УДК 51(075)
ББК 22.1я7
Д 69

Авторы:
Дорофеев Георгий Владимирович — *доктор физ.-мат. наук, профессор*
Седова Елена Александровна — *кандидат наук*
Шестаков Сергей Алексеевич — *заслуженный учитель России*

Дорофеев Г. В.
Д 69 ЕГЭ 2009. Математика. Суперрепетитор / Г. В. Дорофеев, Е. А. Седова, С. А. Шестаков. — М. : Эксмо, 2009. — 448 с.

ISBN 978-5-699-30435-6

Пособие предназначено для подготовки старшеклассников и абитуриентов к единому государственному экзамену, традиционным выпускным экзаменам, а также к вступительным экзаменам в вузы, в какой бы форме они ни проводились: письменная контрольная работа, тестирование или собеседование. Весь материал структурирован по основным темам курса школьной математики, приводятся различные алгоритмы решения задач, в разделе «Компендиум» представлена чрезвычайно полезная информация для решений задач частей А и В экзаменационной работы.

УДК 51(075)
ББК 22.1я7

ISBN 978-5-699-30435-6

Содержание

К ЧИТАТЕЛЮ

Какая главная цель у ученика при изучении математики? Правильно — сдать экзамен, а для этого, собственно говоря, и знать-то ее незачем: все равно всякие формулы из памяти быстро выветриваются, если, конечно, не применяются в работе. Какому нормальному человеку, в конце концов, нужно уметь складывать обыкновенные дроби, перемножать степени и решать квадратные уравнения, тем более — иррациональные, тригонометрические, логарифмические и прочие уравнения и неравенства. Да и таблица умножения ни к чему — зачем помнить добрую сотню равенств, если под рукой есть калькулятор?

Нет, тот, кто хочет стать математиком, химиком или инженером, пусть учит, что положено. Но остальным-то она зачем? Единственный ответ на этот вопрос — сдать экзамен. Здесь уж ничего не поделаешь, экзамен по математике сделали обязательным для получения аттестата о среднем образовании, а без него в жизни никуда. А без математического образования можно — ну зачем оно, скажем, будущему хоккеисту, фотомодели или телеведущему? И зачем только в школе их мучают математикой?

Если вы действительно придерживаетесь такого мнения, то только потому, что в школе вы получили искаженное представление о математике как о совокупности теорем и формул, которые надо заучить и применять для решения километров уравнений и неравенств, тождественных преобразований, геометрических задач.

И всегда над душой стоял(а) ваш(а) учитель(ница), придираясь ко всяким пустякам в ваших рассуждениях, — каждому нормальному человеку ясно, что в равнобедренном треугольнике боковые стороны и углы при основании равны, а он(а) требует ответить — по признаку, или по свойству такого треугольника, или, может быть, по определению. И не дай бог просто найти по теореме Пифагора гипотенузу прямоугольного треугольника, не написав, что нашел ее именно по этой теореме, а не как-нибудь еще.

Между тем лучше всех о математике сказал М.В. Ломоносов — она «ум в порядок приводит». А может, ум в порядке, точнее — порядок в уме, представителям вышеупомянутых славных профессий вовсе и не нужен? Надо сказать, что нынешняя школьная математика, конечно, имеет все возможности приводить ум в порядок, но просто их не использует: считать, заучивать, зубрить — учат, а думать, размышлять — нет, или почти нет. И в этой книжке мы попытались научить читателей именно думать, и на наш взгляд, это не так уж неинтересно — впрочем, это наше частное мнение.

Конечно, к экзамену надо готовиться, но эта подготовка лежит через познание математики — только это создаст вам необходимый запас прочности, гарантирующий сдачу любого экзамена, в любой его форме, тем более в форме ЕГЭ. Если человек не собирается сдавать математику на вступительных экзаменах в вуз, то ему достаточно сдать ЕГЭ на «школьном» уровне, где — в разделах **А** и **В** — от него вообще не требуют никаких доказательств.

Но умение доказывать, умение рассуждать, которому вы можете научиться при подготовке к ЕГЭ, даст вам возможность потратить на рутинную работу, которую от вас ожидают, значительно меньше сил и времени, чем предполагают экзаменаторы, сохранив их для решения задач раздела **С**.

Мы включили в книгу специальный раздел, где показываем, как надо рассуждать для решения заданий с выбором ответа: в этом случае нет никакой необходимости «честно» решать задачу — выбрать правильный ответ (а не угадать!) можно совершенно другими способами, использующими, как красиво говорят математики, теорему существования и единственности: среди предложенных вариантов имеется ровно один правильный. В этом разделе вы увидите примеры не только полезные, но и в ряде случаев просто забавные — именно благодаря главной особенности заданий с выбором ответа.

Но чтобы научиться пользоваться этим, можно сказать, нестандартным приемом, надо подучить математику, приобрести опыт краткого, почти устного решения привычных или непривычных, но обычных школьных задач — скажем, научиться решать уравнения подбором, проводить миниэксперименты (если сказать красиво — пользоваться методом проб и ошибок, или «методом научного тыка»).

Более того, «лишнее» знание никогда не повредит. Если вы знаете чуть больше, чем от вас требуют, это может всегда пригодиться. Например, если требуется выбрать из предложенных чисел 5, 8, 11, 14 корень уравнения $26x^3 - 323x^2 + 448x - 451 = 0$ и вы знаете теорему о целых корнях многочлена с целыми коэффициентами, то сразу же сообразите, что 5, 8 и 14 не являются корнями, так как 451 ни на одно из них не делится, и следовательно, корнем является число 11.

Такая «лишняя», «нешкольная», но чрезвычайно полезная для вас информация представлена в разделе **Компендиум** (по-русски: дополнение). И особенно хороша эта информация для решений задач разделов **А** и **В** — конечно, приведенных теорем и рассуждений нет в обычных учебниках, ведь на ЕГЭ никому и не важно, откуда вы их знаете, доказывали или нет соответствующую теорему, почему логически правилен ваш метод рассуждения — проверяется только правильность выбора ответа!

А кратким решениям мы обучаем в первых разделах книжки, где предложены и подробно решены задачи по делимости натуральных и целых чисел и по свойствам функций. Отметим еще, что «устное» решение очень многих приведенных задач на самом деле значительно короче, чем это выглядит в книге: решать задачи проще и быстрее, чем объяснять их решение — многие из них решаются одними «глазами».

Задачи, связанные с делимостью, в настоящее время в ЕГЭ впрямую не представлены, но в школе вы все это проходили, и кто знает, что будет на следующем ЕГЭ или позже? В то же время такие задачи приближают школьную математику к настоящей, и сейчас этот материал уже включен в программу, так что в будущем он непременно появится и в ЕГЭ, который должен стать экзаменом по математике, а не только по курсу «Алгебра и начала анализа», как сейчас.

Остается лишь пожелать вам успехов в изучении математики, и тогда успех на экзамене, тем более если он окажется в форме ЕГЭ, будет зависеть от вашей подготовки, а не от вашей удачи. Но удачи на экзамене тоже нельзя не пожелать...

Авторы

Раздел I. ЦЕЛЫЕ ЧИСЛА

1.1. Делимость и деление с остатком

1.1.1. Простые и составные числа

1. Доказать, что $1589^2 - 1$ — составное число.

2. Доказать, что $1589^{38} - 1$ — составное число.

3. Является ли число $648\ 732^{38} - 3$ простым?

4. Является ли число $2\ 964\ 764^{38} + 55$ простым?

5. Доказать, что $1113^{11} + 3335^{33} + 5557^{55} + 7779^{77}$ является составным числом.

6. Все числа от 1 до 100 возвели в 1001 степень и сложили. Доказать, что полученная сумма является составным числом.

7. Доказать, что при натуральном n число $2n^2 + 4n - 31$ не может быть равно нулю.

8. Доказать, что при натуральном n число

$$3n^2 + 5n - 31 \neq 0.$$

9. Простым или составным является число

$$59\ 867^6 - 28\ 952^8?$$

10. Простым или составным является число

$$40\ 957^6 - 21\ 596^9?$$

11. Простым или составным является число

$$87\ 351^{18} + 73\ 642^{27}?$$

12. Является ли число $5853^{13} - 742^{13}$ простым?

13. Является ли число $5853^{34} - 742^{85}$ простым?

14. Простым или составным числом является сумма

$$4654^{37} + 64\ 711^{37}?$$

15. Является ли составным числом сумма

$$555^{222} + 222^{555}?$$

16. Простым или составным числом является сумма

$$64\ 711^{2002} + 64\ 712^{13}?$$

17. Простым или составным является число

$$49\ 863^{11} + 82\ 764^{25}?$$

18. Простым или составным является число

$$9243^{76} + 1736^{44}?$$

19. Простым или составным является число

$$2\ 072\ 301^{66} + 1\ 272\ 326^{22}?$$

20. Простым или составным является число

$$84\ 716^{66} - 49\ 851^{23}?$$

21. Простым или составным является число

$$49\ 854^{36} - 59\ 871^{17}?$$

22. Простым или составным является число

$$49\ 854^{37} + 59\ 871^{17}?$$

23. Простым или составным является число

$$1^{11} + 2^{22} + 3^{33} + 4^{44} + 5^{55} + 6^{66}?$$

24. Является ли число вида $2^{131131} - 1$ простым?

25. Доказать, что число вида $2n - 1$ при составном n является составным.

26. Может ли число вида $2^n - 1$ быть составным при простом $n > 5$?

27. Всегда ли число вида $2^{2^n} + 1$ является простым?

28. Может ли сумма квадратов целых чисел быть точным квадратом?

29. Обязана ли сумма квадратов целых чисел быть точным квадратом?

30. Доказать, что если каждое из двух целых чисел является суммой двух точных квадратов, то их произведение также является суммой двух точных квадратов.

31. Обязана ли сумма кубов двух целых чисел быть точным кубом?

32. Может ли сумма кубов двух натуральных чисел быть точным кубом?

33. Верно ли, что сумма любых двух составных чисел — составное число?

34. Верно ли, что сумма любых двух простых чисел является составным числом?

35. Верно ли, что сумма двух простых чисел является четным числом?

36. Верно ли, что сумма простого и составного числа — составное число?

37. Верно ли, что произведение любых двух натуральных чисел — составное число?

38. Сумма 10 000 натуральных чисел равна 10 001. Найти произведение этих чисел.

39. Можно ли получить число 1 000 000 сложением чисел, в записи которых используются только тройки?

40. Можно ли число 1001 записать в виде суммы двух простых натуральных чисел?

41. Сколькими способами можно записать число 101 010 101 в виде суммы двух простых натуральных чисел (суммы, отличающиеся порядком слагаемых, считаются за одну)?

42. Найдется ли в натуральном ряде «отрезок» длины 1 000 000, состоящий только из составных чисел?

43. Сколько среди трех последовательных натуральных чисел может быть простых?

44. Могут ли три последовательных нечетных числа быть простыми?

45. Найти все тройки последовательных нечетных чисел, каждое из которых является простым.

1.1.2. Свойства делимости

46. Делится ли $7^{13} + 7^{14} + 7^{15}$ на 19?

47. Доказать, что если целое число делится на 5 и на 18, то оно делится на 90.

48. Верно ли, что если натуральное число делится на два других натуральных числа, то оно делится и на их произведение?

49. Верно ли, что если число a делится на 2148 и на 537, то оно делится на произведение $2148 \cdot 537$?

50. Верно ли, что если целое число делится на 345 и 671, то оно делится на 231 495?

51. Найти наименьшее общее кратное чисел 3674 и 236.

52. Доказать, что если a^2 делится на b^2 (a, $b \in \mathbf{Z}$), то a делится на b.

53. Доказать, что если a^2 делится на b^2 (a, $b \in \mathbf{Z}$), то a^3 делится на b^3.

54. Доказать, что если a^3 делится на b^3 (a, $b \in \mathbf{Z}$), то a^2 делится на b^2.

55. Найти натуральное число a, если известно, что из трех следующих утверждений два верны, а одно — нет:

«Число a — составное»;
«a — делитель числа 2»;
«a — делитель числа 41».

1.1.3. Деление с остатком

56. Имеется 900 теннисных мячей. Какое наименьшее их число нужно добавить, чтобы мячи можно было бы поровну распределить между 77 теннисистами?

57. Стаканчик с фруктовым десертом стоит 6 р. 24 коп. Какое наибольшее число таких стаканчиков можно купить на 55 р.?

58. Найти остаток от деления натурального числа на 5, если известно, что остаток от деления этого числа на 15 равен 8.

59. Остатки от деления натурального числа m на 7 и 8 равны 5. Найти остаток от деления числа m на 56.

60. Найти наименьшее натуральное число, большее 7, остатки от деления которого на 10 и 17 равны 7.

61. Существует ли натуральное число, остаток от деления которого на 12 равен 8, а остаток от деления на 8 равен 7?

62. Остатки от деления натурального числа n на 6 и 7 равны соответственно 2 и 3. Найти остаток от деления числа n на 42.

63. Остатки от деления натурального числа n на 8 и на 9 равны соответственно 5 и 6. Найти остаток от деления числа n на 72.

64. Найти наименьшее натуральное число, остатки от деления которого на 7 и 17 равны соответственно 3 и 13.

65. Остатки от деления числа k на 5 и 11 равны соответственно 3 и 8. Найти остаток от деления квадрата числа k на 55.

66. Остатки от деления числа k на 13 и 7 равны соответственно 2 и 5. Найти остаток от деления квадрата числа k на 91.

67. Может ли квадрат натурального числа при делении на 6 давать остаток 5?

68. Какой остаток дает точный квадрат при делении на 3?

69. Какие остатки может иметь точный квадрат после деления его на 4?

70. Сколько разных остатков дают точные квадраты при делении на 13?

71. Может ли точный квадрат при делении на 18 давать остаток 4?

72. Может ли точный квадрат при делении на 17 давать остаток 9?

73. Может ли точный квадрат при делении на 325 давать остаток 36?

74. Может ли точный куб при делении на 33 давать остаток 27?

75. Может ли точный куб при делении на 33 давать остаток 32?

76. Может ли точный куб при делении на 33 давать остаток 8?

77. Может ли девятая степень при делении на 444 давать остаток 443?

78. Может ли шестая степень при делении на 444 давать остаток 100?

79. Может ли пятая степень при делении на 444 давать остаток 243?

80. Может ли пятая степень при делении на 444 давать остаток 201?

81. Может ли двадцать пятая степень при делении на 444 давать остаток 1?

82. Может ли точный квадрат при делении на 89 давать остаток 32?

83. Может ли точный квадрат при делении на 39 давать остаток 10?

84. Найти натуральное число a, если известно, что из трех следующих утверждений два верны, а одно — нет:

«Число a делится на 26»;
«остаток от деления числа a на 13 равен 7»;
«a — одно из чисел 58, 59, 60».

85. При перемножении двух натуральных чисел была допущена ошибка: цифра сотен в произведении увеличена на 2. При делении полученного произведения на меньший из множителей получилось в частном 50 и в остатке 25. Найти множители.

86. При перемножении двух натуральных чисел произведение было ошибочно увеличено на 372. При делении полученного произведения на меньший сомножитель получилось в частном 90 и в остатке 29. Найти эти числа.

87. При умножении двух натуральных чисел, из которых одно на 94 больше другого, ученик ошибся, уменьшив в произведении число десятков на 4. При делении ошибочного произведения на больший из множителей он получил в частном 52, а в остатке 107. Найти меньшее из перемножаемых чисел.

1.2. Десятичная запись натуральных чисел

1.2.1. Применение основной теоремы арифметики

88. Является ли точным квадратом число

10 000 000 000 000?

89. Является ли точным квадратом число

101 112 131 414 161 734?

90. Является ли точным квадратом число 1309...1309, в котором группа цифр 1309 повторяется 1309 раз?

91. Может ли быть точным кубом число, составленное только из цифр 4?

92. Может ли быть шестой степенью натурального числа число, составленное только из цифр 1 в количестве, большем 1?

93. Является ли число 65 875 234 834 степенью натурального числа с показателем, большим 1?

94. Может ли быть степенью натурального числа с показателем степени, большим 1, число вида 181818...18?

95. Является ли число 98 569 856 985 698 569 856 степенью натурального числа с показателем, большим 1?

96. Можно ли заменить в выражении

$$П{\cdot}Л{\cdot}Ю{\cdot}С = М{\cdot}И{\cdot}Н{\cdot}У{\cdot}С$$

буквы цифрами, отличными от нуля, так, чтобы получилось верное равенство (различным буквам должны соответствовать разные цифры)?

97. Доказать, что $12^{11} + 4 \cdot 12^2 + 1 \neq 743\,008\,370\,111$.

98. Доказать, что

$$\frac{11\,111\,111\,111\,111\,111}{2\,071\,723} \neq 5\,363\,222\,353.$$

99. Доказать, что

$$99 \cdot 98 \cdot 97 \cdot 96 \cdot 95 \cdot 94 \neq 9\,806\,781\,064\,320.$$

1.2.2. Делимость и остатки

100. При каких n верно утверждение «Натуральное число делится на n в том и только в том случае, если сумма его цифр делится на n»?

101. Число 777...7 составлено из 2005 цифр. Найти его однозначные делители.

102. Может ли число, составленное из одинаковых цифр, делиться на все однозначные числа?

103. Существует ли число, составленное из одинаковых цифр, которое делится на все однозначные числа, кроме 5?

104. Найти все пятизначные числа вида $\overline{67m1n}$ (m и n — цифры), которые делятся на 36.

105. Является ли точным квадратом число

1 002 003 004 005 006 007?

