зная первый член и разность арифметической прогрессии, можно найти любой её член, вычисляя последовательно второй, третий, четвёртый и т. д. члены. Однако для нахождения члена прогрессии с большим номером такой способ неудобен. Постараемся отыскать способ, требующий меньшей вычислительной работы.

По определению арифметической прогрессии

$$\begin{aligned}
a_2 &= a_1 + d,\\
a_3 &= a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d,\\
a_4 &= a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d,\\
a_5 &= a_4 + d = (a_1 + 3d) + d = a_1 + 4d.
\end{aligned}$$

Точно так же находим, что $a_6 = a_1 + 5d$, $a_7 = a_1 + 6d$, ... Вообще чтобы найти a_n, нужно к a_1 прибавить $(n - 1)d$, т. е.

$$\boxed{\boldsymbol{a_n = a_1 + d(n - 1).}}$$

Мы получили *формулу n-го члена арифметической прогрессии*.

Приведём примеры решения задач с использованием этой формулы.

Пример 1. Последовательность (c_n) — арифметическая прогрессия, в которой $c_1 = 0{,}62$ и $d = 0{,}24$. Найдём пятидесятый член этой прогрессии.

▶ Имеем $c_{50} = 0{,}62 + 0{,}24 \cdot (50 - 1) = 12{,}38$. ◁

Пример 2. Выясним, является ли число -122 членом арифметической прогрессии (x_n):

$$23;\ 17{,}2;\ 11{,}4;\ 5{,}6;\ \ldots .$$

▶ В данной арифметической прогрессии $x_1 = 23$ и $d = x_2 - x_1 = 17{,}2 - 23 = -5{,}8$. Запишем формулу n-го члена прогрессии:

$$x_n = 23 - 5{,}8\,(n - 1), \text{ т. е. } x_n = 28{,}8 - 5{,}8n.$$

Число -122 является членом арифметической прогрессии (x_n), если существует такое натуральное число n, при котором значение выражения $28{,}8 - 5{,}8n$ равно -122.

Решим уравнение

$$28{,}8 - 5{,}8n = -122,$$

$$5{,}8n = 150{,}8, \ n = 26.$$

Значит, число -122 является 26-м членом данной арифметической прогрессии. ◁

Отметим важное свойство арифметической прогрессии:

каждый член арифметической прогрессии, начиная со второго, равен среднему арифметическому предыдущего и последующего членов.

● Действительно, если последовательность (a_n) является арифметической прогрессией, то

$$a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n, \text{ т. е.}$$

$$2a_n = a_{n-1} + a_{n+1},$$

$$\boldsymbol{a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}}. \ ○$$

Верно и обратное утверждение:

если в последовательности (a_n) каждый член, начиная со второго, равен среднему арифметическому предыдущего и последующего членов, то эта последовательность является арифметической прогрессией.

● Действительно, из равенства

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}, \text{ где } n \geqslant 2,$$

следует, что

$$2a_n = a_{n-1} + a_{n+1},$$

$$a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n,$$

а это означает, что разность между последующим и предыдущим членами последовательности (a_n) остаётся постоянной. Значит, последовательность (a_n) — арифметическая прогрессия. ○

Заметим, что формулу n-го члена арифметической прогрессии $a_n = a_1 + d(n-1)$ можно записать иначе:

$$a_n = dn + (a_1 - d).$$

Отсюда ясно, что

> любая арифметическая прогрессия может быть задана формулой вида
> $$a_n = kn + b,$$
> где k и b — некоторые числа.

Верно и обратное:

> последовательность (a_n), заданная формулой вида
> $$a_n = kn + b,$$
> где k и b — некоторые числа, является арифметической прогрессией.

● Действительно, найдём разность $(n + 1)$-го и n-го членов последовательности (a_n):

$a_{n+1} - a_n = k(n + 1) + b - (kn + b) = kn + k + b - kn - b = k.$

Значит, при любом n справедливо равенство

$$a_{n+1} = a_n + k,$$

и, по определению, последовательность (a_n) является арифметической прогрессией, причём разность этой прогрессии равна k. ○

Пример 3. Изобразим точками на числовой оси члены арифметической прогрессии, заданной формулой:

а) $a_n = -6{,}5 + 1{,}5n$; б) $a_n = 9 - 2{,}5n$.

▶ а) Из формулы получаем $a_1 = -6{,}5 + 1{,}5 \cdot 1 = -5$, $d = 1{,}5$. Все члены прогрессии расположены на числовой оси (рис. 67, *а*) <u>правее</u> a_1 с шагом $d = 1{,}5$, т. е. $a_2 = -3{,}5$, $a_3 = -2$ и т. д.

б) Из формулы получаем $a_1 = 9 - 2{,}5 \cdot 1 = 6{,}5$, $d = -2{,}5$. Все члены прогрессии расположены на числовой оси (рис. 67, *б*) <u>левее</u> a_1 с шагом $d = -2{,}5$, т. е. $a_2 = 4$, $a_3 = 1{,}5$ и т. д.

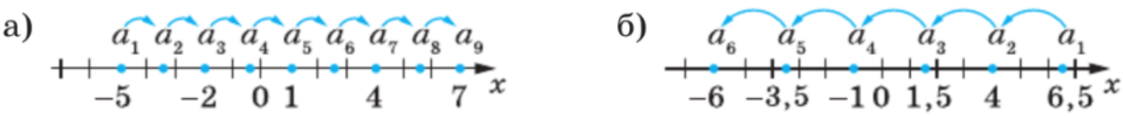


Рис. 67

Упражнения

540. Выпишите первые пять членов арифметической прогрессии (a_n), если:

а) $a_1 = 10,\ d = 4$; в) $a_1 = 1{,}7,\ d = -0{,}2$;
б) $a_1 = 30,\ d = -10$; г) $a_1 = -3{,}5,\ d = 0{,}6$.

541. Изобразите точками на числовой оси члены арифметической прогрессии, заданной формулой:

а) $a_n = -10 + 2n$; б) $a_n = 8 - 3n$.

542. Последовательность (b_n) — арифметическая прогрессия, первый член которой равен b_1, а разность равна d. Выразите через b_1 и d:

а) b_7; в) b_{231}; д) b_{k+5};
б) b_{26}; г) b_k; е) b_{2k}.

543. Последовательность (c_n) — арифметическая прогрессия. Найдите:

а) c_5, если $c_1 = 20$ и $d = 3$;
б) c_{21}, если $c_1 = 5{,}8$ и $d = -1{,}5$.

544. Последовательность (a_n) — арифметическая прогрессия. Найдите:

а) a_{11}, если $a_1 = -3$ и $d = 0{,}7$;
б) a_{26}, если $a_1 = 18$ и $d = -0{,}6$.

545. Найдите десятый и n-й члены арифметической прогрессии:

а) $\frac{1}{3}$; -1; ... ; б) 2,3; 1; ... .

546. Найдите двадцать третий и n-й члены арифметической прогрессии:

а) -8; $-6{,}5$; ... ; б) 11; 7; ... .

547. Тело в первую секунду движения прошло 7 м, а за каждую следующую секунду — на 3 м больше, чем за предыдущую. Какое расстояние тело прошло за восьмую секунду?

548. Поезд, отойдя от станции, стал двигаться, увеличивая скорость на 50 м в минуту. Какова была скорость поезда в конце двадцатой минуты?

549. (*Для работы в парах.*) На стороне OA угла AOB от его вершины отложены равные отрезки и через их концы проведены параллельные прямые (рис. 68). Длина отрезка A_1B_1 равна 1,5 см. Найдите длину отрезка:

а) A_5B_5; б) $A_{10}B_{10}$.

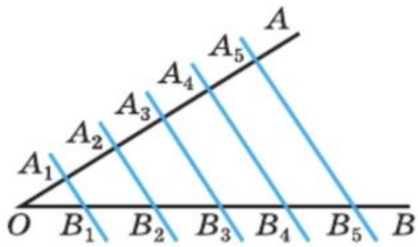


Рис. 68

1) Обсудите, какое известное вам из курса геометрии свойство надо использовать для решения задачи.
2) Распределите, кто выполняет задание а), а кто — задание б), и выполните их.
3) Проверьте друг у друга, правильно ли выполнено задание, и исправьте ошибки, если они допущены.

550. Найдите первый член арифметической прогрессии (x_n), если известно, что:

а) $x_{30} = 128$, $d = 4$; в) $x_{11} = 36$, $d = -8$;
б) $x_{45} = -208$, $d = -7$; г) $x_{17} = 1$, $d = -3$.

551. Найдите разность арифметической прогрессии (y_n), в которой:

а) $y_1 = 10$, $y_5 = 22$; в) $y_1 = 16$, $y_8 = -1$;
б) $y_1 = 28$, $y_{15} = -21$; г) $y_1 = -22$, $y_{16} = -4$.

552. Последовательность (c_n) — арифметическая прогрессия. Найдите:

а) c_1, если $c_{36} = 26$ и $d = 0{,}7$;
б) d, если $c_1 = -10$ и $c_{15} = 1{,}2$.

553. Между числами 5 и 1 вставьте семь таких чисел, чтобы они вместе с данными числами образовали арифметическую прогрессию.

554. (*Задача-исследование.*) Могут ли числа 20 и 35 быть членами арифметической прогрессии, первый член которой равен 12 и разность не равна 1?

1) Предположив, что числа 20 и 35 являются членами арифметической прогрессии, выразите каждое из них через d, n или m, где d — разность прогрессии, n — номер члена, равного 20, m — номер члена, равного 35. Докажите, что $\dfrac{n-1}{m-1} = \dfrac{8}{23}$.

2) Полагая, что $n - 1 = 8k$ и $m - 1 = 23k$, где $k \in N$, выразите m и n через k. Обсудите, как, выбрав значение k, большее 1, можно получить арифметическую прогрессию, удовлетворяющую условию задачи. Выполните необходимые вычисления.
3) Объясните, почему значение $k = 1$ приводит к противоречию с условием задачи.

555. Найдите первый член и разность арифметической прогрессии (c_n), если:

а) $c_5 = 27$, $c_{27} = 60$; б) $c_{20} = 0$, $c_{66} = -92$.

556. Найдите первый член и разность арифметической прогрессии (x_n), если $x_{16} = -7$ и $x_{26} = 55$.

557. Содержит ли арифметическая прогрессия 2; 9; ... число:

а) 156; б) 295?

558. Дана арифметическая прогрессия (a_n), у которой $a_1 = 32$ и $d = -1{,}5$. Является ли членом этой прогрессии число: а) 0; б) -28?

559. В арифметической прогрессии (x_n) первый член равен 8,7, а разность равна $-0{,}3$. Для каких членов прогрессии выполняется условие:

а) $x_n \geqslant 0$; б) $x_n < 0$?

560. Найдите номера отрицательных членов арифметической прогрессии $-20{,}3$; $-18{,}7$; ... . Чему равен первый положительный член этой прогрессии?

561. Докажите, что если числа a, b, c являются последовательными членами арифметической прогрессии, то числа $a^2 + ab + b^2$, $a^2 + ac + c^2$ и $b^2 + bc + c^2$ также являются последовательными членами некоторой арифметической прогрессии.

562. Известно, что числа a^2, b^2, c^2 — последовательные члены арифметической прогрессии. Докажите, что числа $\frac{1}{b+c}$, $\frac{1}{a+c}$, $\frac{1}{a+b}$ также являются последовательными членами некоторой арифметической прогрессии.

563. Является ли арифметической прогрессией последовательность (a_n), заданная формулой:

а) $a_n = 3n + 1$; в) $a_n = n + 4$; д) $a_n = -0{,}5n + 1$;

б) $a_n = n^2 - 5$; г) $a_n = \frac{1}{n+4}$; е) $a_n = 6n$?

564. Докажите, что последовательность сумм внутренних углов треугольника, выпуклого четырёхугольника, выпуклого пятиугольника и т. д. является арифметической прогрессией. Чему равна её разность?

565. Решите систему уравнений $\begin{cases} 3x + y = 2, \\ x^2 - y^2 = -12. \end{cases}$

566. Решите уравнение:

а) $x^3 + 4x^2 - 32x = 0$; б) $x^3 - 10x^2 + 4x - 40 = 0$.

567. Решите неравенство:

а) $(2x - 1)(x + 8) > 0$; б) $(33 - x)(16 + 2x) \leqslant 0$.

568. Найдите значение выражения:

а) $125^{-1} \cdot 25^2$; в) $\frac{16^{-3} \cdot 4^5}{8}$;

б) $0{,}0001 \cdot (10^3)^2 \cdot (0{,}1)^{-2}$; г) $9^4 \cdot \left(\frac{1}{27}\right)^{-3} \cdot 81^{-4}$.

28. Формула суммы первых n членов арифметической прогрессии

Пусть требуется найти сумму первых ста натуральных чисел. Покажем, как можно решить эту задачу, не выполняя непосредственного сложения чисел.

Обозначим искомую сумму через S и запишем её дважды, расположив в первом случае слагаемые в порядке возрастания, а во втором — в порядке убывания:

$$S = 1 + 2 + 3 + \ldots + 98 + 99 + 100,$$

$$S = 100 + 99 + 98 + \ldots + 3 + 2 + 1.$$

Каждая пара чисел, расположенных друг под другом, даёт в сумме 101. Всего таких пар 100. Поэтому, сложив равенства почленно, получим

$$2S = 101 \cdot 100,$$

$$S = \frac{101 \cdot 100}{2} = 5050.$$

Итак,

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 99 + 100 = 5050.$$

С рассмотренной задачей связана история, которую рассказывают об известном немецком математике Карле Гауссе. Когда учитель предложил ученикам третьего класса сложить все числа от 1 до 100 включительно, рассчитывая при этом надолго занять их работой, маленький Карл моментально подошёл с готовым ответом. Возможно, он заметил, что каждая из сумм $1 + 100$, $2 + 99$, $3 + 98$, ... равна 101, а таких сумм 50.

С помощью рассуждений, аналогичных тем, которые мы провели при вычислении суммы первых ста натуральных чисел, можно найти сумму первых n членов любой арифметической прогрессии.

Обозначим сумму первых n членов арифметической прогрессии (a_n) через S_n и запишем эту сумму дважды, расположив в первом случае слагаемые в порядке возрастания их номеров, а во втором случае в порядке убывания:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_{n-1} + a_n, \qquad (1)$$

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} + \ldots + a_2 + a_1. \qquad (2)$$

Сумма каждой пары членов прогрессии, расположенных друг под другом, равна $a_1 + a_n$. Действительно,

$$a_2 + a_{n-1} = (a_1 + d) + (a_n - d) = a_1 + a_n,$$

$$a_3 + a_{n-2} = (a_2 + d) + (a_{n-1} - d) = a_2 + a_{n-1} = a_1 + a_n,$$

$$a_4 + a_{n-3} = (a_3 + d) + (a_{n-2} - d) = a_3 + a_{n-2} = a_1 + a_n$$

и т. д.

Число таких пар равно n. Поэтому, сложив почленно равенства (1) и (2), получим

$$2S_n = (a_1 + a_n)n.$$

Разделив обе части последнего равенства на 2, получим *формулу суммы первых n членов арифметической прогрессии:*

$$\boxed{\boldsymbol{S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}.}} \qquad \text{(I)}$$

Заметим, что если заданы первый член и разность арифметической прогрессии, то удобно пользоваться формулой суммы, представленной в другом виде. Подставив в формулу (I) вместо a_n выражение $a_1 + d(n - 1)$, получим

$$S_n = \frac{(a_1 + a_1 + d(n - 1))n}{2},$$

т. е.

$$\boxed{\boldsymbol{S_n = \frac{2a_1 + d(n - 1)}{2}n.}} \qquad \text{(II)}$$

Приведём примеры вычисления суммы членов арифметической прогрессии.

Пример 1. Найдём сумму первых тридцати членов арифметической прогрессии 4; 5,5; ... .

▶ В данной арифметической прогрессии $a_1 = 4$, $d = 1{,}5$. Тридцатый член прогрессии найдём по формуле n-го члена:

$$a_{30} = 4 + 1{,}5 \cdot 29 = 47{,}5.$$

Теперь вычислим сумму первых тридцати членов, воспользовавшись формулой (I):

$$S_{30} = \frac{(4 + 47{,}5) \cdot 30}{2} = 772{,}5.$$

Если для решения рассмотренной задачи воспользоваться формулой (II), то вычисления будут выглядеть так:

$$S_{30} = \frac{2 \cdot 4 + 1{,}5 \cdot 29}{2} \cdot 30 = 772{,}5. \ ◁$$

Пример 2. Найдём сумму первых сорока членов последовательности (a_n), заданной формулой $a_n = 5n - 4$.

▶ Последовательность (a_n) является арифметической прогрессией, так как она задана формулой вида

$$a_n = kn + b, \text{ где } k = 5 \text{ и } b = -4.$$

Найдём первый и сороковой члены этой арифметической прогрессии:

$$a_1 = 5 \cdot 1 - 4 = 1, \ a_{40} = 5 \cdot 40 - 4 = 196.$$

Теперь по формуле (I) вычислим S_{40}:

$$S_{40} = \frac{(1 + 196) \cdot 40}{2} = 3940. \ \triangleleft$$

Пример 3. Найдём сумму всех натуральных чисел, кратных шести и не превосходящих 250.

▶ Натуральные числа, кратные шести, образуют арифметическую прогрессию, которую можно задать формулой $a_n = 6n$. Чтобы выяснить, сколько членов этой прогрессии не превосходят 250, решим неравенство $6n \leqslant 250$. Получим $n \leqslant 41\frac{2}{3}$.

Значит, число членов прогрессии, сумму которых надо найти, равно 41.

Имеем

$$a_1 = 6, \ a_{41} = 6 \cdot 41 = 246,$$

$$S_{41} = \frac{(6 + 246) \cdot 41}{2} = 5166. \ \triangleleft$$

Пример 4. Пифагор (IV в. до н. э.) и его ученики рассматривали последовательности, связанные с геометрическими фигурами. Подсчитывая число кружков в треугольниках, квадратах, пятиугольниках (рис. 69), они получали:

- последовательность (a_n) треугольных чисел

$$1, \ 3, \ 6, \ 10, \ 15, \ \ldots;$$

- последовательность (b_n) квадратных чисел

$$1, \ 4, \ 9, \ 16, \ 25, \ \ldots;$$

- последовательность (c_n) пятиугольных чисел

$$1, \ 5, \ 12, \ 22, \ 35, \ \ldots .$$

КАРЛ ГАУСС (1777—1855) — немецкий математик, астроном, геодезист, физик. Выдающиеся математические способности проявил в раннем детстве. Его многочисленные исследования в области алгебры, теории чисел, геометрии и математического анализа оказали значительное влияние на развитие теоретической и прикладной математики, астрономии, геодезии, физики.

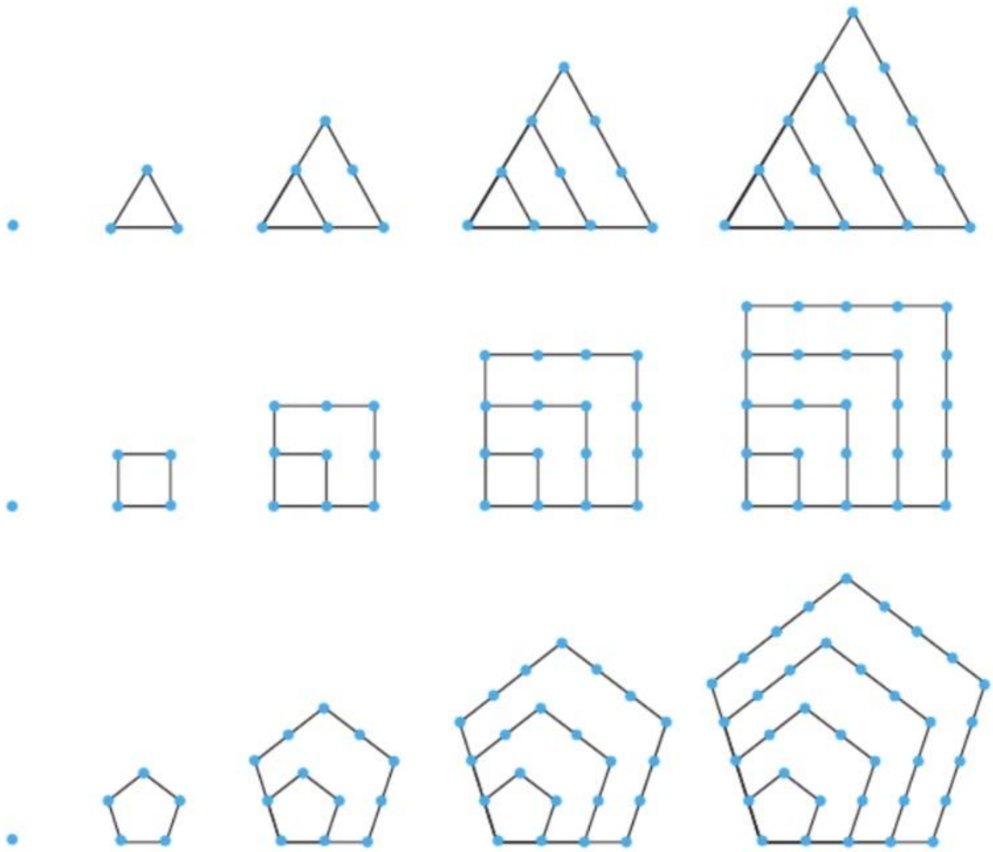


Рис. 69

Зададим каждую из этих последовательностей формулой n-го члена.

▶ Последовательность (a_n) треугольных чисел получается из последовательности натуральных чисел 1, 2, 3, ... , т. е. из арифметической прогрессии, в которой первый член и разность равны 1, следующим образом:

$$a_1 = 1,\ a_2 = 1 + 2,\ a_3 = 1 + 2 + 3,$$
$$a_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n.$$

ДИОФАНТ (III в.) — древнегреческий математик из Александрии. В его «Арифметике» изложены начала алгебры, решён ряд задач, сводящихся к неопределённым уравнениям различных степеней. Теория диофантовых уравнений и теория диофантовых приближений — так названы два больших раздела современной теории чисел. Его труды оказали большое влияние на развитие математики.

Значит,

$$a_n = \frac{1+n}{2}n.$$

Последовательность (b_n) квадратных чисел аналогичным способом получается из последовательности нечётных чисел 1, 3, 5, ... , т. е. из арифметической прогрессии, первый член которой равен 1 и разность равна 2:

$$b_1 = 1,\ b_2 = 1 + 3,\ b_3 = 1 + 3 + 5,$$
$$b_n = 1 + 3 + 5 + \ldots + 2n - 1.$$

Следовательно,

$$b_n = \frac{1 + 2n - 1}{2}n,\ b_n = n^2.$$

Мы пришли к формуле, очевидной для последовательности квадратных чисел.

Последовательность (c_n) пятиугольных чисел таким же способом можно получить из арифметической прогрессии 1, 4, 7, ... , в которой первый член равен 1 и разность равна 3:

$$c_1 = 1,\ c_2 = 1 + 4,\ c_3 = 1 + 4 + 7,$$
$$c_n = 1 + 4 + 7 + \ldots + (1 + 3(n - 1)).$$

Значит,

$$c_n = \frac{1 + 1 + 3(n-1)}{2}n,\ c_n = \frac{3n-1}{2}n. \quad \triangleleft$$

Упражнения

569. Найдите сумму первых шестидесяти членов арифметической прогрессии (a_n), если:

а) $a_1 = 3$, $a_{60} = 57$; б) $a_1 = -10{,}5$, $a_{60} = 51{,}5$.

570. Найдите сумму первых восьми членов арифметической прогрессии:

а) -23; -20; ... ; б) 14,2; 9,6; ... .

571. Вычислите сумму первых девяти членов арифметической прогрессии (b_n), если:

а) $b_1 = -17$, $d = 6$; б) $b_1 = 6{,}4$, $d = 0{,}8$.

572. Найдите сумму первых пятидесяти, ста, n членов последовательности (x_n), если:

а) $x_n = 4n + 2$; в) $x_n = n - 4$;

б) $x_n = 2n + 3$; г) $x_n = 3n - 1$.

573. Арифметическая прогрессия задана формулой $a_n = 3n + 2$. Найдите сумму первых:

а) двадцати её членов; б) пятнадцати её членов.

574. Найдите:

а) сумму $2 + 4 + 6 + ... + 2n$, слагаемыми которой являются все чётные натуральные числа от 2 до $2n$;

б) сумму $1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1)$, слагаемыми которой являются все нечётные натуральные числа от 1 до $2n - 1$.

575. Найдите сумму:

а) всех натуральных чисел, не превосходящих 150;

б) всех натуральных чисел от 20 до 120 включительно;

в) всех натуральных чисел, кратных 4 и не превосходящих 300;

г) всех натуральных чисел, кратных 7 и не превосходящих 130.

576. Найдите сумму членов арифметической прогрессии с пятнадцатого по тридцатый включительно, если первый член равен 10 и разность равна 3.

577. Найдите сумму членов арифметической прогрессии с шестого по двадцать пятый включительно, если первый член равен 21 и разность равна –0,5.

578. Найдите сумму первых двадцати членов арифметической прогрессии (c_n), если $c_7 = 18{,}5$ и $c_{17} = -26{,}5$.

579. Найдите сумму первых пятнадцати членов арифметической прогрессии (b_n), если $b_1 = 4{,}2$ и $b_{10} = 15{,}9$.

580. При свободном падении тело прошло в первую секунду 5 м, а в каждую следующую на 10 м больше. Найдите глубину шахты, если свободно падающее тело достигло её дна через 5 с после начала падения.

581. (*Для работы в парах.*) Какое расстояние пройдёт свободно падающее тело:

а) за пятую секунду после начала падения;

б) за пять секунд после начала падения?

1) Обсудите, какое известное вам из курса физики свойство надо использовать для решения задачи.

2) Распределите, кто выполняет задание а), а кто — задание б), и выполните их.

3) Проверьте друг у друга, правильно ли выполнено задание.

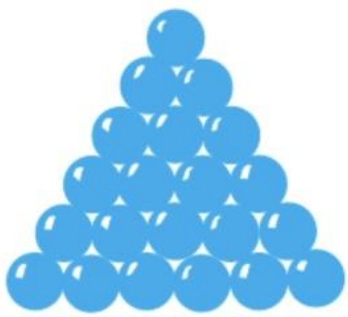


Рис. 70

582. Шары расположены в форме треугольника так, что в первом ряду 1 шар, во втором — 2, в третьем — 3 и т. д. (рис. 70). Во сколько рядов размещены шары, если их число равно 120? Сколько потребуется шаров для треугольника из 30 рядов?

583. Укажите наибольшее число членов арифметической прогрессии

$$3,\ 5,\ 7,\ \ldots,$$

сумма которых не превосходит 120.

584. Укажите наибольшее число членов арифметической прогрессии 17, 14, 11, ... , при сложении которых получается положительное число.

П

585. В арифметической прогрессии $a_7 = 8$ и $a_{11} = 12{,}8$. Найдите a_1 и d.

586. Является ли членом арифметической прогрессии 20,7; 18,3; ... число:

а) −1,3; б) −3,3?

587. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 9x^2 + 9y^2 = 13, \\ 3xy = 2; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x^2 + xy = 6, \\ 3x^2 + xy - x = 6; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 29, \\ y^2 - 4x^2 = 9; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3x^2 - 2y^2 = 25, \\ x^2 - y^2 + y = 5. \end{cases}$

588. Покажите штриховкой множество точек, которое задаёт на координатной плоскости система неравенств

$$\begin{cases} y \geqslant x^2, \\ 2y + x \leqslant 5. \end{cases}$$

Контрольные вопросы и задания

1. Приведите пример последовательности, заданной:
а) формулой n-го члена; б) рекуррентной формулой.
Найдите пять первых членов этой последовательности.
2. Сформулируйте определение арифметической прогрессии. Какое число называют разностью арифметической прогрессии?
3. Как выражается любой член арифметической прогрессии, начиная со второго, через предыдущий и последующий члены?
4. Запишите формулы n-го члена и суммы первых n членов арифметической прогрессии.

§ 10 ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ

29. Определение геометрической прогрессии. Формула n-го члена геометрической прогрессии

Рассмотрим последовательность, членами которой являются степени числа 2 с натуральными показателями: 2; 2^2; 2^3; 2^4; 2^5; ... .

Каждый член этой последовательности, начиная со второго, получается умножением предыдущего члена на 2. Эта последовательность является примером *геометрической прогрессии*.

> **Определение.** Геометрической прогрессией называется последовательность отличных от нуля чисел, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему члену, умноженному на одно и то же число.

Иначе говоря, последовательность (b_n) — геометрическая прогрессия, если для любого натурального n выполняются условия

$$b_n \neq 0 \text{ и } b_{n+1} = b_n \cdot q,$$

где q — некоторое число.

Обозначим, например, через (b_n) последовательность натуральных степеней числа 2. В этом случае для любого натурального n верно равенство $b_{n+1} = b_n \cdot 2$, здесь $q = 2$.

Из определения геометрической прогрессии следует, что отношение любого её члена, начиная со второго, к предыдущему члену равно q, т. е. при любом натуральном n верно равенство

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = q.$$

Число q называют *знаменателем геометрической прогрессии*. Ясно, что знаменатель геометрической прогрессии отличен от нуля.

Чтобы задать геометрическую прогрессию, достаточно указать её первый член и знаменатель. Приведём примеры.