106. Является ли точным квадратом число 1308...1308, в котором группа цифр 1308 повторяется 1308 раз?

107. Какие натуральные числа в любой степени оканчиваются на одну и ту же цифру?

108. Верно ли равенство $125^2 = 15\,675$?

109. Для устного возведения в квадрат числа с последней цифрой 5 пользуются следующим приемом: число, записанное остальными цифрами, умножают на число, большее его на 1, и к результату приписывают 25: например, $65^2 = 4225$. Почему этот прием приводит к правильному результату?

110. Является ли точным квадратом число

234 567 891 011 121 314 151 617 181 920 212 223 242 526?

111. Может ли быть точным квадратом число, составленное только из цифр 1?

112. Является ли точным квадратом число 55 560 156?

113. Является ли точным квадратом число 454545...45, где группа 45 повторяется 2005 раз?

114. Может ли число 929292...92, состоящее из миллиона групп 92, быть 352-й степенью натурального числа?

115. Может ли быть число вида 2525...25, отличное от 25, степенью натурального числа с показателем степени, большим 1?

116. Найти натуральное число a, если известно, что из трех следующих утверждений два верны, а одно — нет:

«Число a^{12} оканчивается цифрой 1»;
«число a^{24} оканчивается цифрой 2»;
«a — одно из чисел 16 или 19».

117. Является ли число $125^2 + 377^2$ точным квадратом?

118. Является ли число $123^2 + 345^2 + 567^2$ точным квадратом?

119. Является ли число $[50\pi]^2 + [100\pi]^2$ точным квадратом?

120. Доказать, что если два числа оба не делятся на 3, то сумма их квадратов не является точным квадратом.

1.2.3. Преобразования десятичной записи чисел

121. Сумма цифр двузначного числа равна 6. Если к этому числу прибавить 18, то получится обращенное число, т.е. записанное теми же цифрами в обратном порядке. Найти это число.

122. Если приписать к двузначному числу цифру 7 сперва слева, потом справа, то разность полученных трехзначных чисел будет равна 351. Найти это двузначное число.

123. Трехзначное число оканчивается цифрой 3. Если ее перенести в начало записи числа, то полученное число будет на 27 больше первоначального. Найти это число.

124. Найти шестизначное число, начинающееся с цифры 1 и такое, что если переставить эту цифру в конец числа, то получится число, в 3 раза больше искомого.

125. Трехзначное число оканчивается цифрой 3. Если ее перенести в начало записи числа, то полученное число будет меньше первоначального, а их разность равна a. При каких a задача имеет решение?

126. Разность между натуральным четырехзначным числом и обращенным числом, т.е. числом, записанным теми же цифрами, но в обратном порядке, равна 90. Из всех таких чисел найти наибольшее, если известно, что сумма его цифр сотен и единиц принимает наименьшее возможное значение.

127. Пусть $\overline{xz}$ — натуральное число, в котором x десятков и z единиц, а $\overline{xyz}$ натуральное число, в котором x сотен, y десятков и z единиц. Доказать, что уравнение $\overline{xyz} = y \cdot \overline{xz}$ не имеет решений.

128. Пусть a и b — натуральные трехзначные числа, причем $a \neq b$. Из них составили два шестизначных числа, приписав a к b сначала справа, а затем слева. Доказать, что разность этих шестизначных чисел не делится на 2012.

129. Найти двузначное число, первая цифра которого равна разности между этим числом и числом, записанным теми же цифрами, но в обратном порядке.

130. Доказать, что ни число 28 372, ни любое число, составленное из тех же цифр, не являются точным квадратом.

131. Некоторое число при делении на 9 дает остаток 7. Какой остаток получится, если его цифры каким-то образом переставить?

132. Можно ли из цифр 1, 2, 5, 6 и 7 составить пятизначное число так, чтобы оно являлось полным квадратом?

133. Можно ли из цифр 2, 3, 5 и 8 составить четырехзначное число так, чтобы оно являлось точным квадратом?

134. Доказать, что если число делится на 11 и записывается четным числом цифр, то при перестановке любой группы его первых цифр в конец также получится число, делящееся на 11.

135. Сколько можно составить из цифр 2, 3, 4 и 5 четырехзначных чисел, делящихся на 11?

136. Десятичная запись числа a_n составлена из $n \geq 1$ «блоков» 1354. При каких n число a_n делится на 11?

137. Десятичная запись числа a_n составлена из n «блоков» 1354. При каких n число a_n делится на 7?

138. Десятичная запись числа a_n составлена из n «блоков» 1354. При каких n число a_n делится на 13?

1.3. Применения натуральных и целых чисел

1.3.1. Комбинаторные рассуждения с целыми числами

139. 107 кг сухофруктов требуется пересыпать в пакеты вместимостью 2 кг, 3 кг и 9 кг. Какое наименьшее число пакетов потребуется для этого?

140. Можно ли из 12 чисел, в записи которых участвует только цифра 8, составить 1000?

141. Из чисел, в записи которых участвует только цифра 8, составлена сумма, равная 1000. Какое наименьшее число слагаемых потребуется для составления этой суммы?

142. Найти наименьшее натуральное число, сумма цифр которого равна 1000.

143. Найти наибольшее четырехзначное число, сумма цифр которого равна 23.

144. Найти наименьшее четырехзначное число, сумма цифр которого равна 21.

145. Найти двузначное число, первая цифра которого равна разности между этим числом и числом обращенным, т.е. записанным теми же цифрами, но в обратном порядке.

146. Сумма цифр двузначного числа равна 6. Если к этому числу прибавить 18, то получится обращенное число. Найти это число.

147. Трехзначное число оканчивается цифрой 3. Если ее перенести в начало записи числа, то полученное число будет на 27 больше первоначального. Найти это число.

148. Трехзначное число оканчивается цифрой 2. Если ее перенести в начало записи числа, то полученное число будет на 18 больше первоначального. Найти это число.

149. Сумма всех трехзначных чисел, составленных из трех различных, отличных от нуля, цифр k, l и m, больше 2700, но не превосходит 2900. Каждая из указанных цифр встречается в записи числа один раз. Найти число $\overline{klm}$, если известно, что оно четное и наибольшее из всех трехзначных чисел, удовлетворяющих задаче.

150. Найти два двузначных числа, обладающих свойством: если к большему искомому числу приписать справа нуль и за ним меньшее число, а к меньшему числу приписать справа большее число и затем нуль, то из образовавшихся таким образом двух пятизначных чисел первое, будучи разделено на второе, дает в частном 2 и в остатке 590. Кроме того, известно, что сумма, составленная из удвоенного большего искомого числа и утроенного меньшего, равна 72.

151. Разность между натуральным четырехзначным числом и обращенным числом, т.е. числом, записанным теми же цифрами, но в обратном порядке, равна 90. Из всех таких чисел найти наибольшее, если известно, что сумма его цифр сотен и единиц принимает наименьшее возможное значение.

152. Доказать, что число $A = 19202122...80$ (выписываются подряд двузначные числа от 19 до 80) делится на 1980.

153. Если двузначное число разделить на сумму его цифр, то в частном получится 4 и в остатке 3. Если же это двузначное число разделить на произведение его цифр, то в частном получится 3 и в остатке 5. Найти это число.

154. Если двузначное число разделить на сумму его цифр, то в частном получится 8, а в остатке 1. Если число, написанное теми же цифрами, но в обратном порядке, разделить на разность между цифрами десятков и единиц исходного числа, то в частном получится 4, а в остатке 2. Найти это число.

155. Если двузначное число разделить на сумму его цифр, то в частном получится 6, а в остатке 8. Если же число, написанное теми же цифрами, но в обратном порядке, разделить на разность между цифрами десятков и единиц исходного числа, то в частном получится 15, а в остатке 2. Найти это число.

156. Найти четырехзначное число по следующим условиям: сумма квадратов крайних цифр равна 13; сумма квадратов средних цифр равна 85; если же из искомого числа вычесть 1089, то получится число, записываемое теми же цифрами, что и искомое, но в обратном порядке.

157. После деления некоторого двузначного числа на сумму его цифр в частном получилось 7 и в остатке 6. После деления этого же двузначного числа на произведение его цифр в частном получилось 3 и в остатке 11. Найти это двузначное число.

158. После деления двузначного числа на произведение его цифр в частном получилось 3 и в остатке 11. Найти это двузначное число.

159. После деления некоторого двузначного числа на сумму его цифр в частном получилось 7 и в остатке 6. Найти это число.

160. Найти все натуральные трехзначные числа, каждое из которых обладает свойствами: первая цифра числа в 3 раза меньше суммы двух других его цифр, разность между самим числом и числом, получающимся из него перестановкой двух последних его цифр, неотрицательна и делится на 81 без остатка.

161. Грузовики для перевозки партии из 323 телевизоров должны быть загружены до отказа. Если коробки с телевизорами уложить так, чтобы в каждом грузовике поместилось на 2 коробки больше, то грузовиков понадобится на 2 меньше. Сколько грузовиков понадобится?

162. Все цифры трехзначного числа отличны от 0 и сумма их квадратов равна 45. Если от этого числа отнять 198, то получится число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найти это число.

163. Найти такое двузначное число, в котором число его единиц на 2 больше числа десятков, а произведение искомого числа на сумму его цифр равно 144.

164. Число десятков некоторого двузначного числа на единицу больше числа единиц. Произведение этого числа на число, образованное перестановкой цифр, равно 2430. Найти данное число.

165. Дано двузначное натуральное число, у которого число десятков на единицу больше числа единиц, а произведение его цифр на 45 больше утроенного числа его десятков. Найти это число.

166. Найти двузначное натуральное число, у которого число десятков на два больше числа единиц, если при делении этого числа на произведение его цифр в частном получается 2, а в остатке 16.

167. Какое трехзначное число равно кубу цифр его единиц, а также квадрату числа, составленного из его второй и первой цифр?

168. Если от задуманного трехзначного числа отнять 7, то получившееся число разделится на 7, если прибавить 8 — то результат разделится на 8. Если же прибавить 9, то результат разделится на 17. Найти задуманное число.

169. Человеку, родившемуся в XX в., в 1996 г. исполнилось столько лет, какова сумма двух последних цифр года его рождения. В каком году он родился?

170. Разность цифр двузначного натурального числа равна 4, а сумма квадратов цифр этого числа больше произведения его цифр на 37. Найти число.

171. Определить трехзначное число, если его цифры составляют арифметическую прогрессию, при делении этого числа на сумму его цифр в частном получается 48, а разность данного числа и числа 198 есть число, цифры которого те же, но записанные в обратном порядке.

172. К двузначному числу приписали слева еще одну цифру и поменяли местами цифры единиц и десятков. Первоначальное двузначное умножили на полученное трехзначное число, и произведение оказалось равным 10 001. Найти двузначное число.

173. При умножении трехзначного числа на двузначное, образованное из этого трехзначного зачеркиванием первой слева цифры и перестановкой оставшихся двух, получили 3003. Найти трехзначное число.

174. Существуют ли два последовательных натуральных числа, сумма цифр каждого из которых делится на 11?

175. Сколько существует четырехзначных чисел, делящихся нацело на 15, у которых сумма квадратов цифр не превосходит 26?

176. Сколько существует четырехзначных чисел, делящихся нацело на 45, у которых сумма квадратов цифр не превосходит 35?

177. Определить сумму всех таких натуральных чисел n, для которых числа 3920 и 4320 делятся без остатка на n и $n + 8$ одновременно.

178. Определить сумму всех таких натуральных чисел n, для которых числа 3920 и 4320 делятся без остатка на n и $n + 7$ соответственно.

1.3.2. Уравнения в целых числах

179. Решить в натуральных числах уравнение
$$(x - 2y)(2x - 1 + y) = 11.$$

180. Решить в натуральных числах уравнение
$$(11x + 6y - 8)(6x + 8y - 1) = 100.$$

181. Решить в натуральных числах уравнение
$$(3x + 5y - 7)(5x + 4y + 11) = 20.$$

182. Решить в натуральных числах уравнение
$$(51 - 4x - 7y)(31x + 2y - 6) = 68.$$

183. Решить в натуральных числах уравнение
$$(13x + 3y - 2)(2x - 8y - 13) = 11.$$

184. Решить в целых числах уравнение $x^2 = y^2 + 2y + 8$.

185. Решить в целых числах уравнение
$$x^2 - 3xy + 2y^2 = 3.$$

186. Решить в целых числах уравнение
$$x^2 - 4xy - 5y^2 = 7.$$

187. Решить в целых числах уравнение
$$2x^2 + xy - 6y^2 + 3 = 0.$$

188. Решить в целых числах уравнение
$$x^2 - xy + y^2 = 1.$$

189. Решить в целых числах уравнение
$$7x^2 + 12xy - 4y^2 = 21.$$

190. Решить в целых числах уравнение
$$7x^2 + 12xy - 8y^2 = 21.$$

191. Решить в целых числах уравнение
$$x^2 - 4xy + 5y^2 + 2x - 8y + 5 = 0.$$

192. Решить в целых числах уравнение
$$x^2 - 2xy + 2y^2 + 4x - 2y + 5 = 0.$$

193. Решить в целых числах уравнение
$$x^2 + xy + y^2 - 2x + 2y + 4 = 0.$$

194. Решить в целых числах уравнение
$$x^2 + 2xy + y^2 - 4x + 2y + 4 = 0.$$

195. Решить в натуральных числах уравнение
$$3x - xy - 2y = 6.$$

196. Решить в целых числах уравнение
$$2x + 3xy - 2y = 13.$$

197. Решить в целых числах уравнение
$$7x - 3xy + 6y - 5 = 0.$$

198. Решить в целых числах уравнение
$$11xy = 5x + 5y + 1.$$

199. Решить в целых числах уравнение
$$7x - 13xy + 7y - 5 = 0.$$

200. Решить в целых числах уравнение
$$y^3 - 3xy + 3x = 0.$$

201. Решить в целых числах уравнение
$$x^3 - 9xy + 3y^3 = 0.$$

202. Решить в натуральных числах уравнение
$$3x^4 + 5x^3y - 8 = 0.$$

203. Решить в целых числах уравнение
$$2x^2 - 6xy + y^2 + 3y = 21.$$

204. Найти все целые числа x и y, удовлетворяющие равенству $8x = 14y - 7$.

205. Решить уравнение в целых числах $13x = 6y - 19$.

206. Найти все целые числа x и y, удовлетворяющие равенству $8x = 21y - 7$.

207. Найти все целые числа x и y, удовлетворяющие равенству $25x + 46y = 1$.

208. Найти целые числа x и y, если известно, что из следующих утверждений верны только два:

$$2x + 7y = 115; \qquad 7x + 2y = 115; \qquad 8x + 3y = 140.$$

209. Найти общие члены арифметических прогрессий

$$1, 5, 9, \ldots \text{ и } 6, 13, 20, \ldots .$$

210. Сколько чисел входят в обе арифметические прогрессии 3, 7, 11, ..., 887 и 2, 9, 16, ..., 492?

211. Сколько чисел входят в обе арифметические прогрессии 1, 5, 9, ..., 885 и 5, 12, 19, ..., 502?

212. Найти натуральные числа a и b, если известно, что из следующих четырех утверждений три истинны, а одно — ложно:

$$\frac{a}{3b} \in Z, \quad \frac{3b}{a} \in Z, \; a + b = 222, \; 9a + 13b = 2000.$$

213. Найти все пары (x, y) целых чисел x и y, для которых $(3x + 2y)^2 + (x - y)^2 = 5$.

214. Найти все пары (x, y) натуральных чисел x и y, для которых $(3x - 2y)^2 + (2x - 3y)^2 = 6$.

215. После деления некоторого двузначного числа на сумму его цифр в частном получается 7 и в остатке 6. После деления этого же двузначного числа на произведение его цифр в частном получается 3 и в остатке 11. Найти это двузначное число.

216. После деления двузначного числа на произведение его цифр в частном получилось 3 и в остатке 11. Найти это двузначное число.

217. После деления некоторого двузначного числа на сумму его цифр в частном получилось 7 и в остатке 6. Найти это число.

218. Остатки от деления натурального числа n на 6 и 7 равны соответственно 2 и 3. Найти остаток от деления числа n на 42.

219. Остатки от деления числа k на 13 и 7 равны соответственно 2 и 5. Найти остаток от деления квадрата числа k на 91.

1.3.3. Текстовые задачи с целыми неизвестными: логика и алгебра

220. Сын младше отца в 7 раз, а через год он станет младше отца в 6 раз. Через сколько лет сын станет младше отца в 4 раза?

221. Если двузначное число разделить на произведение его цифр, то в частном получится 3, а в остатке 9. Если же из квадрата суммы цифр этого числа вычесть произведение его цифр, то получится данное число. Найти это число.

222. Найти все натуральные трехзначные числа, каждое из которых обладает свойствами: первая цифра числа в 3 раза меньше суммы двух других его цифр, разность между самим числом и числом, получающимся из него перестановкой двух последних его цифр, неотрицательна и делится на 81 без остатка.

223. Сумму всех четных двузначных чисел разделили на одно из них. Остатка не было. Получившееся частное только порядком цифр отличается от делителя, а сумма его цифр равна 9. Какое двузначное число было делителем?

224. Сумму всех четных двузначных чисел разделили на одно из них, кратное девяти. Остатка не было. Получившееся частное отличается от делителя только порядком цифр. Какое двузначное число являлось делителем?

225. Группа из 30 студентов на экзамене получила оценки 2, 3, 4, 5, причем общая сумма баллов равнялась 93; троек было больше, чем пятерок, и меньше, чем четверок; число четверок делилось на 10; число пятерок было четным. Сколько пятерок было получено?

226. В течение года пенсия индексировалась 2 раза, причем процент повышения во второй раз был в 2 раза больше, чем в первый. На сколько процентов она повышалась каждый раз, если до первого повышения она была равна 1800 р., а после второго составила 2376 р.

227. На антикварное собрание книг стоимостью 350 000 батов дважды снижали цену на одно и то же число процентов, после чего оно стало стоить 283 500 батов. На какое число процентов каждый раз снижали цену?

228. Сумма в 53 лура составлена из монет в 3 и 5 луров, а если заменить первые монеты вторыми, а вторые первыми, то она уменьшится, но не более чем в 1,5 раза. Сколько было монет в 3 лура?

229. Имеются путевки трех типов, которые стоят соответственно 4, 6 и 9 неразменных батов. Путевка первого типа рассчитана на 8 дней, второго — на 14, и третьего — на 20 дней отдыха. Сколько путевок каждого типа можно купить за 100 батов, чтобы общее число дней было наибольшим?

230. Первый умелец за 1 ч изготавливает 5 игрушек, второй — 8. Они начали работу одновременно, а третий присоединился к ним через полчаса и через некоторое время догнал по количеству изготовленных игрушек первого, а через полтора часа после этого — второго умельца. Сколько игрушек за 1 ч изготавливает третий умелец?

231. Число двухкомнатных квартир в доме в 4 раза больше числа однокомнатных, а число трехкомнатных кратно числу однокомнатных. Если число трехкомнатных квартир увеличить в 5 раз, то их станет на 22 больше, чем двухкомнатных. Сколько всего квартир в доме, если известно, что их не меньше 100?

232. На факультет от выпускников лицеев подано на 600 заявлений больше, чем от выпускников гимназий. Девушек среди выпускников лицеев в 5 раз больше, чем девушек среди выпускников гимназий, а юношей среди выпускников лицеев больше, чем юношей среди выпускников гимназий, в n раз, причем $6 \leq n \leq 12$ (n — целое число). Определить общее количество заявлений, если среди выпускников гимназий юношей на 20 больше, чем девушек.

233. Абитуриенты в течение трех дней сдавали экзамены в одних и тех же аудиториях. Число абитуриентов, экзаменовавшихся каждый день в каждой из аудиторий, было равным числу аудиторий. Если бы экзамены проводились в другом корпусе, то их можно было бы провести за 2 дня, используя каждый день одни и те же аудитории, причем каждый день в каждой аудитории абитуриентов удалось бы рассадить по рядам так, что число рядов, а также число людей в ряду было бы равным числу используемых аудиторий. Найти минимально возможное число абитуриентов, которое могло быть проэкзаменовано при этих условиях.

234. В конференции принимает участие 77 чел. Может ли каждый из них быть знаком ровно с семью другими?

235. Сыну 2 года, а отцу 28 лет. Сколько еще раз в течение их жизни сын будет младше отца в целое число раз, если отец проживет ровно 100 лет?

Раздел II. ФУНКЦИИ

2.1. Основные понятия

2.1.1. Область определения и множество значений

236. Найти область определения функции $y = \sqrt{2x-3}$.

237. Найти область определения функции
$$y = \sqrt[5]{x^3 - 3x + 1}.$$

238. Найти область определения функции
$$y = \sqrt{x^2 - 3x - 4}.$$

239. Найти область определения функции
$$y = \sqrt{-2x^2 + 3x - 5}.$$

240. Найти область определения функции $y = \sqrt{2x - |x|}$.

241. Найти область определения функции $y = \sqrt{2|x| - 4x}$.

242. Найти область определения функции $y = \sqrt{3x^2 + |x|}$.

243. Найти область определения функции $y = \sqrt[3]{x^4 + 4x + 1}$.

244. Найти область определения функции
$$y = \sqrt[4]{255 - 24x^2 - 13x}.$$

245. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = 2x^2 - 4x - 1$ на отрезке $[-1, 3]$.

246. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^2 - 2x + 3$ на интервале $(-1, 3)$.

247. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = 3x^2 - 6x + 4$ на промежутке $(-1, 3]$.

248. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = -2x^2 + 4x - 7$ на отрезке $[-3, 1]$.

249. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = -x^2 + 2x + 3$ на промежутке $(-3, 1)$.

250. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = -x^2 + 4x + 5$ на промежутке $(-3, 2]$.

251. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = 2x^2 - 4x - 17$.

252. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = 4x - 2 - x^2$.

253. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = 3x^2 + 6x - 8$ на промежутке $[-4, -2)$.

254. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$ на отрезке $[10, 50]$.

255. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = \dfrac{1}{x^2+1}$ на отрезке $[1, 5]$.

256. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = \sqrt{x-3}$ на промежутке $[5, +\infty)$.

257. Найти наибольшее и наименьшее значения функции
$$y = 2\sqrt{3x+1} - 3.$$

258. Найти наибольшее и наименьшее значения функции
$$f(x) = 3\sqrt[3]{2x} + 5.$$

259. Найти наибольшее и наименьшее значения функции
$$f(x) = 4 - 3\sqrt{2x+1}.$$

260. Найти наибольшее и наименьшее значения функции
$$f(x) = 3\sqrt{4x^2+5} - 6.$$

261. Найти наименьшее значение функции
$$y = |-x^2 + 2x + 3|.$$

262. Найти наименьшее значение функции
$$y = |-x^2 + 2x - 3|.$$

263. Найти наибольшее значение функции $y = 3 - 2|x| - x^2$.

264. Найти наименьшее значение функции

$$y = x^2 + \frac{4}{x^2 + 1}.$$

265. Найти наименьшее значение выражения

$$|x-1| + |x-2| + |x-3| + |x-4|.$$

266. Найти наименьшее значение выражения

$$|x-1| + |x-2| + |x-3| + |x-4| + |x-5|.$$

267. Найти наименьшее значение выражения

$$|x-1| + |x-2| + \ldots + |x-2n| \quad (n \in \mathrm{N}).$$

268. Найти наименьшее значение выражения

$$|x-1| + |x-2| + \ldots + |x-2n-1| \quad (n \in \mathrm{N}).$$

269. Найти множество значений функций $y = D(\operatorname{sgn} x)$.

270. Найти множество значений функций $y = \operatorname{sgn} D(x)$.

271. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y = -f(x)$, если наименьшее и наибольшее значения функции f равны соответственно A и B.

272. Наименьшее и наибольшее значения функции $y = f(x)$ равны соответственно a и b. Чему равны наименьшее и наибольшее значения функции $y = 2f(x) - 3$?

273. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y = 5 - 3f(x)$, если наименьшее и наибольшее значения функции f равны соответственно A и B.

274. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y = cf(x)$, если наименьшее и наибольшее значения функции f равны соответственно A и B.

275. Пусть наименьшее и наибольшее значения функции $y = f(x)$ равны соответственно A и B. Что можно сказать о наибольшем и наименьшем значениях функции $y = \dfrac{1}{f(x)}$, если функция f принимает только положительные значения?

276. Пусть наименьшее и наибольшее значения функции $y = f(x)$ равны соответственно A и B. Что можно сказать о наибольшем и наименьшем значениях функции $y = \dfrac{1}{f(x)}$, если функция f принимает только отрицательные значения?

277. Верно ли утверждение «Если наибольшее значение функции f равно A, то наибольшее значение ее модуля $|f|$ равно $|A|$?

278. Может ли функция, определенная на интервале (a, b), иметь и наибольшее, и наименьшее значения?

279. Может ли функция, определенная на интервале (a, b), иметь наибольшее значение, но не иметь наименьшего значения?

280. Может ли функция, определенная на интервале (a, b), иметь наименьшее значение, но не иметь наибольшего значения?

281. Может ли функция, определенная на интервале (a, b), не иметь ни наименьшего, ни наибольшего значений?

282. Может ли функция, определенная на отрезке $[a, b]$, иметь и наибольшее, и наименьшее значения?

283. Может ли функция, определенная на отрезке $[a, b]$, иметь наибольшее значение, но не иметь наименьшего значения?

284. Может ли функция, определенная на отрезке $[a, b]$, иметь наименьшее значение, но не иметь наибольшего значения?

285. Может ли функция, определенная на отрезке $[a, b]$, не иметь ни наименьшего, ни наибольшего значений?

286. Может ли наибольшее значение функции совпадать с наименьшим?

287. У каких функций наибольшее значение совпадает с наименьшим?

288. Верно ли, что наибольшее значение суммы двух функций равно сумме их наибольших значений?

289. Верно ли, что наименьшее значение суммы двух функций равно сумме их наименьших значений?

290. Верно ли, что наименьшее значение произведения двух функций равно произведению их наименьших значений?

291. Известно, что функции f и g принимают свои наименьшие значения в точке c. Верно ли, что в точке c их произведение также принимает свое наименьшее значение?

292. Можно ли на основании неравенства $A \le f(x) \le B$ при любом $x \in D(f)$ сделать вывод, что множество значений функции f есть отрезок $[A, B]$?

293. Равносильны ли утверждения $a \le f(x) \le b$ и $E(f) = [a, b]$. Следует ли одно из другого?

294. Закончить предложение «Неравенство $A \le f(x) \le B$ выполняется в том и только в том случае, когда множество значений ...»

295. Можно ли из неравенства $A \le f(x) \le B$ $(x \in D(f))$ сделать вывод, что наибольшее и наименьшее значения функции f равны соответственно A и B?

296. Доказать, что всякая функция может быть представлена в виде суммы неотрицательной и неположительной функций.

2.1.2. Монотонность и ограниченность

297. Доказать, что квадратичная функция не является ни возрастающей, ни убывающей.

298. Является ли функция $y = 2x^3 - 3x + 7$ возрастающей или убывающей?

299. Доказать, что функция $y = \sqrt{x+3} + \sqrt{x+1}$ является возрастающей.

300. Доказать, что функция $y = \sqrt{x+2} - \sqrt{x+1}$ является убывающей.

301. Является ли монотонной функция

$$y = \sqrt{x+2} - \sqrt{x-3}\ ?$$

302. Пусть $g(x) = 7x + 1$ и $h(x) = 5x - 3$. Указать функцию $y = f(x)$, такую, чтобы функция $y = g(x) + f(x)$ была возрастающей, а $y = h(x) + f(x)$ — убывающей.

303. Пусть $g(x) = 5x + 1$ и $h(x) = 7x - 3$. Указать линейную функцию $y = f(x)$ такую, чтобы функция $y = g(x) + f(x)$ была возрастающей, а $y = h(x) + f(x)$ — убывающей.

304. Является ли монотонной функция $y = x - \sqrt{x}$?

305. Является ли функция $f(x) = [x] - 2\ln x$ возрастающей или убывающей?

306. Является ли функция $y = x^x$ $(x > 1)$ возрастающей или убывающей?

307. Является ли функция $y = x^x (x > 0)$ возрастающей или убывающей?

308. Является ли монотонной функция $y = \operatorname{sgn} x$?

309. Является ли функция $y = \left[x^{100}\right] + D\left(x^{200}\right)$ возрастающей или убывающей?

310. Является ли функция $y = f(x) = \left[2^{100} x\right] \cdot \left\{\dfrac{x}{2^{100}}\right\}$ возрастающей или убывающей?

311. Что можно сказать о функции $y = f(x)$, если выражение $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ при любых a и b из $D(f)$ имеет один и тот же знак?

312. Сколько раз график функции пересекает ось абсцисс?

313. Сколько раз график возрастающей функции пересекает ось абсцисс?

314. Сколько раз график функции может пересечь ось ординат?

315. Сколько раз график возрастающей функции может пересечь прямую $x = a$?

316. Сколько раз график убывающей функции может пересечь прямую $y = c$?

317. Сколько точек пересечения может иметь график возрастающей функции с прямой $y = x$?

318. Сколько точек пересечения может иметь график убывающей функции с прямой $y = x$?

319. Всякая ли функция, не равная постоянной, является возрастающей или убывающей?

320. Функция f определена на множестве действительных чисел. Обязательно ли она является монотонной на некотором интервале?

321. Верно ли, что если функция возрастает на (a, b), то она возрастает и на $[a, b]$?

322. Верно ли, что если функция возрастает на интервалах (a, b) и (b, c), то она возрастает и на интервале (a, c)?

323. Верно ли, что если непрерывная функция возрастает на интервалах (a, b) и (b, c), то она возрастает и на интервале (a, c)?

324. Верно ли, что если функция возрастает на промежутке A и на промежутке B, то она возрастает и на объединении этих промежутков?

325. Верно ли, что если функция возрастает на интервале A и на интервале B и эти интервалы имеют хотя бы одну общую точку, то она возрастает и на объединении этих интервалов?

326. Верно ли, что если функция возрастает на отрезке A и на отрезке B и эти отрезки имеют хотя бы одну общую точку, то она возрастает и на объединении этих отрезков?

327. Пусть функция $y = f(x)$ возрастает на отрезке $[a, c]$ и убывает на отрезке $[c, b]$. Обязательно ли значение $f(c)$ является ее наибольшим значением на отрезке $[a, b]$?

328. Пусть функция $y = f(x)$ возрастает на «полуоткрытом справа» промежутке $[a, c)$ и убывает на отрезке $[c, b]$. Обязательно ли значение $f(c)$ является ее наибольшим значением на отрезке $[a, b]$?

329. Может ли быть монотонной сумма двух функций, каждая из которых не является монотонной?

2.1.3. Периодичность

330. Задать аналитически какую-либо функцию, у которой основной (наименьший положительный) период равен 2, наименьшее значение равно –3, наибольшее значение равно 3.

331. Задать аналитически какую-либо функцию, у которой основной период равен 3, наименьшее значение функции равно –4, наибольшее равно 2.

332. Задать аналитически какую-либо функцию, у которой основной период равен 2, наименьшее значение функции равно –5, наибольшее равно 13.

333. Найти основной период функции $y = \sin x \cdot \cos x$.

334. Найти основной период функции $y = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$.

335. Найти основной период функции

$$y = \sin 3x - 2\cos 5x\,.$$

336. Является ли периодической функция

$$y = \sin^2 x - \operatorname{tg}\frac{x}{3}\ ?$$

337. Является ли периодической функция

$$y = \cos\frac{2x}{7} \cdot \operatorname{tg}\frac{3x}{8}\ ?$$

338. Может ли быть периодической квадратичная функция?

339. Может ли показательная функция быть периодической?

340. Является ли функция $y = x + \sin x$ периодической?

341. Является ли функция $y = x + \operatorname{tg} x$ периодической?

342. Является ли функция $y = 3x^5 - \cos x$ периодической?

343. Является ли периодической функция

$$y = \cos x + \cos\sqrt{2}x\ ?$$

344. Является ли периодической функция

$$y = \cos\sqrt{2}x \cdot \cos \pi x\ ?$$

345. При каких α функция $y = \cos x + \cos \alpha x$ является периодической?

346. Является ли периодической функция $y = \{2x\} \cdot \left\{\frac{x}{2}\right\}$?

347. Доказать, что функция $\{3x\} + \sin 8\pi x$ является периодической.

348. Является ли функция $y = x + \{x\}$ периодической?

349. Является ли функция $y = x \cdot \{x\}$ периодической?

350. Является ли функция Дирихле периодической?

351. Является ли функция $y = x + D(x)$ периодической?

352. Является ли периодической функция $y = D\left(x\sqrt{2}\right)$?

353. Является ли периодической функция

$$y = D(x) \cdot D\left(x\sqrt{2}\right)\ ?$$

354. Доказать, что всякое число вида $r\sqrt{2}$, где r — рациональное число, отличное от 0, является периодом функции $y = D\left(x\sqrt{2}\right)$, и что все ее периоды имеют такой вид.

355. Всегда ли периодическая функция имеет наибольшее значение?

356. Всегда ли периодическая функции с областью определения **R** имеет наибольшее значение?

357. Всегда ли периодическая функция с областью определения **R** имеет наименьшее значение?

358. Может ли периодическая функция не иметь точек экстремума?

359. Может ли периодическая функция не иметь наименьшего положительного периода?

360. Может ли периодическая функция быть монотонной?

361. Может ли монотонная функция быть периодической?

362. Может ли периодическая функция принимать сколь угодно большие значения?

363. Может ли периодическая функция с областью определения **R** принимать сколь угодно большие значения?

364. Обязана ли быть периодической функция $y = f(g(x))$, если функция $y = g(x)$ — периодическая?

365. Обязана ли быть периодической функция $y = f(g(x))$, если функция $y = f(x)$ имеет период T?

366. Обязана ли сумма двух периодических функций быть периодической функцией?

367. Доказать, что если при некотором a для всех $x \in \mathbf{R}$ выполняется равенство $f(x + a) = -f(x)$, то $y = f(x)$ — периодическая функция.

368. Доказать, что если при некотором a для всех x из области определения функции f выполняется равенство $f(x) \cdot f(x + a) = 1$, то $y = f(x)$ — периодическая функция.

369. Доказать, что если в области определения функции f при некотором a выполняется тождество $f(x + a) = \frac{1 + f(x)}{1 - f(x)}$, то f — периодическая функция.

2.2. Значения функций

2.2.1. Подстановки

370. Найти $f\left(\frac{3}{5}\right)$, если $f(x) = \frac{x-2}{2x-3}$.

371. Найти $f(x)$, если $f(x-3) = 2x$.

372. Найти $f(2x-3)$, если $f(2x+3) = 3x+2$.

373. Найти $f\left(\frac{1}{x-1}\right)$, если $f(x) = \frac{x-2}{2x-3}$.

374. Каким выражением задается функция $y = f(x)$, если $f(2x-3) = \sqrt[3]{x} - 1$?