Если $b_1 = 1$ и $q = 0{,}1$, то получим геометрическую прогрессию

$$1;\ 0{,}1;\ 0{,}01;\ 0{,}001;\ 0{,}0001;\ \ldots .$$

Условиями $b_1 = -5$ и $q = 2$ задаётся геометрическая прогрессия

$$-5;\ -10;\ -20;\ -40;\ -80;\ \ldots .$$

Если $b_1 = 2$ и $q = -3$, то имеем прогрессию

$$2;\ -6;\ 18;\ -54;\ 162;\ \ldots .$$

Если $b_1 = 8$ и $q = 1$, то получим геометрическую прогрессию

$$8;\ 8;\ 8;\ 8;\ 8;\ \dots .$$

Зная первый член и знаменатель геометрической прогрессии, можно найти последовательно второй, третий и вообще любой её член:

$$b_2 = b_1 q,$$
$$b_3 = b_2 q = (b_1 q)q = b_1 q^2,$$
$$b_4 = b_3 q = (b_1 q^2)q = b_1 q^3.$$

Точно так же находим, что $b_5 = b_1 q^4$, $b_6 = b_1 q^5$, $b_7 = b_1 q^6$ и т. д. Вообще, чтобы найти b_n, мы должны b_1 умножить на q^{n-1}, т. е.

$$\boxed{\boldsymbol{b_n = b_1 q^{n-1}}.}$$

Мы получили *формулу n-го члена геометрической прогрессии*.

Приведём примеры решения задач с использованием этой формулы.

Пример 1. В геометрической прогрессии $b_1 = 12{,}8$ и $q = \frac{1}{4}$. Найдём b_7.

▶ По формуле n-го члена геометрической прогрессии

$$b_7 = 12{,}8 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^6 = \frac{128}{10} \cdot \frac{1}{4^6} = \frac{2^7}{10 \cdot 2^{12}} = \frac{1}{2^5 \cdot 10} = \frac{1}{320}. \ ◁$$

Пример 2. Найдём восьмой член геометрической прогрессии (b_n), если $b_1 = 162$ и $b_3 = 18$.

▶ Зная первый и третий члены геометрической прогрессии, можно найти её знаменатель q. Так как $b_3 = b_1 q^2$, то

$$q^2 = \frac{b_3}{b_1} = \frac{18}{162} = \frac{1}{9}.$$

Решив уравнение $q^2 = \frac{1}{9}$, найдём, что $q = \frac{1}{3}$ или $q = -\frac{1}{3}$.

Таким образом, существуют две прогрессии, удовлетворяющие условию задачи.

Если $q = \frac{1}{3}$, то $b_8 = b_1 q^7 = 162 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^7 = \frac{2 \cdot 3^4}{3^7} = \frac{2}{27}$.

Если $q = -\frac{1}{3}$, то $b_8 = b_1 q^7 = 162 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^7 = -\frac{2 \cdot 3^4}{3^7} = -\frac{2}{27}$.

Задача имеет два решения:

$$b_8 = \frac{2}{27} \text{ или } b_8 = -\frac{2}{27}. \ ◁$$

Члены как арифметической, так и геометрической прогрессии изображают точками на координатной плоскости.

Пример 3. Выясним, как можно изобразить на координатной плоскости:

а) члены арифметической прогрессии 0,5; 2; 3,5; 5; ...; a_n; ...;

б) члены геометрической прогрессии 0,5; 1; 2; 4; ...; b_n; ... .

▶ а) Формулу n-го члена арифметической прогрессии можно записать в виде $a_n = dn + (a_1 - d)$. Этой формулой задаётся линейная функция. Члены арифметической прогрессии изображаются на координатной плоскости точками с координатами $(1;\ a_1)$, $(2;\ a_2)$, $(3;\ a_3)$ и т. д., лежащими на прямой вида $y = kx + l$, где $k = d$, $l = a_1 - d$.
На рисунке 71, *а* построены точки, изображающие на координатной плоскости первые шесть членов арифметической прогрессии

$$0{,}5;\ 2;\ 3{,}5;\ 5;\ 6{,}5;\ 8;\ \ldots\ .$$

Они лежат на прямой $y = 1{,}5x - 1$ на одинаковом расстоянии друг от друга.

б) Формулу n-го члена геометрической прогрессии можно записать в виде $b_n = \frac{b_1}{q} \cdot q^n$. Значит, геометрическую прогрессию можно задать формулой вида $y = ca^n$. Функцию, задаваемую формулой вида $y = ca^x$, называют *показательной* или *экспоненциальной функцией*. На координатной плоскости члены геометрической прогрессии (b_n) со знаменателем q, где $q > 0$, $q \neq 1$, изображаются точками с абсциссами 1, 2, 3, ..., n, ..., расположенными на кривой, являющейся графиком показательной функции $y = ca^x$, где $c = \frac{b_1}{q}$, $a = q$.

На рисунке 71, *б* построены точки, изображающие на координатной плоскости первые пять членов геометрической прогрессии

$$0{,}5;\ 1;\ 2;\ 4;\ 8;\ \ldots\ .$$

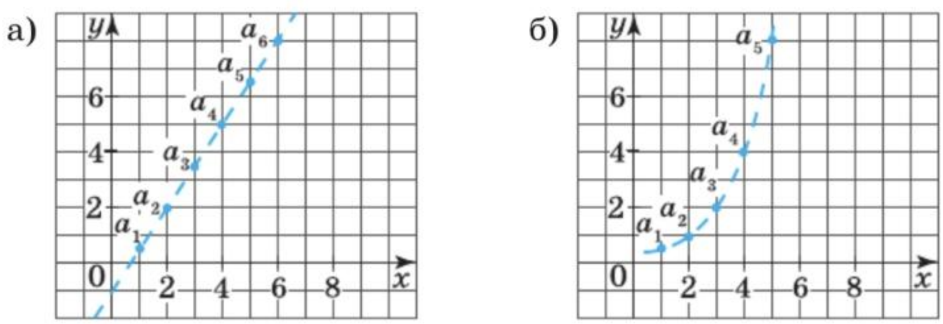


Рис. 71

Эти точки имеют координаты (1; 0,5), (2; 1), (3; 2), (4; 4), (5; 8) и расположены на кривой, являющейся графиком функции $y = 0{,}25 \cdot 2^x$. С возрастанием x расстояние между точками, изображающими члены последовательности, увеличивается, и они резко уходят вверх. ◁

В рассмотренных случаях говорят о *линейном росте* членов арифметической прогрессии и об *экспоненциальном росте* членов геометрической прогрессии.

Пример 4. Вкладчик положил в банк 500 000 р. на счёт, по которому сумма вклада ежегодно возрастает на 8%. Какая сумма будет у него на счету через 6 лет?

▶ Начальная сумма вклада составляла 500 000 р. Через год эта сумма возрастёт на 8% и составит 108% от 500 000 р., т. е. будет равна $500\,000 \cdot 1{,}08$ р. Через 2 года накопленная сумма составит $(500\,000 \cdot 1{,}08) \cdot 1{,}08$ р., т. е. $500\,000 \cdot 1{,}08^2$ р. Через 3 года на счету у вкладчика будет $(500\,000 \cdot 1{,}08^2) \cdot 1{,}08 = 500\,000 \cdot 1{,}08^3$ р. и т. д.

Таким образом, мы имеем дело с геометрической прогрессией

$$500\,000,\ 500\,000 \cdot 1{,}08,\ 500\,000 \cdot 1{,}08^2,\ 500\,000 \cdot 1{,}08^3,\ \ldots .$$

Сумма, накопленная на счету у вкладчика, через 6 лет будет равна седьмому члену этой прогрессии, т. е. составит

$$500\,000 \cdot 1{,}08^6.$$

Выполнив вычисления, найдём, что

$$500\,000 \cdot 1{,}08^6 \approx 793\,437.$$

(При выполнении вычислений удобно использовать калькулятор.) Значит, на счету у вкладчика через 6 лет окажется сумма, приближённо равная 793 437 р. ◁

В рассмотренном примере нам приходилось вычислять один и тот же процент от величины, найденной на предыдущем шаге. В таких случаях говорят, что мы имеем дело со *сложными процентами*.

Геометрическая прогрессия обладает следующим свойством:

> квадрат любого члена геометрической прогрессии, начиная со второго, равен произведению предыдущего и последующего её членов.

● Действительно, если последовательность (b_n) является геометрической прогрессией, то

$$b_n = b_{n-1}q,\ b_{n+1} = b_nq.$$

Так как все члены геометрической прогрессии отличны от нуля, то отсюда следует, что

$$\frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{b_{n+1}}{b_n},$$

$$\boldsymbol{b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}}. \bigcirc$$

Верно и обратное утверждение:

если в последовательности чисел, отличных от нуля, квадрат каждого члена, начиная со второго, равен произведению предыдущего и последующего членов, то эта последовательность является геометрической прогрессией.

Докажите это самостоятельно.

Заметим, что из равенства $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$, выражающего свойство геометрической прогрессии, следует, что $|b_n| = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$. Таким образом, *модуль любого члена геометрической прогрессии, начиная со второго, является средним геометрическим предыдущего и последующего членов*.

Упражнения

589. Найдите первые пять членов геометрической прогрессии (b_n), если:

а) $b_1 = 6$, $q = 2$; в) $b_1 = -24$, $q = -1{,}5$;

б) $b_1 = -16$, $q = \frac{1}{2}$; г) $b_1 = 0{,}4$, $q = \sqrt{2}$.

590. Последовательность (c_n) — геометрическая прогрессия, первый член которой равен c_1, а знаменатель равен q. Выразите через c_1 и q:

а) c_6; б) c_{20}; в) c_{125}; г) c_k; д) c_{k+3}; е) c_{2k}.

591. Последовательность (x_n) — геометрическая прогрессия. Найдите:

а) x_7, если $x_1 = 16$, $q = \frac{1}{2}$; г) x_6, если $x_1 = -125$, $q = 0{,}2$;

б) x_8, если $x_1 = -810$, $q = \frac{1}{3}$; д) x_5, если $x_1 = \frac{3}{4}$, $q = \frac{2}{3}$;

в) x_{10}, если $x_1 = \sqrt{2}$, $q = -\sqrt{2}$; е) x_4, если $x_1 = 1{,}8$, $q = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

592. Изобразите на координатной плоскости первые пять членов:

а) арифметической прогрессии 1,5; 2,5; 3,5; ... ;

б) геометрической прогрессии 8; 4; 2; ... .

593. Найдите седьмой и n-й члены геометрической прогрессии:

а) $2; -6; \ldots;$ в) $-0{,}125; 0{,}25; \ldots;$

б) $-40; -20; \ldots;$ г) $-10; 10; \ldots .$

594. Найдите шестой и n-й члены геометрической прогрессии:

а) $48; 12; \ldots;$ в) $-0{,}001; -0{,}01; \ldots;$

б) $\frac{64}{9}; -\frac{32}{3}; \ldots;$ г) $-100; 10; \ldots .$

595. В треугольнике ABC (рис. 72) провели среднюю линию A_1C_1, в треугольнике A_1BC_1 также провели среднюю линию A_2C_2, во вновь образовавшемся треугольнике A_2BC_2 снова провели среднюю линию A_3C_3 и т. д. Найдите площадь треугольника A_9BC_9, если известно, что площадь треугольника ABC равна 768 см^2.

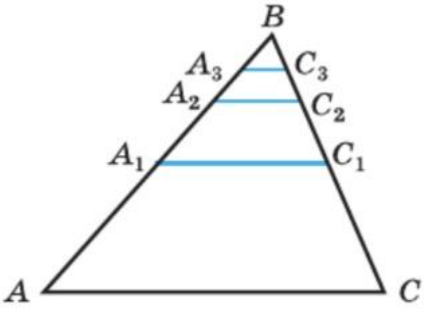


Рис. 72

596. Найдите первый член геометрической прогрессии (b_n), если:

а) $b_6 = 3$, $q = 3$; б) $b_5 = 17\frac{1}{2}$, $q = -2\frac{1}{2}$.

597. Найдите знаменатель геометрической прогрессии (c_n), если:

а) $c_5 = -6$, $c_7 = -54$; б) $c_6 = 25$, $c_8 = 4$.

598. Последовательность (x_n) — геометрическая прогрессия. Найдите:

а) x_1, если $x_6 = 0{,}32$, $q = 0{,}2$; б) q, если $x_3 = -162$, $x_5 = -18$.

599. Последовательность (b_n) — геометрическая прогрессия. Найдите:

а) b_6, если $b_1 = 125$, $b_3 = 5$;

б) b_7, если $b_1 = -\frac{2}{9}$, $b_3 = -2$;

в) b_1, если $b_4 = -1$, $b_6 = -100$.

600. Между числами 2 и 162 вставьте такие три числа, которые вместе с данными числами образуют геометрическую прогрессию.

601. Геометрическая прогрессия (x_n) состоит из четырёх членов: 2, a, b, $\frac{1}{4}$. Найдите a и b.

602. Найдите шестой член геометрической прогрессии (b_n), если известно, что $b_2 = 6$, $b_4 = 24$.

603. Население города составляет 60 тысяч человек. За последние годы наблюдается ежегодный прирост населения на 2%. Каким будет население города через 5 лет, если эта тенденция сохранится?

604. (*Для работы в парах.*) Ежегодный доход по вкладу «Юбилейный» составляет 6%. Первоначальный вклад был равен 80 000 р. Какая сумма будет на счету у вкладчика:

а) через 4 года; б) через 6 лет?

1) Обсудите, с какой последовательностью мы имеем дело в этой задаче.
2) Распределите, кто выполняет задание а), а кто — задание б), и выполните расчёты, используя калькулятор.
3) Проверьте друг у друга, правильно ли выполнены задания, и исправьте ошибки, если они допущены.

605. Екатерина Михайловна открыла два вклада в разных банках. В первый банк она положила 100 000 р. под 6% годовых на 3 года, а во второй банк — 80 000 р. под 10% годовых на 2 года. В каком банке её доход по вкладу в итоге окажется больше и на сколько?

606. На опытном участке леса ежегодный прирост древесины составляет 10%. Какое количество древесины будет на этом участке через 6 лет, если первоначальное количество древесины равно $2{,}0 \cdot 10^4$ м^3?

607. После каждого движения поршня разрежающего насоса из сосуда удаляется 20% находящегося в нём воздуха. Определите давление воздуха внутри сосуда после шести движений поршня, если первоначально давление было равно 760 мм рт. ст.

608. Дан равносторонний треугольник со стороной 8 см. Из его высот построен второй треугольник. Из высот второго треугольника построен третий и т. д. Докажите, что периметры треугольников образуют геометрическую прогрессию, и найдите периметр шестого треугольника.

609. В равносторонний треугольник, сторона которого равна 16 см, вписан другой треугольник, вершинами которого являются середины сторон первого. Во второй треугольник таким же способом вписан третий и т. д. Докажите, что периметры треугольников образуют геометрическую прогрессию. Найдите периметр восьмого треугольника.

610. Сумма трёх чисел, образующих арифметическую прогрессию, равна 21. Найдите эти числа, если известно, что, уменьшив второе из них на 1 и увеличив третье на 1, мы получим геометрическую прогрессию.

611. Сумма трёх положительных чисел, образующих арифметическую прогрессию, равна 15. Найдите эти числа, если известно, что, увеличив первое и второе числа на 1, а третье на 4, мы получим геометрическую прогрессию.

612. (*Задача-исследование.*) Могут ли длины сторон прямоугольного треугольника составлять геометрическую прогрессию?

1) Сделайте чертёж и введите необходимые обозначения.

2) Какую теорему из курса геометрии можно использовать при ответе на вопрос задачи?

3) Составьте уравнение и решите его.

4) Сформулируйте вывод и выполните проверку.

П

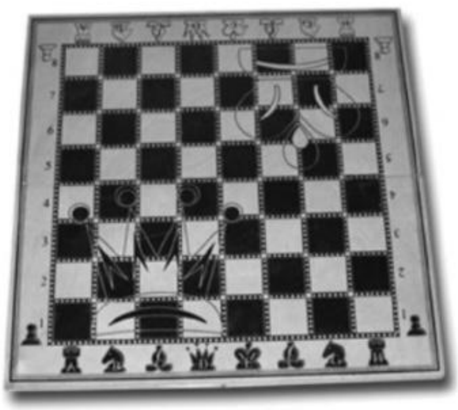
613. Найдите координаты точки, принадлежащей графику уравнения $x^2 - y^2 = 30$, если известно, что их сумма равна 5.

614. Решите неравенство:

а) $2x^2 - 13x - 34 \geqslant 0$; б) $10x - 4x^2 < 0$; в) $\dfrac{x-4}{2x+5} \leqslant 0$.

30. Формула суммы первых n членов геометрической прогрессии

Согласно легенде, индийский принц решил наградить изобретателя шахмат и предложил ему самому выбрать награду. Изобретатель шахмат попросил в награду за своё изобретение столько пшеничных зёрен, сколько их получится, если на первую клетку шахматной доски положить одно зерно, на вторую — в 2 раза больше, т. е. 2 зерна, на третью — ещё в 2 раза больше, т. е. 4 зерна, и так далее до 64-й клетки. Каково же было удивление принца, когда он узнал, что такую, казалось бы, скромную просьбу невозможно выполнить.



Действительно, число зёрен, о которых идёт речь, является суммой шестидесяти четырёх членов геометрической прогрессии, первый член которой равен 1, а знаменатель равен 2. Обозначим эту сумму через S:

$$S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{62} + 2^{63}.$$

Умножим обе части записанного равенства на знаменатель прогрессии, получим

$$2S = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots + 2^{63} + 2^{64}.$$

Вычтем почленно из второго равенства первое и проведём упрощения:

$$2S - S = (2 + 2^2 + \dots + 2^{63} + 2^{64}) - (1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{63}),$$

$$S = 2^{64} - 1.$$

Можно подсчитать, что масса такого числа пшеничных зёрен больше триллиона тонн. Это заведомо превосходит количество пшеницы, собранной человечеством до настоящего времени.

Выведем теперь формулу суммы первых n членов произвольной геометрической прогрессии. Воспользуемся тем же приёмом, с помощью которого была вычислена сумма S.

Пусть дана геометрическая прогрессия (b_n). Обозначим сумму первых n её членов через S_n:

$$S_n = b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_{n-1} + b_n. \qquad (1)$$

Умножим обе части этого равенства на q:

$$S_n q = b_1 q + b_2 q + b_3 q + \dots + b_{n-1} q + b_n q.$$

Учитывая, что $b_1 q = b_2$, $b_2 q = b_3$, $b_3 q = b_4$, ... , $b_{n-1} q = b_n$, получим

$$S_n q = b_2 + b_3 + b_4 + \dots + b_n + b_n q. \qquad (2)$$

Вычтем почленно из равенства (2) равенство (1) и приведём подобные члены:

$$S_n q - S_n = (b_2 + b_3 + \dots + b_n + b_n q) - (b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1} + b_n) = b_n q - b_1,$$

$$S_n (q - 1) = b_n q - b_1.$$

Отсюда следует, что при $q \neq 1$

$$\boxed{S_n = \frac{b_n q - b_1}{q - 1}.} \qquad \text{(I)}$$

Мы получили *формулу суммы первых n членов геометрической прогрессии*, в которой $q \neq 1$. Если $q = 1$, то все члены прогрессии равны первому члену и $S_n = nb_1$.

При решении многих задач удобно пользоваться формулой суммы первых n членов геометрической прогрессии, записанной в другом виде. Подставим в формулу (I) вместо b_n выражение $b_1 q^{n-1}$. Получим

$$\boxed{S_n = \frac{b_1 (q^n - 1)}{q - 1}, \text{ если } q \neq 1.} \qquad \text{(II)}$$

Пример 1. Найдём сумму первых десяти членов геометрической прогрессии (b_n), в которой $b_1 = 3$ и $q = \frac{1}{2}$.

▶ Так как известны первый член и знаменатель прогрессии, то удобно воспользоваться формулой (II). Получим

$$S_{10} = \frac{b_1(q^{10} - 1)}{q - 1} = \frac{3\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{10} - 1\right)}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{3\left(\frac{1}{1024} - 1\right)}{-\frac{1}{2}} = 6 - \frac{3}{512} = 5\frac{509}{512}. \quad \triangleleft$$

Пример 2. Найдём сумму

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1},$$

где $x \neq 1$, слагаемые которой являются последовательными членами геометрической прогрессии $1;\ x;\ x^2;\ \ldots$.

▶ Первый член прогрессии равен 1, а знаменатель равен x. Так как x^{n-1} является членом этой прогрессии с номером n, то задача состоит в нахождении суммы первых n её членов. Воспользуемся формулой (I):

$$S_n = \frac{x^{n-1}x - 1}{x - 1} = \frac{x^n - 1}{x - 1}.$$

Таким образом, если $x \neq 1$, то

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} = \frac{x^n - 1}{x - 1}. \quad \triangleleft$$

Пример 3. Найдём сумму первых шести членов геометрической прогрессии (b_n), если известно, что $b_3 = 12$ и $b_5 = 48$.

▶ Зная b_3 и b_5, можно найти знаменатель прогрессии q. Так как $b_5 = b_3 q^2$, то

$$q^2 = \frac{b_5}{b_3} = \frac{48}{12} = 4.$$

Значит,

$$q = 2 \text{ или } q = -2.$$

Таким образом, существуют две прогрессии, удовлетворяющие условию задачи.
Если $q = -2$, то

$$b_1 = \frac{b_3}{q^2} = 3 \text{ и } S_6 = \frac{b_1(q^6 - 1)}{q - 1} = \frac{3((-2)^6 - 1)}{-2 - 1} = -63.$$

Если $q = 2$, то

$$b_1 = 3 \text{ и } S_6 = \frac{3(2^6 - 1)}{2 - 1} = 189. \quad \triangleleft$$

Упражнения

615. Найдите сумму первых пяти членов геометрической прогрессии, у которой:

а) $b_1 = 8$, $q = \frac{1}{2}$; б) $b_1 = 500$, $q = \frac{1}{5}$.

616. Найдите сумму первых шести членов геометрической прогрессии:

а) $3; -6; \ldots;$ б) $54; 36; \ldots;$ в) $-32; -16; \ldots;$ г) $1; -\frac{1}{2}; \ldots.$

617. Вычислите сумму первых девяти членов геометрической прогрессии, если:

а) $c_1 = -4$, $q = 3$; в) $c_1 = -2$, $q = 2$;

б) $c_1 = 1$, $q = -2$; г) $c_1 = 32$, $q = -0{,}5$.

618. (*Для работы в парах.*) Докажите, что последовательность (b_n) является геометрической прогрессией, и найдите сумму первых n её членов, если:

а) $b_n = 0{,}2 \cdot 5^n$; б) $b_n = 3 \cdot 2^{n-1}$; в) $b_n = 3^{1+n}$; г) $b_n = 2^{n+2}$.

1) Обсудите ход доказательства.
2) Распределите, кто выполняет задания а) и в), а кто — задания б) и г), и выполните их.
3) Проверьте друг у друга, правильно ли выполнены задания, и исправьте ошибки, если они допущены.

619. Найдите сумму первых n членов геометрической прогрессии:

а) $1; 3; 3^2; \ldots;$ г) $1; -x; x^2; \ldots$, где $x \neq -1$;

б) $2; 2^2; 2^3; \ldots;$ д) $1; x^2; x^4; \ldots$, где $x \neq \pm 1$;

в) $\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \ldots;$ е) $1; -x^3; x^6; \ldots$, где $x \neq -1$.

620. Найдите сумму первых семи членов геометрической прогрессии (b_n), если:

а) $b_7 = 72{,}9$, $q = 1{,}5$; в) $b_3 = 64$, $q = \frac{1}{2}$;

б) $b_5 = \frac{16}{9}$, $q = \frac{2}{3}$; г) $b_4 = 81$, $q = -\frac{1}{3}$.

621. Найдите сумму первых пяти членов геометрической прогрессии (x_n), если:

а) $x_5 = 1\frac{1}{9}$, $q = \frac{1}{3}$; б) $x_4 = 121{,}5$, $q = -3$.

622. Первый член геометрической прогрессии равен 2, а пятый равен 162. Найдите сумму первых шести членов этой прогрессии, если известно, что её члены с чётными номерами отрицательны, а с нечётной — положительны.

623. Найдите сумму первых семи членов геометрической прогрессии (b_n), в которой $b_2 = 6$ и $b_4 = 54$, если известно, что все её члены положительны.

624. В геометрической прогрессии, все члены которой положительны, сумма первых двух членов равна 8, а сумма третьего и четвёртого членов равна 72. Сколько членов этой прогрессии, начиная с первого, надо сложить, чтобы получить в сумме 242?

625. Найдите первый член геометрической прогрессии (b_n), если $b_7 = 0{,}012$ и $q = 0{,}2$. Запишите формулу n-го члена этой прогрессии.

П

626. Сократите дробь: а) $\dfrac{2^{n+2} - 2^{n-2}}{2^n}$; б) $\dfrac{25^n - 5^{2n-1}}{5^{2n}}$.

627. Решите неравенство: а) $1{,}5x - x^2 \leqslant 0$; б) $x^2 + x + 6 > 0$.

628. Какую фигуру задаёт на координатной плоскости система неравенств

$$\begin{cases} 3x - y \geqslant 0, \\ y - 5 \geqslant 0? \end{cases}$$

Контрольные вопросы и задания

1. Сформулируйте определение геометрической прогрессии. Что называют знаменателем геометрической прогрессии?
2. Как выражается квадрат любого члена геометрической прогрессии, начиная со второго, через предыдущий и последующий члены?
3. Запишите формулы n-го члена и суммы первых n членов геометрической прогрессии.

Для тех, кто хочет знать больше

31. Метод математической индукции

Пусть дана последовательность (a_n), в которой

$$a_1 = 4,\ a_{n+1} = a_n + 2n + 3.$$

Попытаемся задать её формулой n-го члена.

Вычислим первые несколько членов последовательности:

$$a_1 = 4,\ a_2 = 4 + 2 \cdot 1 + 3 = 9,$$
$$a_3 = 9 + 2 \cdot 2 + 3 = 16.$$

Значит, последовательность (a_n) начинается так:

$$4,\ 9,\ 16,\ \ldots .$$

Естественно предположить, что эту последовательность можно задать формулой

$$a_n = (n + 1)^2.$$

Формула верна для $n = 1,\ 2,\ 3$. Однако, как долго бы мы ни продолжали вычисления, они не дают оснований утверждать, что эта формула верна при любом натуральном n. Поэтому воспользуемся специальным методом рассуждений.

Предположим, что формула верна при $n = k$, т. е.

$$a_k = (k + 1)^2,$$

и докажем, что она также верна при $n = k + 1$, т. е. докажем, что

$$a_{k+1} = (k + 2)^2.$$

По условию

$$a_{k+1} = a_k + 2k + 3.$$

Заменив a_k на $(k + 1)^2$, получим

$$a_{k+1} = (k + 1)^2 + 2k + 3 = k^2 + 2k + 1 + 2k + 3 = \\ = k^2 + 4k + 4 = (k + 2)^2.$$

Значит,

$$a_{k+1} = (k + 2)^2,$$

т. е. если формула верна для $n = k$, то она верна и для $n = k + 1$.

Мы убедились, что формула верна для $n = 1$. Следовательно, она верна и для $n = 1 + 1$, т. е. для $n = 2$. Из того, что формула верна для $n = 2$, следует, что она верна и для $n = 2 + 1$, т. е. для $n = 3$. (Заметим, что в справедливости формулы для $n = 2$ и $n = 3$ нас убедили и непосредственные расчёты.) Из справедливости формулы для $n = 3$ вытекает её справедливость для $n = 3 + 1$, т. е. для $n = 4$. Из того, что формула верна для $n = 4$, следует, что она верна для $n = 5$ и т. д.

Ясно, что, строя такую цепочку рассуждений, мы дойдём до любого натурального числа. Значит, формула

$$a_n = (n + 1)^2$$

верна при любом натуральном n, т. е. последовательность (a_n) можно задать этой формулой.

Применённый метод доказательства называется *методом математической индукции*. Он основан на следующем положении, известном под названием *принцип математической индукции*:

утверждение о том, что некоторый факт имеет место при любом натуральном n, верно, если выполняются два условия:
а) утверждение верно при $n = 1$;
б) из справедливости утверждения для $n = k$ следует его справедливость для $n = k + 1$.

Доказательство некоторого утверждения методом математической индукции состоит из двух частей. Сначала проверяют его справедливость при $n = 1$. Затем, предположив, что утверждение верно при $n = k$, доказывают, что оно верно и при $n = k + 1$.

Рассмотрим примеры применения метода математической индукции.

Пример 1. При решении некоторых задач из геометрии и механики Архимед (287—212 до н. э.) вывел формулу

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Докажем её справедливость.

▶ При $n = 1$ формула верна:

$$1^2 = \frac{1(1+1)(2+1)}{6}.$$

Допустим, что эта формула верна для $n = k$, т. е.

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}.$$

Докажем, что отсюда следует её справедливость для $n = k + 1$, т. е.

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}.$$

Имеем

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 =$$

$$= \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6} = \frac{(k+1)(2k^2 + k + 6k + 6)}{6} =$$

$$= \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6}.$$

Разложив на множители квадратный трёхчлен

$$2k^2 + 7k + 6,$$

получим

$$2k^2 + 7k + 6 = (k + 2)(2k + 3).$$

Значит,

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 + (k + 1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}.$$

Таким образом, справедливость формулы Архимеда доказана. ◁

Пример 2. Докажем, что при любом натуральном n сумма $13^n + 5$ кратна 6.