375. Каким выражением задается функция $y = f(x)$, если $f\left(\sqrt[3]{x}\right) = x + 1$ для любого действительного числа x?

376. Каким выражением задается функция $y = f(x)$, если $f\left(\sqrt{x}\right) = x + 1$ для любого неотрицательного числа x?

377. Решить уравнение $f(f(x)) = x$, если $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$.

378. Решить уравнение $f(f(x)) = -x$, если $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$.

379. Решить уравнение $f(f(x)) = x$, если $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$.

380. Решить уравнение $f(f(f\ldots f(x))) = x$, где в левой части 2006 букв f, а $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$.

381. Решить уравнение $f(f(f\ldots f(x))) = x$, где в левой части 2008 букв f, а $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$.

382. Решить уравнение $f(f(f\ldots f(x))) = x$, где в левой части 2006 букв f, а $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$.

383. Решить уравнение $f(f(f\ldots f(x))) = x$, где в левой части 2005 букв f, а $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$.

384. Решить уравнение $f(f(f\ldots f(x))) = x$, где в левой части 2005 букв f, а $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$.

385. Решить уравнение $f(f(f\ldots f(x))) = x$, где в левой части 2006 букв f, а $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$.

386. Решить уравнение $f(f(f\ldots f(x))) = x$, где в левой части 2007 букв f, а $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$.

2.2.2. Равенства с неизвестными функциями

387. Найти все функции $y = f(x)$, для которых в $D(f)$ выполняется тождество $2f(x) + f(1-x) = x^2$.

388. Найти все функции $y = f(x)$, для которых в $D(f)$ выполняется тождество $f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = x$.

389. Найти все функции $y = f(x)$, для которых в $D(f)$ выполняется тождество $f(x) - 2f\left(\frac{4-2x}{x+2}\right) = 1$.

390. Найти значение $f(100)$ функции $y = f(x)$, для которой в $D(f)$ выполняется тождество $f(1-x) - 3f\left(\frac{2x+2}{3-x}\right) = 1$.

391. Существует ли функция f такая, что $f(-x) = 1 - f(x)$ для любого $x \in \mathbf{R}$?

392. Существует ли функция f, отличная от постоянной и такая, что $f(-x) = 1 - f(x)$ для любого $x \in \mathbf{R}$?

393. Найти все линейные функции $y = f(x)$, для которых $f(-x) = 1 - f(x)$ для любого x.

394. Существует ли квадратичная функция f, такая что $f(-x) = 1 - f(x)$ для любого x?

395. Найти все функции f с областью определения $\mathbf{N}$, для которых $f(2) = 6$ и выполняется тождество

$$f(x + y) = f(x) + f(y).$$

396. Найти все функции f с областью определения $\mathbf{Z}$, для которых $f(2) = 6$ и выполняется тождество

$$f(x + y) = f(x) + f(y).$$

397. Существует ли функция

$$f(x + y) + f(x - y) = 2f(x) \cdot f(y)?$$

398. Существует ли функция, не равная постоянной, для которой на множестве $\mathbf{R}$ выполняется тождество

$$f(2x) = f(x)?$$

399. Существует ли функция, не равная постоянной, для которой на множестве $\mathbf{R}$ выполняется тождество

$$f\left(\sqrt{2}x\right) = f(x)?$$

400. Найти функцию f, если $f(1) = 2$ и для любых натуральных чисел n и k выполняется равенство

$$f(n + k) = f(n) \cdot f(k).$$

401. Найти функцию f, если $f(1) = \frac{1}{2}$ и для любых натуральных чисел n и k выполняется равенство

$$f(n + k) = f(n) \cdot f(k).$$

402. Функция f определена на множестве $\mathbf{R}$, не является постоянной, не принимает значения 0 и выполняется тождество $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$. Доказать, что для любого $x \in \mathbf{R}$

$$f(-x) = \frac{1}{f(x)}.$$

403. Функция f определена на множестве $\mathbf{R}$, не принимает значения 0 и выполняется тождество $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$. Доказать, что $f(x) > 0$ при любом $x \in \mathbf{R}$.

404. Найти все функции f с областью определения $\mathbf{Q}$, для которых $f(2) = 6$ и выполняется тождество

$$f(x + y) = f(x) + f(y).$$

2.3. Геометрия функций

2.3.1. Четность и нечетность

405. Найти все значения коэффициентов a, b, c, d, при которых функция $y = f(x) = \dfrac{ax + b}{cx + d}$ $(ad - bc \neq 0,\ c \neq 0)$ является четной.

406. Найти все значения коэффициентов a, b, c, d, при которых функция $y = f(x) = \dfrac{ax + b}{cx + d}$ $(cd \neq 0)$ является четной.

407. Найти все значения коэффициентов a, b, c, d, при которых функция $y = f(x) = \dfrac{ax + b}{cx + d}$ $(cd \neq 0)$ является нечетной.

408. Является ли функция $y = \log_2\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$ четной или нечетной?

409. Является ли функция

$$y = f(x) = x\left(\operatorname{sgn}(x + 1) + \operatorname{sgn}(x - 1)\right)$$

четной или нечетной? (См. Компендиум.)

410. Что можно сказать о четности и нечетности функций вида $y = f\left(|x|\right)$ и $y = f\left(-|x|\right)$?

411. Какие значения принимают четные и нечетные функции в точке 0, если они в этой точке определены?

412. Доказать, что если для любого x из области определения функции f выполняется равенство $f(x) = f(-x)$, то множество $D(f)$ симметрично относительно начала координат.

413. Сформулировать утверждение «Функция f не является четной», не употребляя слова «не».

414. Верно ли, что для любой функции f функция $y = f(x) + f(-x)$ является четной?

415. Верно ли, что для любой функции f функция $y = f(x) - f(-x)$ является нечетной?

416. Может ли функция быть одновременно и четной, и нечетной?

417. Сколько существует функций, являющихся одновременно и четными, и нечетными?

418. Какой многочлен, целый относительно x, задает четную функцию?

419. Доказать, что всякая функция с областью определения $\mathbf{R}$ может быть представлена в виде суммы четной и нечетной функций.

420. Доказать, что всякая функция с областью определения $\mathbf{R}$ единственным образом может быть представлена в виде суммы четной и нечетной функций.

421. Привести пример функции, которая не может быть представлена в виде суммы четной и нечетной функций.

2.3.2. Симметрии

422. Является ли прямая $y = x$ осью симметрии графика функции $y = \dfrac{2}{x}$?

423. Является ли прямая $y = x$ осью симметрии графика функции $y = \dfrac{2}{x+1}$?

424. Является ли прямая $y = x$ осью симметрии графика функции $y = \dfrac{x-1}{x+1}$?

425. Имеет ли график функции $y = \sin x$ наклонную ось симметрии?

426. Имеет ли график функции $y = \dfrac{1-2x}{1+2x}$ наклонную ось симметрии?

427. Найти все вертикальные оси симметрии графика функции $y = \sin 2x + \cos x$.

428. Имеет ли график функции $y = \{x\}$ хотя бы одну вертикальную ось симметрии?

429. Почему мы не рассматриваем вопрос о симметричности графика функции относительно оси абсцисс?

430. Может ли график функции иметь вертикальную ось симметрии, отличную от оси ординат?

431. Может ли график функции иметь наклонную ось симметрии?

432. Может ли график периодической функции быть симметричным относительно оси ординат?

433. Может ли график периодической функции быть симметричным относительно начала координат?

434. Может ли график функции быть симметричен относительно прямой $x = 3$?

435. Может ли график функции быть симметричен относительно прямой $y = x$?

436. Может ли график функции быть симметричен относительно прямой $y = -x$?

437. Может ли график функции быть симметричен относительно обеих прямых $y = x$, $y = -x$?

438. Может ли график функции быть симметричен относительно прямой $y = 2x - 1$?

439. Сколько вертикальных осей симметрии может иметь график периодической функции?

440. Может ли график функции иметь больше одной оси симметрии?

441. Может ли график функции иметь горизонтальную ось симметрии?

442. График функции $y = f(x)$ имеет вертикальную ось и центр симметрии. Что можно сказать о графике функции $y = f(-x)$?

443. График функции $y = f(x)$ имеет вертикальную ось и центр симметрии. Что можно сказать о графике функции $y = |f(x)|$?

444. Что можно сказать о наличии вертикальной оси симметрии и центра симметрии графиков функций вида $y = f(|x|)$ и $y = f(-|x|)$ в случае, когда график функции $y = f(x)$ имеет вертикальную ось симметрии и центр симметрии?

445. Может ли график функции, отличной от постоянной и определенной хотя бы в одной точке, быть симметричен относительно какой-нибудь горизонтальной прямой?

446. Может ли график функции, определенной хотя бы в одной точке, быть симметричен относительно наклонной прямой?

447. График функции $y = f(x)$ имеет вертикальную ось и центр симметрии. Что можно сказать о графике функции $y = 2f(x) - 1$?

448. Доказать, что прямая $x = a$ является осью симметрии графика функции f в том и только в том случае, когда для любого x из ее области определения выполняется равенство $f(a + x) = f(a - x)$.

449. Доказать, что прямая $x = a$ является осью симметрии графика функции f в том и только в том случае, когда для любого x из ее области определения выполняется равенство $f(2a - x) = f(x)$.

450. Доказать, что точка $P(a, b)$ является центром симметрии графика функции f в том и только в том случае, когда для любого x из ее области определения выполняется равенство $f(2a - x) + f(x) = 2b$.

451. При каких значениях параметра a уравнение $\pi^2(x-1)^2 + 4a\cos(2\pi x) + 4a^4 = 0$ имеет единственное решение?

452. Верно ли, что общие точки графика возрастающей функции f и графика ее обратной функции всегда лежат на прямой $y = x$?

453. Верно ли, что общие точки графика убывающей функции f и графика ее обратной функции всегда лежат на прямой $y = x$?

2.4. *Применение функций*

2.4.1. Монотонность

454. Решить уравнение $\sqrt{4 - x} - \sqrt{5 + x} = 3$.

455. Решить уравнение $x^3 = 2 - x$.

456. Решить уравнение $\sqrt{2x + 1} = 29 - 2x$.

457. Решить уравнение $\dfrac{2}{2x - 1} = \sqrt{x} + 1$.

458. Решить уравнение $\left(2\sqrt{x} + 1\right)x^2 = 80$.

459. Решить уравнение $\dfrac{1}{\sqrt{2x - 5}} = -x^3 + 1$.

460. Решить уравнение $\sqrt{8 - 2x^2} = x^3\sqrt{x} + 3$.

461. Решить уравнение $2^x = 6 - x$.

462. Решить уравнение $\sqrt{2714 - x} - \sqrt{x + 2490} = 2$.

463. Решить уравнение $113^x + 114^x = 227$.

464. Решить уравнение $5^x + 9^x = 14^x$.

465. Решить уравнение $5^x + 12^x = 169$.

466. Решить уравнение $3^x + 4^x = 5^x$.

467. Решить уравнение $2^x + 5^x = 129^x$.

468. Решить уравнение $2^{3x-1} + 5^{2x+1} = 129^x$.

469. Решить уравнение $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x = 4$.

470. Решить уравнение $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x = 2^x$.

471. Решить неравенство $3^x + 4^x < 5^x$.

472. Решить неравенство $5^x + 12^x < 13^x$.

473. Решить неравенство $2^{3x-1} + 5^{2x+1} \geq 129^x$.

474. Найти наименьшее значение функции

$$y = \sqrt{3x^2 + 5} - \sqrt{3x^2} \text{ на отрезке } [0, 3].$$

475. Найти наименьшее значение функции

$$y = \sqrt{8x^2 + 7} - \sqrt{8x^2} \text{ на отрезке } [1, 2].$$

476. Решить систему уравнений $\begin{cases} x^2 + \sqrt{x} = y^2 + \sqrt{y} \\ 2x - y = 4. \end{cases}$

477. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{y} = \sqrt{y+1} + \sqrt{x} \\ x + y = 2. \end{cases}$$

478. Решить систему уравнений $\begin{cases} x^3 + 3x = y^3 + 3y \\ x + y = 2. \end{cases}$

479. Решить систему уравнений $\begin{cases} x^3 + 2x = y^3 + 2y \\ x + 2y = 3. \end{cases}$

480. Решить систему уравнений $\begin{cases} x^3 + 2x = 8y^3 + 4y \\ x + 2y = 8. \end{cases}$

481. Решить систему неравенств $\begin{cases} 3x^3 + x < 3y^3 + y \\ 5x^5 + 3x^3 \geq 5y^5 + 3y^3. \end{cases}$

482. Решить уравнение $\sin^x 23^\circ + \cos^x 23^\circ = 1$.

483. Решить уравнение

$$c\sqrt{x - a^2 - b^2} + a\sqrt{x - b^2 - c^2} + b\sqrt{x - c^2 - a^2} = a^2 + b^2 + c^2.$$

2.4.2. Ограниченность

484. Решить уравнение $\sin^4 x + \cos^4 x = 1$.

485. Решить уравнение $\sin^3 x + \cos^3 x = 1$.

486. Решить уравнение $\sin^{15} x + \cos^{15} x = 1$.

487. Решить уравнение $\sin^{16} x + \cos^{16} x = 1$.

488. Решить уравнение $\sin^{10} x + \cos^{10} x = 1$.

489. Решить уравнение $\sin^{15} x - \cos^{17} x = 1$.

490. Решить уравнение $\cos 2x - \cos \dfrac{x}{3} = 2$.

491. Решить уравнение $2\cos^2 \dfrac{x^2 + x}{6} = 2^x + 2^{-x}$.

492. Найти наименьшее положительное значение функции

$$y = \frac{1}{x^2 + 4\pi x + 41} + \cos x.$$

493. Найти наименьшее положительное значение функции

$$y = 4x + \frac{9\pi^2}{x} - \sin^2 x.$$

2.4.3. Периодичность

494. Сколько корней имеет уравнение

$$\sin 15x + \sin 33x = \sin 25x - 11\sin x?$$

495. Найти сумму корней уравнения

$$4x^6 - \sin 4x - 7x\sin x + 1 = 0.$$

496. При каких значениях параметра a уравнение $\pi^2(x-1)^2 + 4a\cos(2\pi x) + 4a^4 = 0$ имеет единственное решение?

497. Найти числа a, b, c, для которых равенство $a\sin 4x + b\sin 2x + c\sin x = 0$ является тождеством.

Раздел III. ТЕСТЫ

3.1. Задачи с выбором ответов: новые возможности для решения — Логика и Эвристика

Главное отличие задачи, предложенной в форме теста с выбором ответа (ЗВО), от обычной состоит в том, что в тесте ответ уже дан и достаточно только выбрать его из четырех предложенных вариантов. Обычную математическую задачу требуется *решить*, т.е. получить ее ответ на основе определенных рассуждений и вычислений, предполагаемых ее условием. А для выбора правильного ответа из четырех вариантов можно применить еще много дополнительных, «посторонних» соображений.

Приведем пример, не связанный с математикой. Вряд ли многие из вас знают столицу африканского государства Малави, но едва ли хоть кто-нибудь не «угадает», не «вычислит» правильный вариант ответа:

1. *Какой город является столицей государства Малави?*
1. Москва. 2. Ханты-Мансийск. 3. Лилонгве. 4. Милан.

«С ходу» отвергнув варианты 1 и 2, даже очень слабый в географии человек может сообразить, что название Ханты-Мансийск очень русское по форме, и либо вспомнить итальянскую футбольную команду «Милан», либо «почувствовать», что название «Милан» звучит более «по-европейски», чем «по-африкански» — в отличие от названия «Лилонгве».

Конечно, ни в географии, ни в математике столь «дурацкие» тесты не встречаются, но умение — и привычка! — применять к решению задачи дополнительные соображения часто помогают выбрать правильный вариант ответа.

С точки зрения математики, возможность применения дополнительных соображений связана в первую очередь с тем, что тест с выбором ответа дает дополнительную и очень существенную информацию: среди предлагаемых вариантов имеется только один правильный, т.е. справедлива, как говорят математики, *теорема о существовании и единственности*.

Например, чтобы выбрать правильный ответ в задаче «для пятиклассников»:

2. *Какой цифрой надо заменить * в числе 178*, чтобы полученное число оказалось составным?*

1. 3; 2. 5; 3. 7; 4. 9,

достаточно *заметить*, что если вместо * поставить цифру 5, то полученное число будет делиться на 5, так что правильный ответ — второй, а другие варианты не могут быть правильными.

Но если вы не заметите этого факта, не догадаетесь просто просмотреть все варианты ответов, если начнете решать задачу, «как положено», «с самого начала», то вы будете решать вопрос, каким — простым или составным — является число 1783. А решать этот вопрос «в лоб» придется долго: даже если вы знаете, что для его решения на роль «кандидатов» на делители можно испытывать только простые числа, не большие, чем $\sqrt{1783} < 43$, то это — очень кропотливая работа — даже с помощью калькулятора, а главное, работа совершенно излишняя с точки зрения предложенной задачи.

В аналогичную ситуацию вы можете попасть при решении задачи:

3. *Число 501* является простым, если вместо * поставить цифру*

1. 1; 2. 3; 3. 5; 4. 9.

Но если не «задумываться» над первым вариантом, а сразу отметить, что для делимости на числа 3, 5 и 9 существуют простые признаки, и применяя их, можно практически убедиться, что в этих вариантах получаются составные числа, так что правильный вариант ответа — первый.

Продолжим рассмотрение примеров.

4. *Решить неравенство* $\frac{3}{x+2} - \frac{2}{x-3} \geq 0.$

1. $(-2, 3) \cup [13, +\infty)$;
2. $[-2, 3) \cup [13, +\infty)$;
3. $(-2, 3] \cup [13, +\infty)$;
4. $[13, +\infty)$.

В задачах на решение дробно-рациональных неравенств учащихся «ловят» прежде всего на области определения, и в данном случае очень важно проследить, чтобы в ответ не попали числа –2 и 3, которые не входят в область определения неравенства. А «зрительно» это значит, что в ответе рядом с этими числами не должны стоять квадратные скобки, так что варианты 2 и 3 отвергаются сразу. А для выбора между вариантами 1 и 4 достаточно заметить, что при $x = 0$ неравенство выполняется, и, следовательно, ответом является вариант 1.

5. *Решить неравенство* $4 \geq 16^{x+1}$.

1. $(-\infty, -1{,}5]$; 2. $(-\infty, -0{,}5]$; 3. $(1{,}5; +\infty)$; 4. $[-0{,}5; +\infty)$.

Заметим, что промежутки 3 и 4 содержат «очень большие» x, а при таких x 16^x также велико, так что варианты ответов 3 и 4 «отпадают». Промежутки 1 и 2 отличаются, например, числом –1, а оно является решением: $4 \geq 1$, но не содержится в промежутке 1, так что ответ 1 неправильный, а правильный ответ 2.

Впрочем, «честное» решение этого неравенства настолько просто, что, скорее всего, жалко напрягать фантазию, чтобы «обхитрить» составителей:

$$4 \geq 16^{x+1}, \quad 4 \geq 4^{2x+2}, \quad 1 \geq 2x+2, \quad x \leq -\frac{1}{2}.$$

6. *Какое из уравнений имеет корни* –1 и 3?

1. $266x^4 - 673x^3 + 415x^2 - 349x - 911 = 0$;
2. $611x^4 - 1222x^3 - 1835x^2 + 4x + 6 = 0$;
3. $x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 5x - 3 = 0$;
4. $32x^4 + 36x^3 - 3x^2 - 5x + 2 = 0$.

Эта задача «честная» — в том смысле, что на обычное решение ее нет никакой надежды, и придется постепенно ее «разгадывать».

Ясно, что первое уравнение не может иметь корень –1: при подстановке $x = -1$ первые слагаемые будут положительны и их сумма будет больше 911. Пропустив второй вариант, рассмотрим более простой — третий: та же подстановка дает $1 + 2 - 4 - 5 - 3 \neq 0$, так что -1 не является корнем и третьего уравнения.

Однако в четвертом варианте -1 оказывается корнем: $32 - 36 - 3 + 5 + 2 = 0$, а подставлять $x = 3$ «не очень хочется» — слишком долго считать, но оказывается, что можно вообще не считать: при $x = 3$ первые четыре слагаемые делятся на 4, так что и их сумма делится на 4, а 2 на 4 не делится, и следовательно, 3 не является корнем этого уравнения. Поэтому правильный вариант ответа — второй.

7. *Сколько истинных утверждений перечислено ниже?*

Четная функция может быть периодической.
Четная функция не может быть периодической.
Периодическая функция может быть четной.
Периодическая функция не может быть четной.
Четная функция обязана быть периодической.
Четная функция не обязана быть периодической.
Периодическая функция обязана быть четной.
Периодическая функция может не быть четной.

1. Три. **2.** Четыре. **3.** Пять. **4.** Шесть.

Для решения этой задачи можно вообще не знать математики, и вместо того чтобы изучать связь между четными и периодическими функциями, можно заметить, что каждое утверждение с четным номером является отрицанием предыдущего, причем в первых трех парах это очевидно грамматически, а в последней требуется лишь знание русского языка: отрицанием к «обязана быть» является «может не быть». Поэтому ровно половина из этих высказываний истинна, так что правильный вариант ответа — второй.

8. *Найти все решения уравнения*

$$3\sin x + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} + 2.$$

1. $\frac{\pi}{2} + 2\pi n \ (n \in \mathbf{Z})$;
2. $2\pi n \ (n \in \mathbf{Z})$;
3. $\pi n \ (n \in \mathbf{Z})$;
4. $\pi + 2\pi n \ (n \in \mathbf{Z})$.

Эта задача недавно предлагалась в едином государственном экзамене, и скорее всего имелась в виду проверка знания элементарных тригонометрических формул произведения и решения простейших тригонометрических уравнений. Между тем вместо того чтобы лихорадочно их вспоминать, можно сразу заметить, что в углах трех последних серий синус равен 0, а значит, они не входят в область определения уравнения, так что правильный вариант ответа — первый.

Аналогичные соображения дают возможность решения и следующей задачи, также предложенной в ЕГЭ.

9. *Найти все решения уравнения*

$$\left(\operatorname{tg}^2 x + 1\right)\operatorname{tg} x = -\frac{1}{\cos^2 x}.$$

1. $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n \ (n \in \mathrm{Z})$;

2. $\pi n \ (n \in \mathrm{Z})$;

3. $-\frac{\pi}{4} + \pi n \ (n \in \mathrm{Z})$;

4. $\frac{\pi}{4} + \pi n \ (n \in Z)$.

При $n = 0$ в предложенных вариантах получаем соответственно углы $-\frac{\pi}{2}$, 0, $-\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4}$, но $-\frac{\pi}{2}$ не принадлежит области определения уравнения — при этом значении x тангенс не определен, при $x = 0$ уравнение превращается в неверное равенство $0 = 1$, при $x = -\frac{\pi}{4}$ получаем верное равенство $-2 = -2$, и наконец, при $x = \frac{\pi}{4}$ левая часть уравнения положительна, тогда как правая отрицательна. Следовательно, правильным является вариант 3.

10. Область определения функции

$$y = \sqrt{14399 - 836x - 43x^2} \text{ есть}$$

1. $\left(-\infty, -30\frac{19}{43}\right] \cup [11, +\infty)$;

2. $\left(11,\ 30\frac{19}{43}\right]$;

3. $\left[-30\frac{19}{43}, 11\right]$;

4. $\left(-30\frac{19}{43}, 11\right)$.

Жутко было бы «честно» решать неравенство $14399 - 836x - 43x^2 \geq 0$, но в еще большей степени это было бы странно — об этом уже позаботились составители этого теста, а для выбора правильного варианта ответа достаточно разобраться с конкретными деталями.

И тут можно привести так много соображений для отбрасывания неправильных вариантов, что трудно даже сразу указать наиболее простые из них.

Например, бросается в глаза, что в три варианта входит ответ $-30\frac{19}{43}$, а в один — противоположное, но по теореме Виета квадратный трехчлен под знаком радикала имеет корни разных знаков, так что 11 и $30\frac{19}{43}$ не могут одновременно быть его корнями, т.е. вариант 2 отпадает. А при «очень больших» значениях x этот квадратный трехчлен, очевидно, отрицателен, так что отпадает и вариант 1. А если сразу же отметить, что 0 входит в область определения данной функции, то вариант 1 и 2 исключаются одновременно.

При выборе ответа вы не обязаны ни пояснять, что за «очень большие» значения x вы имеете в виду, ни доказывать строго, что, скажем, при $x = 1000$ подкоренное выражение действительно отрицательно, и поэтому для исключения первого варианта вам достаточно «внутренней убежденности», что огромные положительные 13 миллионов «забьют» жалкие отрицательные тысячи из других слагаемых.

А если посмотреть на задачу с более общих позиций, то, как вы прекрасно знаете из своего опыта решения квадратных неравенств, хотя самого этого утверждения, возможно, никогда явно не слышали, что для множества решений имеются всего 4 возможности: все множество **R** — неравенство верно для любого x, пустое множество — неравенство не имеет решений, конечный промежуток и объединение двух лучей. Но в случае, когда множеством решений *нестрогого* неравенства является конечный промежуток, этот промежуток всегда содержит свои концы, т.е. является отрезком. Поэтому варианты 2 и 4 неправильные, а 0 входит в область определения, вариант 1 — также неправильный, и правильный ответ — в варианте 3.

11. *Какая из функций не определена ни при одном значении x?*

1. $y = \sqrt[4]{4\sin x - 5\cos x - 6}$

2. $y = \sqrt[6]{41x^7 - 26x^5 - 96x^3 + 7}$

3. $y = \sqrt[4]{3\sin x + 2\cos x - 4}$

4. $y = \sqrt{\frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{4}}$.

«Пробегая взглядом» приведенные варианты ответов, замечаем, что в вариантах 1 и 3 речь явно идет о множестве значений «непростой» функции вида $y = a\sin x + b\cos x$, с которой без необходимости лучше не связываться, функция 2 определена, например, при $x = 0$, а функция 4, хотя при $x = 0$ не определена, но зато определена, например, при $x = 1$: $\frac{1}{2} > \frac{1}{4}$.

Таким образом, остается рассмотреть только варианты 1 и 3, т.е. все же заняться функцией $y = a\sin x + b\cos x$. Но под корнем в функции 1 при $x = \frac{3\pi}{4}$ стоит число, большее

$\frac{9\sqrt{2}}{2} > 4{,}5 \cdot 1{,}4 = 6{,}3 > 6$, т.е. эта функция при этом значении x определена, и из всех предложенных функций остается и правильным является вариант ответа 3.

Конечно же, возникает вопрос, как мы догадались рассмотреть сначала именно функцию 1 и именно значение $x = \frac{3\pi}{4}$. Но функции 1 и 3 почти одинаковы и поэтому естественно начать с первой, и нам немного «повезло» с расположением вариантов ответа.

Кроме того, ясно, что значение x надо было выбирать так, чтобы его синус был положительным, а косинус отрицательным, а такие углы лежат в третьей четверти. Мы сразу же «отбросили» два простых угла $x = \pi$ и $x = \frac{\pi}{2}$ — при этих значениях $4\sin x - 5\cos x < 6$. Но в третьей четверти лежит еще один столь же «хороший», как и $\frac{3\pi}{4}$, угол $\frac{2\pi}{3}$, но угол $\frac{3\pi}{4}$ нам показался удобнее, поскольку его синус и косинус равны.

Впрочем, подошел бы и угол $\frac{2\pi}{3}$:

$$2 + 5\frac{\sqrt{3}}{2} > 2 + 2{,}5 \cdot 1{,}7 > 2 + 2{,}5 \cdot 1{,}6 = 6.$$

Заметим, что мы не стали перемножать 2,5 и 1,7, поскольку это труднее, чем перемножить 2,5 и 1,6, так как $25 \cdot 16 = 100 \cdot 4 = 400$ — этот прием устного умножения на 25 применяется еще со времен царя Гороха. Разумеется, мы уменьшили нашу сумму, и если уменьшенная сумма оказалась бы меньше 6, то пришлось бы перемножать 2,5 и 1,7 столбиком.

Между тем «честное» решение этой задачи может быть значительно проще, если знать формулу вспомогательного угла и ее следствие: $|a\sin x + b\cos x| \le \sqrt{a^2 + b^2}$, из которой для функций 1 и 3 сразу же получаем, что

$$4\sin x - 5\cos x \le \sqrt{41}, \quad 3\sin x + 2\cos x \le \sqrt{13} < 4$$

и поэтому функция 3 не определена ни при каком x. «На эту формулу» и предложена эта задача, но как быть тому, кто этой формулы или ее следствия не знает или не помнит, «не проходил» или забыл? Вывести самостоятельно?

12. *Сколько из неравенств* $\sin 1 + \cos 1 > 1$, $\sin 2 + \cos 2 > 1$, $\sin 3 + \cos 3 > 1$, $\sin 4 + \cos 4 > 1$ *являются верными*?

1. Ни одно. **2.** Одно. **3.** Два. **4.** Три.

Ясно, что если синус или косинус какого-либо угла (или оба вместе) отрицателен, то их сумма не может быть больше 1 — в противном случае «оставшееся» слагаемое было бы больше 1. Поэтому прежде всего следует рассмотреть, в каких четвертях лежат углы 1, 2, 3 и 4. Угол 1, примерно равный $\frac{\pi}{3}$, конечно лежит в первой четверти (и для этого утверждения нет необходимости выписывать неравенства $0 < \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{2}$), а углы 2, 3 и 4 лежат во второй или третьей четверти, так что косинусы этих углов отрицательны, и следовательно, неравенства 2, 3, 4 неверны, стало быть, правильным вариантом ответа является первый.

13. Указать первообразную функции $f(x) = e^x - 2x$:

1. $F(x) = e^x - 2$;
2. $F(x) = e^x - x^2$;
3. $F(x) = e^{x^2}$;
4. $F(x) = e^{x^2} - x^2$.

Для выбора правильного ответа здесь достаточно знать, что такое первообразная функция, при этом забыв такое незначительное обстоятельство, что в определении первообразной речь идет о *первообразной на некотором интервале* — главное, чтобы выполнялось равенство $F'(x) = f(x)$. Поэтому достаточно продифференцировать функции в предложенных вариантах ответов: производная первой функции равна e^x, производная второй равна $e^x - 2x$, так что правильный вариант ответа — второй.

14. *Пятнадцатый член арифметической прогрессии:*

1. Больше десятого;
2. меньше двадцатого;
3. больше седьмого;
4. меньше восьмого.

Можно, конечно, записать формально все данные условия, а можно заметить, что первый вариант ответа, если он правильный, означает, что прогрессия — возрастающая, а тогда правильным является и вариант 3, так что оба эти варианта неправильны, и прогрессия не может быть возрастающей. Но тогда неправилен вариант 3, так что правильный вариант ответа — 4.

Учтем на будущее, что проведенное рассуждение является частным случаем общего положения, справедливого для тестов с выбором ответа. Именно, если два варианта ответов равносильны, т.е. либо оба одновременно правильны, либо одновременно неправильны, то оба они неправильны, т.е. правилен один из оставшихся вариантов. Точно так же, если из правильности одного варианта следует правильность другого, то первый вариант неправильный, а если из неправильности одного следует неправильность другого, то неправилен второй вариант. А если два варианта несовместимы, т.е. с точки зрения математики являются отрицаниями один другого, другими словами в случае, когда правилен один из них, то неправилен другой, один из этих вариантов обязательно правилен.

15. *В какую из арифметических прогрессий входит число a?*

1. 2, 4, 6, ...; 2. 4, 8, 12, ...; 3. 48, 46, 44, ...; 4. 0, –2, –4, ...

Нетрудно заметить, что вторая прогрессия целиком содержится в первой, и поэтому не может быть правильным вариант ответа 2 — иначе число a содержится в обеих прогрессиях. Четвертая прогрессия является частью третьей, так что отпадает и вариант 4. Третья прогрессия «распределена» по второй и четвертой: ее положительные члены содержатся во второй, а нуль и отрицательные — в четвертой, так что и вариант 3 неправильный, и таким образом, правильный вариант ответа — первый.

А возможен и совершенно иной способ рассуждений: сравнивая первую и вторую прогрессии, сразу можно обратить внимание на число 2, которое не входит ни в одну из прогрессий, кроме первой. Поэтому правильным вариантом ответа может быть только первый: если бы какое-либо другое число входило бы только в какую-нибудь другую прогрессию, то задача была бы некорректной, неправильной — с точки зрения требований, предъявляемых к заданиям с выбором ответа.

Обратим внимание также и на то, что в условии задачи не сказано даже, что a целое число: форма задачи — тест с выбором ответа — позволяет это *доказать*: в противном случае все варианты ответов неверны. Впрочем, для решения задачи, как мы только что видели, об этом можно и не задумываться.

И в заключение приведем пример теста, в котором идея выбора ответа из заданных вариантов доводится почти до абсурда.

16. *Дана функция $y = f(x)$. На каком из промежутков эта функция возрастает?*

1. $(-\infty, 5]$; 2. $[-2, 4]$; 3. $(2, 3)$; 4. $(0, 8)$.

Может показаться странным, что на заданный вопрос можно получить ответ — уж слишком мало мы знаем о функции $y = f(x)$, точнее, ничего не знаем. Но форма теста предполагает выполнение упомянутой в самом начале теоремы существования и единственности — среди предложенных вариантов есть только один правильный ответ. А для его выбора нужно вспомнить или сообразить, что если функция возрастает на каком-нибудь промежутке, то она возрастает и на любом промежутке, являющемся его частью.

В данном случае можно отметить, что во всех вариантах соответствующие промежутки содержат промежуток $(2, 3)$, поэтому правильным может быть только вариант 3 — в ином случае правильными были бы по крайней мере два варианта. А вариант 3 — правильный, поскольку остальные неправильные — вывод абсолютно верный «по определению теста с выбором ответа».

Это задача совсем не абсурдна с точки зрения проверки математической подготовки учащихся: простое ключевое утверждение, использованное при решении, едва ли придет им в голову. Более того, она подчеркивает некорректность требующегося стандартного ответа на вопрос «*Найти промежутки возрастания функции...*»: к этому ответу логически надо добавить «а также любой промежуток, являющийся частью любого из промежутков, перечисленных выше».

3.2. Наши тесты — подготовительные и обучающие

3.2.1. Числа

3.2.1.1. Делимость и деление с остатком

498. Число 178* является составным, если * заменяет цифру:

1. 3; **2.** 5; **3.** 7; **4.** 9.

499. Число 367* не является простым, если * заменяет цифру:

1. 1; **2.** 7; **3.** 2; **4.** 3.

500. Число 268* не является простым, если * заменяет цифру:

1. 7; **2.** 9; **3.** 6; **4.** 3.

501. Число 501* является простым, если * заменяет цифру:

1. 1; **2.** 3; **3.** 5; **4.** 9.

502. Ровно одно из чисел 3423, 2334, 4523, 2345 является простым. Какое?

503. Какое из следующих чисел является простым

1. 347 743; **2.** 737 373; **3.** 111 111; **4.** 4823?