▶ При $n = 1$ утверждение верно, так как $13^1 + 5 = 18$, а число 18 кратно 6.

Допустим, что утверждение верно при $n = k$, т. е. сумма $13^k + 5$ кратна 6, и докажем, что из этого следует его справедливость для $n = k + 1$, т. е. сумма $13^{k+1} + 5$ также кратна 6.

Имеем

$$13^{k+1} + 5 = 13^k \cdot 13 + 5 = 13^k(12 + 1) + 5 =$$
$$= 13^k \cdot 12 + (13^k + 5).$$

В полученной сумме каждое слагаемое кратно 6. Значит, сумма $13^{k+1} + 5$ при любом натуральном k кратна 6.

В силу принципа математической индукции утверждение доказано. ◁

Упражнения

629. Проверьте, что при $n = 1, 2, 3$ верна формула

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Докажите, что эта формула верна при любом натуральном n.

630. Докажите, что при любом натуральном n верно равенство

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + n(n + 1) = \frac{1}{3}n(n + 1)(n + 2).$$

631. Докажите, что при любом натуральном n сумма

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}$$

может быть вычислена по формуле $S_n = \frac{n}{n+1}$.

632. Докажите, что при любом натуральном n верно равенство

$$1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + \ldots + n(3n + 1) = n(n + 1)^2.$$

633. Пусть (b_n) — последовательность, в которой

$$b_1 = -3,\ b_{k+1} = b_k + 6k + 3.$$

Докажите, что эту последовательность можно задать формулой $b_n = 3n^2 - 6$.

634. Докажите, что последовательность (a_n), в которой $a_1 = -5$, $a_{k+1} = a_k + 10k + 5$, можно задать формулой $a_n = 5n^2 - 10$.

635. Докажите, что разность $49^n - 1$ кратна 48 при любом натуральном n.

636. Пусть (u_n) — последовательность чисел Фибоначчи, т. е. $u_1 = 1$, $u_2 = 1$, $u_{n+2} = u_n + u_{n+1}$ при $n > 2$. Докажите, что эта последовательность обладает следующим свойством:

а) $u_1 + u_3 + u_5 + \ldots + u_{2n-1} = u_{2n}$;

б) $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + \ldots + u_n^2 = u_n \cdot u_{n+1}$.

Дополнительные упражнения к главе V

К параграфу 9

637. Вычислите первые пять членов последовательности (c_n), заданной формулой:

а) $c_n = -2n^2 + 7$;

б) $c_n = \dfrac{100}{n^2 - 5}$;

в) $c_n = -2{,}5 \cdot 2^n$;

г) $c_n = 3{,}2 \cdot 2^{-n}$;

д) $c_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{4n}$;

е) $c_n = \dfrac{1 - (-1)^n}{2n + 1}$.

638. Задайте формулой n-го члена последовательность (a_n), если:

а) (a_n) — последовательность натуральных чисел, кратных 5;

б) (a_n) — последовательность натуральных чисел, которые при делении на 5 дают в остатке 1.

639. Вычислите первые несколько членов последовательности (y_n), если:

а) $y_1 = -3,\ y_{n+1} - y_n = 10$;

б) $y_1 = 10,\ y_{n+1} \cdot y_n = 2{,}5$;

в) $y_1 = 1{,}5,\ y_{n+1} - y_n = n$;

г) $y_1 = -4,\ y_{n+1} : y_n = -n^2$.

640. Найдите члены арифметической прогрессии (a_n), обозначенные буквами:

а) a_1; a_2; -19; $-11{,}5$; a_5; ... ;

б) a_1; $-8{,}5$; a_3; $-4{,}5$; a_5; a_6; ... .

641. Периметр треугольника равен 24 см, причём длины его сторон образуют арифметическую прогрессию. Можно ли определить длину хотя бы одной из сторон? Какие целые значения могут принимать длины сторон треугольника, выраженные в сантиметрах?

642. Углы треугольника образуют арифметическую прогрессию. Докажите, что один из них равен 60°.

643. Верно ли утверждение, что если (a_n) — арифметическая прогрессия, то:

а) последовательность a_2; a_4; ... ; a_{2n}; ... является арифметической прогрессией;
б) последовательность $a_1 - 1$; $a_2 - 1$; ... ; $a_n - 1$; ... является арифметической прогрессией;
в) последовательность $2a_1$; $2a_2$; ... ; $2a_n$; ... является арифметической прогрессией;
г) последовательность a_1^2; a_2^2; ... ; a_n^2; ... является арифметической прогрессией?

644. Последовательность (a_n) — арифметическая прогрессия. Найдите:

а) a_{12}, если $a_1 = 9\sqrt{3} - 2$ и $d = 2 - \sqrt{3}$;

б) a_8, если $a_1 = \dfrac{5\sqrt{3} - 7}{3}$ и $d = \dfrac{\sqrt{3} - 2}{3}$.

645. Найдите номер члена арифметической прогрессии (a_n):

а) равного −2,94, если $a_1 = 1{,}26$ и $d = -0{,}3$;
б) равного −9,7, если $a_5 = -3{,}7$ и $d = -0{,}6$.

646. Дана арифметическая прогрессия, первый член которой равен $2\frac{3}{4}$, а разность равна $\frac{2}{5}$. Является ли членом этой прогрессии число:

а) $14\frac{3}{4}$; б) 8,35?

647. Найдите:

а) первый положительный член арифметической прогрессии

$$-10\frac{1}{2};\ -10\frac{1}{4};\ -10;\ \ldots;$$

б) первый отрицательный член арифметической прогрессии

$$8\frac{1}{2};\ 8\frac{1}{3};\ 8\frac{1}{6};\ \ldots.$$

648. Докажите, что если (y_n) — арифметическая прогрессия, то:

а) $y_2 + y_7 = y_4 + y_5$;
б) $y_{n-5} + y_{n+10} = y_n + y_{n+5}$, где $n > 5$.

649. Докажите, что если d — разность арифметической прогрессии, а x_m и x_n — члены этой прогрессии, причём $m \neq n$, то $d = \frac{x_m - x_n}{m - n}$.

650. Дана арифметическая прогрессия (a_n). Найдите:

а) d, если $a_{20} = 1{,}7$ и $a_{37} = 0$;

б) a_{100}, если $a_{10} = 270$ и $d = -3$.

651. Найдите сумму первых десяти членов арифметической прогрессии:

а) $\frac{2}{3}$; $\frac{3}{4}$; ... ; б) $\sqrt{3}$; $\sqrt{12}$; ... .

652. Найдите сумму, слагаемыми которой являются последовательные члены арифметической прогрессии:

а) $2 + 6 + 10 + ... + 198$;

б) $95 + 85 + 75 + ... + (-155)$.

653. На одной стороне угла от вершины отложены двенадцать равных отрезков, и через их концы (кроме вершины угла) проведены параллельные прямые, пересекающие другую сторону угла. Найдите сумму длин всех параллельных отрезков, заключённых между сторонами угла, если длина наименьшего из них равна 3 см.

654. В арифметической прогрессии (a_n):

а) $d = -0{,}4$, $n = 12$, $a_n = 2{,}4$; найдите a_1 и S_n;

б) $a_1 = -35$, $d = 5$, $S_n = 250$; найдите n и a_n;

в) $d = \frac{1}{2}$, $a_n = 50$, $S_n = 2525$; найдите a_1 и n;

г) $a_1 = -\frac{1}{2}$, $a_n = -29\frac{1}{2}$, $S_n = -450$; найдите d и n.

655. Найдите разность арифметической прогрессии (x_n) и её первый член, если десятый член этой прогрессии равен 1 и сумма первых шестнадцати её членов равна 4.

656. Найдите сумму:

а) всех двузначных чисел;

б) всех трёхзначных чисел.

657. Найдите сумму:

а) всех натуральных чётных чисел, не превосходящих 200;

б) всех натуральных нечётных чисел, не превосходящих 150;

в) всех натуральных чисел, кратных 3, заключённых в промежутке от 100 до 200.

658. Какова сумма натуральных чисел:

а) меньших 100 и не кратных 3;

б) больших 50, но меньших 150 и не кратных 5?

659. Найдите натуральное число, которое:

а) в 5 раз меньше суммы предшествующих ему натуральных чисел;

б) равно сумме предшествующих ему натуральных чисел.

660. Члены арифметической прогрессии

$$2;\ 5;\ 8;\ \ldots$$

с чётными номерами заменили противоположными им числами. В результате получили последовательность (x_n). Напишите формулу n-го члена этой последовательности и найдите сумму первых пятидесяти её членов.

661. Упростите выражение:

а) $\dfrac{x \cdot x^2 \cdot x^3 \cdot \ldots \cdot x^n}{x \cdot x^3 \cdot x^5 \cdot \ldots \cdot x^{2n-1}}$;

б) $\dfrac{x^2 \cdot x^4 \cdot x^6 \cdot \ldots \cdot x^{2n}}{x \cdot x^2 \cdot x^3 \cdot \ldots \cdot x^n}$.

662. Найдите:

а) сумму всех положительных членов арифметической прогрессии 8,2; 7,4; ... ;

б) сумму всех отрицательных членов арифметической прогрессии –6,5; –6; ... .

663. Найдите сумму первых сорока членов арифметической прогрессии, если сумма первых десяти её членов равна 100 и сумма первых тридцати её членов равна 900.

664. Найдите пятидесятый член арифметической прогрессии, если:

а) $S_{20} = 1000$, $S_{40} = 10\,000$;

б) $S_5 = 0{,}5$, $S_{15} = -81$.

665. Запишите формулу суммы первых n членов последовательности (a_n), если:

а) $a_n = 2n + 1$; б) $a_n = 3 - n$.

666. Является ли последовательность (x_n) арифметической прогрессией, если сумму первых n её членов можно найти по формуле $S_n = n^2 - 8n$? Найдите пятый член этой последовательности.

667. Является ли последовательность (x_n) арифметической прогрессией, если сумма первых n её членов может быть найдена по формуле:

а) $S_n = -n^2 + 3n$; в) $S_n = n^2 + 2n - 8$;

б) $S_n = 2n^2 - 1$; г) $S_n = 6n + 5$?

К параграфу 10

668. Найдите обозначенные буквами члены геометрической прогрессии (b_n):

а) b_1; b_2; 225; –135; 81; b_6; ... ;

б) b_1; b_2; b_3; 36; 54; ... .

669. Последовательность (x_n) — геометрическая прогрессия. Является ли геометрической прогрессией последовательность:

а) $x_1 + 1$; $x_2 + 1$; ... ; $x_n + 1$; ... ;

б) $3x_1$; $3x_2$; ... ; $3x_n$; ...;

в) x_1^2; x_2^2; ... ; x_n^2; ... ;

г) $\frac{1}{x_1}$; $\frac{1}{x_2}$; ... ; $\frac{1}{x_n}$; ... ?

670. Существуют ли три числа, которые составляют одновременно арифметическую и геометрическую прогрессии?

671. Является ли геометрической прогрессией последовательность (x_n), если:

а) $x_n = 2^n$;

б) $x_n = 3^{-n}$;

в) $x_n = n^2$;

г) $x_n = ab^n$, где $a \neq 0$, $b \neq 0$?

672. Известны первый член и знаменатель геометрической прогрессии (b_n). Найдите b_n, если:

а) $b_1 = \frac{243}{256}$, $q = \frac{2}{3}$, $n = 8$;

б) $b_1 = \sqrt{\frac{2}{3}}$, $q = -\sqrt{6}$, $n = 5$.

673. Первый и девятый члены геометрической прогрессии равны соответственно 135 и $\frac{5}{3}$. Найдите заключённые между ними члены этой прогрессии.

674. Последовательность (b_n) — геометрическая прогрессия. Докажите, что:

а) если $b_1 > 0$ и $q > 1$, то каждый следующий член прогрессии больше предыдущего;

б) если $b_1 > 0$ и $0 < q < 1$, то каждый следующий член прогрессии меньше предыдущего;

в) если $b_1 < 0$ и $q > 1$, то каждый следующий член прогрессии меньше предыдущего;

г) если $b_1 < 0$ и $0 < q < 1$, то каждый следующий член прогрессии больше предыдущего.

Для каждого из рассмотренных случаев приведите пример.

675. Докажите, что если (a_n) — геометрическая прогрессия, то:

а) $a_2 \cdot a_6 = a_3 \cdot a_5$;

б) $a_{n-3} \cdot a_{n+8} = a_n \cdot a_{n+5}$, где $n > 3$.

676. Докажите, что если b_n и b_m — члены геометрической прогрессии, знаменатель которой равен q, то $b_n = b_m q^{n-m}$.

677. В геометрической прогрессии (x_n):

а) $q = -\frac{1}{3}$, $n = 5$, $S_n = 20\frac{1}{3}$; найдите x_1 и x_n;

б) $x_1 = 11$, $x_n = 88$, $S_n = 165$; найдите q и n;

в) $x_1 = \frac{1}{2}$, $q = -\frac{1}{2}$, $S_n = \frac{21}{64}$; найдите n и x_n;

г) $q = \sqrt{3}$, $x_n = 18\sqrt{3}$, $S_n = 26\sqrt{3} + 24$; найдите x_1 и n.

678. Сумму первых n членов последовательности (x_n) можно найти по формуле

$$S_n = \frac{3}{4}(5^n - 1).$$

Докажите, что последовательность (x_n) — геометрическая прогрессия. Найдите знаменатель и первый член этой прогрессии.

679. Геометрическая прогрессия состоит из пятнадцати членов. Сумма первых пяти членов равна $\frac{11}{64}$, а сумма следующих пяти членов равна $-5\frac{1}{2}$. Найдите сумму последних пяти членов этой прогрессии.

680. Упростите выражение, применив формулу суммы первых n членов геометрической прогрессии:

а) $1 + x + x^2 + x^3 + x^4$, где $x \neq 1$ и $x \neq 0$;

б) $1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6$, где $x \neq -1$ и $x \neq 0$.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ КУРСА 7–9 КЛАССОВ

Вычисления

681. Найдите значение выражения:

а) $\dfrac{2-3x^2}{x^3}$ при $x = -\dfrac{1}{2}$;

б) $\dfrac{1-m^2}{3m^2-m}$ при $m = \dfrac{2}{3}$;

в) $\dfrac{10x^2-5y^2}{x+y}$ при $x = 1{,}4$, $y = -1{,}6$;

г) $\dfrac{abc}{a(b-c)}$ при $a = 1{,}5$, $b = 10$, $c = -2$.

682. а) Телевизор стоил 10 000 р. В апреле он подорожал на 30%, а в декабре подешевел на 40%. Сколько стал стоить телевизор в декабре?
б) Цену товара повысили на 30%, а через некоторое время снизили на 40%. На сколько процентов изменилась первоначальная цена товара?

683. К 200 г 40%-го раствора соли долили 300 г воды. Какой стала концентрация раствора соли?

684. а) Некоторое количество 15%-го раствора соли смешали с таким же количеством 45%-го раствора этой же соли. Какова концентрация получившегося раствора?
б) Некоторое количество 30%-го раствора соли смешали с вдвое большим количеством 15%-го раствора этой же соли. Какова концентрация получившегося раствора?

685. Имеется два сорта сливок — жирностью 10% и 20%. Их смешали в отношении 3 : 1. Какова жирность получившихся сливок?

686. а) Клиент банка внёс 80 000 р. на вклад с годовым доходом 5%. Какая сумма окажется у него на счету через 2 года, если он никаких сумм со счёта не снимал и дополнительных вложений не делал?
б) Клиент банка внёс 80 000 р. на вклад с годовым доходом 5%. Через год он положил на этот же вклад ещё 20 000 р. Какая сумма будет у него на счету через 2 года после открытия счёта в банке?

687. Упростите выражение:

а) $(\sqrt{15} + \sqrt{10}) \cdot 2\sqrt{5} - 5\sqrt{12}$;

б) $\dfrac{2\sqrt{70} - 2\sqrt{28}}{3\sqrt{35} - 3\sqrt{14}}$;

в) $(2\sqrt{12} - 3\sqrt{3})^2$;

г) $\dfrac{10 - 5\sqrt{3}}{10 + 5\sqrt{3}} + \dfrac{10 + 5\sqrt{3}}{10 - 5\sqrt{3}}$.

688. Упростите выражение $(5 - 2\sqrt{6})^2 - (3\sqrt{2} - 2\sqrt{3})(4\sqrt{2} + 8\sqrt{3})$.

689. Докажите, что:

а) $\dfrac{\sqrt{\sqrt{18} - 3} \cdot \sqrt{\sqrt{18} + 3}}{\sqrt{6}} = \sqrt{1{,}5}$;

б) $\dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{7 + \sqrt{24}} \cdot \sqrt{7 - \sqrt{24}}} = \sqrt{0{,}4}$.

690. Докажите равенство:

а) $\sqrt{19 - 6\sqrt{10}} = \sqrt{10} - 3$;

б) $\sqrt{23 - 8\sqrt{7}} = 4 - \sqrt{7}$.

691. Найдите значение выражения:

а) $3x^2 - 6x - 5$ при $x = 1 + \sqrt{2}$;

б) $\dfrac{x^2 - x - 5}{x - 1}$ при $x = \sqrt{5} + 1$.

692. Найдите значение выражения:

а) $0{,}3^{-3} + \left(\dfrac{3}{7}\right)^{-1} + (-0{,}5)^{-2} \cdot \dfrac{3}{4} + (-1)^{-8} \cdot 6$;

б) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2} - \left(\dfrac{1}{9}\right)^{-1} + \left(\dfrac{6}{17}\right)^{0} \cdot \dfrac{1}{8} - 0{,}25^{-2} \cdot 16$.

693. Верно ли высказывание:
а) простое число не может быть чётным;
б) простое число не имеет делителей;
в) квадрат чётного числа — число чётное?

694. а) Найдите пятнадцатый член арифметической прогрессии (a_n), если $a_2 = -6$, $a_3 = -2$.
б) Найдите сумму первых десяти членов арифметической прогрессии (x_n), если $x_2 = -2{,}4$ и $d = 1{,}2$.

695. Найдите двенадцатый член геометрической прогрессии (b_n), если $b_2 = -\frac{1}{32}$, $b_3 = \frac{1}{16}$.

696. Найдите сумму первых десяти членов геометрической прогрессии (x_n), если $x_2 = -32$ и $q = -\frac{1}{2}$.

697. Каждую из десятичных дробей

$$0{,}45;\ 2{,}53;\ 31{,}98$$

округлите до десятых, вычислите абсолютную и относительную погрешности приближённых значений.

698. Площадь Белого моря приближённо равна 91 тыс. км^2 (с точностью до 500 км^2). Оцените относительную погрешность приближённого значения.

Тождественные преобразования

699. Преобразуйте в многочлен:

а) $(x - 2y)(x + 2y) + 4y^2$;

б) $(2a - 3b)(2a + 3b) - 3a^2$;

в) $(5x - 1)^2 + 10x$;

г) $(3y + 4z)^2 - 8z(3y - 2z)$;

д) $(m - 2n)(m^2 + 2mn + 4n^2) + 6n^3$;

е) $(c^2 + 4d)(c^4 - 4c^2d + 16d^2) - c^2(c^4 - 1)$;

ж) $(3x - 4y)^2 - (2x - 7y)(4x + 2y)$;

з) $2x(2x + 3)^2 - (2x - 3)(4x^2 + 6x + 9)$.

700. Найдите значение выражения:

а) $8x^2(x - 4) - (2x - 3)(4x^2 + 6x + 9) - 17$ при $x = 0{,}5$;

б) $4a^2(3a - 2) - 3a(2a - 1)^2 - (2a - 5)(2a + 5)$ при $a = 3{,}3$;

в) $(9x^2 - 3xb + b^2)(3x + b) - 9x(3x^2 - b) - b^3$ при $x = -\frac{1}{3}$, $b = \frac{2}{3}$;

г) $x(3x - 2y)(3x + 2y) - x(3x + 2y)^2 + 2xy(5x + 2y)$ при $x = 0{,}5$, $y = -1$.

701. Докажите тождество:

а) $(a + 2b)(a - 2b)(a^2 + 4b^2) = a^4 - 16b^4$;

б) $(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1) = x^8 - 1$;

в) $(a - 2)(a + 2)(a^2 - 2a + 4)(a^2 + 2a + 4) = a^6 - 64$;

г) $(c^2 - c - 2)(c^2 + c - 2) = c^4 - 5c^2 + 4$.

702. Разложите на множители:

а) $12x^3 - 3x^2y - 18xy^2$;

б) $42a^5 - 6a^4 + 30a^3$;

в) $8ab - 14a - 12b + 21$;

г) $x^2 - 5x - 9xy + 45y$.

703. Разложите на множители:

а) $x^4 - 25y^2$; в) $8a^3 + c^3$; д) $9ab^2 - 16ac^2$;

б) $4b^2 - 0{,}01c^6$; г) $x^9 - 27$; е) $-20xy^3 + 45x^3y$.

704. Разложите на множители квадратный трёхчлен:

а) $x^2 - x - 42$; г) $16b^2 - 24b + 9$;

б) $y^2 + 9y + 18$; д) $6x^2 - x - 1$;

в) $81x^2 + 18x + 1$; е) $3a^2 - 13a - 10$.

705. Сократите дробь:

а) $\dfrac{21a^3 - 6a^2b}{12ab - 42a^2}$; е) $\dfrac{9x^2 - 25y^2}{9x^2 + 30xy + 25y^2}$;

б) $\dfrac{6m^3 + 3mn^2}{2m^3n + mn^3}$; ж) $\dfrac{a^2 - 3a}{a^2 + 3a - 18}$;

в) $\dfrac{x^2 - 2mx + 3x - 6m}{x^2 + 2mx + 3x + 6m}$; з) $\dfrac{4x^2 - 8x + 3}{4x^2 - 1}$;

г) $\dfrac{8ab + 2a - 20b - 5}{4ab - 8b^2 + a - 2b}$; и) $\dfrac{m^2 + 4m - 5}{m^2 + 7m + 10}$.

д) $\dfrac{16a^2 - 8ab + b^2}{16a^2 - b^2}$;

706. а) Найдите значение выражения $\dfrac{3x + 2y}{x}$, если известно, что $\dfrac{2x + 3y}{y} = 7$.

б) Найдите значение выражения $\dfrac{b}{a + b}$, если известно, что $\dfrac{4a - 5b}{b} = 3$.

707. Упростите:

а) $\dfrac{2}{x^2 - 3x} - \dfrac{1}{x^2 + 3x} - \dfrac{x + 1}{x^2 - 9}$;

б) $\dfrac{2y + 1}{y^2 + 3y} + \dfrac{y + 2}{3y - y^2} - \dfrac{1}{y}$;

в) $\dfrac{a^2 + 16a + 12}{a^3 - 8} - \dfrac{2 - 3a}{a^2 + 2a + 4} - \dfrac{3}{a - 2}$;

г) $\dfrac{2}{4b^2 - 6b + 9} + \dfrac{4b^2 + 18}{8b^3 + 27} - \dfrac{1}{2b + 3}$.

708. Представьте в виде дроби:

а) $\dfrac{ab^2-16a}{5b^3}\cdot\dfrac{20b^5}{a^2b+4a^2}$;

б) $\dfrac{7xy}{x^2-4xy+4y^2}\cdot\dfrac{3x-6y}{14y^2}$;

в) $\dfrac{p^3-125}{8p^2}\cdot\dfrac{4p}{p^2+5p+25}$;

г) $\dfrac{9m^2-12mn+4n^2}{3m^3+24n^3}\cdot\dfrac{3m+6n}{2n-3m}$.

709. Упростите:

а) $\dfrac{x^2-4x}{x^2+7x}:\dfrac{24-6x}{49-x^2}$;

б) $\dfrac{y^3-16y}{2y+18}:\dfrac{4-y}{y^2+9y}$;

в) $\dfrac{(a+b)^2-2ab}{4a^2}:\dfrac{a^2+b^2}{ab}$;

г) $\dfrac{5c^3-5}{c+2}:\dfrac{(c+1)^2-c}{13c+26}$.

710. Упростите выражение:

а) $\left(\dfrac{7(m-2)}{m^3-8}-\dfrac{m+2}{m^2+2m+4}\right)\cdot\dfrac{2m^2+4m+8}{m-3}$;

б) $\dfrac{a+5}{a^2-9}:\left(\dfrac{a+2}{a^2-3a+9}-\dfrac{2(a+8)}{a^3+27}\right)$;

в) $\left(\dfrac{x+2}{3x}-\dfrac{2}{x-2}-\dfrac{x-14}{3x^2-6x}\right):\dfrac{x+2}{6x}\cdot\dfrac{1}{x-5}$;

г) $\left(\dfrac{4x}{9-x^2}-\dfrac{x-3}{9+3x}\right)\cdot\dfrac{18}{x+3}-\dfrac{2x}{3-x}$.

711. Преобразуйте выражение:

а) $\dfrac{1}{2}+\left(\dfrac{3m}{1-3m}+\dfrac{2m}{3m+1}\right)\cdot\dfrac{9m^2-6m+1}{6m^2+10m}$;

б) $\left(\dfrac{1}{x+y}-\dfrac{y^2}{xy^2-x^3}\right):\left(\dfrac{x-y}{x^2+xy}-\dfrac{x}{y^2+xy}\right)-\dfrac{x}{x+y}$;

в) $\dfrac{2a+3}{2a-3}\cdot\left(\dfrac{2a^2+3a}{4a^2+12a+9}-\dfrac{3a+2}{2a+3}\right)+\dfrac{4a-1}{2a-3}-\dfrac{a-1}{a}$;

г) $\left(\dfrac{a+3}{a^2+2a+1}+\dfrac{a-1}{a^2-2a-3}\right)\cdot\dfrac{a^2-2a-3}{a+2}-1$;

д) $\dfrac{3(m+3)}{m^2+3m+9}+\dfrac{m^3-3m^2}{(m+3)^2}\cdot\left(\dfrac{3m}{m^3-27}+\dfrac{1}{m-3}\right)$;

е) $\left(\dfrac{9x^2+8}{27x^3-1}-\dfrac{1}{3x-1}+\dfrac{4}{9x^2+3x+1}\right)\cdot\dfrac{3x-1}{3x+1}$.

712. а) Найдите значение выражения $a^2 + b^2$, если $a + b = 6$, $ab = 3$.

б) Найдите значение выражения $c^2 + \frac{1}{c^2}$, если $c + \frac{1}{c} = 2{,}5$.

713. Докажите, что:

а) значение выражения $a^2 + 2a + 2$ ни при каком значении переменной a не может быть отрицательным;

б) выражение $2x^2 - 2xy + y^2$ при любых значениях x и y принимает неотрицательные значения.

714. Упростите выражение:

а) $(4x^{-2}y^3)^2 \cdot (0{,}5x^2y^{-1})^3$;

б) $\left(\frac{c^4}{6x^2y^{-5}}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{1}{3}c^2x^3y^{-2}\right)^4$;

в) $(0{,}25a^{-3}b^4)^{-2} \cdot (2a^5b^{-6})^{-1}$;

г) $\left(\frac{0{,}1a^{-2}}{b^{-1}c^3}\right)^5 \cdot \left(\frac{b^5}{10a^4c^6}\right)^{-3}$.

715. Упростите выражение:

а) $\frac{2 \cdot 3^{n+2} - 5 \cdot 3^{n+1}}{3^{n-1}}$;

б) $\frac{25 \cdot 4^n}{4^n - 4^{n-1}}$;

в) $\frac{10 \cdot 6^n}{2^{n+1} \cdot 3^{n-1}}$;

г) $\frac{2^{2n-1} \cdot 5^{2n+1}}{100^n}$.

716. Вынесите множитель из-под знака корня:

а) $\sqrt{98}$; б) $\sqrt{24}$; в) $-\sqrt{242}$; г) $-\sqrt{75}$; д) $0{,}1\sqrt{128}$; е) $0{,}4\sqrt{40}$; ж) $\sqrt{12x^2}$, где $x \geqslant 0$; з) $\sqrt{18y^2}$, где $y < 0$; и) $\sqrt{5a^4}$.

717. Внесите множитель под знак корня:

а) $10\sqrt{3}$; б) $0{,}1\sqrt{2}$; в) $-3\sqrt{5}$; г) $-0{,}2\sqrt{40}$; д) $x\sqrt{3}$, где $x \geqslant 0$; е) $y\sqrt{5}$, где $y < 0$.

718. Упростите выражение:

а) $\sqrt{50x} + \sqrt{32x} - \sqrt{98x}$;

б) $(\sqrt{a} + \sqrt{2})(\sqrt{a} - \sqrt{2}) - (\sqrt{a} - \sqrt{2}) \cdot \sqrt{a}$;

в) $(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 - (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2$;

г) $(\sqrt{x} - \sqrt{y})(x + \sqrt{xy} + y)$.

719. Сократите дробь:

а) $\frac{5 + \sqrt{y}}{5\sqrt{y} + y}$;

б) $\frac{3x - 6}{\sqrt{x} + \sqrt{2}}$;

в) $\frac{a\sqrt{a} - 1}{a + \sqrt{a} + 1}$;

г) $\frac{b - \sqrt{b} + 1}{b\sqrt{b} + 1}$;

д) $\frac{x\sqrt{x} + y\sqrt{y}}{\sqrt{xy} + y}$;

е) $\frac{c - \sqrt{cd}}{c\sqrt{c} - d\sqrt{d}}$.

720. Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби:

а) $\dfrac{3x}{7\sqrt{x}}$; б) $\dfrac{5}{\sqrt{ab}}$; в) $\dfrac{4}{\sqrt{c}-1}$; г) $\dfrac{1}{2\sqrt{x}+3\sqrt{y}}$.

721. Докажите, что:

а) $\dfrac{x-y}{x\sqrt{y}-y\sqrt{x}}=\dfrac{\sqrt{y}}{y}+\dfrac{\sqrt{x}}{x}$; б) $\dfrac{a-b}{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}}=\dfrac{\sqrt{b}}{b}-\dfrac{\sqrt{a}}{a}$.

Уравнения и системы уравнений

722. Решите уравнение:

а) $3x(x-1)-17=x(1+3x)+1$;

б) $2x-(x+2)(x-2)=5-(x-1)^2$;

в) $\dfrac{3x+1}{2}=\dfrac{2x-3}{5}$;

г) $\dfrac{x-3}{6}+x=\dfrac{2x-1}{3}-\dfrac{4-x}{2}$.

723. От фермы до станции Пётр может доехать на велосипеде или дойти пешком. Идёт он со скоростью 6 км/ч, а на велосипеде едет со скоростью 16 км/ч. Каково расстояние от фермы до станции, если на велосипеде Пётр тратит на этот путь на 40 мин меньше, чем пешком?

724. Расстояние от города A до города B поезд должен проходить по расписанию за 4 ч 30 мин. По техническим причинам он был задержан с отправлением из города A на 30 мин. Увеличив скорость на 10 км/ч, поезд прибыл в город B вовремя. Найдите расстояние между городами A и B.

725. Из пункта A в пункт B вышел пешеход, а через 30 мин навстречу ему из пункта B в пункт A выехал велосипедист. Скорость велосипедиста на 8 км/ч больше скорости пешехода. Велосипедист через 1,5 ч после выезда встретил пешехода. С какой скоростью шёл пешеход и ехал велосипедист, если известно, что расстояние между пунктами A и B равно 26 км?

726. Среднее арифметическое четырёх чисел равно 11,5. Второе число в 1,5 раза меньше первого и на 10 меньше третьего, а четвёртое равно сумме первого и второго. Найдите эти числа.

727. Сколько нужно добавить воды к 300 г 20%-го раствора соли, чтобы получить 8%-й раствор этой соли?

728. Решите квадратное уравнение:

а) $2{,}5x^2+4x=0$; в) $0{,}2t^2-t-4{,}8=0$;

б) $6y^2-0{,}24=0$; г) $3\frac{1}{3}u^2+3u-3=0$.

729. Существует ли значение переменной x, при котором значение квадратного трёхчлена $x^2 - 10x + 31$ равно:

а) -5; б) 6; в) 55?

730. При каких значениях m уравнение имеет хотя бы один корень:

а) $10x^2 - 10x + m = 0$; в) $3x^2 + mx - 5 = 0$;

б) $mx^2 + 4x - 2 = 0$; г) $2x^2 - mx + 2 = 0$?

731. При каких значениях k уравнение не имеет корней:

а) $kx^2 + 8x - 15 = 0$; в) $5x^2 + kx + 1 = 0$;

б) $6x^2 - 3x + k = 0$; г) $7x^2 - kx - 1 = 0$?

732. Решите уравнение:

а) $0{,}3x(x + 13) - 2x(0{,}9 - 0{,}2x) = 0$;

б) $1{,}5x(x + 4) - x(7 - 0{,}5x) = 0{,}5(10 - 2x)$;

в) $\dfrac{(2x+1)^2}{25} - \dfrac{x-1}{3} = x$; д) $\dfrac{(2-x)^2}{3} - 2x = \dfrac{(7+2x)^2}{5}$;

г) $\dfrac{(3x+2)^2}{11} - \dfrac{x+5}{4} = x^2$; е) $\dfrac{(6-x)^2}{8} + x = 7 - \dfrac{(2x-1)^2}{3}$.

733. Садовый участок, имеющий форму прямоугольника, требуется обнести изгородью. Определите длину изгороди, если известно, что длина участка на 15 м больше его ширины, а площадь его равна 700 м^2.

734. Каждый ученик класса обменялся фотографиями с каждым из других учеников этого класса. Сколько учеников в этом классе, если всего было передано 600 фотографий?

735. Цифра десятков двузначного числа на 3 меньше цифры единиц, а произведение этого двузначного числа на сумму его цифр равно 70. Найдите это число.

736. Участок земли имеет форму прямоугольного треугольника, один из катетов которого на 20 м больше другого. Найдите длину границы данного участка, если его площадь равна 0,24 га.

737. Решите уравнение:

а) $\dfrac{x}{x-3} - \dfrac{5}{x+3} = \dfrac{18}{x^2-9}$;

б) $\dfrac{70}{x^2-16} - \dfrac{17}{x-4} = \dfrac{3x}{x+4}$;

в) $\dfrac{3}{(2-x)^2} - \dfrac{5}{(x+2)^2} = \dfrac{14}{x^2-4}$;

г) $\dfrac{2}{4-x^2} - \dfrac{1}{2x-4} - \dfrac{7}{2x^2+4x} = 0$;

д) $\dfrac{1}{x^2-9}+\dfrac{1}{3x-x^2}=\dfrac{3}{2x+6}$;

е) $\dfrac{2}{1-x^2}-\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{4}{(x+1)^2}=0$;

ж) $\dfrac{2}{x^2+5x}+\dfrac{3}{2x-10}=\dfrac{15}{x^2-25}$;

з) $\dfrac{5}{2x+6}-\dfrac{1}{6x^2-18x}=\dfrac{29}{27-3x^2}$;

и) $\dfrac{x}{x-5}-\dfrac{4}{x+5}+\dfrac{76}{25-x^2}=0$;

к) $\dfrac{7x}{x^2-36}+\dfrac{3}{6-x}=\dfrac{7}{x+6}$.

738. Две бригады, работая вместе, выполняют работу за 6 ч. Одной первой бригаде на ту же работу требуется на 5 ч больше, чем второй. За какое время может выполнить всю работу каждая бригада, работая отдельно?

739. Две автомашины отправились одновременно из села в город, который удалён на 180 км. Одна автомашина пришла в город на 45 мин позже другой, так как её скорость была на 20 км/ч меньше. С какой скоростью шла каждая автомашина?

740. Моторная лодка прошла по течению реки 36 км и возвратилась обратно, затратив на весь путь 5 ч. Найдите скорость моторной лодки в стоячей воде, зная, что скорость течения равна 3 км/ч.

741. Моторная лодка прошла 18 км по течению и 14 км против течения, затратив на весь путь 3 ч 15 мин. Найдите скорость течения, если собственная скорость лодки 10 км/ч.

742. Катер прошёл 75 км по течению реки и столько же против течения. На весь путь он затратил в 2 раза больше времени, чем ему понадобилось бы, чтобы пройти 80 км в стоячей воде. Какова скорость катера в стоячей воде, если скорость течения равна 5 км/ч?

743. Токарь должен был обработать 240 деталей к определённому сроку. Усовершенствовав резец, он стал обрабатывать в час на 2 детали больше, чем предполагалось по плану, и потому выполнил задание на 4 ч раньше срока. Сколько деталей в час должен был обрабатывать токарь?

744. Сотрудник типографии должен набрать к определённому сроку рукопись объёмом 150 страниц. Если он будет набирать на 5 страниц в день больше, чем обычно, то закончит работу на 1 день раньше намеченного срока. Сколько страниц в день обычно набирает сотрудник?

745. Турист отправился на автомашине из города A в город B. Первые 75 км он ехал со скоростью, на 10 км/ч меньшей, чем рассчитывал, а остальной путь со скоростью, на 10 км/ч большей, чем рассчитывал. В город B, который удалён от города A на 180 км, турист прибыл вовремя. С какой скоростью он ехал в конце пути?

746. Расстояние от станицы до железнодорожной станции равно 60 км. Мотоциклист выехал из станицы на $1\frac{1}{4}$ ч позже велосипедиста и прибыл на станцию, когда велосипедист был от неё в 21 км. Найдите скорость велосипедиста, если она была на 18 км/ч меньше скорости мотоциклиста.

747. Из села в город, к которому ведёт дорога длиной 120 км, выехала легковая автомашина. Через 30 мин из города в село выехал грузовик и встретился с легковой автомашиной в 45 км от города. Найдите скорость грузовика, если она меньше скорости легковой автомашины на 5 км/ч.

748. Решите уравнение:

а) $4x^4 - 17x^2 + 4 = 0$;

б) $9x^4 + 77x^2 - 36 = 0$;

в) $2x^4 - 9x^2 - 5 = 0$;

г) $6x^4 - 5x^2 - 1 = 0$.

749. Решите уравнение, введя новую переменную:

а) $2(5x - 1)^2 + 35x - 11 = 0$;

б) $(x^2 + x - 3)^2 + 12x^2 + 12x - 9 = 0$.

750. Решите уравнение:

а) $x^4 - 16x^2 = 0$;

б) $x = x^3$;

в) $1{,}2x^3 + x = 0$;

г) $0{,}4x^4 = x^3$;

д) $x^3 + 6x^2 - 16x = 0$;

е) $x^4 + x^3 - 6x^2 = 0$;

ж) $x^3 + x^2 = 9x + 9$;

з) $2x^3 + 8x = x^2 + 4$.

751. Приведите уравнение к виду $x^n = a$ и решите его:

а) $\frac{1}{8}x^3 = 1$;

б) $1000x^3 + 1 = 0$;

в) $\frac{1}{27}x^3 = 0{,}001$;

г) $\frac{1}{9}x^4 - 16 = 0$;

д) $1 + x^5 = 0$;

е) $x^8 - 16 = 0$.

752. Изобразив схематически графики, выясните, имеет ли уравнение корни:

а) $\frac{1}{2}x - 2 = x^3$;

б) $-3x - 1 = \sqrt{x}$;

в) $\frac{1}{x} = -x^2 + 1$;

г) $3 + x^2 = \frac{12}{x}$.

753. Решите графически уравнение:

а) $x^3 = 7x - 6$; в) $\frac{4}{x} = x^2 - 2x$;

б) $\frac{6}{x} = 0{,}5x - 2$; г) $\sqrt{x} = x^3$.

754. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 4x - y = 17, \\ y + 6x = 23; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 5x = y + 50, \\ -3{,}4x + 2{,}6y = 14; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 6x - 10y = 11, \\ 5y + 7x = 19; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 4x - 2y = 3, \\ 13x + 6y = -1. \end{cases}$

755. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} \frac{2x - y}{3} - \frac{x - 2y}{2} = \frac{3}{2}, \\ \frac{2x + y}{2} - \frac{x + 2y}{3} = \frac{1}{3}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{x - y + 1}{2} + \frac{x + y - 1}{5} = 7, \\ \frac{x - y + 1}{3} - \frac{x + y - 1}{4} = -3. \end{cases}$

756. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y = 13, \\ 2x + by = 5 \end{cases}$$

с переменными x и y, если одним из решений первого уравнения является пара чисел (8; 1), а второго — пара чисел (5; –1).

757. Каково расстояние от точки пересечения прямых $5x - 2y = -25$ и $-4x + 3y = 27$:
а) до оси абсцисс; б) до оси ординат; в) до начала координат?

758. Подберите значения k и b так, чтобы система уравнений

$$\begin{cases} y = kx + b, \\ y = 2{,}5x - 3: \end{cases}$$

а) не имела решений;
б) имела бесконечно много решений;
в) имела единственным решением пару чисел, в которой $x = 4$.

759. Принадлежит ли точка пересечения прямых $-2x + y = 11$ и $3x + 2y = 1$ прямой:

а) $10x - 3y = -45$; б) $-7x + 9y = 65$?

760. Запишите уравнение прямой, которая проходит через точки:

а) (0; 30) и (6; 0); б) (2; 3) и (–2; 10).

761. Найдите такие значения коэффициентов a и b, при которых точки $M(2; -3)$ и $N(1; 4)$ принадлежат параболе $y = ax^2 + bx$.

762. При каких значениях b и c парабола $y = x^2 + bx + c$ пересекает оси координат в точках $(0;\ -3)$ и $\left(\frac{1}{2};\ 0\right)$? В какой ещё точке эта парабола пересекает ось x?

763. Мастер и ученик изготовили в первый день 100 деталей. Во второй день мастер изготовил деталей на 20% больше, а ученик — на 10% больше, чем в первый день. Всего во второй день мастер и ученик изготовили 116 деталей. Сколько деталей изготовил мастер и сколько изготовил ученик в первый день?

764. Легковой автомобиль проехал за 2 ч на 10 км больше, чем грузовой за 3 ч. Если уменьшить скорость легкового автомобиля на 25%, а грузового на 20%, то грузовой автомобиль проедет за 5 ч на 20 км больше, чем легковой за 3 ч. Найдите скорость каждого автомобиля.

765. На опытном поле под рожь отвели участок 20 га, а под пшеницу — 30 га. В прошлом году с обоих участков собрали 2300 ц зерна. В этом году урожайность ржи повысилась на 20%, а пшеницы — на 30% и поэтому собрали зерна на 610 ц больше, чем в прошлом году. Какой была урожайность каждой культуры в этом году?

766. Расстояние между пунктами A и B равно 160 км. Из A в B выехал велосипедист, и в то же время из B в A выехал мотоциклист. Их встреча произошла через 2 ч, а через 30 мин после встречи велосипедисту осталось проехать в 11 раз больше, чем мотоциклисту. Каковы скорости мотоциклиста и велосипедиста?

767. Имеются два сплава серебра с медью. Первый содержит 67% меди, а второй — 87% меди. В каком соотношении нужно взять эти два сплава, чтобы получить сплав, содержащий 79% меди?

768. Смешали два раствора соли. Концентрация первого составляла 40%, а концентрация второго — 48%. В результате получился раствор соли концентрацией 42%. В каком отношении были взяты первый и второй растворы?

769. Решите графически систему уравнений:

а) $\begin{cases} y + x^2 = 5x, \\ 2y + 5 = x; \end{cases}$ в) $\begin{cases} xy = 1, \\ x^2 + y^2 = 9; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ 2x^2 + y = 6; \end{cases}$ г) $\begin{cases} xy = -2, \\ y + 8 = \frac{1}{2}x^2. \end{cases}$

770. Решите систему уравнений способом подстановки:

а) $\begin{cases} x^2 + y + 8 = xy, \\ y - 2x = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 16, \\ x + y = 8; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x + y = 5, \\ x^2 - xy + y^2 = 13; \end{cases}$

д) $\begin{cases} 2x^2 + 5x - 3y = -12, \\ 2y - 7x = 8; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x^2 + y^2 + 3xy = 1, \\ 3y + x = 0; \end{cases}$

е) $\begin{cases} y^2 - 6x + y = 0, \\ 2x - \frac{1}{2}y = 1. \end{cases}$

771. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x + xy + y = 11, \\ x - xy + y = 1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 34, \\ xy = 15; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x - y - xy = 14, \\ x + 2y + xy = -7; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 12, \\ xy = 8. \end{cases}$

772. Не выполняя построения, выясните, пересекаются ли:

а) парабола $y = x^2 - 6x + 8$ и прямая $x + y = 4$;

б) прямая $x + y = 4$ и гипербола $y = \frac{3}{x}$;

в) окружности $x^2 + y^2 = 4$ и $(x - 3)^2 + y^2 = 1$;

г) окружность $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$ и прямая $x + 2y = 3$.

Если пересекаются, то укажите координаты точек пересечения. Проиллюстрируйте решение с помощью графиков.

773. При каком значении c имеет решение система уравнений

$$\begin{cases} 3x - y = 5, \\ x - 3y = 7, \\ 2x + 5y = c? \end{cases}$$

774. Не выполняя построения, выясните, пересекаются ли парабола $y = x^2 - x + 4$ и гипербола $y = \frac{4}{x}$. Если пересекаются, то укажите координаты точек пересечения. Проиллюстрируйте решение с помощью графиков.

775. При каком значении a система уравнений

$$\begin{cases} x + 3y = 2, \\ xy = a \end{cases}$$

имеет единственное решение?

776. Если от числителя и знаменателя обыкновенной дроби отнять по единице, то дробь увеличится на $\frac{1}{6}$. Если же к числителю и знаменателю прибавить по единице, то дробь уменьшится на $\frac{1}{10}$. Найдите эту дробь.

777. Если от числителя и знаменателя обыкновенной дроби отнять по единице, то дробь уменьшится на $\frac{1}{10}$. Если же к числителю и знаменателю прибавить по единице, то дробь увеличится на $\frac{1}{15}$. Найдите эту дробь.

778. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 41 см, а его площадь равна 180 см^2. Найдите катеты этого треугольника.

779. Площадь прямоугольного треугольника равна 44 см^2. Если один из его катетов уменьшить на 1 см, а другой увеличить на 2 см, то площадь будет равна 50 см^2. Найдите катеты данного треугольника.

780. Двое рабочих вместе могут выполнить некоторую работу за 10 дней. После 7 дней совместной работы один из них был переведён на другой участок, а второй закончил работу, проработав ещё 9 дней. За сколько дней каждый рабочий мог выполнить всю работу?

781. Двое рабочих, работая вместе, выполнили работу за 2 дня. Сколько времени нужно каждому из них на выполнение всей работы, если известно, что если бы первый проработал 2 дня, а второй — один, то всего было бы сделано $\frac{5}{6}$ всей работы?

Арифметическая и геометрическая прогрессии

782. Один из членов арифметической прогрессии (a_n) равен 3. Найдите его номер, если $a_1 = 48{,}5$ и $d = -1{,}3$. Является ли членом этой прогрессии число $-3{,}5$; число 15?

783. В арифметической прогрессии четырнадцатый член равен 140, а сумма первых четырнадцати членов равна 1050. Найдите первый член и разность этой прогрессии.

784. Последовательность (a_n) — арифметическая прогрессия. Известно, что $a_6 = -6$ и $a_{16} = 17{,}5$. Найдите сумму первых шестнадцати членов этой прогрессии.

785. В арифметической прогрессии первый член равен 28, а сумма первых двадцати пяти членов равна 925. Найдите разность и тридцатый член этой прогрессии.

786. В арифметической прогрессии (a_n) сумма шестого и десятого членов равна 5,9, а разность двенадцатого и четвёртого членов равна 2. Найдите двадцать пятый член этой прогрессии.

787. В арифметической прогрессии (a_n) сумма пятого и десятого членов равна -9, а сумма четвёртого и шестого членов равна -4. Найдите сумму первых десяти членов этой прогрессии.

788. В арифметической прогрессии третий член равен 150, а тринадцатый член равен 110. Сколько членов этой прогрессии, начиная с первого, сложили, если их сумма оказалась равной нулю?

789. Последовательность (x_n) — геометрическая прогрессия. Найдите:
а) x_1, если $x_8 = -128$ и $q = -4$; б) q, если $x_1 = 162$ и $x_9 = 2$.

790. Найдите пятый член геометрической прогрессии (b_n), если известно, что $b_1 = 6$ и $b_3 = \frac{2}{3}$.

791. Найдите сумму первых шести членов геометрической прогрессии (b_n), в которой $b_6 = \frac{1}{2}$ и $q = \frac{1}{2}$.

792. Пятый член геометрической прогрессии (b_n) равен $1\frac{1}{2}$, а знаменатель прогрессии равен $-\frac{1}{2}$. Найдите сумму первых пяти членов этой прогрессии.

793. Найдите сумму первых семи членов геометрической прогрессии (b_n), если известно, что все члены последовательности положительны и $b_3 = 20$, а $b_5 = 80$.

794. Последовательность (b_n) — геометрическая прогрессия. Найдите первые три члена этой прогрессии, если известно, что $b_1 + b_2 = 30$, а $b_2 + b_3 = 20$.

795. В геометрической прогрессии (b_n), знаменатель которой положителен, $b_1 \cdot b_2 = \frac{1}{27}$, а $b_3 \cdot b_4 = 3$. Найдите сумму первых четырёх членов этой прогрессии.

Неравенства

796. Оцените периметр P и площадь S прямоугольника, длины сторон которого a см и b см, если $14{,}3 \leqslant a \leqslant 14{,}4$ и $25{,}1 \leqslant b \leqslant 25{,}2$.

797. Пользуясь тем, что $2{,}6 < \sqrt{7} < 2{,}7$ и $2{,}2 < \sqrt{5} < 2{,}3$, оцените значение выражения:
а) $\sqrt{7} + \sqrt{5}$; б) $\sqrt{7} - \sqrt{5}$; в) $\sqrt{35}$.

798. Решите неравенство:
а) $0{,}3(2m - 3) < 3(0{,}6m + 1{,}3)$;
б) $1{,}1(5x - 4) > 0{,}2(10x - 43)$;
в) $10 - 5(0{,}3a - 0{,}2) \geqslant 5 - 10(0{,}1a + 0{,}2)$;
г) $3{,}2(2b + 1) + 5{,}7 \leqslant 7{,}3 - 1{,}6(3 - 5b)$;
д) $4{,}3x - \frac{1}{2}(2{,}8x - 0{,}6) > \frac{1}{3}(3x + 0{,}6) + 2{,}9x$;
е) $\frac{2}{5}(5{,}5m - 2) - 0{,}8m < 4{,}6m - \frac{3}{4}(3{,}6m - 1{,}6)$;

ж) $(2{,}1y + 2)(0{,}2y - 3) - (0{,}7y - 1)(0{,}6y + 4) \geqslant -83$;
з) $(1 - 3{,}6a)(0{,}2a + 3) + (4 + 0{,}9a)(0{,}8a + 10) \leqslant 42{,}2$.

799. Решите неравенство:

а) $\frac{4{,}2 + 2x}{3} > 1{,}5x - 1{,}1$;
б) $2{,}3a + 0{,}8 < \frac{5{,}8a + 3{,}4}{2}$;
в) $\frac{0{,}5 - 5y}{6} \geqslant \frac{0{,}6 - 5y}{4}$;
г) $\frac{0{,}6m + 1{,}2}{12} \leqslant \frac{1{,}5m - 2{,}5}{15}$;
д) $\frac{1{,}3a - 0{,}7}{4} - \frac{0{,}9a + 0{,}3}{3} > 0$;
е) $\frac{1{,}6 - 0{,}3y}{2} + \frac{4{,}4 + 1{,}5y}{5} < -4{,}05y$.

800. При каких значениях b:

а) значение дроби $\frac{12 - 1{,}5b}{5}$ меньше соответствующего значения дроби $\frac{11 - 0{,}5b}{2}$;

б) значение дроби $\frac{1{,}4 + b}{4}$ больше соответствующего значения дроби $\frac{2{,}6 + 3b}{2}$;

в) значение дроби $\frac{6b - 1}{b}$ не превосходит соответствующее значение дроби $\frac{16 - 2b}{9 - b}$?

801. Решите двойное неравенство:

а) $-2 < \frac{4x - 1}{5} < 2$;
б) $0{,}2 \leqslant \frac{1 - 5x}{20} \leqslant 0{,}4$.

802. Решите неравенство:

а) $(5 - 2x)(\sqrt{6} - 3) < 0$;
б) $(4 - \sqrt{10})(3x + 1) > 0$;
в) $\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2 + 7x} < 0$;
г) $\frac{\sqrt{7} - \sqrt{8}}{4 + 5x} > 0$.

803. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} 5x - 2 > 2x + 1, \\ 2x + 3 < 18 - 3x; \end{cases}$
б) $\begin{cases} 4y + 5 > y + 17, \\ y - 1 > 2y - 3; \end{cases}$
в) $\begin{cases} 12y - 1 < 3 - 2y, \\ 5y < 2 - 11y; \end{cases}$
г) $\begin{cases} 8x + 1 > 5x - 1, \\ 9x + 9 < 8x + 8. \end{cases}$

804. Решите систему трёх неравенств:

а) $\begin{cases} 2x + 5 > 3x - 1, \\ \frac{x}{3} > -1, \\ 10x < 0; \end{cases}$
б) $\begin{cases} 6x > x - 10, \\ 2x - 4 < 0, \\ 2x + 1 > x + 4. \end{cases}$

805. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} 2x - 3(x+1) < x + 8, \\ 6x(x-1) - (2x+2)(3x-3) > 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 10(x-1) - 5(x+1) > 4x - 11, \\ x^2 - (x+2)(x-2) < 3x; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 7 - 3x - 4(3 - 1{,}5x) < 0, \\ -6(1 + 2{,}5x) - 10x - 4 > 0; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 2(1{,}5x - 1) - (x+4)(x+4) \geqslant 0, \\ -(2-x) - 0{,}75x \leqslant 0; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x - \dfrac{4x-1}{3} < 10, \\ 4x - 1 - \dfrac{x}{3} < 10; \end{cases}$

е) $\begin{cases} 3y - \dfrac{2y+1}{2} > 4 - \dfrac{2-y}{3} - y, \\ \dfrac{5y-1}{3} - (y-1) > 3y. \end{cases}$

806. Найдите целые решения системы неравенств:

а) $\begin{cases} (3x+2)^2 \geqslant (3x-1)(3x+1) - 31, \\ (2x-3)(8x+5) < (4x-3)^2 - 14; \end{cases}$

б) $\begin{cases} (5x-2)^2 + 36 > 5x(5x-3), \\ 3x(4x+2) + 40 \leqslant 4x(3x+7) - 4. \end{cases}$

807. Решите двойное неравенство:

а) $-5 < \dfrac{4m-3}{3} < 7$;

б) $3 \leqslant \dfrac{1-2x}{5} \leqslant 11$;

в) $-11 < \dfrac{2-3p}{2} \leqslant -8$;

г) $-0{,}2 \leqslant \dfrac{5x+2}{4} \leqslant 2$.

808. При каких значениях переменной x:

а) значения двучлена $0{,}5 - 0{,}2x$ принадлежат промежутку $\left[-\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right]$;

б) значения дроби $\dfrac{20x+40}{3}$ принадлежат промежутку $[-100; 100]$?

809. Решите неравенство:

а) $x^2 + 2x - 15 < 0$;

б) $5x^2 - 11x + 2 \geqslant 0$;

в) $10 - 3x^2 \leqslant 5x - 2$;

г) $(2x+3)(2-x) > 3$;

д) $2x^2 - 0{,}5 \leqslant 0$;

е) $3x^2 + 3{,}6x > 0$;

ж) $(0{,}2 - x)(0{,}2 + x) < 0$; и) $x^2 - 0{,}5x - 5 < 0$;
з) $x(3x - 2{,}4) > 0$; к) $x^2 - 2x + 12{,}5 > 0$.

810. Решите неравенство:

а) $(2x + 1)(x + 4) - 3x(x + 2) < 0$;
б) $(3x - 2)^2 - 4x(2x - 3) > 0$;
в) $(1 - 6x)(1 + 6x) + 7x(5x - 2) > 14$;
г) $(5x + 2)(x - 1) - (2x + 1)(2x - 1) < 27$;
д) $(2x - 1)(1 + 2x) - x(x + 4) < 6$;
е) $(3x - 1)x - (6 - x)(x + 6) < 37$.

811. Докажите, что при любых x:

а) трёхчлен $x^2 - 3x + 200$ принимает положительные значения;
б) трёхчлен $-x^2 + 22x - 125$ принимает отрицательные значения;
в) трёхчлен $x^2 - 16x + 64$ принимает неотрицательные значения;
г) трёхчлен $10x - x^2 - 25$ принимает неположительные значения.

812. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} x^2 - 2x - 3 \leqslant 0, \\ 2x - 5 \leqslant 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 9 - x^2 \geqslant 0, \\ 3 - x \leqslant 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2 - 5x + 6 \geqslant 0, \\ 2x - 9 \leqslant 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2 + 2x \geqslant 0, \\ 5x \geqslant 0. \end{cases}$

813. Найдите целые решения системы неравенств:

а) $\begin{cases} x^2 - 7x + 6 \leqslant 0, \\ x^2 - 8x + 15 \geqslant 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + 1 \geqslant 0, \\ x^2 - 6x + 8 \leqslant 0. \end{cases}$

814. При каких значениях x имеет смысл выражение:

а) $\sqrt{12x - 4}$; г) $\sqrt{2x^2 + x - 6}$;
б) $\sqrt{3 - 0{,}6x}$; д) $\sqrt{12 - 5x} + \sqrt{2x - 1}$;
в) $\sqrt{15 + 2x - x^2}$; е) $\sqrt{x^2 + 4} + \sqrt{3x - 17}$?

815. Найдите область определения каждого из выражений:

а) $2x - 5$, $\dfrac{1}{2x - 5}$ и $\sqrt{2x - 5}$;

б) $2x^2 + 7x - 4$, $\dfrac{1}{2x^2 + 7x - 4}$ и $\sqrt{\dfrac{1}{2x^2 + 7x - 4}}$;

в) $x^2 + 1$, $\sqrt{x^2 + 1}$ и $\dfrac{1}{x^2 + 1}$.

Функции

816. Функция $y = f(x)$, областью определения которой является промежуток $[-4; 5]$, задана графиком (рис. 73). Каково множество значений функции? Найдите $f(-3)$, $f(-1{,}5)$, $f(-1)$, $f(1)$, $f(3{,}5)$. Найдите координаты точек, в которых график функции пересекает оси координат.

817. Найдите по графику функции $y = f(x)$ (рис. 73) значения аргумента, при которых:

а) $f(x) = 0$; б) $f(x) > 0$; в) $f(x) < 0$.

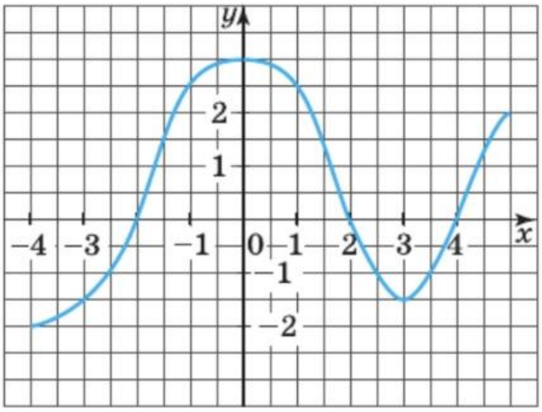


Рис. 73

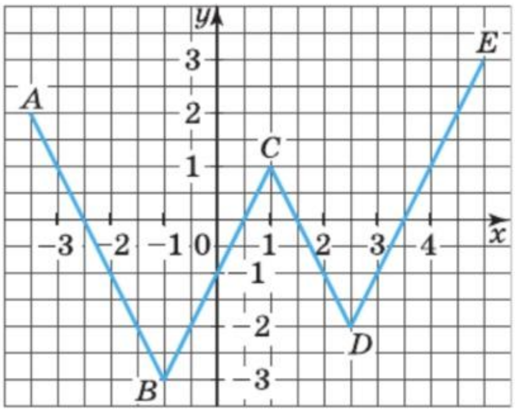


Рис. 74

818. Ломаная $ABCDE$ является графиком функции $y = f(x)$ (рис. 74). На каких промежутках эта функция принимает положительные значения и на каких — отрицательные?

819. Постройте график функции:

а) $y = -2{,}5x$; г) $y = -x + 4$;

б) $y = 2x - 3$; д) $y = \frac{1}{2}x + 3$;

в) $y = -5$; е) $y = \frac{2 - x}{4}$.

820. Функция $y = f(x)$ задана формулой $y = \frac{6 - 2x}{3}$. При каких значениях аргумента x:

а) $f(x) = 0$; б) $f(x) < 0$; в) $f(x) \geqslant 0$?

Постройте график этой функции.

821. Какие из линейных функций $y = -3x + 9$, $y = 5x$, $y = -7$, $y = 9x - 1$, $y = -x - 100$, $y = 1 + 5x$ являются:

а) возрастающими; б) убывающими?

822. Каково взаимное расположение графиков линейных функций:

а) $y = 7x + 16$ и $y = 7x - 25$;
б) $y = 3{,}5x - 4$ и $y = -5x - 4$;
в) $y = -2{,}8x$ и $y = -2{,}8x + 11$;
г) $y = 0{,}6x + 8$ и $y = -0{,}6x$?

В каждом случае изобразите схематически графики этих линейных функций.

823. Функция задана формулой $y = -x^2 + 3$. Какова область определения этой функции? Найдётся ли такое значение аргумента, при котором значение этой функции равно -1; 1; 5? Постройте график этой функции и укажите множество её значений.

824. Постройте график функции $y = -0{,}5x^2 + x + 1{,}5$. При каких значениях x значение y равно нулю; больше нуля; меньше нуля? На каком промежутке эта функция возрастает и на каком промежутке убывает? Каково наибольшее значение этой функции?

825. Постройте график функции $y = x^2 - 4x - 5$. При каких значениях x функция принимает отрицательные значения? Какие значения принимает функция, если $0 \leqslant x \leqslant 4$?

826. Постройте график функции:

а) $y = 2x^2 - 2$; в) $y = x^2 - 4x$; д) $y = x^2 + x - 6$;
б) $y = -x^2 + 1{,}5$; г) $y = 1{,}5x^2 + 6x$; е) $y = 3x^2 - 6x + 5$.

В каждом случае укажите наименьшее (или наибольшее) значение функции.

827. На каком промежутке возрастает и на каком убывает квадратичная функция:

а) $y = 2x^2 + 10x - 7$; в) $y = 4x^2 + 2x$;
б) $y = -3x^2 + x + 5$; г) $y = 3x - 5x^2$?

828. Постройте график функции:

а) $y = \frac{8}{x}$; б) $y = -\frac{3}{x}$.

В каждом случае укажите значения x, при которых $y > 0$; $y < 0$.

829. Изобразите схематически график функции:

а) $y = ax + 5$ при $a < 0$; д) $y = ax^2 - 3$ при $a > 0$;
б) $y = 10x + b$ при $b > 0$; е) $y = ax^2 + 2$ при $a < 0$;
в) $y = \frac{k}{x}$ при $k > 0$; ж) $y = ax^2 + bx$ при $a > 0$, $b > 0$;
г) $y = \frac{k}{x}$ при $k < 0$; з) $y = ax^2 + bx$ при $a < 0$, $b > 0$.

830. Вычислите координаты точек пересечения графиков функций:

а) $y = 2x - 11$ и $y = -5x + 3$;
б) $y = -3x - 10$ и $y = x^2 - 13x + 6$;

в) $y = -3x^2 + x - 3$ и $y = -x^2 + x - 5$;
г) $y = 4x^2 + 3x + 6$ и $y = 3x^2 - 3x - 3$.

831. Задайте формулой функцию, график которой симметричен графику функции $y = 2x - 4$:

а) относительно оси y;
б) относительно оси x;
в) относительно начала координат.

832. Постройте график функции:

а) $y = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$; б) $y = \dfrac{x^2 - 2x}{x}$; в) $y = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{2 - x}$.

833. Постройте график функции:

а) $y = \begin{cases} 0{,}5x, \text{ если } x \geqslant 0, \\ -x, \text{ если } x < 0; \end{cases}$ в) $y = \begin{cases} 2x^2, \text{ если } x \geqslant 0, \\ -x^2 + 1, \text{ если } x < 0; \end{cases}$

б) $y = \begin{cases} 2 + x, \text{ если } x \leqslant -1, \\ 1, \text{ если } -1 < x \leqslant 1, \\ 2 - x, \text{ если } x > 1; \end{cases}$ г) $y = \begin{cases} x^2, \text{ если } x < 1, \\ -x^2 + 2x + 1, \text{ если } x \geqslant 1. \end{cases}$

834. Пересекаются ли парабола $y = x^2 - 6x$ и прямая $y - 8x = 0$? Если да, то укажите координаты точек пересечения. Проиллюстрируйте ответ с помощью схематического рисунка.

835. Найдите область определения и множество значений функции:

а) $f(x) = x^2 - 10x - 17$; б) $g(x) = \dfrac{1}{|x| - x}$.

ЗАДАЧИ ПОВЫШЕННОЙ ТРУДНОСТИ

836. Найдите корни многочлена

$$2x^5 + x^4 - 10x^3 - 5x^2 + 8x + 4.$$

837. Если в многочлен $ax^3 + bx^2 + cx + d$ вместо a, b, c и d подставлять числа -7, 4, -3 и 6 в каком угодно порядке, будут получаться многочлены с одной переменной, например: $-7x^3 + 4x^2 - 3x + 6$, $4x^3 - 7x^2 + 6x - 3$ и т. д. Докажите, что все такие многочлены имеют общий корень.

838. Докажите, что многочлен $x^4 - 4x^3 - 6x^2 - 3x + 9$ не имеет отрицательных корней.

839. При каком значении a сумма квадратов корней квадратного трёхчлена $x^2 - (a - 2)x - a - 1$ принимает наименьшее значение?

840. Докажите, что при любых значениях a, b и c график функции $y = (x - a)(x - b) - c^2$ имеет хотя бы одну общую точку с осью x.

841. Постройте график функции:

а) $y = 2x^2 - 3|x| - 2$; б) $y = \left|\frac{1}{2}x^2 - x\right| - 4$.

842. Найдите координаты общих точек оси x и графика функции $y = x^2 - 4x + |2x - 8|$.

843. При каком значении a графики функций $y = x^2 - 7x + a$ и $y = -3x^2 + 5x - 6$ имеют единственную общую точку? Найдите её координаты.

844. Докажите, что многочлен $x^8 + x^6 - 4x^4 + x^2 + 1$ не принимает отрицательных значений.

845. При каких значениях m квадратный трёхчлен

$$mx^2 + (m - 1)x + m - 1$$

принимает только отрицательные значения?

846. Найдите множество значений функции $y = \frac{x}{x^2+1}$.

847. Сумма квадратов корней x_1 и x_2 уравнения $x^2 - 3ax + a^2 = 0$ равна 1,75. Найдите x_1 и x_2.

848. Найдите все значения a, при которых один из корней уравнения $x^2 - 3{,}75x + a^3 = 0$ является квадратом другого.

849. При каком значении m корни уравнения $x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0$ принадлежат интервалу $(-2;\ 4)$?

850. При каких значениях a биквадратное уравнение

$$x^4 + ax^2 + a - 1 = 0$$

имеет только два различных корня?

851. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}(x+y)(8-x) = 10,\\(x+y)(y+5) = 20.\end{cases}$$

852. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases}(x^2+y^2)(x-y) = 447,\\xy(x-y) = 210;\end{cases}$ б) $\begin{cases}xy(x+y) = 30,\\x^3+y^3 = 35.\end{cases}$

853. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}x^3 - y^3 = 19(x-y),\\x^3 + y^3 = 7(x+y).\end{cases}$$

854. Найдите все решения системы

$$\begin{cases}x^3 + x^3y^3 + y^3 = 12,\\x + xy + y = 0.\end{cases}$$

855. Решите уравнение $(x+3)^4 + (x+5)^4 = 4$.

856. Решите уравнение $(x^2 + x)^4 - 1 = 0$.

857. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 3,\\xy = 8.\end{cases}$$

858. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\sqrt[3]{\dfrac{x}{y}} + \sqrt[3]{\dfrac{y}{x}} = 4{,}25,\\x + y = 130.\end{cases}$$

859. Знаменатель обыкновенной дроби меньше квадрата её числителя на 1. Если числитель и знаменатель этой дроби увеличить на 2, то значение дроби станет больше $\frac{1}{4}$, а если числитель и знаменатель уменьшить на 3, то значение дроби станет меньше $\frac{1}{10}$. Найдите такие дроби.

860. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x + xy + y = 5, \\ y + yz + z = 11, \\ z + zx + x = 7. \end{cases}$$

861. Найдите значение m, при котором корни уравнения

$$x^3 - 9x^2 + mx - 15 = 0$$

образуют арифметическую прогрессию.

862. Докажите, что при любом a выполняется неравенство

$$\frac{1}{3} \leqslant \frac{a^2 - a + 1}{a^2 + a + 1} \leqslant 3.$$

863. За сколько часов может выполнить работу каждый из трёх рабочих, если производительность труда третьего рабочего равна полусумме производительностей труда первого и второго? Известно, что если бы один третий рабочий проработал 48 ч, то для окончания работы одному первому потребовалось бы 10 ч, а одному второму — 15 ч.

864. Существует ли такое двузначное число, которое при делении на сумму квадратов его цифр даёт в частном 2 и в остатке 6, а при делении на произведение цифр даёт в частном 4 и в остатке 6?

865. Последовательности (y_n) и (x_n) заданы формулами $y_n = n^2$ и $x_n = 2n - 1$. Если выписать в порядке возрастания все их общие члены, то получится последовательность (c_n). Напишите формулу n-го члена последовательности (c_n).

866. При каких значениях n члены последовательности, заданной формулой

$$x_n = (n + 4)(n - 5),$$

удовлетворяют условию

$$-18 \leqslant x_n \leqslant 360?$$

867. Найдите сумму первых n членов последовательности (x_n), если

$$x_n = \frac{1}{(2n - 1)(2n + 1)}.$$

868. В последовательности (x_n) каждый член с нечётным номером равен $2a$, а с чётным равен $2b$. Напишите формулу n-го члена этой последовательности.

869. Известно, что $y = f(x)$ — линейная функция и x_1, x_2, x_3, ... — арифметическая прогрессия. Докажите, что последовательность $f(x_1)$, $f(x_2)$, ... является арифметической прогрессией.

870. В арифметической прогрессии a_1, a_2, a_3, a_4, состоящей из целых чисел, наибольший член равен сумме квадратов остальных членов. Найдите члены этой прогрессии.

871. Пусть a_1, a_2, ... — арифметическая прогрессия с положительными членами. Докажите, что сумма первых n членов последовательности (x_n), где $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n+1}}}$, равна $\dfrac{n}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_{n+1}}}$.

872. Докажите, что если стороны треугольника образуют геометрическую прогрессию, то его высоты также образуют геометрическую прогрессию.

873. Три различных целых числа составляют геометрическую прогрессию. Их сумма равна –3. Найдите эти числа.

874. Три целых числа составляют арифметическую прогрессию, первый член которой 1. Если ко второму члену прибавить 3, а третий возвести в квадрат, то получится геометрическая прогрессия. Найдите эти числа.

875. Докажите, что при любом натуральном значении $n > 1$ верно неравенство

$$\frac{1}{2} < \sqrt[n]{\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n}} < 1.$$

876. Упростите выражение:

а) $\sqrt[3]{5\sqrt{2} + 7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2} - 7}$; б) $\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}}$.

877. Докажите, что если $x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx$, то $x = y = z$.

878. Решите уравнение с двумя переменными

$$x^2 + 2\sqrt{3}x + y - 4\sqrt{y} + 7 = 0.$$

879. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2z^2 = 0, \\ x + y + z = 8, \\ xy = -z^2. \end{cases}$$

880. Решите в натуральных числах систему уравнений

$$\begin{cases} x + y + z = 14, \\ x + yz = 19. \end{cases}$$

881. Докажите, что при положительных значениях a, b и c верно неравенство $\dfrac{(a^2+a+1)(b^2+b+1)(c^2+c+1)}{abc} \geqslant 27$.

882. Найдите при любом натуральном n значение выражения

$$\sqrt[3]{\frac{1\cdot 2\cdot 4+2\cdot 4\cdot 8+\ldots+n\cdot 2n\cdot 4n}{1\cdot 3\cdot 9+2\cdot 6\cdot 18+\ldots+n\cdot 3n\cdot 9n}}.$$

883. Докажите, что значение выражения

$$(5+10^{n+1})(1+10+\ldots+10^n)+1$$

при любом натуральном n можно представить в виде квадрата натурального числа.

884. Найдите наименьшее четырёхзначное число, которое после умножения на 21 станет квадратом натурального числа.

885. Трёхзначное число x, кратное 5, можно представить в виде суммы куба и квадрата одного и того же натурального числа. Найдите число x.

886. Взяли два различных натуральных числа. Эти числа сложили, перемножили, вычли из большего данного числа меньшее и разделили большее на меньшее. Оказалось, что сумма всех четырёх результатов равна 441. Найдите эти числа.

887. Найдите два натуральных числа, разность квадратов которых равна 45.

888. Докажите, что не существует натурального числа, которое от перестановки первой цифры в конец числа увеличилось бы в 5 раз.

889. Решите уравнение

$$\sqrt[3]{(65+x)^2}+4\sqrt[3]{(65-x)^2}-5\sqrt[3]{65^2-x^2}=0.$$

890. Постройте множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству:

а) $xy^2 < x$; в) $x^3+xy^2-4x \leqslant 0$;

б) $y^2-x^2y+2x^2 > 2y$; г) $x^2y+y^3-y \geqslant 0$.

891. Изобразите множество точек, координаты которых удовлетворяют системе:

а) $\begin{cases} x^2+y^2 \leqslant 4, \\ |x| \geqslant 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2+y^2 \leqslant 9, \\ |y| \geqslant 2. \end{cases}$

892. Изобразите множество решений неравенства:

а) $y \leqslant \frac{10}{|x|}$; в) $|y| - x^2 + 2x \leqslant 1$;

б) $y + \left|\frac{8}{x}\right| \geqslant 0$; г) $|y| + x^2 - 4x \geqslant 4$.

893. Изобразите на координатной плоскости множество решений неравенства:

а) $x^2 + y^2 - 6|x| + 2y \leqslant -1$; б) $x^2 + y^2 - 6x + 2|y| \leqslant -1$.

894. Закрасьте на координатной плоскости фигуру, которая задаётся системой неравенств

$$\begin{cases} y - 4 \leqslant x^2 - 4|x|, \\ 4x - 3y \leqslant -12. \end{cases}$$

Охарактеризуйте её аналитически.

895. Изобразите множество решений системы неравенств:

а) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 9, \\ |x| + |y| \leqslant 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 9, \\ |y| - |x| \leqslant 0. \end{cases}$

896. Окружность с центром в начале координат проходит через точку (30; 40). Она разбивает множество не принадлежащих ей точек координатной плоскости на внутреннюю и внешнюю области. Напишите неравенство, графиком которого является:

а) внутренняя область; б) внешняя область.

897. Найдите корни уравнения $x^3 - 2x^2 + 3x - 18 = 0$.

898. Докажите, что не имеет решений уравнение:

а) $4x^2 + 4xy + y^2 + 1 = 0$; в) $x^2 + y^2 + 4x + 5 = 0$;

б) $x^2 - 6xy + 9y^2 + 2 = 0$; г) $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 6 = 0$.

899. Найдите значения параметра a, при которых система уравнений $x^2 + y^2 = 9$ и $y - x = a$ имеет одно решение; имеет два решения; не имеет решений. При каком наименьшем по модулю значении параметра a система уравнений имеет одно решение?

900. Найдите все целые решения уравнения:

а) $x^2 - y^2 = 3$; б) $x^2 - y^2 = 4$; в) $x^2 - \frac{3}{y^2} = 1$; г) $\frac{4}{x^2} + y^2 = 6$.

ИСТОРИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

О функциях

Ещё задолго до того, как сформировались общие понятия переменной величины и функции, они фактически использовались в математике. Значительную роль в развитии этих понятий сыграл метод координат, созданный французскими математиками Р. Декартом (1596—1650) и П. Ферма (1601—1665). Метод координат стал широко использоваться для графического исследования функций и графического решения уравнений. С этого времени начался новый этап, который ознаменовался мощным развитием не только математики, но и всего естествознания.

Термин «функция» ввёл немецкий математик Г. Лейбниц (1646—1716). У него функция связывалась с графиком.

С именами Л. Эйлера (1707—1783) и И. Бернулли (1667—1748) связано понимание функции как аналитического выражения, т. е. выражения, образованного из переменных и чисел с помощью тех или иных математических операций. В это время были исследованы важные классы функций, которые рассматриваются в одной из ведущих областей математики — математическом анализе.

У Л. Эйлера появился и более общий подход к понятию функции как зависимости одной переменной величины от другой. Эта точка зрения получила дальнейшее развитие в трудах русского математика Н. И. Лобачевского (1792—1856), немецкого математика П. Дирихле (1805—1859) и других учёных. В результате функцию стали рассматривать как соответствие между числовыми множествами: переменная y есть функция переменной x (на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$), если каждому значению x соответствует определённое значение y, причём безразлично, каким образом установлено это соответствие — формулой, графиком, таблицей либо просто словами.

Одна из оригинальных функций, названная функцией Дирихле, выглядит так:

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x \text{ — рациональное число,} \\ 0, \text{ если } x \text{ — иррациональное число.} \end{cases}$$

Отметим, что график этой функции «разрывен» в каждой точке. Он состоит из прямой $y = 1$, у которой исключены все точки с иррациональными абсциссами, и прямой $y = 0$, у которой исключены все точки с рациональными абсциссами.

Дальнейшее развитие понятия функции связано с рассмотрением соответствий между множествами, элементами которых могут быть не только числа, но и объекты произвольной природы.

Об уравнениях высших степеней

Неполные квадратные уравнения и частные случаи полных квадратных уравнений умели решать ещё вавилоняне (2 тыс. лет до н. э.). Отдельные виды квадратных уравнений решали древнегреческие математики, сводя их решение к геометрическим построениям.

Примеры решения уравнений 3-й степени не были известны ни древнегреческой, ни арабской науке. В алгебраических трактатах арабских математиков IX—XV вв., кроме решения уравнений и систем уравнений 1-й и 2-й степеней, рассматриваются решения кубических уравнений частных видов. Однако способы решения этих уравнений приводили к нахождению приближённых значений корней.

Общее уравнение 3-й степени имеет вид $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, где $a \neq 0$. Давно было известно, что с помощью введения новой переменной это уравнение можно свести к уравнению вида $x^3 + px + q = 0$.

Впервые формулу для отыскания положительного корня уравнения $x^3 + px = q$, где $p > 0$ и $q > 0$, вывел итальянский математик Сципион Даль Ферро (1465—1526), но держал её в тайне. Только в конце жизни он сообщил своему ученику Фиори об открытии. Одновременно вопросом об общем решении уравнений 3-й степени занимался другой итальянский математик — Никколо Тарталья (ок. 1499—1557), который нашёл способы решения уравнений $x^3 + px = q$, $x^3 + q = px$, $x^3 = px + q$ и частных случаев уравнения $x^3 + px^2 = q$ (p и q — положительные числа). В 1535 г. между Фиори и Тартальей состоялся научный поединок, на котором Тарталья одержал блестящую победу (он за 2 ч решил все 30 предложенных ему задач, в то время как Фиори не решил ни одной задачи Тартальи).

С 1539 г. решением кубических уравнений начинает заниматься итальянский математик Джероламо Кардано (1501—1576). Он узнал об открытии Тартальи, который не публиковал своих трудов. В 1545 г. вышла книга Кардано «Великое искусство, или О правилах алгебры», где наряду с другими вопросами алгебры рассматриваются общие способы решения кубических уравнений. В эту книгу Кардано включил также метод решения уравнений 4-й степени, открытый его учеником Лодовико Феррари (1522—1565).

Вопрос о том, кому принадлежит приоритет открытия формулы корней кубических уравнений — Тарталье или Кардано, не решён до сих пор.

Следует отметить, что ни Тарталья, ни Кардано не провели полного исследования решений кубических уравнений. В решении этой задачи значительно продвинулся их соотечественник из Болоньи Рафаэль Бомбелли (ок. 1530—1572). Полное изложение вопросов, связанных с решением уравнений 3-й и 4-й степеней, дал Франсуа Виет (1540—1603), которому в этом существенно помогла усовершенствованная им алгебраическая символика.

В формуле корней квадратного уравнения используется знак корня — радикал. Через радикалы (корни 2, 3 и 4-й степеней) выражаются и корни уравнений 3-й и 4-й степеней.

После того как были найдены формулы решений уравнений 3-й и 4-й степеней, усилия многих математиков были направлены на то, чтобы отыскать формулы решений уравнений любых степеней. На решение этой проблемы ушло около 300 лет, и лишь в 20-х гг. XIX в. норвежский математик Нильс Абель (1802—1829) доказал, что в общем случае корни уравнений 5-й и более высоких степеней не могут быть выражены через радикалы. Французский математик Эварист Галуа (1811—1832) выделил класс алгебраических уравнений, которые разрешимы в радикалах.

Использование алгебраических уравнений позволило дать более тонкую классификацию действительных чисел. Числа, являющиеся корнями алгебраических уравнений с целыми коэффициентами, стали называть алгебраическими числами. Действительные числа, не являющиеся алгебраическими, назвали трансцендентными. Оказалось, что в множестве иррациональных чисел содержится значительно больше трансцендентных чисел, чем алгебраических. Одним из представителей трансцендентных чисел является число π.

О прогрессиях

Первые представления об арифметической и геометрической прогрессиях были ещё у древних народов. В клинописных вавилонских табличках и египетских папирусах встречаются задачи на прогрессии и указания, как их решать.

В древнеегипетском папирусе Ахмеса (ок. 2000 г. до н. э.) приводится такая задача: «Пусть тебе сказано: раздели 10 мер ячменя между 10 людьми так, чтобы разность мер ячменя, полученного каждым человеком и его соседом, равнялась $\frac{1}{8}$ меры».

В этой задаче речь идёт об арифметической прогрессии. Условие задачи, пользуясь современными обозначениями, можно записать так: $S_{10} = 10$, $d = \frac{1}{8}$; найти a_1, a_2, ..., a_{10}.

В одном древнегреческом папирусе приводится задача: «Имеется 7 домов, в каждом по 7 кошек, каждая кошка съедает 7 мышей, каждая мышь съедает 7 колосьев, каждый из которых, если посеять зерно, даёт 7 мер зерна. Нужно подсчитать сумму числа домов, кошек, мышей, колосьев и мер зерна».

Решение этой задачи приводит к сумме: $7 + 7^2 + 7^3 + 7^4 + 7^5$, т. е. сумме пяти членов геометрической прогрессии.

О прогрессиях и их суммах знали древнегреческие учёные. Так, им были известны формулы суммы первых n чисел последовательности натуральных, чётных и нечётных чисел.

Архимед (III в. до н. э.) для нахождения площадей и объёмов фигур применял «атомистический метод», для чего ему потребовалось находить суммы членов некоторых последовательностей. Он вывел формулу суммы квадратов натуральных чисел

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6}n(n + 1)(2n + 1),$$

показал, как найти сумму бесконечной убывающей геометрической прогрессии

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \ldots .$$

Отдельные факты об арифметической и геометрической прогрессиях знали китайские и индийские учёные. Об этом говорит, например, известная индийская легенда об изобретателе шахмат (см. с. 168).

Термин «прогрессия» (от латинского *progressio*, что означает «движение вперёд») был введён римским автором Боэцием (VI в.) и понимался в более широком смысле как бесконечная числовая последовательность. Названия «арифметическая» и «геометрическая» были перенесены на прогрессии из теории непрерывных пропорций, изучением которых занимались древние греки. Равенство вида $a_{k-1} - a_k = a_k - a_{k+1}$ они называли непрерывной арифметической пропорцией, а равенство $\frac{b_{k-1}}{b_k} = \frac{b_k}{b_{k+1}}$ — непрерывной геометрической пропорцией. Из этих равенств следует, что

$$a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2} \text{ и } b_k = \sqrt{b_{k-1} - b_{k+1}},$$

т. е. этими соотношениями выражаются характеристические свойства арифметической и геометрической прогрессий.

Формула суммы членов арифметической прогрессии была доказана древнегреческим учёным Диофантом (III в.). Формула суммы членов геометрической прогрессии дана в книге Евклида «Начала» (III в. до н. э.). Правило отыскания суммы членов произвольной арифметической прогрессии встречается в «Книге абака» Леонардо Фибоначчи (1202). Общее правило для суммирования любой бесконечной убывающей геометрической прогрессии даёт Никола Шюке в книге «Наука о числах» (1484).

О степенях

Понятие степени с натуральным показателем сформировалось ещё у древних народов. Квадрат и куб числа использовались для вычислений площадей и объёмов. Степени некоторых чисел использовались при решении отдельных задач учёными Древнего Египта и Вавилона.

В III в. вышла книга греческого учёного Диофанта «Арифметика», в которой было положено начало введению буквенной символики. Диофант вводит символы для первых шести степеней неизвестного и обратных им величин. В этой книге квадрат обозначается знаком Δ с индексом r (Δ^r); куб — знаком k с индексом r (k^r); квадрат, умноженный на себя, — квадрато-квадрат — обозначается $\Delta^r\Delta$; квадрат, умноженный на куб, — квадрато-куб — Δk^r; куб, умноженный сам на себя, — кубо-куб — $k^r k$.

В конце XVI в. Франсуа Виет ввёл буквы для обозначения в уравнениях не только неизвестных, но и коэффициентов. Он применял сокращения: N (*Numerus* — число) — для первой степени, Q (*Quadratus* — квадрат) — для второй, C (*Cubus* — куб) — для третьей, QQ — для четвёртой и т. д.

Современная запись степеней (a^3, a^4, a^5 и т. д.) была введена Декартом, причём вторую степень a, т. е. a^2, он записывал как произведение aa.

К идее обобщения понятия степени на степень с ненатуральным показателем математики пришли постепенно. Отрицательные и дробные показатели степеней появились в отдельных трудах европейских математиков XIV—XV вв. (Н. Орем, Н. Шюке). Современные определения и обозначения степени с нулевым, отрицательным и дробным показателями берут начало от работ английских математиков Джона Валлиса (1616—1703) и Исаака Ньютона (1643—1727).

СВЕДЕНИЯ ИЗ КУРСА АЛГЕБРЫ 7–8 КЛАССОВ

Выражения и их преобразования

1. Выражения, составленные из чисел и переменных с помощью действий сложения, вычитания и умножения, называют целыми выражениями. При этом произведение одинаковых множителей может быть записано в виде степени. К целым выражениям относят и выражения, в которых, кроме действий сложения, вычитания и умножения, используется деление на число, отличное от нуля. Например, выражения $a^2 + \sqrt{3}ab - \sqrt{2}b^2$, $(x - y)(2x + y^2)$, $m - \frac{n}{3}$, $a^2 : 7$ целые.

Выражения, составленные из чисел и переменных, в которых, кроме действий сложения, вычитания и умножения, используется деление на выражение с переменными, называют дробными выражениями. Например, выражения $x + \frac{1}{x-1}$, $\frac{a+2}{b}$, $5m : n$ дробные.

Целые и дробные выражения называют рациональными выражениями.

Целое выражение имеет смысл при любых значениях входящих в него переменных. Дробное выражение при некоторых значениях переменных может не иметь смысла. Например, выражение $a + \frac{1}{a-2}$ не имеет смысла при $a = 2$, выражение $\frac{3}{x-y}$ не имеет смысла при $x = y$.

Значения переменных, при которых выражение имеет смысл, называют допустимыми значениями переменных.