504. Какие из чисел $1589^2 - 1$, $5847^4 - 1$, $5398^3 + 1$, $9349^3 - 1$ являются составными:

1. Все?
2. Числа $1589^2 - 1$ и $5847^4 - 1$?
3. Только число $1589^2 - 1$?
4. Все, кроме $5398^3 + 1$?

505. Какое из заданных чисел является простым:

1. $33\,588^3 - 1$;
2. $59\,867^{364} - 28\,952^{82}$;
3. $40\,957^{65} - 21\,596^{95}$;
4. 2113.

506. Сколько простых среди чисел $3^{95} + 32$, $5^{36} + 125$, $7^{33} + 343$, $11^{55} + 334$?

1. 0 **2.** 1 **3.** 2 **4.** 3.

507. Сколько составных среди чисел 100! + 71, 100! + 73, 100! + 75, 100! + 77?

1. 1; **2.** 2; **3.** 3; **4.** 4.

508. Какое из данных чисел можно представить в виде суммы двух простых чисел?

1. 3; **2.** 27; **3.** 53; **4.** 150.

509. Какое из чисел можно получить сложением чисел, в записи которых используются только тройки?

1. 1000; **2.** 2000; **3.** 3000; **4.** 4000.

510. Из нескольких чисел, в записи которых есть только цифра 4, составлена сумма 1000. Число слагаемых может быть равно

1. 8; **2.** 10; **3.** 12; **4.** 14;
5. Только числу, отличному от указанных.

511. Сколькими способами можно записать число 101 010 101 в виде суммы двух простых чисел (суммы, отличающиеся порядком слагаемых, считаются за одну)?

3. 0; **2.** 1; **3.** 2; **4.** Больше двух.

512. При каких числах n ($n > 1$) сумма кубов последовательных чисел от 1 до n является составным числом?

1. Ни при каких n.
2. При всех n.
3. При $n = 3$.
4. При n от 2 до 10.

513. Какие из приведенных ниже утверждений верны:

1) сумма любых двух составных чисел — составное число;

2) сумма любых двух простых чисел является составным числом;

3) сумма любого простого и любого составного числа — составное число;

4) произведение любого простого и любого составного числа — составное число?

1. Первое и четвертое.
2. Все, кроме третьего.
3. Только четвертое.
4. Только первое.

514. Среди чисел

1. 999; **2.** 998; **3.** 864; **4.** 984

указать наибольшее, которое делится на 12.

515. Для каких из чисел 77 772, 1515, 222 222, 23 456 число 6 является делителем?

1. Для всех чисел.
2. Для первого и третьего.
3. Ни для какого числа.
4. Только для первого.

516. Какие из чисел 9992, 15 156, 2 736 451, 24 680 делятся на 18?

1. Все.
2. Первое и третье.
3. Только второе.
4. Ни одно.

517. Для каких из чисел 112 233, 257, 36 300, 9 876 543 211 сумма с числом 111 делится на 9?

1. Для первого и третьего.
2. Ни для какого числа.
3. Для третьего.
4. Для всех чисел.

518. Произведение двух последовательных натуральных чисел:

1) есть число составное;
2) делится на 2;
3) делится на 3;
4) не больше 72.

519. Разность $\overline{ab} - \overline{ba}$:

1) всегда делится на 2;
2) никогда не делится на 2;
3) никогда не делится на 9;
4) всегда делится на 9.

520. Пусть a и b — натуральные числа. Какое наибольшее число верных может содержаться среди предложений:

а) a делится на b;
б) b делится на a;
в) a не делится на b;
г) b не делится на a?

1. 1; **2.** 2; **3.** 3; **4.** 4.

521. Пусть a и b — натуральные числа. Какое наибольшее число верных может содержаться среди предложений:

а) a делится на b;
б) b делится на a;
в) a^2 не делится на b^2;
г) b^2 не делится на a^2?

1. 1; **2.** 2; **3.** 3; **4.** 4.

522. Пусть a и b — натуральные числа. Какое наибольшее число верных может содержаться среди предложений:

а) a делится на b;
б) b делится на a;
в) a^2 делится на b^2;
г) b^2 делится на a^2?

1. 1; **2.** 2; **3.** 3; **4.** 4.

523. Пусть a и b — различные целые числа, отличные от 0. Какое наибольшее число верных может содержаться среди предложений:

а) a делится на b;
б) b делится на a;
в) a^2 делится на b^2;
г) b^2 делится на a^2?

1. 1; 2. 2; 3. 3; 4. 4.

524. Пусть a и b — различные целые числа, отличные от нуля. Какое наибольшее число верных может содержаться среди предложений:

а) a делится на b;
б) b делится на a;
в) a не делится на b;
г) b не делится на a?

1. 1; 2. 2; 3. 3; 4. 4.

525. Какое наименьшее число из следующих предложений, где a и b — целые числа, обязательно неверно:

а) если a делится на b, то b делится на a;
б) если a не делится на b, то b не делится на a;
в) если b делится на a, то a делится на b;
г) если b не делится на a, то a не делится на b?

1. 1; 2. 2; 3. 3; 4. 4.

526. Для каких из заданных ниже чисел n верно утверждение: «Если сумма трех натуральных чисел делится на n, то и сумма их кубов также делится на n»?

1. 4; 2. 5; 3. 6; 4. 7.

527. Найти все такие натуральные и отличные от единицы числа n, для которых верно утверждение: «Если сумма трех натуральных чисел делится на n, то и сумма их кубов также делится на n».

1. 2 и 3; 2. 2, 3 и 4; 3. 2, 3 и 6; 4. 2, 3, 5 и 6.

528. Для каких из чисел 2239, 163, 222, 9 876 543 211 разность с числом 439 делится на 3?

1. Для второго и третьего.
2. Ни для какого числа.
3. Для всех чисел.
4. Для первого и второго.

529. Среди чисел

1. 976; 2. 311; 3. 564; 4. 185

найти наибольшее, которое при делении на 16 с остатком дает частное, равное 9.

530. Остатки от деления натурального числа m на 7 и 8 равны 5. Найти остаток от деления числа m на 56.

1. 10; 2. 25; 3. 5; 4. 13.

531. Остатки от деления натурального числа n на 5 и 9 равны соответственно 3 и 7. Найти остаток от деления числа n на 45.

1. 14; 2. 21; 3. 45; 4. 43.

532. Неверно, что натуральное число может делиться на 3 нацело, а при делении на 12 давать в остатке

1. 3; 2. 6; 3. 9; 4. 10.

533. Если при делении на 5 число дает остаток 2, а при делении на 3 — остаток 1, то при делении на 15 остаток будет равен

1. 1; 2. 2; 3. 3; 4. 7.

534. В какую из последовательностей (1, 4, 7, ...); (2, 5, 8, ...); (3, 6, 9, ...) входит число $4^{56} - 2^{11}$?

1. В первую. 2. Во вторую. 3. В третью. 4. Ни в одну.

535. В какую из последовательностей (1, 4, 7, ...); (2, 5, 8, ...); (3, 6, 9, ...) входит число $9^{12} + 7^{45}$?

1. В первую. 2. Во вторую. 3. В третью. 4. Ни в одну.

536. В какую из последовательностей (1, 4, 7, ...); (2, 5, 8, ...); (3, 6, 9, ...) входит число $8^{612} + 15^{34}$?

1. В первую. 2. Во вторую. 3. В третью. 4. Ни в одну.

537. В какую из последовательностей (1, 4, 7, ...); (2, 5, 8, ...); (3, 6, 9, ...) входит число $10^{56} - 22^{94}$?

1. В первую. 2. Во вторую. 3. В третью. 4. Ни в одну.

538. Какие остатки от деления на 3 могут давать точные квадраты?

1. Любые. 2. 0 или 1. 3. 1 или 2. 4. 0 или 2.

539. Какие остатки от деления на 4 могут давать точные квадраты?

1. Любые. 2. Только 0. 3. 0 или 1. 4. 0, 1 или 2.

540. Сколько существует целых чисел n, при которых дробь $\frac{4n+7}{n+3}$ является целым числом?

1. 1; 2. 2; 3. 3; 4. 4.

541. Сколько всего существует целых чисел n, при которых дробь $\frac{n+7}{4n+3}$ является целым числом?

1. 0; 2. 1; 3. 2; 4. 3.

542. Сколько всего существует натуральных чисел n, при которых дробь $\frac{n+3}{2n+5}$ является натуральным числом?

1. 0; 2. 1; 3. 2; 4. 3.

543. Сколько всего существует натуральных чисел n, при которых дробь $\frac{3n+20}{8n-3}$ является натуральным числом?

1. 0; 2. 1; 3. 2; 4. 3.

544. Сколько всего существует натуральных чисел n, при которых дробь $\frac{11n+20}{14n-9}$ является натуральным числом?

1. 0; 2. 1; 3. 2; 4. 3.

545. Сколько всего существует целых чисел n, при которых дробь $\frac{12n+46}{4n+3}$ является целым числом?

1. 0; 2. 1; 3. 2; 4. 3.

546. При каком целом n дробь $\frac{5n-7}{3n-4}$ является целым числом?

1. 1 111 2. 111 3. 11 4. 1

547. Какое из данных чисел является суммой геометрической прогрессии из трех членов, у которой первый член и знаменатель — натуральные числа, большие 1:

1. 131; 2. 133; 3. 135; 4. 137?

548. Для какого из данных чисел существует геометрическая прогрессия из трех членов, у которой первый член равен 1, а знаменатель — натуральное число, а сумма равна:

1. 20 021; 2. 20 022; 3. 20 023; 4. 20 024?

549. Для какого из данных чисел существует геометрическая прогрессия из трех членов с первым членом 1 и знаменателем — натуральным числом, имеющая сумму:

1. 116 993; 2. 117 993; 3. 118 993; 4. 119 993?

550. Какому из чисел может равняться сумма геометрической прогрессии a, b, c, d с натуральными первым членом и знаменателем?

1. 29; 2. 30; 3. 31; 4. 32.

551. Может ли сумма геометрической прогрессии a, b, c, d с натуральными первым членом и знаменателем быть равной 800?

552. Может ли сумма геометрической прогрессии, содержащей четное число членов, большее 2, и имеющей в качестве знаменателя натуральное число, равна 131?

553. Сумма бесконечной убывающей геометрической прогрессии равна 30, а сумма четвертых степеней ее членов равна 54 000. Чему равен первый член прогрессии?

1. 5; 2. 15; 3. 25; 4. 35.

3.2.1.2. Десятичная запись

554. Чему равно произведение $3392 \cdot 7533$?

1. 25 551 536; 2. 25 551 736; 3. 25 551 836; 4. 25 551 936.

555. Чему равно произведение $6951 \cdot 2361$?

1. 16 443 311; 2. 16 433 311; 3. 16 422 311; 4. 16 411 311.

556. Чему равно произведение $6972 \cdot 8668$?

1. 60 433 296; 2. 60 433 926; 3. 60 343 296; 4. 60 493 236.

557. Чему равно произведение $7643 \cdot 6811$?

1. 52 056 463; 2. 52 056 473; 3. 52 056 483; 4. 52 056 493.

558. Чему равно произведение $9742 \cdot 5633$?

1. 54 876 586; 2. 54 876 686; 3. 54 876 786; 4. 54 876 886.

559. Чему равно произведение $1567 \cdot 7633$?

1. 11 960 911; 2. 11 960 823; 3. 11 960 617; 4. 11 960 727.

560. Чему равно произведение $7775 \cdot 7779$?

1. 60 481 725; 2. 60 481 735; 3. 60 481 745; 4. 60 481 755.

561. Какое из равенств верно?

1. $132\,227\,334\,144 = 2^{19} \cdot 3^5 \cdot 5^3 \cdot 19^2$;
2. $0{,}12^{11} + 0{,}13^{11} + 0{,}14^{11} = 1{,}157949$;
3. $\dfrac{(24\,680 + 97\,531)(24\,680 - 97\,531)}{329^2 - 2 \cdot 329 \cdot 332 + 332^2} = 989\,243\,729$;
4. $\dfrac{3^{12} \cdot 12^{10} \cdot 4^6}{6^{22} \cdot 2^{10}} = 1$.

562. Какое из равенств верно?

1. $3212 + 19 \cdot 3^2 = 31\,381\,059\,781$;
2. $(-8)^{12} - (-8)^4 - 3 \cdot (-8)^2 + 36 = 0$;
3. $\dfrac{0{,}2^2 + 2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}25 + 0{,}25^2}{0{,}2^2 - 2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}65 + 0{,}65^2} = 1$;
4. $\dfrac{11\,111\,111\,111\,111\,111}{2\,071\,723} = 5\,363\,222\,353$.

563. Какое из равенств верно?

1. $9\,806\,781\,064\,320 = 99 \cdot 98 \cdot 97 \cdot 96 \cdot 95 \cdot 94$;
2. $0{,}88^2 - 0{,}12^2 + 0{,}62^2 - 0{,}38^2 = 1$;
3. $\dfrac{(1 - 3{,}75 : 7{,}5) : 510}{(18 : 1{,}2 - 0{,}3 : 1{,}5) : 0{,}4} = 1$;
4. $\dfrac{(-3)^{19} - 19 \cdot (-3)^5}{(-5)^3 + 23 \cdot 2^4} = 4\,782\,950$.

564. Какое из равенств верно?

1. $2^{35} - 27 \cdot 2^2 = 34\,359\,738\,151$;
2. $(-12)^{11} + 4 \cdot (-12)^2 + 1 = 743\,008\,370\,111$;
3. $\dfrac{58^2 - 42^2}{29^2 + 2 \cdot 29 \cdot 11 + 11^2} = 1$;
4. $\dfrac{8{,}539728604554}{3{,}1415927} = 2{,}71828$.

565. Сколько составных среди чисел $648\,763^{38} - 567\,675$, $2\,964\,764^{26} + 121\,121$, $38\,557\,554^{38} + 1\,321\,231$, $763^{295} - 64\,653$?

1. 1; 2. 2; 3. 3; 4. 4.

566. Сколько составных среди чисел $7^{33} + 8$, $7^{44} + 14$, $7^{55} + 20$, $7^{66} + 26$?

1. 1; 2. 2; 3. 3; 4. 4.

567. Сколько составных среди чисел $66^{39}-61$, $28^{39}+94$, $2^{31}-1$, $34^{295}-39$?

1. 1; **2.** 2; **3.** 3; **4.** 0.

568. Сколько из чисел $2^{61}-1$, $2^{61}-2$, $2^{61}-5$, $2^{61}-7$ являются простыми?

1. 1; **2.** 2; **3.** 3; **4.** 4.

569. Какой цифрой оканчивается число $49^{37}+14^{41}$?

1. 5; **2.** 3; **3.** 1; **4.** 7.

570. Какой цифрой оканчивается число $22^{45}+33^{26}$?

1. 5; **2.** 3; **3.** 1; **4.** 7.

571. Какой цифрой оканчивается число $17^{37}+54^{41}$?

A. 3; **B.** 5; **C.** 1; **D.** 7.

572. Какой цифрой оканчивается число $39^{53}+28^{64}$?

A. 5; **B.** 3; **C.** 1; **D.** 7.

573. Однозначными делителями числа 333...33, составленного из 2005 цифр, являются

1. 3 и 9; **2.** 1 и 3; **3.** 1 и 7; **4.** 1, 3 и 7.

574. Число 461461162162461461162...461461162162, содержащее n цифр, делится на 13 при n, равном:

1. 2003; **2.** 2004; **3.** 2005; **4.** 2006.

575. Утверждение «Натуральное число делится на n в том и только в том случае, если сумма его цифр делится на n» верно для n, равного:

1. 3 и 9; **2.** 1, 2, 3 и 9; **3.** 1, 3, 7 и 9; **4.** 1, 3 и 9.

576. Неверно, что всякое трехзначное число, записанное одними и теми же цифрами,

1. делится на 3;
2. делится на 9;
3. делится на 37;
4. делится на 111.

577. Какое из чисел является степенью натурального числа с показателем, большим 1?

1. 371 293; **2.** 935 988; **3.** 865 172; **4.** 34 642.

578. Десятичная запись числа a составлена из 462 «блоков» 15. Тогда из чисел 7, 11 и 13 оно делится:

1. Только на 11.
2. Только на 7 и на 11.
3. Только на 11 и на 13.
4. На 7, 11 и 13.

579. Десятичная запись числа a составлена из n «блоков» 1234554321. На какие из чисел 3, 7 и 11 оно делится?

1. На все.
2. Только на 3.
3. Только на 3 и на 11.
4. Только на 7 и на 11.

580. Десятичная запись числа a составлена из n «блоков» 1771. На какие из чисел 7, 11 и 13 оно делится?

1. Только на 7.
2. Только на 7 и на 13.
3. Только на 7 и на 11.
4. Только на 11 и на 13.

3.2.1.3. Комбинаторные рассуждения

581. Какое из заданных чисел не может быть представлено в виде суммы квадратов двух натуральных чисел?

1. 10; **2.** 40; **3.** 90; **4.** 110.

582. Какое из заданных чисел не может быть представлено в виде суммы квадратов двух натуральных чисел?

1. 20; **2.** 30; **3.** 40; **4.** 90.

583. При каком из заданных значений a уравнение $(x+y)^2+(x-y)^2=a$ имеет решения в целых числах?

1. $a=167$; **2.** $a=391$; **3.** $a=457$; **4.** $a=666$.

584. Сколько решений в натуральных числах имеет уравнение $x^2 + y^2 = 17$?

1. 1; **2.** 2; **3.** 3; **4.** 4.