2. Тождеством называется равенство, верное при всех допустимых значениях входящих в него переменных.

Два выражения, принимающие равные значения при всех допустимых для них значениях переменных, называют тождественно равными, а замену одного выражения другим, тождественно равным ему, — тождественным преобразованием выражения.

3. Одночленом называют произведение чисел, переменных и их степеней. Числа, переменные и их степени также считают одночленами. Например, $8a^3b$, $-1{,}5xy^2z^8$, 12, c, m^{10} — одночлены.

Степенью одночлена называется сумма показателей степеней всех входящих в него переменных. Например, степень одночлена $9a^7b$ равна 8.

4. Многочленом называется сумма одночленов. Например, $y^4 - 8y^3 + 2y - 3$, $4a^4b + 11a^2b^2 - ab + 3b - 1$ — многочлены. Одночлены считают многочленами, состоящими из одного члена.

Степенью многочлена стандартного вида называют наибольшую из степеней входящих в него одночленов. Например, степень многочлена $18a^6 - 7a^4b^3 + 1$ равна степени одночлена $-7a^4b^3$, т. е. равна 7.

Степенью произвольного многочлена называют степень тождественно равного ему многочлена стандартного вида.

5. При сложении многочленов пользуются правилом раскрытия скобок: если перед скобками стоит знак «плюс», то скобки можно опустить, сохранив знак каждого слагаемого, заключённого в скобки. Например, $(5x^2 - 3xy) + (4xy - 2x^2 + 1) = 5x^2 - 3xy + 4xy - 2x^2 + 1 = 3x^2 + xy + 1$.

При вычитании многочленов пользуются правилом раскрытия скобок: если перед скобками стоит знак «минус», то скобки можно опустить, изменив знак каждого слагаемого, заключённого в скобки. Например, $(8a^2 - 3ab) - (7a^2 - 4ab + 5) = 8a^2 - 3ab - 7a^2 + 4ab - 5 = a^2 + ab - 5$.

Чтобы умножить одночлен на многочлен, нужно умножить этот одночлен на каждый член многочлена и полученные произведения сложить. Например, $2x^2(3x^3 - xy + 5y^2) = 6x^5 - 2x^3y + 10x^2y^2$.

Чтобы умножить многочлен на многочлен, нужно каждый член одного многочлена умножить на каждый член другого многочлена и полученные произведения сложить. Например, $(2a - 3)(3a^2 + a - 4) = 6a^3 + 2a^2 - 8a - 9a^2 - 3a + 12 = 6a^3 - 7a^2 - 11a + 12$.

Любое целое выражение можно представить в виде многочлена.

6. Формулы сокращённого умножения.

а) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Квадрат суммы двух выражений равен квадрату первого выражения плюс удвоенное произведение первого и второго выражений плюс квадрат второго выражения.

б) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

Квадрат разности двух выражений равен квадрату первого выражения минус удвоенное произведение первого и второго выражений плюс квадрат второго выражения.

в) $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Куб суммы двух выражений равен кубу первого выражения плюс утроенное произведение квадрата первого выражения и второго плюс утроенное произведение первого выражения и квадрата второго плюс куб второго выражения.

г) $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

Куб разности двух выражений равен кубу первого выражения минус утроенное произведение квадрата первого выражения и второго плюс утроенное произведение первого выражения и квадрата второго минус куб второго выражения.

д) $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$.

Произведение разности двух выражений и их суммы равно разности квадратов этих выражений.

е) $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$.

Сумма кубов двух выражений равна произведению суммы этих выражений и неполного квадрата их разности.

ж) $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$.

Разность кубов двух выражений равна произведению разности этих выражений и неполного квадрата их суммы.

7. Разложением многочлена на множители называют представление многочлена в виде произведения многочленов.

Для разложения многочленов на множители применяют вынесение множителя за скобки, группировку, используют формулы сокращённого умножения. Например, многочлен $8a^3 - 6ab$ можно разложить на множители с помощью вынесения $2a$ за скобки: $8a^3 - 6ab = 2a(4a^2 - 3b)$; многочлен $2ab + 10b - 3a - 15$ можно разложить на множители, используя группировку:

$$2ab + 10b - 3a - 15 = (2ab + 10b) - (3a + 15) =$$
$$= 2b(a + 5) - 3(a + 5) = (a + 5)(2b - 3);$$

многочлен $9a^2 - 25b^4$ можно разложить на множители, используя формулу разности квадратов:

$$9a^2 - 25b^4 = (3a)^2 - (5b^2)^2 = (3a - 5b^2)(3a + 5b^2).$$

Квадратный трёхчлен $ax^2 + bx + c$, корнями которого являются числа x_1 и x_2, можно разложить на множители, используя формулу

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

8. Рациональной дробью называется выражение вида $\frac{a}{b}$, где a и b — многочлены.

При любых значениях a, b и c, где $b \neq 0$ и $c \neq 0$, верно равенство $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$. Это равенство сохраняет силу и в том случае, когда под буквами a, b и c понимают многочлены, причём b и c — ненулевые многочлены. Свойство дроби, выраженное тождеством $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$, называют основным свойством дроби. Основное свойство дроби используется при сокращении дробей. Например:

$$\frac{x^2+2xy}{4y^2+2xy}=\frac{x(x+2y)}{2y(x+2y)}=\frac{x}{2y}.$$

Если изменить знак числителя (или знак знаменателя) дроби и знак перед дробью, то получим выражение, тождественно равное данному:

$$-\frac{-a}{b}=\frac{a}{b},\ -\frac{a}{-b}=\frac{a}{b}.$$

9. Действия над рациональными дробями выполняются аналогично действиям над обыкновенными дробями.

а) Если $c \neq 0$, то

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c} \quad \text{и} \quad \frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}.$$

Чтобы сложить дроби с одинаковыми знаменателями, нужно сложить их числители, а знаменатель оставить тем же. Например:

$$\frac{3x-8y}{5xy}+\frac{2x-7y}{5xy}=\frac{3x-8y+2x-7y}{5xy}=\frac{5x-15y}{5xy}=\frac{5(x-3y)}{5xy}=\frac{x-3y}{xy}.$$

Чтобы выполнить вычитание дробей с одинаковыми знаменателями, нужно из числителя первой дроби вычесть числитель второй дроби, а знаменатель оставить тем же. Например:

$$\frac{x^2}{3x-6}-\frac{4}{3x-6}=\frac{x^2-4}{3x-6}=\frac{(x-2)(x+2)}{3(x-2)}=\frac{x+2}{3}.$$

б) Чтобы выполнить сложение или вычитание дробей с разными знаменателями, нужно привести их к общему знаменателю и затем применить правило сложения или вычитания дробей с одинаковыми знаменателями. Например:

$$\frac{a^2}{ab-b^2}+\frac{b^2}{ab-a^2}-\frac{b}{a}=\frac{a^2}{b(a-b)}+\frac{b^2}{a(b-a)}-\frac{b}{a}=$$

$$=\frac{a^3-b^3-ab^2+b^3}{ab(a-b)}=\frac{a(a^2-b^2)}{ab(a-b)}=\frac{(a-b)(a+b)}{b(a-b)}=\frac{a+b}{b}.$$

в) Если $b \neq 0$ и $d \neq 0$, то $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$.

Чтобы умножить дробь на дробь, нужно перемножить их числители и перемножить их знаменатели и первое произведение записать числителем, а второе — знаменателем дроби. Например:

$$\frac{c^2-4}{c^2}\cdot\frac{c}{3c-6}=\frac{(c^2-4)c}{c^2(3c-6)}=\frac{(c-2)(c+2)}{3c(c-2)}=\frac{c+2}{3c}.$$

г) Если $b \neq 0$, $c \neq 0$ и $d \neq 0$, то

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}.$$

Чтобы разделить одну дробь на другую, нужно первую дробь умножить на дробь, обратную второй. Например:

$$\frac{x^3 - 8}{12x} : \frac{x - 2}{6} = \frac{x^3 - 8}{12x} \cdot \frac{6}{x - 2} = \frac{6(x - 2)(x^2 + 2x + 4)}{12x(x - 2)} = \frac{x^2 + 2x + 4}{2x}.$$

Любое рациональное выражение можно представить в виде рациональной дроби.

10. Степень с целым показателем.

Если n — натуральное число, большее 1, и a — любое число, то

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ раз}}.$$

Если $n = 1$ и a — любое число, то

$$a^1 = a.$$

Если $n = 0$ и a — число, отличное от нуля, то

$$a^0 = 1.$$

Если n — целое отрицательное число и a — отличное от нуля число, то

$$a^n = \frac{1}{a^{-n}}.$$

11. Свойства степени с целым показателем.

а) $a^m a^n = a^{m+n}$, где $a \neq 0$, m и n — целые числа.

При умножении степеней с одинаковыми основаниями основание оставляют прежним, а показатели степеней складывают.

б) $a^m : a^n = a^{m-n}$, где $a \neq 0$, m и n — целые числа.

При делении степеней с одинаковыми основаниями основание оставляют прежним, а из показателя степени делимого вычитают показатель степени делителя.

в) $(a^m)^n = a^{mn}$, где $a \neq 0$, m и n — целые числа.

При возведении степени в степень основание оставляют прежним, а показатели степеней перемножают.

г) $(ab)^n = a^n b^n$, где $a \neq 0$ и $b \neq 0$, n — целое число.

При возведении в степень произведения возводят в эту степень каждый множитель и результаты перемножают.

д) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, где $a \neq 0$ и $b \neq 0$, n — целое число.

При возведении в степень дроби возводят в эту степень числитель и знаменатель и первый результат записывают в числителе, а второй — в знаменателе дроби.

12. Квадратным корнем из числа a называется число, квадрат которого равен a.

Арифметическим квадратным корнем из числа a называется неотрицательное число, квадрат которого равен a. Арифметический квадратный корень из a обозначают $\sqrt{a}$. Выражение, стоящее под знаком корня, называют подкоренным выражением. Выражение $\sqrt{a}$ имеет смысл для всех $a \geqslant 0$ и не имеет смысла при $a < 0$.

Свойства арифметического квадратного корня.

а) Если $a \geqslant 0$ и $b \geqslant 0$, то

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}.$$

Корень из произведения неотрицательных множителей равен произведению корней из этих множителей.

б) Если $a \geqslant 0$ и $b > 0$, то

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

Корень из дроби, числитель которой неотрицателен, а знаменатель положителен, равен корню из числителя, делённому на корень из знаменателя.

в) При любом значении a верно равенство

$$\sqrt{a^2} = |a|.$$

13. Основные задачи на проценты:

а) нахождение процентов от данного числа.

Чтобы найти $a\%$ от числа b, надо b умножить на $\frac{a}{100}$.

Например, 5% от числа 40 составляют $40 \cdot \frac{5}{100} = 2$.

б) нахождение числа по его процентам.

Чтобы найти число, $a\%$ которого равны числу b, надо b разделить на $\frac{a}{100}$.

Например, если 5% от числа x равны 40, то $x = 40 : \frac{5}{100} = \frac{40 \cdot 100}{5} = 800$.

в) нахождение процентного отношения чисел.

Чтобы найти, сколько процентов число a составляет от числа b, надо отношение $\frac{a}{b}$ умножить на 100%.

Например, число 35 от числа 40 составляет $\frac{35}{40} \cdot 100\% = 87{,}5\%$.

Уравнения

14. Корнем уравнения с одной переменной называется значение переменной, при котором уравнение обращается в верное равенство. Например, число 2 — корень уравнения $x^3 - x = 4x^2 - 10$, так как верно равенство $2^3 - 2 = 4 \cdot 2^2 - 10$.

Решить уравнение с одной переменной — значит найти все его корни или доказать, что корней нет.

15. Уравнения, в которых левая и правая части являются рациональными выражениями, называются рациональными. Если и левая и правая части рационального уравнения являются целыми выражениями, то уравнение называют целым. Рациональное уравнение, в котором левая или правая часть является дробным выражением, называют дробным.

16. Уравнения с одной переменной, имеющие одни и те же корни, называются равносильными. Например, уравнения $x^2 = 36$ и $(x - 6)(x + 6) = 0$ равносильные. Каждое из них имеет два корня: -6 и 6. Уравнения, не имеющие корней, также считают равносильными.

Уравнения обладают следующими свойствами:

если в уравнении перенести слагаемое из одной части в другую, изменив его знак, то получится уравнение, равносильное данному;

если обе части уравнения умножить или разделить на одно и то же отличное от нуля число, то получится уравнение, равносильное данному.

17. Линейным уравнением с одной переменной называется уравнение вида $ax = b$, где x — переменная, a и b — числа. Число a называется коэффициентом при переменной, число b — свободным членом.

Если $a \neq 0$, то уравнение $ax = b$ имеет единственный корень $\frac{b}{a}$. Например, уравнение $5x = 3$ имеет корень 0,6.

Если $a = 0$ и $b \neq 0$, то уравнение $ax = b$ не имеет корней. Например, уравнение $0 \cdot x = 9$ не имеет корней.

Если $a = 0$ и $b = 0$, то корнем уравнения $ax = b$ является любое число.

18. Квадратным уравнением называется уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, где x — переменная, a, b и c — некоторые числа, причём $a \neq 0$. Число a называют первым коэффициентом, b — вторым коэффициентом и c — свободным членом.

Квадратное уравнение, в котором первый коэффициент равен 1, называют приведённым квадратным уравнением.

19. Если в квадратном уравнении $ax^2 + bx + c = 0$ хотя бы один из коэффициентов b или c равен нулю, то такое уравнение называют неполным квадратным уравнением.

Неполное квадратное уравнение вида $ax^2 + bx = 0$ имеет два корня: 0 и $-\frac{b}{a}$. Такие уравнения обычно решают разложением их левой части на множители. Например,

$$3x^2 - 15x = 0,\ 3x(x-5) = 0,\ x_1 = 0 \text{ и } x_2 = 5.$$

Неполное квадратное уравнение вида $ax^2 + c = 0$ имеет два корня: $-\sqrt{-\frac{c}{a}}$ и $\sqrt{-\frac{c}{a}}$, если $-\frac{c}{a} > 0$, и не имеет корней, если $-\frac{c}{a} < 0$. Решают такие уравнения, сводя их к уравнениям вида $x^2 = m$. Например, $0{,}5x^2 - 18 = 0$, $0{,}5x^2 = 18$, $x^2 = 36$, $x_1 = -6$, $x_2 = 6$.

20. Дискриминантом квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ называют выражение $D = b^2 - 4ac$.

Если $D > 0$, то квадратное уравнение имеет два корня; если $D = 0$, то один корень; если $D < 0$, то квадратное уравнение корней не имеет.

Корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ при $D \geqslant 0$ находят по формуле

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$$

Для квадратного уравнения вида $ax^2 + 2kx + c = 0$ формулу корней можно записать так:

$$x = \frac{-k \pm \sqrt{D_1}}{a}, \text{ где } D_1 = k^2 - ac.$$

21. Теорема Виета: сумма корней приведённого квадратного уравнения равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение корней равно свободному члену. Иначе говоря, если x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 + px + q = 0$, то $x_1 + x_2 = -p$ и $x_1x_2 = q$.

Из теоремы Виета следует, что если x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, то $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1x_2 = \frac{c}{a}$.

Теорема, обратная теореме Виета: если числа m и n таковы, что их сумма равна $-p$, а произведение равно q, то эти числа являются корнями уравнения $x^2 + px + q = 0$.

22. При решении дробных рациональных уравнений целесообразно поступать следующим образом:

1) найти общий знаменатель дробей, входящих в уравнение;
2) умножить обе части уравнения на общий знаменатель;
3) решить получившееся целое уравнение;
4) исключить из его корней те, которые обращают в нуль общий знаменатель.

Решим, например, уравнение

$$\frac{2x}{x-2} = \frac{2}{x^2 - 2x} - \frac{x+1}{2-x}.$$

Умножив обе части уравнения на общий знаменатель дробей, т. е. на $x(x-2)$, получим

$$2x^2 = 2 + x(x+1).$$

Это уравнение приводится к квадратному уравнению

$$x^2 - x - 2 = 0,$$

имеющему корни 2 и -1.

При $x = 2$ общий знаменатель исходного уравнения обращается в нуль, этот корень необходимо исключить. При $x = -1$ общий знаменатель $x(x-2)$ в нуль не обращается.

Следовательно, число -1 является корнем исходного уравнения.

23. Решением уравнения с двумя переменными называется пара значений переменных, обращающая это уравнение в верное равенство. Например, пара чисел $x = -5$, $y = 3$ является решением уравнения $x^2 - 4y = 13$. Это решение можно записать так: $(-5; 3)$.

Линейным уравнением с двумя переменными называется уравнение вида $ax + by = c$, где x и y — переменные, a, b и c — числа.

Уравнения с двумя переменными, имеющие одни и те же решения, называют равносильными. Уравнения, не имеющие решений, также считают равносильными.

24. Каждое решение $(x; y)$ уравнения с двумя переменными можно изобразить в координатной плоскости точкой с координатами x и y. Все такие точки образуют график уравнения.

Графиком линейного уравнения с двумя переменными, в котором хотя бы один из коэффициентов при переменных не равен нулю, является прямая.

25. Решением системы уравнений с двумя переменными называется пара значений переменных, обращающая каждое уравнение системы в верное равенство. Например, пара чисел $x = 3$, $y = 8$ — решение системы

$$\begin{cases} 3x - y = 1, \\ x + 2y = 19. \end{cases}$$

Решить систему уравнений — значит найти все её решения или доказать, что решений нет.

Системы уравнений с двумя переменными, имеющие одни и те же решения, называются равносильными. Системы уравнений, не имеющие решений, также считают равносильными.

Для решения систем двух линейных уравнений с двумя переменными используются как графический способ, так и аналитические способы — подстановки и сложения.

При графическом способе строят прямые — графики линейных уравнений и анализируют их расположение:

- если прямые совпадают, то система имеет бесконечно много решений; координаты любой точки прямой являются решением системы;

- если прямые параллельны, то система не имеет решений;
- если прямые пересекаются, то система имеет единственное решение; координаты точки пересечения прямых являются решением системы.

При решении системы двух линейных уравнений с двумя переменными способом подстановки поступают следующим образом:

- выражают из какого-либо уравнения системы одну переменную через другую;
- подставляют в другое уравнение системы вместо этой переменной полученное выражение;
- решают получившееся уравнение с одной переменной;
- подставляют значение найденной переменной в одно из уравнений и находят соответствующее значение другой переменной.

При решении системы двух линейных уравнений с двумя переменными способом сложения поступают следующим образом:

- умножают почленно уравнения системы, подбирая множители так, чтобы коэффициенты при одной из переменных стали в уравнениях противоположными числами;
- складывают почленно левые и правые части уравнений системы;
- решают получившееся уравнение с одной переменной;
- подставляют значение найденной переменной в одно из уравнений и находят соответствующее значение другой переменной.

Для решения систем двух уравнений с двумя переменными, в которых одно или оба уравнения не являются линейными, также используются как графический, так и аналитический способы решения.

При графическом способе решения строят графики уравнений и находят пары чисел — координаты их общих точек; эти пары чисел — решения системы. Сколько общих точек имеют графики, столько решений имеет система. Если графики не пересекаются, то делается вывод о том, что система решений не имеет. Решения, найденные графически, являются, как правило, приближёнными.

Если система содержит линейное уравнение, то её всегда можно решить способом подстановки. Если система состоит из двух уравнений с двумя переменными второй степени, то применить к ней способ подстановки или способ сложения удаётся лишь в отдельных частных случаях.

Неравенства

26. Число a больше числа b, если разность $a - b$ — положительное число; пишут: $a > b$. Число a меньше числа b, если разность $a - b$ — отрицательное число; пишут: $a < b$.

Если a больше b или a равно b, то пишут: $a \geqslant b$. Если a меньше b или a равно b, то пишут: $a \leqslant b$.

Неравенства, составленные с помощью знака $>$ или $<$, называют строгими. Неравенства, составленные с помощью знака $\geqslant$ или $\leqslant$, называют нестрогими.

27. Свойства числовых неравенств.
а) Если $a > b$, то $b < a$; если $a < b$, то $b > a$.
б) Если $a < b$ и $b < c$, то $a < c$.
в) Если $a < b$ и c — любое число, то $a + c < b + c$.
Если к обеим частям верного неравенства прибавить одно и то же число, то получится верное неравенство.
г) Если $a < b$ и c — положительное число, то

$$ac < bc;$$

если $a < b$ и c — отрицательное число, то

$$ac > bc.$$

Если обе части верного неравенства умножить или разделить на одно и то же положительное число, то получится верное неравенство;

если обе части верного неравенства умножить или разделить на одно и то же отрицательное число и изменить знак неравенства на противоположный, то получится верное неравенство.

28. Сложение и умножение числовых неравенств.
а) Если $a < b$ и $c < d$, то

$$a + c < b + d.$$

Если сложить почленно верные неравенства одного знака, то получится верное неравенство.
б) Если $a < b$ и $c < d$, где a, b, c и d — положительные числа, то

$$ac < bd.$$

Если перемножить почленно верные неравенства одного знака, левые и правые части которых положительные числа, то получится верное неравенство.
Если a и b — положительные числа, $a < b$ и n — натуральное число, то

$$a^n < b^n.$$

29. Решением неравенства с одной переменной называется значение переменной, которое обращает его в верное числовое неравенство. Например, число 1,8 — решение неравенства $5x < 10$. Этому неравенству удовлетворяет и любое другое число, меньшее 2.

Решить неравенство с одной переменной — значит найти все его решения или доказать, что решений нет.

30. Неравенства, имеющие одни и те же решения, называются равносильными. Неравенства, не имеющие решений, также считаются равносильными.

Неравенства с одной переменной обладают следующими свойствами:

- если из одной части неравенства перенести в другую слагаемое с противоположным знаком, то получится равносильное ему неравенство;

- если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же положительное число, то получится равносильное ему неравенство;
- если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же отрицательное число, изменив при этом знак неравенства на противоположный, то получится равносильное ему неравенство.

31. Числовой промежуток $[a;\ b]$, называемый числовым отрезком, — это множество всех чисел x, удовлетворяющих двойному неравенству $a \leqslant x \leqslant b$.

Числовой промежуток $(a;\ b)$, называемый интервалом, — это множество всех чисел, удовлетворяющих двойному неравенству $a < x < b$.

Числовой промежуток $[a;\ b)$, называемый полуинтервалом, — это множество всех чисел, удовлетворяющих двойному неравенству $a \leqslant x < b$.

Числовой промежуток $(a;\ b]$, называемый полуинтервалом, — это множество всех чисел, удовлетворяющих двойному неравенству $a < x \leqslant b$.

Числовые промежутки $[a;\ +\infty)$ и $(a;\ +\infty)$ — это множества всех чисел, удовлетворяющих соответственно неравенствам $x \geqslant a$ и $x > a$.

Числовые промежутки $(-\infty;\ b]$ и $(-\infty;\ b)$ — это множества всех чисел, удовлетворяющих соответственно неравенствам $x \leqslant b$ и $x < b$.

Числовые промежутки $[a;\ +\infty)$ и $(-\infty;\ b]$ называют числовыми лучами, а числовые промежутки $(a;\ +\infty)$ и $(-\infty;\ b)$ — открытыми числовыми лучами.

Числовой промежуток $(-\infty;\ +\infty)$ — это множество всех действительных чисел.

32. Неравенства вида $ax > b$ и $ax < b$, где a и b — некоторые числа, а x — переменная, называются линейными неравенствами с одной переменной.

33. Если ставится задача найти общие решения нескольких неравенств, то говорят, что надо решить систему неравенств.

Решением системы неравенств с одной переменной называется значение переменной, при котором верно каждое из неравенств системы.

Решить систему неравенств — значит найти все её решения или доказать, что решений нет.

Функции

34. Зависимость переменной y от переменной x называется функцией, если каждому значению x соответствует единственное значение y. Независимую переменную x иначе называют аргументом, а о зависимой переменной y говорят, что она является функцией этого аргумента. Все значения независимой переменной образуют *область определения функции*, а значения, которые принимает зависимая переменная, образуют *множество значений* *функции*. Область определения и множество значений функции $y = f(x)$ обозначают соответственно $D(f)$ и $E(f)$.

Значения аргумента, при которых функция принимает значение, равное нулю, называются нулями функции.

Промежутки знакопостоянства — это промежутки, на которых функция сохраняет знак.

Промежутки монотонности — это промежутки возрастания и убывания функции.

Графиком функции называется множество всех точек координатной плоскости, абсциссы которых равны значениям аргумента, а ординаты — соответствующим значениям функции.

35. Линейной функцией называется функция, которую можно задать формулой вида $y = kx + b$, где x — независимая переменная, k и b — некоторые числа. Её областью определения является множество всех действительных чисел.

Графиком функции, заданной формулой вида $y = kx + b$, в которой хотя бы один из коэффициентов k или b отличен от нуля, является прямая. Число k называют угловым коэффициентом этой прямой.

Если $k \neq 0$, то график функции $y = kx + b$ пересекает ось x; если $k = 0$ и $b \neq 0$, то прямая $y = kx + b$ параллельна оси x; если $k = 0$ и $b = 0$, то прямая $y = kx + b$ лежит на оси x.

36. Если угловые коэффициенты двух линейных функций различны, то их графики пересекаются; если угловые коэффициенты двух линейных функций одинаковы, то их графики параллельны.

37. Линейную функцию, задаваемую формулой $y = kx$ при $k \neq 0$, называют прямой пропорциональностью.

График прямой пропорциональности есть прямая, проходящая через начало координат. При $k > 0$ график расположен в первой и третьей координатных четвертях, при $k < 0$ — во второй и четвёртой координатных четвертях.

38. Обратной пропорциональностью называется функция, которую можно задать формулой вида $y = \frac{k}{x}$, где x — независимая переменная, k — не равное нулю число. Областью определения функции является множество всех действительных чисел, отличных от нуля.

При $k > 0$ функция $y = \frac{k}{x}$ принимает отрицательные значения, если $x < 0$, и положительные значения, если $x > 0$.

При $k < 0$ функция $y = \frac{k}{x}$ принимает положительные значения, если $x < 0$, и отрицательные значения, если $x > 0$.

График обратной пропорциональности — гипербола. При $k > 0$ график расположен в первой и третьей координатных четвертях, при $k < 0$ — во второй и четвёртой координатных четвертях.

39. Областью определения функции $y = x^2$ является множество всех действительных чисел. Функция обращается в нуль при $x = 0$, а при $x \neq 0$ принимает положительные значения. График функции $y = x^2$ — парабола. Этот график проходит через начало координат и расположен в первой и второй координатных четвертях. Он симметричен относительно оси y.

40. Областью определения функции $y = x^3$ является множество всех действительных чисел. Функция обращается в нуль при $x = 0$, принимает отрицательные значения, если $x < 0$, и положительные значения, если $x > 0$. График функции $y = x^3$ проходит через начало координат и расположен в первой и третьей координатных четвертях. Он симметричен относительно начала координат.

41. Область определения функции $y = \sqrt{x}$ — множество всех неотрицательных чисел. Функция обращается в нуль при $x = 0$, при $x > 0$ функция принимает положительные значения. График функции $y = \sqrt{x}$ расположен в первой координатной четверти, он представляет собой ветвь параболы.

42. Область определения функции $y = |x|$ — множество всех действительных чисел. Функция обращается в нуль при $x = 0$; при $x \neq 0$ функция принимает положительные значения. График состоит из двух лучей, исходящих из начала координат, и располагается в первой и во второй координатных четвертях. График функции $y = |x|$ симметричен относительно оси y.

43. Для того, чтобы найти координаты точек пересечения графиков функций, заданных формулами $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$, нужно приравнять правые части этих формул и решить уравнение $k_1x + b_1 = k_2x + b_2$. Далее следует подставить полученное значение x в правую часть любой из данных функций и найти соответствующее значение y. Полученные значения x и y будут являться координатами точки пересечения графиков.

Действительные числа

44. Целые и дробные числа составляют множество рациональных чисел. Всякое рациональное число можно представить в виде дроби $\frac{m}{n}$, где m — целое число, а n — натуральное.

Каждое рациональное число может быть представлено в виде бесконечной десятичной периодической дроби. Каждая бесконечная десятичная периодическая дробь представляет некоторое рациональное число.

Положительные бесконечные десятичные дроби, противоположные им числа и число нуль образуют множество действительных чисел.

Число, которое можно представить в виде бесконечной десятичной непериодической дроби, называют иррациональным числом.

Каждому действительному числу соответствует точка на координатной прямой, и каждой точке координатной прямой соответствует некоторое действительное число.

45. Стандартным видом числа α называют его запись в виде $a \cdot 10^n$, где $1 \leqslant a < 10$ и n — целое число. Число n называют порядком числа α. Например, $73\,000 = 7{,}3 \cdot 10^4$ ($n = 4$); $0{,}0026 = 2{,}6 \cdot 10^{-3}$ ($n = -3$).

СПРАВОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ

ТАБЛИЦА КВАДРАТОВ

Десятки	Единицы									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801

ТАБЛИЦА СТЕПЕНЕЙ

a^n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
3	3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683	59049
4	4	16	64	256	1024	4096	16384	65536	262144	1048576
5	5	25	125	625	3125	15625	78125	390625	1953125	9765625
6	6	36	216	1296	7776	46656	279936	1679616	10077696	60466176
7	7	49	343	2401	16807	117649	823543	5764801	40353607	282475249
8	8	64	512	4096	32768	262144	2097152	16777216	134217728	1073741824
9	9	81	729	6561	59049	531441	4782969	43046721	387420489	3486784401
10	10	100	1000	10000	100000	1000000	10000000	100000000	1000000000	10000000000

ТАБЛИЦА ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ ДО 1000

2	3	5	7	11	13	17	19
23	29	31	37	41	43	47	53
59	61	67	71	73	79	83	89
97	101	103	107	109	113	127	131
137	139	149	151	157	163	167	173
179	181	191	193	197	199	211	223
227	229	233	239	241	251	257	263
269	271	277	281	283	293	307	311
313	317	331	337	347	349	353	359
367	373	379	383	389	397	401	409
419	421	431	433	439	443	449	457
461	463	467	479	487	491	499	503
509	521	523	541	547	557	563	569
571	577	587	593	599	601	607	613
617	619	631	641	643	647	653	659
661	673	677	683	691	701	709	719
727	733	739	743	751	757	761	769
773	787	797	809	811	821	823	827
829	839	853	857	859	863	877	881
883	887	907	911	919	929	937	941
947	953	967	971	977	983	991	997

Список дополнительной литературы

1. Агаханов Н. Х. Математика. Районные олимпиады. 6—11 классы / Н. Х. Агаханов, О. К. Подлипский. — М.: Просвещение, 2010.
2. Алгебра. 9 класс: учеб. для общеобразоват. организаций: углубл. уровень / Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешков, И. Е. Феоктистов. — М.: Просвещение, 2017.
3. Баврин И. И. Старинные задачи / И. И. Баврин, Е. А. Фрибус. — М.: Просвещение, 1994.
4. Волошинов А. В. Мудрость Эллады / А. В. Волошинов. — М.: Просвещение, 2009.
5. Всероссийская олимпиада школьников по математике. Смотрите в Интернете по адресу: http://gotourl.ru/11390
6. Галкин Е. В. Задачи с целыми числами: 7—11 кл. / Е. В. Галкин. — М.: Просвещение, 2011.
7. Глейзер Г. И. История математики в школе: VII—VIII кл. / Г. И. Глейзер. — М.: Просвещение, 1982.
8. Государственная (итоговая) аттестация выпускников 9 классов в новой форме. 9 класс. Смотрите в Интернете по адресу: http://gotourl.ru/12489
9. Дорофеева А. В. Страницы истории на уроках математики / А. В. Дорофеева. — М.: Просвещение, 2007.
10. Игнатьев Е. И. В царстве смекалки, или Арифметика для всех. Кн. 1 / Е. И. Игнатьев. — М.: Просвещение, 2008.
11. Игнатьев Е. И. В царстве смекалки, или Арифметика для всех. Кн. 2 / Е. И. Игнатьев. — М.: Просвещение, 2008.
12. Игнатьев Е. И. В царстве смекалки, или Арифметика для всех. Кн. 3 / Е. И. Игнатьев. — М.: Просвещение, 2008.
13. Кордемский Б. А. Великие жизни в математике: кн. для учащихся 8—11 кл. / Б. А. Кордемский. — М.: Просвещение, 1995.
14. Кордемский Б. А. Удивительный мир чисел: мат. головоломки и задачи для любознательных: кн. для учащихся / Б. А. Кордемский, А. А. Ахадов. — М.: Просвещение, 1996.
15. Московский центр непрерывного математического образования. Смотрите в Интернете по адресу: http://gotourl.ru/12768 Рекомендуем рубрики: «Олимпиады для школьников», «Журнал „Квант“».
16. Перельман Я. И. Занимательная алгебра. Занимательная геометрия / Я. И. Перельман. — М.: АСТ; Астрель, 2005.
17. Пичурин Л. Ф. За страницами учебника алгебры / Л. Ф. Пичурин. — М.: Просвещение, 1999.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОТВЕТЫ

Глава I

2. 1,(5); 1,68. **5.** а) Всем множествам; б) $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{R}$; в) $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{R}$; г) $\boldsymbol{R}$. **7.** а) 0,(3); б) 0,(6); в) 0,8(3); г) 0,(7); д) 1,(72); е) 2,2(6). **11.** а) $13 \in N$; б) $0{,}8 \in \boldsymbol{Q}$; в) $\sqrt{3} \in \boldsymbol{R}$; г) $585 \in \boldsymbol{N}$; д) $0 \in \boldsymbol{Z}$. **12.** а) 200; б) −100; −2; в) 0; 200. **13.** а) $\boldsymbol{Z}$, $\boldsymbol{N}$; б) $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{Q}$; в) $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{N}$; г) $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{Z}$. **15.** а) $\sqrt{a}$ рациональное, если $a = 1$; 4; 9; 16; 25; б) $\sqrt{a}$ иррациональное, если $a = 2$; 3; 5; 6; 7. **17.** $-18 \in \boldsymbol{Z}$; $205 \in \boldsymbol{Q}$; $\sqrt{3} \notin \boldsymbol{N}$; $0{,}(8) \in \boldsymbol{R}$; $2 + \sqrt{2} \in \boldsymbol{R}$. **18.** а) $\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Q}$; б) $\boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{Q}$; в) $\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{R}$; г) $\boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{R}$. **20.** а) 0,2; б) 0,6; в) 0,8; г) 1; д) 1; е) −2. **21.** а) 360; б) $-\frac{2}{7}$; в) 250; г) −24,8. **24.** а) −4; −3; −2; −1; 0; 1; 2; 3; б) −6; −5; −4; −3; −2; в) −5; −4; −3; г) −2; −1; 0. **31.** а) $c > \sqrt{c}$; б) $c < \sqrt{c}$. Существует, $c = 0$; $c = 1$. **33.** а) 11,2; б) 5,31. **35.** а) 49; б) 11^{-34}; в) 5; г) 0,4; д) 540; е) 85. **36.** а) $\frac{28}{91}$; б) $\frac{17}{73}$; в) 4. **38.** а) 0,13; б) 4; в) 0,047; г) 0,002. **42.** $407{,}4 \leqslant a \leqslant 432{,}6$. **43.** а) Да; б) нет; в) да; г) нет. **44.** Нет. **47.** ≈ 1%. **48.** $2\frac{12}{19}$%. **49.** 0,02%. **53.** $q = -48$. **57.** 300 мм. **59.** а) 1; б) −1. **60.** а) $x_1 = -15$, $y_1 = -16$; $x_2 = 16$, $y_2 = 15$; б) $x_1 = 4$, $y_1 = -7$; $x_2 = 8$, $y_2 = 1$. **63.** 18 тетрадей. **64.** На 5 тетрадей. **65.** С 16 по 31 марта. **66.** 17 учебных кабинетов. **67.** 29 месяцев. **69.** На $11\frac{1}{9}$%. **70.** 5 банок. **71.** 30. **72.** Экономия 995 р. **71.** 30. **73.** а) $\frac{4a-12}{5}$; б) $-ab$. **74.** а) $x = 1$, $y = 4$; б) $x = 1{,}5$, $y = 1$. **75.** а) 0,04; б) 229. **77.** $1\frac{1}{3}$. **81.** а) 22; б) 8; в) 8; г) 15. **86.** а) 1; б) $2\frac{6}{14}$; в) 2; г) 3; д) 3. **87.** а) 1; б) $-\frac{5}{7}$; в) 0. **88.** а) 10; б) 2; в) −29; г) 3. **90.** а), в), е) — Рациональное число; б), г), д) — иррациональное число. **93.** 102 м; 0 м. **94.** 12,089 кг. **95.** 0,8 Дж. **97.** 1) Жилой дом и детский сад; 3) в 3-м подъезде на 3-м этаже; 5) за 6 лет.

Глава II

99. а) $(-\infty; +\infty)$; б) $\left(-\infty; 1\frac{2}{3}\right]$; в) $(-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$; г) $(-\infty; +\infty)$. **100.** а) $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$; б) $[1; 2) \cup (2; +\infty)$. **101.** а) $-\frac{1}{7}$, 1; б) 0,5; в) нет нулей функции; г) $\frac{1}{5}$. **102.** а) 3; б) 1,5. **105.** а), в) — Нечётная; б), г) — чётная. **109.** а) (2; 3,8); б) (–12,6; 6,8). **110.** а) –5; 3; б) –1; 1,5; в) $\frac{1}{3}$; 7; г) нет решений. **115.** а) 1. $y = -0{,}6x + 2{,}4$; 2. $y = 1{,}5x + 3{,}5$; б) 1. $y = -\frac{1}{x}$; 2. $y = \frac{3}{x}$; в) 1. $y = \sqrt{4x}$; 2. $y = \sqrt{9x}$. **125.** а), б), в) — Да. **126.** (–3; –9); (1; –1). **127.** (1000; 10 000). **128.** ±4. **131.** а) 2 корня; б) 1 корень; в) нет корней. **132.** а) $\frac{1}{5a+2}$; б) $\frac{1-3a}{2a+1}$. **133.** $3 \pm \sqrt{5}$. **142.** а) $-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$; б) нулей нет; в) нулей нет. **143.** При $a < 0$. **147.** а) Корней нет; б) 0; 2,8. **148.** а) $(-\infty; 2{,}9)$; б) $[0{,}25; +\infty)$; в) $[-1{,}8; +\infty)$; г) $(-\infty; 0{,}2)$. **149.** а) 1,5 с; б)2,5 с; в) 31,25 м; г) 4 с. **150.** а) (2; 3); б) (–1,25; 1,125). **159.** $b = -1$. **160.** При $n = 5$; (–1; 13). **161.** а) $a = -\frac{1}{4}$; $b = 0$; $c = 5$; б) $a = 2$; $b = 12$; $c = 18$. **164.** $\frac{3a-1}{a+2}$. **165.** а) $1 - \sqrt{5}$; $1 + \sqrt{5}$; б) –2; $2\frac{1}{3}$. **166.** 100 га. **167.** 8 машин. **168.** а) $x = 3$, $y = -2$; б) $x = -2$, $y = -3$. **170.** а) $x = 2$, $y = 1$; б) $x = -3$, $y = -1$. **173.** 1 и 2. **174.** (4; 13), (14; 3). **175.** (–7; 9), (–1; 15), (1; 1), (7; 7). **177.** а) 0; 4; б) 1; 3; в) корней нет. **191.** а) При $a = -0{,}28$; б) при $a = 3$; в) при $a = -2$; г) при $a = 0{,}001$. **200.** а) При $c > 13$; б) при $c > 8$. **201.** При $b = -12$, $c = 24$. **202.** При $a = 2$. **203.** При $a > 0$ и $c \leqslant 0$; при $a < 0$ и $c \geqslant 0$. **204.** При $a = -6$ и $b = 26$.

Глава III

211. а) –2; б) –0,2; 0,2; в) –3,5; 2; г) –0,5; 0,5. **212.** а) 0; 5,5; б) $1\frac{1}{3}$; в) –7; г) $-6\frac{1}{3}$; 5. **215.** 6 см. **216.** 17 и 12 или –12 и –17. **217.** а) $-\sqrt{6}$; 0; $\sqrt{6}$; б) 0; в) 0; 1,5; 2; г) –0,2; 0; 0,5; д) $-\frac{1}{3}$; $\frac{1}{3}$; 2; е) –4; 0; 1; 4;

ж) -1; 1; з) -1; 0; 1; 3. **219.** а) $-3-\sqrt{15}$; -1; $-3+\sqrt{15}$. *Указание.* Представьте $7x^2$ в виде x^2+6x^2; б) $-2{,}5-\sqrt{1{,}25}$; $-2{,}5+\sqrt{1{,}25}$; 1. **220.** $(1; 0)$, $(2; 0)$, $(3; 0)$ и $(0; -6)$. *Указание.* Представьте $-6x^2$ в виде $-x^2-5x^2$. **221.** а) -2; 2; б) -1; 1; 3; в) -3; 2; г) $-1{,}5$; 1; $\frac{-1-\sqrt{17}}{4}$; $\frac{-1+\sqrt{17}}{4}$. **222.** а) -2; -1; 1; 2; б) 2; в) -4; 3. **223.** а) -3; 3; б) $-\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$; -2; 2; в) корней нет; г) $-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$; -1; 1; д) $-\sqrt{\frac{1}{3}}$; $\sqrt{\frac{1}{3}}$; $-\sqrt{\frac{2}{3}}$; $\sqrt{\frac{2}{3}}$; е) $-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$. **224.** а) -3; 3; -4; 4; б) корней нет; в) $-\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$; г) $-\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$; д) $-\sqrt{\frac{1}{2}}$; $\sqrt{\frac{1}{2}}$; -2; 2; е) корней нет. **225.** а) $(-2; 0)$, $(2; 0)$, $(-1; 0)$, $(1; 0)$; $(0; 4)$; б) $(-\sqrt{2}; 0)$, $(\sqrt{2}; 0)$; $(0; -10)$; в) $(-\sqrt{10}; 0)$, $(\sqrt{10}; 0)$; $(0; 100)$; г) $(0; 0)$. **227.** а) Корней нет; б) $-\sqrt{\frac{1}{3}}$; $\sqrt{\frac{1}{3}}$; -2; 2. **228.** а) -1; 1; $-\sqrt{5}$; $\sqrt{5}$; б) 1; $-\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$. **229.** а) 1; б) -2; 1; 2. **231.** а) $(-\infty; 8{,}6)$; б) $(-2{,}5; +\infty)$. **232.** За 66 ч и 55 ч. **233.** а) 0; -3; б) 0; в) 0. **234.** а) $-\sqrt{0{,}4}$; $\sqrt{0{,}4}$; б) 4. **235.** а) 10; б) 0. **236.** а) -1; 7; б) 2; $8\frac{2}{3}$; в) 4. **237.** а) $1{,}5$; б) $-0{,}5$. **238.** а) $8{,}2$; 13; б) $-6{,}6$; 3. **239.** а) $3{,}2$; 8; б) $-1\frac{3}{4}$; 2. **240.** а) $(-1; -9)$, $(-3; -3)$, $(3; 3)$. **241.** а) $-1{,}4$; $-0{,}5$; $0{,}5$; б) $-\frac{1}{3}$; $\frac{1}{3}$; 2. **242.** а) -1; 3; б) -4; 3; в) -2; 4. **243.** а) 1; $2{,}8$; 6; б) 2; 5; $7+4\sqrt{2}$; $7-4\sqrt{2}$. **245.** а) $-\frac{1}{2}$; 2; $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$; $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. *Указание.* Введите новую переменную $y=x-\frac{1}{x}$; б) $\frac{1}{3}$; 3; $\frac{-3-\sqrt{5}}{2}$; $\frac{-3+\sqrt{5}}{2}$. **246.** а) $\frac{x+4}{5}$; б) $\frac{3x+12}{x+16}$. **248.** 24 дня и 12 дней. **249.** 6 и 12. **250.** $\frac{12}{18}$. **251.** $\frac{5}{8}$, $\frac{3}{6}$. **252.** 50 км/ч. **253.** $1\frac{1}{2}$ ч. **254.** 20 км/ч. **255.** 2 или 2,5 ч. **256.** 10 и 15 ц/га. **257.** 15 км/ч. **258.** 16 км/ч. **259.** 4 км/ч. **260.** 10 и 15 дней. **261.** 30 и 20 ч. **262.** а) $\frac{a+y}{a-y}$; б) $\frac{1}{3x-2}$. **264.** а) $(-8; 6)$; б) $(-\infty; 1{,}5)\cup(2; +\infty)$; в) $(-\infty; -3)\cup(5; +\infty)$; г) $(1; 1{,}2)$; д) $x\neq 1{,}5$; е) решений нет; ж) $(0; 0{,}9)$; з) $(-\infty; 0)\cup(3{,}5; +\infty)$.

265. а) $(-\infty; -2{,}5] \cup [1; +\infty)$; б) $[-2; 3]$; в) $(-\infty; -\sqrt{5}] \cup [\sqrt{5}; +\infty)$. **266.** а) $(-\infty; -7) \cup (0{,}5; +\infty)$; б) $x \neq \frac{2}{3}$; в) $\left[\frac{1}{2}; 1\frac{2}{3}\right]$; г) $(-\infty; -4{,}5] \cup [2; +\infty)$; д) $(-\infty; 0) \cup \left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$; е) $(-\infty; -2\sqrt{2}) \cup (2\sqrt{2}; +\infty)$. **267.** а) При $x < -1{,}5$ и $x > -1$; б) при $x \neq -\frac{1}{6}$. **268.** а) $(-4; 4)$; б) $(-\infty; -\sqrt{3}\,] \cup [\sqrt{3}; +\infty)$; в) $(-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$; г) $\left(-\infty; -\frac{1}{5}\right] \cup [0; +\infty)$; д) $\left(-\frac{2}{3}; 0\right)$; е) $(-\infty; 0) \cup (7; +\infty)$. **269.** а) $[-10; 10]$; б) $(-\infty; -2\sqrt{6}\,) \cup (2\sqrt{6}\ +\infty)$; в) $[-4; 0]$; г) $\left(-\infty; -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{3}}{3}; +\infty\right)$; д) $(-\infty; 0) \cup (0{,}4; +\infty)$; е) $(-\infty; -0{,}5) \cup (0; +\infty)$. **270.** а) При $b < -6$ и $b > 6$; б) при $b < -\sqrt{15}$ и $b > \sqrt{15}$. **271.** а) При $-12 < t < 12$; б) при $-3 < t < 3$. **272.** а) $\left(-7; -\frac{1}{4}\right)$; б) $\left(-\infty; 1\frac{1}{2}\right] \cup \left[1\frac{2}{3}; +\infty\right)$; в) x — любое число; г) $\left(-\infty; \frac{9-\sqrt{37}}{22}\right) \cup \left(\frac{9+\sqrt{37}}{22}; +\infty\right)$. **273.** а) $(-\infty; -1) \cup (4{,}5; +\infty)$; б) $x \neq \frac{1}{4}$. **274.** а) $[0; 4]$; б) все числа, кроме 3. **278.** Не превосходит 5 см. **279.** Больше 4 см. **280.** а) $(-2; 3)$; б) $(4; 6)$; в) $(-12; -2) \cup (8; 10)$; г) $\left[-1; \frac{2}{3}\right]$; д) $[1; 8]$; е) решений нет. **281.** а) 2, 3, 4, 5; б) 2, 3, 4. **283.** а) -5; 5; б) $-\sqrt{6}$; $-\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$; $\sqrt{6}$. **284.** 7 кг. **285.** а) $(-\infty; -8) \cup (5; +\infty)$; б) $(-10; 14)$; в) $(-\infty; -8{,}5] \cup [3{,}5; +\infty)$; г) $\left[-\frac{1}{3}; -\frac{1}{8}\right]$. **286.** а) $(-25; 30)$; б) $(-\infty; -6) \cup (6; +\infty)$; в) $\left[\frac{1}{5}; \frac{1}{3}\right]$; г) $(-\infty; -6{,}3] \cup [-0{,}1; +\infty)$. **287.** а) $(2; 5) \cup (12; +\infty)$; б) $(-\infty; -7) \cup (-1; 4)$; в) $(-\infty; -5) \cup (-1; 0) \cup (8; +\infty)$. **288.** а) $(-48; 37) \cup (42; +\infty)$; б) $(-\infty; -0{,}7) \cup (2{,}8; 9{,}2)$. **289.** а) $(-\infty; -9) \cup (2; 15)$; б) $(-6; 0) \cup (5; +\infty)$; в) $(1; 4) \cup (8; 16)$. **290.** б) $\left[-\frac{1}{3}; -\frac{1}{7}\right]$; в) $(-12; 3)$; г) $\left[-6; \frac{1}{3}\right]$. **291.** а) $(-\infty; 18) \cup (19; +\infty)$; б) $(-\infty; -0{,}9) \cup (3{,}2; +\infty)$;

в) $[-3; 8{,}5]$; г) $[0{,}3; 8]$. **292.** а) $[-8; 5]$; б) $[-12; 1] \cup [9; +\infty)$. **293.** а) $(-\infty; -2{,}5] \cup [17; +\infty)$; б) $[-9; 0] \cup [4; +\infty)$. **294.** а) $(-6; 5)$; б) $(-\infty; -3{,}8) \cup (1{,}4; +\infty)$; в) $(-\infty; 0) \cup (1{,}6; +\infty)$; г) $(-\infty; 0{,}3) \cup (4; +\infty)$. **295.** а) $(-7; 21)$; б) $(-\infty; -4{,}7) \cup (7{,}2; +\infty)$; в) $(-\infty; -3) \cup \left(-\frac{1}{6}; +\infty\right)$; г) $(0; 3)$. **296.** а) $(-\infty; 1] \cup (3; +\infty)$; б) $[-6; 5)$; в) $(0; 2]$; г) $(-\infty; 1) \cup$ $\cup [1{,}5; +\infty)$. **297.** а) $(-16; -4)$; б) $(-\infty; 2) \cup (2{,}5; +\infty)$; в) $(-\infty; 0) \cup$ $\cup (0{,}5; +\infty)$; г) $(-4; -1{,}2)$. **298.** а) $(-4; 0)$; б) $(-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$; в) $(1; 2]$; г) $(-\infty; -2) \cup [1{,}5; +\infty)$. **299.** а) $y = -4x$; б) $y = 1{,}6x + 4$. **300.** 2 л и 3 л. **302.** а) 2; $1 + \sqrt{2}$; $1 - \sqrt{2}$; б) -3; -2; 1; 2. **303.** а) -3; 2; б) -1; $1 + \sqrt{2}$; $1 - \sqrt{2}$. **304.** $(-3; 0)$, $(-2; 0)$, $(1; 0)$ и $(0; -6)$. **305.** $a = 5$; $(-4; 0)$, $(2; 0)$, $(3; 0)$. **306.** а) -1; 1; б) -1; 1. **307.** а) -10; -4; 2. Указание. Используйте подстановку $y = (x + 4)^2$; б) 2; 4; $3 - \sqrt{77}$; $3 + \sqrt{77}$. **308.** а) 4; б) -2. **310.** $\frac{1}{5}$; $\frac{1}{2}$; 2; 5. **315.** а) 0; -1; 1; б) 0; -2; 2; в) 0; -8; 8; г) 0; $-2\sqrt{5}$; $2\sqrt{5}$. **316.** а) 0; -5; 5; б) 0; $-\sqrt{6}$; $\sqrt{6}$. **317.** а) 1; 2; б) -1; $-\frac{1}{2}$; 1; в) -2; 0,8; 5; г) -1; $\frac{1}{6}$; 6. **318.** а) -1. Указание. Представьте $2x^2$ в виде $x^2 + x^2$; б) -1; $\frac{-3 + \sqrt{33}}{2}$; $\frac{-3 - \sqrt{33}}{2}$. **321.** а) $-3 - \sqrt{6}$; $-3 + \sqrt{6}$; $-3 - \sqrt{17}$; $-3 + \sqrt{17}$; б) -2; 4; $1 - \sqrt{5}$; $1 + \sqrt{5}$; в) корней нет; г) -4; 0; д) $-1 - \sqrt{2}$; $-1 + \sqrt{2}$; е) -4; 5; ж) $-4{,}5$; 1; $\frac{-7 - \sqrt{65}}{4}$; $\frac{-7 + \sqrt{65}}{4}$. **322.** а) 1; б) -1; $-\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$. **323.** а) $-\frac{1}{2}$; б) -1; 2. **327.** а) -3; 3; б) -1; 1. **328.** $-5{,}6$; 4. **329.** а) -7; 15; б) $-2\frac{1}{3}$; 5. **330.** а) 3; 10; б) $2\frac{2}{3}$; 4. **331.** 4. **332.** а) -1; $\frac{11 - \sqrt{57}}{8}$; $\frac{11 + \sqrt{57}}{8}$; б) -1; $\frac{4 - \sqrt{7}}{3}$; $\frac{4 + \sqrt{7}}{3}$. **333.** а) 1; б) 2; $2\frac{1}{2}$. **334.** а) -1; 1; б) 0. **335.** а) 1,4; 3; б) 3; 9. **336.** а) 1; б) $\frac{1}{3}$; 3. **337.** 2; $\frac{1}{2}$. **338.** а) $-2{,}5 - \sqrt{5{,}25}$; $-2{,}5 + \sqrt{5{,}25}$; $2{,}5 - \sqrt{5{,}25}$; $2{,}5 + \sqrt{5{,}25}$; б) $-2 - \sqrt{5}$; $-2 + \sqrt{5}$; $2 - \sqrt{5}$; $2 + \sqrt{5}$; -1; 1. **339.** б) $[-9; 1]$; в) $(-\infty; -2) \cup \left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$; г) $(-\infty; -1{,}75] \cup [1{,}5; +\infty)$; д) x — любое число; е) $x \neq \frac{1}{3}$. **341.** а) $(-4; 4)$; б) $x \neq -2$. **342.** При

$-4 < a < -2$ и $-2 < a < 6$. **343.** При $b < 2 - \sqrt{10}$ и $b > 2 + \sqrt{10}$. **344.** а) При $c > 36$; б) при $-20 < c < 20$. **345.** а) При $0 < k < 42{,}25$; б) при $k = 42{,}25$ и $k < 0$; в) при $k > 42{,}25$. **346.** $[-3; 1]$. **347.** а) $(7; +\infty)$; б) $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right)$; в) $(-\infty; -3)$; г) $(4; 5)$. **348.** а) $(-1; 2)$; б) $(1; 4)$. **349.** а) $(-\infty; -1{,}2) \cup (4; 6)$; б) $\left(\frac{1}{7}; \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$; в) $(-\infty; -1{,}6) \cup (-0{,}6; 1{,}2)$; г) $(-\infty; -1{,}8) \cup (1{,}7; 1{,}9)$. **350.** а) -4; $1\frac{2}{3}$; 2; б) $(-\infty; -4) \cup \left(1\frac{2}{3}; 2\right)$; в) $\left(-4; 1\frac{2}{3}\right) \cup (2; +\infty)$. **351.** а) $(-\infty; 2) \cup (7; +\infty)$; б) $(7{,}3; 9{,}8)$; в) $(-0{,}8; 4) \cup \cup (20; +\infty)$; г) $(-\infty; -0{,}3] \cup [5; 17]$. **352.** а) $(-17; -4) \cup (4; +\infty)$; б) $(-\infty; -11) \cup \left(\frac{2}{3}; 11\right)$; в) $(-\infty; -5) \cup (0; 5)$; г) $(-0{,}1; 0) \cup (0{,}1; +\infty)$; д) $(-\infty; -3) \cup (-1; 1) \cup (3; +\infty)$; е) $(-6; 0) \cup (6; 15)$. **353.** а) $(-2; 6)$; б) $(-\infty; 0) \cup (4; +\infty)$; в) $(-\infty; 1) \cup (1; 24)$; г) $(-\infty; -7) \cup (21; +\infty)$. **354.** а) $\left(-\infty; -\frac{1}{6}\right) \cup \left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$; б) $\left(-\infty; -\frac{2}{11}\right) \cup (4; +\infty)$. **355.** а) Нет; б) нет. **356.** а) $(-\infty; -4) \cup (8; +\infty)$; б) $(-16; 11)$; в) $[-1; 3)$; г) $(-\infty; 4) \cup \cup [6; +\infty)$; д) $(-1; 2]$; е) $(-\infty; -1{,}5) \cup [0{,}2; +\infty)$. **357.** а) $(-4; 18)$; б) $(-\infty; -2) \cup (0; +\infty)$; в) $\left(-\infty; -\frac{2}{3}\right) \cup \left[\frac{1}{5}; +\infty\right)$; г) $[-12{,}4; -8)$.