585. Сколько решений в натуральных числах имеет уравнение $x^2 + y^2 = 65$?

1. 1; **2.** 2; **3.** 3; **4.** 4.

586. Сколько пар (x, y) целых чисел удовлетворяют уравнению $x^2 - y^2 = 16$?

1. 2; **2.** 4; **3.** 6; **4.** 8.

587. Сколько из чисел 201, 301, 401 и 501 могут быть представлены в виде разности квадратов двух натуральных чисел?

1. 1; **2.** 2; **3.** 3; **4.** 4.

588. Сколько решений в целых числах имеет уравнение $3456x - 5328y = 12\,654$?

1. Ни одного. **2.** Одно. **3.** Два. **4.** Бесконечно много.

589. Сколько решений в целых числах имеет уравнение $3456x - 3457y = 1$?

1. Ни одного. **2.** Одно. **3.** Два. **4.** Бесконечно много.

590. Сколько решений в целых числах имеет уравнение $3456x - 3457y = 5311$?

1. Ни одного. **2.** Одно. **3.** Два. **4.** Бесконечно много.

591. Сколько из данных утверждений истинно при любых целых a, b, c?

1. Уравнение $ax + by = c$ всегда имеет решение.

2. Уравнение $ax + by = c$ может не иметь решений.

3. Уравнение $ax + by = c$ может иметь бесконечно много решений.

4. Уравнение $ax + by = c$ может иметь конечное (отличное от 0) число решений.

5. Уравнение $ax + by = c$ может иметь единственное решение.

1. 2; **2.** 3; **3.** 4; **4.** 5.

592. Какое из уравнений имеет решения в натуральных числах?

1. $(4x + 2y - 1)(2x - 4y - 5) = 6$;
2. $(12x + 3y - 2)(5x - 4y - 16) = 7$;
3. $(33 - 2x - 5y)(21x + 2y - 6) = 38$;
4. $454x^2 - 537xy + 911y^2 = 132\,102$.

593. Какое из уравнений не имеет решений в целых числах?

1. $2x^4 - 5x^3y + 3 = 0$;
2. $3x^3 + 5xy - 2y^3 - 7x + 2 = 0$;
3. $x^2 - 3xy + y^2 - 5y + 31 = 0$;
4. $2x^2 + 2xy^2 - 2y^2 + 3y - 5 = 0$.

594. Какое из уравнений не имеет решений в целых числах?

1. $x^3 + x + xy + y^2 - 25 = 0$;
2. $3x^3 + 5xy - 2y^3 - 7x + 1 = 0$;
3. $3x^3y + y^2 - 5xy - 3 = 0$;
4. $x^2 + 5xy + 3y^2 - 7x - 11y - 13 = 0$.

595. Сколько существует пар (x, y) целых чисел x и y, для которых $\begin{cases} \dfrac{5y - 14}{y - 3} \text{ — целое число} \\ x^2 + y^2 = 641 \end{cases}$?

1. 1. **2.** 2. **3.** Бесконечно много. **4.** Ни одной.

596. Сколько существует пар (x, y) целых чисел x и y, для которых $\begin{cases} \dfrac{9y + 26}{y + 3} \text{ — целое число} \\ x^2 + y^2 = 116 \end{cases}$?

1. 1. **2.** 2. **3.** Бесконечно много. **4.** Ни одной.

597. Сколько решений в целых числах имеет система

$$\begin{cases} y = 5x + \dfrac{19}{12x - 7} \\ y = 6x^3 \end{cases}?$$

1. 1. **2.** 2. **3.** Бесконечно много. **4.** Ни одной.

598. Сколько решений в целых числах имеет система

$$\begin{cases} y = 6x + \dfrac{32}{3x - 5} \\ y = 10x^3 \,? \end{cases}$$

1. 1. 2. 2. 3. Бесконечно много. 4. Ни одной.

599. Сколько решений в целых числах имеет уравнение $5x + 2xy - 6y = 22$?

1. 3. 2. 4. 3. 5. 4. 6.

600. Сколько решений в натуральных числах имеет уравнение $3x + xy - 7y = 28$?

1. 0; 2. 1; 3. 2; 4. 3.

601. Сколько решений в натуральных числах имеет уравнение $3x - y = 715xy$?

1. 0; 2. 1; 3. 2; 4. 3.

602. Сколько решений в натуральных числах имеет уравнение $3x - 715xy - y = 2868$?

1. 0; 2. 1; 3. 2; 4. 3.

603. Кассир, имеющий монеты в 2 и 5 евро, разменял клиенту купюру в 20 евро. Сколькими способами он мог это сделать?

1. 1; 2. 2; 3. 3; 4. 4.

604. Для установки забора длиной 44 м имеются секции длиной 4 м и 6 м. Сколькими способами можно выбрать секции?

1. 1; 2. 2; 3. 3; 4. 4.

3.2.1.4. Логика против математики

605. Число a делится

1. На 6; 2. на 18; 3. на 66; 4. на 732.

606. Число a — делитель числа

1. 6; 2. 18; 3. 72; 4. 792.

607. Число a

1. Натуральное;
2. целое;
3. рациональное;
4. действительное.

608. Число a является членом ровно одной из бесконечных арифметических прогрессий:

а) 48, 46, 44, ...; б) 4, 8, 12, ...; в) 2, 4, 6, ...; г) 0, –2, –4, ... Какой именно?

609. Число a является членом ровно одной из бесконечных арифметических прогрессий:

а) 48, 44, 40, ...; б) 4, 8, 12, ...; в) 2, 4, 6, ...; г) 28, 22, 16, ... Какой именно?

610. Пятнадцатый член арифметической прогрессии:

1. Меньше десятого;
2. больше двадцатого;
3. меньше седьмого;
4. больше восьмого.

611. Пятнадцатый член геометрической прогрессии с положительными членами:

1. Меньше десятого;
2. больше двадцатого;
3. меньше седьмого;
4. больше восьмого.

612. Пятнадцатый член геометрической прогрессии с положительными членами:

1. Больше десятого;
3. больше седьмого;
2. меньше двадцатого;
4. меньше восьмого.

613. Сумма двух чисел:

1. Больше первого слагаемого;
2. меньше первого слагаемого;
3. меньше каждого из этих чисел;
4. больше разности этих чисел.

3.2.2. Функции

3.2.2.1. *Наибольшее и наименьшее значения*

614. Какое наименьшее число утверждений из следующих «Из неравенства $A \le f(x) \le B$ для любого $x \in D(f)$ следует, что:

А. $E(f) = [A, B]$;

Б. $E(f) \subset [A, B]$;

В. наибольшее значение функции f равно B;

Г. наименьшее значение функции f равно A

верны для любой функции f?

1. 0; **2.** 1; **3.** 2; **4.** 3.

615. Какие из указанных ниже функций на промежутке (1, 4):

1. $y = 3x^2 - 9x - 37$; **3.** $y = \mathrm{ctg}^2\left(x - \frac{5\pi}{3}\right)$;

2. $y = \mathrm{ctg}^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$; **4.** $y = \sqrt{x-1} + \frac{1}{\sqrt{x-1}}$

принимают свое наименьшее значение?

1. Все.
2. Все, кроме третьей.
3. Первая и вторая.
4. Только первая.

616. Какие из указанных ниже функций на промежутке (–3, –1):

1. $y = 3x^2 + 5x + 21$; **3.** $y = \mathrm{tg}^2\left(x - \frac{7\pi}{4}\right)$;

2. $y = \mathrm{tg}^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$; **4.** $y = \sin^4 x + \frac{1}{\sin^4 x}$

принимают свое наименьшее значение?

1. Только четвертая.
2. Первая и четвертая.
3. Вторая и третья.
4. Вторая, третья и четвертая.

617. Какие из указанных ниже функций внутри отрезка [–1, 3] принимают свое наименьшее значение?

1. $y = 2x^2 + 11x - 1$; **3.** $y = \cos^2\left(x - \frac{5\pi}{3}\right)$;

2. $y = \cos^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$; **4.** $y = \mathrm{tg}^2 x + \frac{1}{\mathrm{tg}^2 x}$.

1. Все.
2. Все, кроме первой.
3. Только третья.
4. Никакая.

618. У какой из функций

1. $y = \sin x \cdot \sin 2x$; **3.** $y = \sin x \cdot \sin 4x$;

2. $y = \sin x \cdot \sin 3x$; **4.** $y = \sin x \cdot \sin 5x$

наибольшее значение равно 1?

619. У какой из функций

1. $y = \sin x + 2\cos x$; **3.** $\frac{2x}{x^2+1} + \sin x$;

2. $y = \cos x + \cos \pi x$; **4.** $\frac{4x}{x^2+1} + \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$

наибольшее значение равно 2?

620. У какой из функций

1. $y = \sin x \cdot \sin 22x$; **3.** $y = \sin x \cdot \sin 44x$;

2. $y = \sin x \cdot \sin 33x$; **4.** $y = \sin x \cdot \sin 55x$

наименьшее значение равно –1?

621. Сколько из функций

1. $y = \cos x \cdot \cos 12x$; **3.** $y = \cos x \cdot \cos 14x$;

2. $y = \cos x \cdot \cos 13x$; **4.** $y = \cos x \cdot \cos 15x$

имеют наименьшее значение, равное –1?

1. 0; **2.** 1; **3.** 2; **4.** 3.

622. У какой из функций

1. $y = \sin 2x \cdot \sin 10x$; **3.** $y = \sin x \cdot \sin ex$;
2. $y = \sin \pi x \cdot \sin 3x$; **4.** $y = \sin 2x \cdot \sin 10x$

наибольшее значение равно 1?

623. У какой из функций

1. $y = \cos x \cdot \cos ex$; **3.** $y = \cos\left(\sqrt{2}x\right) \cdot \cos 4x$;

2. $y = \cos \pi x \cdot \cos 3x$; **4.** $y = \cos 8x \cdot \cos 3x$

наименьшее значение равно –1?

624. У какой из функций

1. $y = \cos 3x \cdot \sin 4x$; **3.** $y = \cos 8x \cdot \sin 11x$;
2. $y = \cos 5x \cdot \sin 7x$; **4.** $y = \cos 5x \cdot \sin 9x$

наибольшее значение равно 1?

625. У какой из функций

1. $y = \sin x \cdot \cos 2x$; **3.** $y = \sin x \cdot \cos 4x$;
2. $y = \sin x \cdot \cos 3x$; **4.** $y = \sin x \cdot \cos 5x$

наибольшее значение равно 1?

626. У какой из функций

1. $y = \sin 3x \cdot \cos 4x$; **3.** $y = \sin 8x \cdot \cos 11x$;
2. $y = \sin 5x \cdot \cos 7x$; **4.** $y = \sin 5x \cdot \cos 9x$

наибольшее значение равно 1?

627. У какой из функций

1. $y = \sin 3x \cdot \sin 4x$; **3.** $y = \sin 8x \cdot \sin 11x$;
2. $y = \sin 5x \cdot \sin 7x$; **4.** $y = \sin 5x \cdot \sin 9x$

наибольшее значение равно 1?

3.2.2.2. Монотонность функций

628. Сколько из указанных ниже предложений истинны, если рассматриваемые функции определены на множестве всех действительных чисел?

1. Сумма двух возрастающих функций — всегда возрастающая функция.

2. Сумма двух убывающих функций — всегда убывающая функция.

3. Сумма возрастающей и убывающей функций — всегда возрастающая функция.

4. Сумма возрастающей и убывающей функций — всегда убывающая функция.

5. Разность двух возрастающих функций — всегда возрастающая функция.

6. Разность двух убывающих функций — всегда убывающая функция.

7. Разность убывающей и возрастающей функций — всегда убывающая функция.

8. Разность убывающей и возрастающей функций — всегда возрастающая функция.

9. Разность возрастающей и убывающей функций — всегда возрастающая функция.

10. Разность возрастающей и убывающей функций — всегда убывающая функция.

1. Три. **2.** Четыре. **3.** Пять. **4.** Шесть.

629. Какая из функций $y = \dfrac{1}{x}$ и $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ является монотонной?

1. Только первая.
2. Только вторая.
3. Обе функции.
4. Ни одна.

630. Сколько возрастающих среди функций

А. $y = x + \sqrt{x}$; **Б.** $y = x$; **В.** $y = \dfrac{1}{x+\sqrt{x}}$; ; **Г.** $y = \dfrac{1}{x\sqrt{x}}$?

1. 1; **2.** 2; **3.** 3; **4.** 4.

631. Какие из функций

А. $y = x^2 - 4$; **Б.** $y = 3x - 1$; **В.** $y = -\dfrac{1}{x^2}$; **Г.** $y = \dfrac{x}{x-1}$

на отрезке [2, 3] возрастают, а на отрезке [–3, –2] убывают?

1. А и Б; **2.** В и Г; **3.** А и В; **4.** А, В и Г.

632. Какие из функций

$y = -2\sqrt{x}$;

$y = 2x^2 + 3x - 2$;

$y = -5x^3 - 3x + 11$;

$y = \dfrac{1}{2x+1}$

не являются возрастающими?

1. Первая и четвертая.
2. Третья и четвертая.
3. Ни одна.
4. Только третья.

633. Сколько возрастающих среди функций

$y = 2x - 89$; $y = \sqrt{2x+3} + \sqrt{3x-1}$;

$y = 2 - \sqrt{-x+1}$; $y = 7x^{15} + x^5 + 3$?

1. Одна. 2. Две. 3. Три. 4. Все.

634. Сколько убывающих среди функций

$y = -x^2 + 5$; $y = -2x + 1$;

$y = -2|x| + 1$; $y = -3x^5 - 5x^3 + 15$?

1. Одна. 2. Две. 3. Три. 4. Все.

635. Сколько убывающих среди функций

$y = x^2 + x$; $y = \sqrt{x+3} - \sqrt{x-1}$;

$y = 2\sqrt{-2x+3}$; $y = -2x^{11} - x^7 + 3$?

1. Одна. 2. Две. 3. Три. 4. Все.

636. Сколько убывающих среди функций

$y = x^2 + x^4$; $y = -3 + 2x$;

$y = 2|x-1|$; $y = -3x^5 - x^3 + 37$?

1. Одна. 2. Две. 3. Три. 4. Все.

637. Какая из следующих функций не является ни возрастающей, ни убывающей?

1. $y = x^3 + 3x - 1$; 3. $y = e^x + 2\ln x$;

2. $y = -\sqrt{x+2}$; 4. $y = x^5 - x^2 + 3x$.

638. Какая из следующих функций не является ни возрастающей, ни убывающей?

1. $y = x^3 - 2x^2 + 5x - 1$; 3. $y = -e^x - 2\ln x$;

2. $y = x^6 - x^2 + 3x$; 4. $y = \dfrac{1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}$.

639. Какая из следующих функций является возрастающей?

1. $y = x^x$ $(x > 0)$; 3. $y = \sqrt{2x^2 - 1} + \sqrt{x^2 + 1}$;

2. $y = \sqrt{2x^2 - 1} - \sqrt{x^2 + 1}$; 4. $y = x^3 - 3x^2 - 7$.

640. Какая из следующих функций не является ни возрастающей, ни убывающей?

1. $y = \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}$; 3. $y = e^x - 2\ln x$;

2. $y = (x^2 + 1)e^x$; 4. $y = x^3 - 3x$.

641. Какая из следующих функций является возрастающей?

1. $y = (x^2 - 1)e^x$; 3. $y = x^x$ $(x > 1)$;

2. $y = x^x$ $(x > 0)$; 4. $y = \sqrt{x-1} - \sqrt{x+1}$.

642. Какие из функций

$y = x^2$; $y = 2x^2 + 7x - 1$; $y = -5x^2 - 3x + 11$; $y = 2x^3 + x - 33$

на отрезке $[-5, -1]$ возрастают?

1. Первая.
2. Вторая.
3. Третья и четвертая.
4. Только третья.

643. Какие из функций

1. $y = |x^2 - 36|$; 3. $y = 5x^{25} - 10x + 11$;

2. $y = -2x^2 + 4x - 7$; 4. $y = -2x^{31}$.

на отрезке $[-6, 1]$ возрастают?

1. 1 и 2. 2. Только 2. 3. Только 4. 4. 3 и 4.

644. Какие из функций

1. $y = |x-3|$; 3. $y = -4x^2 + 8x + 11$;

2. $y = 3x^2 + 5x - 1$; 4. $y = -2x^3 - x$

не являются возрастающими на отрезке [0, 3]?

1. 1 и 4; 2. 2; 3. 3; 4. 4.

645. Какая из следующих функций не является ни возрастающей, ни убывающей?

1. $y = x^3 + 3x - 1$; 3. $y = e^x + 2\ln x$;

2. $y = -\sqrt{x+2}$; 4. $y = x^5 - x^2 + 3x$.

646. Какая из следующих функций не является ни возрастающей, ни убывающей?

1. $y = x - \sqrt{x}$; 3. $y = e^{3x^2} + 3\ln x^5$;

2. $y = \log_{2-\sqrt{2}}(1 - x^3)$; 4. $y = x^{17} + x^{235} + x^{53}$.

647. Пусть на отрезке $[a, b]$ задана функция $y = f(x)$, возрастающая на промежутке $[a, c)$ и убывающая на промежутке $(c, b]$. Рассмотрим 4 утверждения:

А. $f(c) \geq f(a)$ и $f(c) \geq f(b)$; **В.** $f(c) \leq f(a)$ и $f(c) \geq f(b)$;

Б. $f(c) \geq f(a)$ и $f(c) \leq f(b)$; **Г.** $f(c) \leq f(a)$ и $f(c) \leq f(b)$.

Какое наибольшее число этих утверждений может быть верным для заданной функции?