Глава IV

359. а) $(3; 0)$; $(0; -1{,}5)$; б) $(0; -10)$; $(-2; 0)$; в) $(0; -4)$; $(0{,}5; 0)$; г) $(0; 2)$; $(-1; 0)$. **361.** а) Во второй; б) в первой. **362.** а) $y = 0{,}5x + 1$; б) $y = -0{,}5x - 1$; в) $y = -1$. **366.** $k = -8$. **367.** а) $x^2 + y^2 = 9$; б) $x^2 + y^2 = 25$; в) $x^2 + y^2 = 64$. **368.** а) $(x - 2)^2 + (y + 5)^2 = 25$; б) $(x - 2)^2 + + (y + 5)^2 = 169$; в) $(x - 2)^2 + (y + 5)^2 = 2$. **370.** 2. Гипербола. **371.** При $m > 0$. **372.** а) При $r = 7$; б) при $r = 5$. **373.** а) $(x - 3)^2 + (y - 8)^2 = = 64$; б) $(x - 3)^2 + (y - 8)^2 = 9$. **376.** а) При $a = 7{,}5$; б) при $a = 0$, $a = 1$. **378.** а) $(x - 5)^2 + (y - 8)^2 = 16$; б) $(x + 5)^2 + (y - 8)^2 = 16$; $(x - 5)^2 + (y + 8)^2 = 16$; $(x + 5)^2 + (y + 8)^2 = 16$. **379.** а) $x^2 + y^2 = 4$; $x^2 + y^2 = 25$; б) $(x - 3)^2 + y^2 = 4$; $(x - 3)^2 + y^2 = 25$; в) $x^2 + (y - 4)^2 = 4$;

$x^2 + (y - 4)^2 = 25$; г) $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$; $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$. **381.** а) $[-0{,}24; 0]$; б) $(-\infty; -13) \cup (13; +\infty)$; г) $(-2; 12)$; д) y — любое число. **382.** а) $(5; 2)$; б) $(-0{,}75; -4{,}25)$. **383.** а) $(9; -7{,}5)$; б) $(30; -25)$. **385.** а) $(0; -4)$, $(4; 0)$; б) $(1; 2)$, $\left(-1\frac{1}{2}; 3\frac{1}{4}\right)$. **386.** а) $(-14; -13)$, $(12; 13)$; б) $(-2; -13)$, $(4; -7)$. **387.** а) $x_1 = -5$, $y_1 = 4$; $x_2 = -2\frac{1}{3}$; $y_2 = 7\frac{1}{5}$; б) $p_1 = 6$, $t_1 = 2$; $p_2 = -5$, $t_2 = -1\frac{2}{3}$. **388.** а) $(-2; -3)$, $(2; 3)$; б) $(2; 1)$, $(2; 5)$, $(3; 1)$, $(3; 5)$. **390.** а) $(-3; -2)$, $(3; 1)$; б) $(3; -5)$, $(5; -8)$. **391.** а) $(-\sqrt{6}; \sqrt{6})$; $(\sqrt{6}; -\sqrt{6})$; б) $(-5; -4)$, $(5; 4)$. **392.** а) $(-4; -1)$, $(-4; 1)$, $(4; -1)$, $(4; 1)$; б) $(-6; -5)$, $(-6; 5)$, $(6; -5)$, $(6; 5)$; в) $(-7; -9)$, $(8; 6)$. **394.** а) $(0; 6)$; б) $(-4; 0)$. **395.** $(5{,}4; 10{,}8)$. **403.** а) Одну; б) ни одной. **405.** а), б), в) — Две. **406.** а) При $c = 0$; 1; 2; б) при $c = -3$; 3; в) при $c = 5$; 6; 7. **408.** При $b = 3$. **411.** 16 км/ч и 18 км/ч. **412.** а), г), д) — Одно решение; б), в) — нет решений, е) — бесконечно много решений. **415.** При $k = 0$ система имеет единственное решение; нет; нет. **416.** а) $k = -12$, $m = 1$; б) $k = -12$, $m = -24$; в) $k = m = 1$. **417.** а) $k = -1$; б) $k = -5$. **420.** 5 и 7. **422.** 6 и 8 см. **423.** 60 и 40 м. **424.** 210 см^2. **425.** 4,8 и 3,6 км/ч. **426.** 0,16 и 0,12 м/с. **427.** 6 и 5 см. **428.** 8 и 6 см. **429.** 5 и 12 см. **430.** 60 и 84 ч. **431.** 8 и 12 ч. **432.** 500 000 р.; 8% годовых. **433.** 10 и 6 ч. **434.** 5 дм^2. **435.** 1 и 1,2 кг. **436.** 4 и 5 км/ч. **437.** 4 и 5 км/ч. **438.** 60 и 40 км/ч. **439.** 1,2 и 1,4 г/см^3. **440.** 40 см^3 олова и 60 см^3 меди. **441.** 200 г; 20%. **446.** а) $(0; 6)$; б) $(-\infty; -8] \cup [0; +\infty)$; в) $[-2; 2]$; г) $(-\infty; -\sqrt{6}) \cup (\sqrt{6}; +\infty)$. **447.** а), б), г), д), е) — Да; в) — нет. **454.** а) Точка $(3; 2)$; б) множество точек, принадлежащих параболе $y = (x - 2)^2 + 1$, и точек, расположенных ниже неё. **455.** а) $(x - 2)^2 + y^2 \leqslant 9$; б) $x^2 + (y - 4)^2 > 4$. **457.** а) Множеством решений является объединение первой и третьей четвертей координатной плоскости, включая оси координат; б) множеством решений является объединение второй и четвёртой четвертей координатной плоскости, кроме осей координат. **459.** $\frac{x - 1}{x + 1}$. **460.** $(1; 3)$, $(0; -2)$. **464.** а) $\begin{cases} x \geqslant 0, \\ y \geqslant 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x \leqslant 0, \\ y \leqslant 0. \end{cases}$ **466.** а) $k = 3$, $b < -1$; б) $k \neq 3$, b — любое число; в) $k = 3$, $b = -1$. **467.** а) $\begin{cases} y \leqslant 1{,}5x + 3, \\ y \leqslant -1{,}5x + 3, \\ y \geqslant 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + y^2 \geqslant 25, \\ x^2 + y^2 \leqslant 100. \end{cases}$

468. $\begin{cases} y \leqslant x, \\ y \geqslant -2. \end{cases}$ **469.** а) -7; -6; б) -4; 12. **470.** [5; 15]. **472.** а) $(-4; -2)$, $(4; 2)$, $(1{,}5\sqrt{6}; -0{,}5\sqrt{6})$, $(-1{,}5\sqrt{6}; 0{,}5\sqrt{6})$; б) $(-3; -1)$, $(3; 1)$, $(1; 3)$. **473.** а) $(-2; -2)$, $(2; 2)$, $\left(\frac{1 + 2\sqrt{39}}{5}; \frac{2 - \sqrt{39}}{5}\right)$, $\left(\frac{1 - 2\sqrt{39}}{5}; \frac{2 + \sqrt{39}}{5}\right)$; б) $(-5; -1)$, $(5; 1)$. **474.** а) $(-2; -3)$, $(2; 3)$; б) $(0; 0)$, $(-1; 0{,}4)$. **475.** а) $(0; 0)$, $\left(\frac{1}{3}; -\frac{1}{15}\right)$, $(1{,}5; 0{,}75)$; б) $(-9; 3)$, $\left(-\frac{1 + \sqrt{61}}{5}; -\frac{1 + \sqrt{61}}{10}\right)$, $\left(\frac{-1 + \sqrt{61}}{5}; \frac{-1 + \sqrt{61}}{10}\right)$. **476.** а) $(-4; -3)$, $(4; 3)$; б) $(-2; 5)$, $(2; -5)$, $(-5; -2)$, $(5; 2)$. **477.** а) $(-2; -1)$, $(2; 1)$; б) $(-1{,}75; 2{,}25)$, $(1{,}75; -2{,}25)$. **478.** а) $(-3; -4)$, $(-4; -3)$, $(3; 4)$, $(4; 3)$; б) $(5; 1)$, $(1; 5)$. **479.** а) $(1; 2)$, $(2; 1)$; б) $(-2; -3)$, $(-3; -2)$, $(2 - \sqrt{7}; 2 + \sqrt{7})$, $(2 + \sqrt{7}; 2 - \sqrt{7})$. **480.** а) $(4; -1)$, $(-4; 1)$, $(0{,}5; -8)$, $(-0{,}5; 8)$; б) $(2; -1)$, $(-2; 1)$, $\left(\frac{2}{3}; -3\right)$, $\left(-\frac{2}{3}; 3\right)$. **483.** а) $x^2 - y^2 = 25$; б) $y^4 + x^2y^2 - 9x^2 - 13y^2 + 36 = 0$; в) $x^3y + xy^3 - xy - 6x^2 - 6y^2 + 6 = 0$. **486.** а) При $a = -2$ и при $a = 6$; б) при $a = 7$; в) при $a = -2$; г) при $a = 1 - 2\sqrt{3}$ и при $a = 1 + 2\sqrt{3}$. **487.** а) $(-3; -2)$, $(-3; 2)$, $(3; -2)$, $(3; 2)$; б) $(-3; -1)$, $(-3; 1)$, $(3; -1)$, $(3; 1)$. **491.** а) При $m = -\sqrt{10}$ и при $m = \sqrt{10}$; б) при $-\sqrt{10} < m < \sqrt{10}$. **492.** а) $(5; -2)$, $\left(-2; \frac{1}{3}\right)$; б) $(0; -1)$, $(3; 5)$; в) $(6; -1)$, $(3; 5)$; г) $(6; 2)$, $(11; 7)$; д) $(4; 1)$; е) $(-1{,}25; 0{,}75)$, $(-5; -3)$. **493.** а) $(4; 0)$, $(0; -4)$; б) $(2; 3)$, $(-2; -1)$; в) $(0; -5)$, $(5{,}5; 6)$; г) $(5; -4)$, $(-0{,}5; 1{,}5)$. **494.** а) $(-6; 2)$, $(6; -2)$, $(-2; 6)$, $(2; -6)$; б) $(-10; -8)$, $(-10; 8)$, $(10; -8)$, $(10; 8)$. **495.** а) $(0; -5)$, $(1; -4)$; б) $\left(\frac{1}{3}; 1\right)$, $\left(-\frac{1}{3}; -1\right)$. **496.** а) $(-3; -4)$; б) решений нет. **497.** а) $\left(\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}\right)$, $(1; 1)$; б) $(7\sqrt{2}; \sqrt{2})$, $(-7\sqrt{2}; \sqrt{2})$, $(7\sqrt{2}; -\sqrt{2})$, $(-7\sqrt{2}; -\sqrt{2})$; в) $(3; 4)$, $(3; -4)$, $(0; 5)$; г) $(\sqrt{51}; -1)$,

$(-\sqrt{51}; -1)$. **498.** а) $(1{,}5; -2)$, $(10; 15)$; б) $(70; -28)$, $(4; 5)$; в) $(6; 8)$, $(8; 6)$; г) $(0{,}8; -1{,}2)$, $(6; 4)$. **501.** а) $(-4; -3)$, $(-4; 2)$, $(3; -3)$, $(3; 2)$; б) $(3 - 3\sqrt{2}; 3 + 3\sqrt{2})$, $(3 + 3\sqrt{2}; 3 - 3\sqrt{2})$, $(2; 4)$, $(4; 2)$; в) $(2; 3)$, $(3; 2)$; г) $(-3; -2)$, $(-1; -4)$, $(4; 5)$, $(6; 3)$. **502.** $a = -2$, $b = 2$ или $a = -\frac{2}{3}$, $b = 6$. **503.** 18 и 12. **504.** 60 и 20 или 25 и 37,5. **505.** 10 и 0 или 26 и 24. **506.** 36. **507.** $\frac{2}{3}$ или $\frac{6}{19}$. **508.** $\frac{5}{4}$. **509.** 9 и 12 см. **510.** 6 ч. **511.** 12 и 8 ч. **512.** 40 и 50 км/ч. **513.** 40 и 50 км/ч. **514.** 6 и 4 км/ч. **518.** а) Круг с центром в точке $(2; 4)$ и радиусом $\sqrt{20}$; б) множество точек координатной плоскости, расположенных выше параболы $y = -(x - 3)^2 + 5$. **520.** а) Объединение двух прямых углов, образованных прямыми $x = 1$ и $y = 1$ и содержащих точки $(2; 2)$ и $(0; 0)$. **524.** а) Объединение двух областей A и B, где A — верхняя полуплоскость $(y \geqslant 0)$, из которой исключён полукруг $(x^2 + y^2 \leqslant 1)$, B — полукруг, расположенный ниже оси x.

Глава V

531. а) 65; б) 230; в) 5150. **532.** $a_1 = -20$, $a_2 = -18$, $a_3 = -14$, $a_4 = -8$. **536.** $x = 3$, $y = 6$. **537.** а) $\pm\sqrt{1{,}5}$; б) $\pm\sqrt{4{,}5}$. **538.** а) $[-7; 6]$; б) $(-11; -4) \cup \cup (1; +\infty)$. **544.** а) 4; б) 3. **547.** 28 м. **548.** 60 км/ч. **549.** 7,5 и 15 см. **550.** а) 12; б) 100. **551.** а) 3; б) $-3{,}5$. **552.** а) 1,5; б) 0,8. **555.** а) $c_1 = 21$, $d = 1{,}5$; б) $c_1 = 38$, $d = -2$. **556.** $x_1 = -100$, $d = 6{,}2$. **557.** а) Да; б) нет. **558.** а) Нет; б) да. **559.** а) Для первых тридцати членов; б) для всех членов, начиная с тридцать первого. **560.** a_{14} — первый положительный член, $a_{14} = 0{,}5$. **565.** $(2; -4)$, $(-0{,}5; 3{,}5)$. **566.** а) 0; -8; 4; б) 10. **568.** а) 5; б) 10 000; в) $\frac{1}{32}$; г) 3. **571.** а) 63; б) 86,4. **572.** б) $S_{50} = 2700$, $S_{100} = 10\,400$, $S_n = (n + 4)n$. **573.** 670. **574.** а) $n(n + 1)$; б) n^2. **575.** а) 11 325; б) 7070; в) 11 400; г) 1197. **576.** 1192. **577.** 275. **578.** 55. **579.** 199,5. **580.** 125 м. **582.** 15 рядов; 465 шаров. **583.** 10. **584.** 12. **585.** $a_1 = 0{,}8$, $d = 1{,}2$. **586.** а) Нет; б) да. **587.** а) $\left(\frac{2}{3}; 1\right)$, $\left(-\frac{2}{3}; -1\right)$, $\left(1; \frac{2}{3}\right)$,

$\left(-1; -\frac{2}{3}\right)$; б) (2; 5), (2; –5), (–2; 5), (–2; –5). **591.** а) $\frac{1}{4}$; б) $-\frac{10}{27}$; в) –32; г) $-\frac{1}{25}$; д) $\frac{4}{27}$; е) $\frac{\sqrt{3}}{5}$. **595.** $\frac{3}{1024}$ см^2. **596.** а) $\frac{1}{81}$; б) $\frac{56}{125}$. **597.** а) 3 или –3; б) 0,4 или –0,4. **598.** а) 1000; б) $\frac{1}{3}$ или $-\frac{1}{3}$. **599.** а) $\frac{1}{25}$ или $-\frac{1}{25}$; б) –162; в) –0,001 или 0,001. **601.** $a = 1$, $b = \frac{1}{2}$. **602.** 96. **610.** 3, 7, 11 или 12, 7, 2. **611.** 2, 5, 8. **613.** (5,5; –0,5). **614.** а) $(-\infty; -2] \cup [8,5; +\infty)$; б) $(-\infty; 0) \cup (2,5; +\infty)$; в) $(-2,5; 4]$. **616.** б) $147\frac{7}{9}$; в) –63. **617.** а) –39 364; б) 171. **620.** а) 205,9; б) $25\frac{34}{81}$. **621.** а) $134\frac{4}{9}$; б) –274,5. **622.** –364. **623.** 2186. **624.** 5. **626.** а) $3\frac{3}{4}$; б) $\frac{4}{5}$. **627.** а) $(-\infty; 0] \cup [1,5; +\infty)$; б) $(-\infty; +\infty)$. **640.** а) $a_1 = -34$, $a_2 = -26,5$, $a_5 = -4$; б) $a_1 = -10,5$, $a_3 = -6,5$, $a_5 = -2,5$, $a_6 = -0,5$. **644.** а) $20 - 2\sqrt{3}$; б) $4\sqrt{3} - 7$. **645.** а) 15; б) 15. **646.** а) Да; б) да. **647.** а) $\frac{1}{4}$; б) $-\frac{1}{6}$. **650.** а) –0,1; б) 0. **651.** а) $10\frac{5}{12}$; б) $55\sqrt{3}$. **652.** а) 5000; б) –780. **654.** а) $a_1 = 6,8$, $S_n = 55,2$; б) $n = 20$, $a_n = 60$; в) $a_1 = 0,5$, $n = 100$ или $a_1 = 0$, $n = 101$; г) $d = -1$, $n = 30$. **655.** $x_1 = -3,5$, $d = 0,5$. **659.** а) 11; б) 3. **660.** –75. **661.** а) $x^{\frac{n-n^2}{2}}$; б) $x^{\frac{n^2+n}{2}}$. **662.** а) 46,2; б) –45,5. **663.** 1600. **664.** а) 840; б) –51,6. **666.** Да; $x_5 = 1$. **667.** а) Да; б) нет; в) нет; г) нет. **672.** а) $\frac{1}{18}$; б) $12\sqrt{6}$. **677.** а) $x_1 = 27$, $x_n = \frac{1}{3}$; б) $q = 2$, $n = 4$; в) $n = 6$, $x_n = -\frac{1}{64}$; г) $x_1 = 2\sqrt{3}$, $n = 5$. **678.** $q = 5$, $x_1 = 3$. **679.** 176.

Упражнения для повторения курса 7—9 классов

681. а) –10; б) $\frac{5}{6}$; в) –34; г) $-1\frac{2}{3}$. **682.** а) 7800 р.; б) снизилась на 22%. **683.** 16%. **684.** а) 30%; б) 20%. **685.** 12,5%. **686.** а) 88 200 р.; б) 109 200 р. **687.** а) $10\sqrt{2}$; б) $\frac{2}{3}\sqrt{2}$; в) 3; г) 14. **688.** $73 - 36\sqrt{6}$.

691. а) -2; б) 1. **692.** а) $48\frac{10}{27}$; б) $-262\frac{5}{8}$. **694.** а) 46; б) 18. **695.** -32. **696.** $42\frac{5}{8}$. **700.** а) 2; б) 15,1; в) -2; г) $-1,5$. **705.** ж) $\frac{a}{a+6}$; з) $\frac{2x-3}{2x+2}$; и) $\frac{m-1}{m+2}$. **706.** а) 4; б) $\frac{1}{3}$. **707.** а) $-\frac{1}{x}$; б) $\frac{10}{9-y^2}$; в) $\frac{1}{a-2}$; г) $\frac{5}{4b^2-6b+9}$. **708.** а) $\frac{4b^3-16b^2}{a}$; б) $\frac{3x}{2xy-4y^2}$; в) $\frac{p-5}{2p}$; г) $\frac{2n-3m}{m^2-2mn+4n^2}$. **709.** а) $\frac{x-7}{6}$; б) $-\frac{y^3+4y^2}{2}$; в) $\frac{b}{4a}$; г) $5(c-1)$. **710.** а) $\frac{10-2m}{m-3}$; б) $\frac{a^2-3a+9}{a^2-5a+6}$; в) $\frac{2}{x+2}$; г) 2. **711.** а) $\frac{1}{1+3m}$; б) $\frac{x^2+y^2}{y^2-x^2}$; в) $\frac{1}{a}$; г) $\frac{a^2-3a-12}{a^2+3a+2}$; д) 1; е) $\frac{3}{9x^2+3x+1}$. **712.** а) 30; б) 4,25. **714.** а) $2x^2y^3$; б) $\frac{4x^{16}}{9y^{18}}$; в) $\frac{8a}{b^2}$; г) $\frac{a^2c^3}{100b^{10}}$. **715.** а) 9; б) $33\frac{1}{3}$; в) 15; г) 2,5. **718.** а) $2\sqrt{2x}$; б) $\sqrt{2a}-2$; в) $4\sqrt{xy}$; г) $x\sqrt{x}-y\sqrt{y}$. **719.** в) $\sqrt{a}-1$; г) $\frac{1}{\sqrt{b}+1}$; д) $\frac{x-\sqrt{xy}+y}{\sqrt{y}}$; е) $\frac{\sqrt{c}}{c+\sqrt{cd}+d}$. **722.** а) $-4,5$; б) x — любое число; в) -1; г) корней нет. **723.** 6,4 км. **724.** 360 км. **725.** 4 и 12 км/ч. **726.** 9, 6, 16 и 15. **727.** 450 г. **730.** а) $m \leqslant 2,5$; б) $m \geqslant -2$; в) при любом m; г) $m \leqslant -4$ или $m \geqslant 4$. **731.** а) $k < -\frac{16}{15}$; б) $k > \frac{3}{8}$; в) $-2\sqrt{5} < k < 2\sqrt{5}$; г) таких значений k нет. **732.** а) 0; -3; б) $\pm\frac{\sqrt{10}}{2}$; в) $\frac{1}{3}$; 7; г) $1\frac{5}{8}$; 3; д) $-18\frac{1}{7}$; -1; е) $-\frac{26}{35}$; 2. **733.** 110 м. **734.** 25. **735.** 14. **736.** 240 м. **737.** а) -1; в) -1; 3; г) -14; 1; д) 1; 2; е) -5; ж) $-1\frac{1}{3}$; з) -1; $\frac{1}{5}$. **738.** 15 и 10 ч. **739.** 60 и 80 км/ч. **740.** 15 км/ч. **741.** 2 км/ч. **742.** 20 км/ч. **743.** 10 деталей. **744.** 25 страниц. **745.** 70 км/ч. **746.** 12 км/ч. **748.** а) $\pm\frac{1}{2}$; ±2; б) $\pm\frac{2}{3}$; в) $\pm\sqrt{5}$; г) ±1. **749.** а) $-0,6$; 0,3; б) 0; -1. **750.** а) 0; ±4; б) 0; ±1; в) 0; г) 0; 2,5; д) -8; 0; 2; е) -3; 0; 2; ж) -1; ±3; з) $\frac{1}{2}$. **751.** а) 2; б) $-0,1$; в) 0,3; г) $\pm2\sqrt{3}$; д) -1; е) $\pm\sqrt{2}$. **754.** а) $(4; -1)$; б) $(2,45; 0,37)$; в) $(15; 25)$; г) $(0,32; -0,86)$. **755.** а) $(1; 2)$; б) $(13; 8)$. **757.** а) 5; б) 3; в) $\sqrt{34}$.

760. а) $5x + y = 30$; б) $7x + 4y = 26$. **763.** 60 и 40 деталей. **764.** 80 и 50 км/ч. **765.** 48 и 65 ц/га. **766.** 60 и 20 км/ч. **767.** В отношении 2 : 3. **768.** В отношении 3 : 1. **770.** а) $(-2; -4)$, $(4; 8)$; б) $(5; 3)$; в) $(1; 4)$, $(4; 1)$; г) $(3; -1)$, $(-3; 1)$; д) $(0; 4)$, $\left(2\frac{3}{4}; 13\frac{5}{8}\right)$; е) $(1; 2)$, $\left(\frac{1}{8}; -1\frac{1}{2}\right)$. **771.** а) $(1; 5)$, $(5; 1)$; б) $(3; -2)$, $\left(-2\frac{1}{3}; 14\right)$; в) $(-3; -5)$, $(-5; -3)$, $(3; 5)$, $(5; 3)$; г) $(-4; -2)$, $(4; 2)$. **773.** При $c = -8$. **774.** Пересекаются в точке $(1; 4)$. **775.** При $a = \frac{1}{3}$. **776.** $\frac{6}{4}$. **777.** $\frac{3}{5}$. **778.** 9 и 40 см. **779.** 11 и 8 см. **780.** 15 и 30 дней. **781.** 3 и 6 дней. **783.** $a_1 = 10$, $d = 10$. **784.** -2. **786.** 7,2. **787.** -25. **788.** 80. **789.** а) $\frac{1}{128}$; б) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ или $-\frac{\sqrt{3}}{3}$. **790.** $\frac{2}{27}$. **791.** 31,5. **792.** 16,5. **793.** 635. **794.** 18; 12; 8. **795.** $4\frac{4}{9}$. **798.** а) $m > -4$; б) $x > -1{,}2$; в) $a \leqslant 16$; г) $b \geqslant 4$; д) $x < 0{,}1$; е) $m > -4$; ж) $y \leqslant 10$; з) $a \leqslant -0{,}5$. **799.** а) $x < 3$; б) $a > -1{,}5$; в) $y \geqslant 0{,}16$; г) $m \geqslant 5\frac{1}{3}$; д) $a > 11$; е) $y < -0{,}4$. **800.** а) При $b > -62$; б) при $b < -0{,}76$. **802.** а) $(-\infty; 2{,}5)$; б) $\left(-\frac{1}{3}; +\infty\right)$; в) $\left(-\infty; -\frac{2}{7}\right)$; г) $(-\infty; -0{,}8)$. **803.** а) $(1; 3)$; б) решений нет; в) $\left(-\infty; \frac{1}{8}\right)$; г) решений нет. **804.** а) $(-3; 0)$; б) решений нет. **805.** а) $(-5{,}5; 1)$; б) $(4; +\infty)$; д) $(-29; 3)$; е) решений нет. **806.** а) -3; -2; -1; 0; б) 2; 3; 4; 5; 6; 7. **807.** а) $(-3; 6)$; б) $[-27; -7]$; в) $[6; 8)$; г) $[-0{,}56; 1{,}2]$. **808.** а) При $0 \leqslant x \leqslant 5$; б) при $-17 \leqslant x \leqslant 13$. **809.** а) $(-5; 3)$; б) $\left(-\infty; \frac{1}{5}\right] \cup [2; +\infty)$; в) $(-\infty; -3] \cup \left[1\frac{1}{3}; +\infty\right)$; г) $(-1; 1{,}5)$; д) $[-0{,}5; 0{,}5]$; е) $(-\infty; -1{,}2) \cup (0; +\infty)$; ж) $(-\infty; -0{,}2) \cup (0{,}2; +\infty)$; з) $(-\infty; 0) \cup (0{,}8; +\infty)$. **810.** а) $(-\infty; -1) \cup (4; +\infty)$; б) $(-\infty; +\infty)$; в) $(-13; -1)$; г) $(-4; 7)$. **812.** а) $[-1; 2{,}5]$; б) $(-\infty; 2] \cup [3; 4{,}5]$; в) 3; г) $[0; +\infty)$. **813.** а) 1; 2; 3; 5; 6; б) 2; 3; 4. **814.** а) При $x \geqslant \frac{1}{3}$; б) при $x \leqslant 5$; в) при $-3 \leqslant x \leqslant 5$; г) при $x \leqslant -2$ и $x \geqslant 1{,}5$; д) при $0{,}5 \leqslant x \leqslant 2{,}4$; е) при $x \geqslant 5\frac{2}{3}$. **815.** а) x — любое число; $x \neq 2{,}5$; $x \geqslant 2{,}5$; б) x — любое число; $x \neq -4$ и $x \neq 0{,}5$; $x < -4$ и $x > 0{,}5$; в) x — любое число; x — любое число; x — любое число. **827.** а) Убывает в промежутке $(-\infty; -2{,}5]$ и возрастает в промежутке $[-2{,}5; +\infty)$; б) возрастает в промежутке $\left(-\infty; \frac{1}{6}\right]$ и убывает в промежутке $\left[\frac{1}{6}; +\infty\right)$; в) убывает в промежутке $\left(-\infty; -\frac{1}{4}\right]$ и возрастает в промежутке $\left[-\frac{1}{4}; +\infty\right)$; г) возрастает в промежутке $(-\infty; 0{,}3]$ и убывает в промежутке $[0{,}3; +\infty)$. **830.** а) $(2; -7)$; б) $(2; -16)$, $(8; -34)$; в) $(-1; -7)$, $(1; -5)$; г) $(-3; 33)$. **831.** а) $y = -2x - 4$; б) $y = -2x + 4$; в) $y = 2x + 4$.

Задачи повышенной трудности

836. -2; -1; $-0{,}5$; 1; 2. **839.** При $a = 1$. **842.** $(2; 0)$, $(4; 0)$. **843.** При $a = 3$; $(1{,}5; -5{,}25)$. **845.** При $m < -\frac{1}{3}$. **846.** $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$. **847.** $\frac{-3-\sqrt{5}}{4}$, $\frac{-3+\sqrt{5}}{4}$ или $\frac{3-\sqrt{5}}{4}$, $\frac{3+\sqrt{5}}{4}$. **848.** $a = 1{,}5$ или $a = -2{,}5$. **849.** При $m \in (-1; 3)$. **850.** При $a < 1$. **851.** $(13; -15)$, $(6; -1)$. **852.** а) $(-7; -10)$, $(10; 7)$; б) $(2; 3)$, $(3; 2)$. **853.** $(0; 0)$, $(2; 3)$, $(3; 2)$, $(-2; -3)$, $(-3; -2)$, $(-\sqrt{7}; -\sqrt{7})$, $(\sqrt{7}; \sqrt{7})$, $(-\sqrt{19}; \sqrt{19})$, $(\sqrt{19}; -\sqrt{19})$. **854.** $(1 + \sqrt{3}; 1 - \sqrt{3})$, $(1 - \sqrt{3}; 1 + \sqrt{3})$. **855.** $-\sqrt{\sqrt{10} - 3} - 4$; $\sqrt{\sqrt{10} - 3} - 4$. Указание. Выполните подстановку $y = x + 4$. **856.** $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$; $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. **857.** $(1; 8)$, $(8; 1)$. **858.** $(128; 2)$, $(2; 128)$. **859.** $\frac{3}{8}$, $\frac{4}{15}$ или $\frac{5}{24}$. **860.** $(1; 2; 3)$, $(-3; -4; -5)$. **861.** $m = 23$. **863.** 50 ч, 75 ч и 60 ч. **864.** Существует; 22. **865.** $c_n = (2n - 1)^2$. **866.** $2 \leqslant n \leqslant 20$. **867.** $\frac{n}{2n+1}$. **873.** $-1, -1, -1$; $-1, 2, -4$; $-4, 2, -1$; $-3, 3, -3$. **874.** 1, 4, 7. **876.** а) 2; б) 1. **878.** $x = -\sqrt{3}$, $y = 4$. **879.** $x_1 = 8$, $y_1 = -8$, $z_1 = 8$; $x_2 = -8$, $y_2 = 8$, $z_2 = 8$. **880.** $x_1 = 5$, $y_1 = 7$, $z_1 = 2$; $x_2 = 7$, $y_2 = 3$, $z_2 = 4$; $x_3 = 7$, $y_3 = 4$, $z_3 = 3$; $x_4 = 5$, $y_4 = 2$, $z_4 = 7$. **882.** $\frac{2}{3}$. **884.** 1029. **885.** 150 и 810. **886.** 54 и 6; 98 и 2. **889.** 0; 63. **897.** 3.

ОГЛАВЛЕНИЕ