1. 1; 2. 2; 3. 3; 4. 4.

648. Пусть на отрезке $[a, b]$ задана функция $y = f(x)$, возрастающая на промежутке $[a, c)$ и убывающая на промежутке $(c, b]$. Рассмотрим 4 утверждения:

А. $f(c) \geq f(a)$ и $f(c) \geq f(b)$; **В.** $f(c) \leq f(a)$ и $f(c) \geq f(b)$;

Б. $f(c) \geq f(a)$ и $f(c) \leq f(b)$; **Г.** $f(c) \leq f(a)$ и $f(c) \leq f(b)$.

Сколько из этих утверждений могут быть одновременно верными для заданной функции?

1. Только одно.
2. Не более двух.
3. Любое число.
4. Одно, два или все четыре.

649. Пусть на отрезке $[a, b]$ задана функция $y = f(x)$, возрастающая на промежутке $[a, c)$ и убывающая на промежутке $(c, b]$, причем $f(a) \neq f(b)$. Рассмотрим 4 утверждения:

А. $f(c) \geq f(a)$ и $f(c) \geq f(b)$; **В.** $f(c) \leq f(a)$ и $f(c) \geq f(b)$;

Б. $f(c) \geq f(a)$ и $f(c) \leq f(b)$; **Г.** $f(c) \leq f(a)$ и $f(c) \leq f(b)$.

Сколько из этих утверждений могут быть одновременно верными для заданной функции?

1. Только одно.
2. Не более двух.
3. Любое число.
4. Одно, два или все четыре.

650. Рассмотрим множество всех функций, которые на промежутке $[a, c)$ возрастают, а на промежутке $(c, b]$ убывают. Какое число утверждений

А. $f(c) > f(a)$ и $f(c) > f(b)$; **В.** $f(c) < f(a)$ и $f(c) > f(b)$;

Б. $f(c) > f(a)$ и $f(c) < f(b)$; **Г.** $f(c) < f(a)$ и $f(c) < f(b)$

верно для любой функции f из заданного множества?

1. Ни одного.
2. Не более одного.
3. Только два.
4. Либо два, либо три.

651. При каком из условий

А. f возрастает на промежутке $[a, c]$ и убывает на промежутке $[c, b]$;

Б. f возрастает на промежутке $[a, c]$ и убывает на промежутке $(c, b]$

число $f(c)$ обязательно является наибольшим значением функции f ?

1. Ни при каком.
2. При любом из них.
3. Только при условии **А.**
4. Только при условии **Б.**

652. На каком из промежутков функция $y = f(x)$ является возрастающей?

1. $[3, 5]$; 2. $[3, 5)$; 3. $(3, 5]$; 4. $(3, 5)$.

653. На каком из промежутков функция $y = f(x)$ не является ни возрастающей, ни убывающей?

1. $[3, 5]$; 2. $[3, 5)$; 3. $(3, 5]$; 4. $(3, 5)$.

3.2.2.3. *Периодичность функций*

654. Какие из указанных ниже функций являются периодическими?

1. $y = |\cos x|$; 3. $y = \sin^4\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$;

2. $y = \cos|x|$; 4. $y = x^{64} + x^{30} + 2$.

1. 1, 2 и 3. 2. 1 и 3. 3. 1, 3 и 4. 4. Все.

655. Сколько из указанных ниже функций являются периодическими?

1. $y = \mathrm{tg}^5 x + \mathrm{ctg} 5x + 1$;
2. $y = \sin 4x - 4\cos x - 1$;
3. $y = 2\sin x \cos x$;
4. $y = 2\sin(\cos x)$;
5. $y = x^{41} + x^{17} + 5$.

1. 1 и 2. 2. 1, 2 и 3. 3. Только 3. 4. Все, кроме 5.

656. Какая из функций является периодической?

1. $y = D(x^2)$; 3. $y = \sin x \cdot \sin(x\sqrt{2})$;

2. $y = \sin x^2$; 4. $y = \sin\frac{27x}{72} \cdot \mathrm{tg}\frac{5x}{31}$.

657. Какая из функций не является периодической?

1. $y = \{2x\} \cdot \left\{\frac{x}{2}\right\}$; 3. $y = \sin\sqrt{2}x \cdot \sin \pi x$;

2. $y = \left\{\frac{1}{4}x\right\} + \sin\frac{2}{5}\pi x$; 4. $y = \sin^2 x - \mathrm{tg}\frac{x}{3}$.

658. Какая из функций является периодической?

1. $\mathrm{sgn}(x+1)$; 2. $(\mathrm{sgn}\, x)^2$; 3. $\mathrm{sgn}(|x|)$; 4. $\mathrm{sgn}(\sin x)$.

659. Какая из функций не является периодической?

1. $\mathrm{sgn}(x^2 + 1)$; 3. $\mathrm{sgn}\left(\frac{1}{|x|}\right)$;

2. $\mathrm{sgn}\left(\frac{1}{x^2 + 1}\right)$; 4. $\mathrm{sgn}\left((x + |x|)(x - |x|)\right)$.

660. Какая из функций не является периодической?

1. $y = \{3x\} - \mathrm{tg}2x$; 3. $y = \left\{\frac{3}{\pi}x\right\} - \mathrm{tg}2x$;

2. $y = \{3\pi x\} - \mathrm{tg}2x$; 4. $y = \{3\pi x\} - \mathrm{tg}2\pi x$.

661. Какая из заданных функций является периодической?

1. $y = D(x) \cdot D(x\sqrt{2})$; 3. $y = \sin(\sqrt{98}x) + \sin(\sqrt{162}x)$;

2. $y = x^3 - 3x - 1$; 4. $y = \frac{\sin x}{x - 1}$.

662. Какое из следующих утверждений верно:

1. Периодическая функция всегда имеет наибольшее значение.

2. Периодическая функции с областью определения **R** всегда имеет наибольшее значение.

3. Периодическая функция всегда имеет или наибольшее, или наименьшее значение.

4. Периодическая функция с областью определения **R** может не иметь ни наибольшего, ни наименьшего значения.

1. 1; 2. 2; 3. 3; 4. 4.

663. Какие из следующих утверждений верны:

А. Периодическая функция может не иметь точек экстремума.

В. Периодическая функция всегда имеет точки экстремума?

1. Только А. 2. Только В. 3. Оба. 4. Ни одно.

664. Какие из следующих утверждений верны?

А. Периодическая функция может быть монотонной.
В. Монотонная функция может быть периодической.

1. Только **А**. **2.** Только **В**. **3.** Оба. **4.** Ни одно.

665. Какие из следующих утверждений верны?

А. Периодическая функция может принимать сколь угодно большие значения.

В. Периодическая функция с областью определения **R** может принимать сколь угодно большие значения.

1. Только **А**. **2.** Только **В**. **3.** Оба. **4.** Ни одно.

666. Что можно сказать о периодичности функции $y = f(g(x))$, если функция $y = g(x)$ имеет период T?

1. Всегда имеет период T.
2. Всегда является периодической.
3. Никогда не является периодической.
4. Может быть, но может и не быть периодической.

667. Что можно сказать о периодичности функции $y = f(g(x))$, если функция $y = f(x)$ имеет период T?

1. Имеет период T.
2. Всегда является периодической.
3. Никогда не является периодической.
4. Может быть, но может и не быть периодической.

668. Какие утверждения верны?

А. Сумма двух периодических функций всегда является периодической функцией.

В. Сумма двух периодических функций может не быть периодической функцией.

1. Только **А**. **2.** Только **В**. **3.** Оба. **4.** Ни одно.

669. Какая из функций является периодической для любых периодических функций f и g ?

1. $y = f(x) + g(x)$; **3.** $y = \frac{f(x)}{g(x)}$;
2. $y = f(x) \cdot g(x)$; **4.** $y = g(f(x))$.

670. Какие из функций

1. $y = f(x) + g(x)$; **3.** $y = f(g(x))$;
2. $y = f(x) \cdot g(x)$; **4.** $y = g(f(x))$

являются периодическими для любых периодических функций f и g?

1. Только 1, 2 и 3; **2.** Только 2, 3 и 4; **3.** Только 3 и 4; **4.** Все.

671. Какие из функций

1. $y = f(x) + g(x)$; **3.** $y = f(g(x))$;
2. $y = f(x) \cdot g(x)$; **4.** $y = g(f(x))$

являются периодическими не для любых периодических функций f и g?

1. Все. **2.** Только 1, 2 и 3. **3.** Ни одна. **4.** Только 1 и 2.

672. Функция $y = f(x)$ является периодической, если:

1. $f(x + T) = f(x)$.

2. $f(x + T) = f(x)$ при всех $x \in D(f)$.

3. Существует число $T \neq 0$, для которого при всех $x \in D(f)$ $f(x + T) = f(x)$.

4. Для некоторого числа $T \neq 0$ при всех $x \in D(f)$ $f(x + T) = f(x) = f(x - T)$.

5. Существует число $T \neq 0$, для которого при всех $x \in D(f)$ $f(x - T) = f(x)$.

6. $D(f)$ симметрична относительно 0 и найдется число $T \neq 0$, для которого при всех $x \in D(f)$ $f(x + T) = f(x)$.

7. При каждом $x \in D(f)$ найдется $T \neq 0$ такое, что при всех $x \in D(f)$ $f(x + T) = f(x) = f(x - T)$.

8. Имеется число $T \neq 0$ такое, что при всех $x \in D(f)$ $f(x + T) = f(x) = f(x - T)$.

Сколько из этих предложений может служить другим определением периодической функции, при котором понятие периодической функции оставалось прежним?

1. Не более трех. **2.** Четыре. **3.** Пять. **4.** Более пяти.

3.2.2.4. *Четность и нечетность функций*

673. Какие из функций

1. $y = \sin^2 x$; **2.** $y = 5$; **3.** $y = x^3$; **4.** $y = 2x^2 - x + 1$

являются четными?

1. 1 и 2. **2.** 1. **3.** 2 и 3. **4.** Ни одна. **5.** Все.

674. Сколько четных среди функций

1. $y = \cos 3x$; **2.** $y = -x^{14} + x^2 - 1$; **3.** $y = \sin^4 5x$;

4. $y = \dfrac{\cos 2x + 1}{\cos 2x - 1}$; **5.** $y = \left|x(x-1)\right|$?

1. Две. **2.** Три. **3.** Четыре. **4.** Пять.

675. Сколько из следующих функций являются нечетными:

1. $y = 3\operatorname{tg}\dfrac{1}{x}$; **2.** $y = x\sqrt{x^2+1}$; **3.** $y = \sin^3 4x$;

4. $y = \dfrac{x}{x^2 - x - 1}$; **5.** $y = 3x^{21} + x - 1$?

1. 2; **2.** 3; **3.** 4; **4.** 5.

676. Сколько из следующих функций являются нечетными:

1. $y = -2\sin\dfrac{3x}{2}$; **3.** $y = 3^x - 3^{-x}$;

2. $y = \dfrac{|x|}{x}$; **4.** $y = \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x-1}$?

1. 1; **2.** 2; **3.** 3; **4.** 4.

677. Четной или нечетной является функция
$y = x^2\left(|x| + x\right)\left(|x| - x\right)$?

1. Четной.
2. Нечетной.
3. Ни четной, ни нечетной.
4. И четной, и нечетной.

678. Четной или нечетной является функция

$$y = \begin{cases} x^2 & \text{при } x > 0 \\ -x^2 & \text{при } x < 0 \end{cases}?$$

1. Четной.
2. Нечетной.
3. Ни четной, ни нечетной.
4. И четной, и нечетной.

679. Четной или нечетной является функция

$$y = \begin{cases} x^3 & \text{при } x > 0 \\ -x^3 & \text{при } x < 0 \end{cases}?$$

1. Четной.
2. Нечетной.
3. Ни четной, ни нечетной.
4. И четной, и нечетной.

680. Сколько из указанных ниже предложений истинны, если рассматриваемые функции определены на множестве всех действительных чисел?

1. Сумма двух четных функций всегда является четной функцией.

2. Разность двух четных функций всегда является четной функцией.

3. Сумма двух нечетных функций всегда является нечетной функцией.

4. Разность двух нечетных функций всегда является нечетной функцией.

5. Сумма четной и нечетной функций всегда является нечетной функцией.

6. Сумма четной и нечетной функций всегда является четной функцией.

1. 3; **2.** 4; **3.** 5; **4.** 6.

681. Сколько из указанных ниже высказываний истинны, если рассматриваемые функции определены на множестве действительных чисел?

1. Сумма двух нечетных функций всегда является нечетной функцией.

2. Разность двух нечетных функций всегда является нечетной функцией.

3. Сумма четной и нечетной функций всегда является четной функцией.

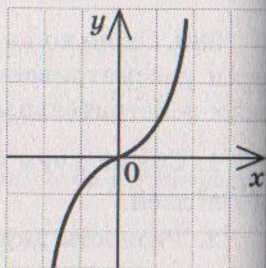
4. Сумма четной и нечетной функций всегда является нечетной функцией.

5. Разность четной и нечетной функций всегда является нечетной функцией.

6. Разность четной и нечетной функций всегда является четной функцией.

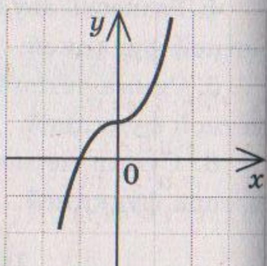
1. 2; **2.** 3; **3.** 4; **4.** 5.

682. Какая из указанных функций может иметь график, изображенный на рисунке?



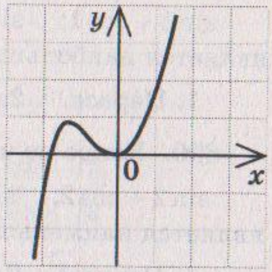
1. $y = ax^3 + b$ $(a > 0, b > 0)$;
2. $y = ax^3 + bx$ $(a > 0, b > 0)$;
3. $y = ax^3 + bx^2$ $(a > 0, b > 0)$;
4. Ни одна.

683. Какая из указанных функций может иметь график, изображенный на рисунке?



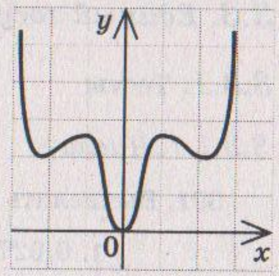
1. $y = ax^3 + b$ $(a > 0, b > 0)$;
2. $y = ax^3 + bx$ $(a > 0, b > 0)$;
3. $y = ax^3 + bx^2$ $(a > 0, b > 0)$;
4. Ни одна.

684. Какая из указанных функций может иметь график, изображенный на рисунке?



1. $y = ax^3 + b$ $(a > 0, b > 0)$;
2. $y = ax^3 + bx$ $(a > 0, b > 0)$;
3. $y = ax^3 + bx^2$ $(a > 0, b > 0)$;
4. Ни одна.

685. Какая из указанных функций может иметь график, изображенный на рисунке?



1. $y = ax^3 + b$ $(a > 0, b > 0)$;
2. $y = ax^3 + bx$ $(a > 0, b > 0)$;
3. $y = ax^3 + bx^2$ $(a > 0, b > 0)$;
4. Ни одна.

3.2.2.5. Применения свойств функций к доказательству неравенств

686. Пусть $a = \operatorname{tg}(\sin(\cos(\cos 2004)))$, $b = \cos(\sin 2004)$. Тогда

1. $a > 0, b > 0$; **2.** $a > 0, b < 0$; **3.** $a < 0, b > 0$; **4.** $a < 0, b < 0$.

687. Сколько из неравенств

$\sin 1 + \cos 1 > 1$; $\sin 3 + \cos 3 > 1$;
$\sin 2 + \cos 2 > 1$; $\sin 4 + \cos 4 > 1$

являются верными?

1. Ни одно. **2.** Одно. **3.** Два. **4.** Три.

688. Сколько из неравенств

$\sin 5 + \cos 5 < 1$; $\sin 7 + \cos 7 < 1$;
$\sin 6 + \cos 6 < 1$; $\sin 8 + \cos 8 < 1$

являются верными?

1. Ни одно. **2.** Одно. **3.** Два. **4.** Три.

689. Какое из чисел

$\sin 1 + \cos 1$; $\sin 2 + \cos 2$; $\sin 3 + \cos 3$; $\sin 4 + \cos 4$

является наибольшим?

1. Первое. 2. Второе. 3. Третье. 4. Четвертое.

690. Какое из чисел

$\sin 2 + \cos 2$; $\sin 3 + \cos 3$; $\sin 4 + \cos 4$; $\sin 5 + \cos 5$

является наименьшим?

1. Первое. 2. Второе. 3. Третье. 4. Четвертое.

3.3. Единый государственный экзамен

3.3.1. Тесты

3.3.1.1. Числа

691. Вычислить $\sqrt[3]{-0{,}3} \cdot \sqrt[3]{-0{,}09}$.

1. 0,027; 2. 0,03; 3. –0,3; 4. 0,3.

692. Вычислить $\sqrt[3]{125 \cdot 0{,}027}$.

1. 1,5; 2. 15; 3. 0,015; 4. 0,15.

693. Вычислить $\sqrt[5]{-0{,}016} \cdot \sqrt[5]{-0{,}02}$.

1. 0,2; 2. –0, 2; 3. –0,8; 4. 0,8.

694. Упростить выражение $\dfrac{\sqrt[3]{54} \cdot \sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{250}}$.

1. $\dfrac{6}{5}$; 2. $\dfrac{6 \cdot \sqrt[3]{2}}{5}$; 3. 2,4; 4. $\sqrt[3]{2}$.

695. Упростить выражение $\dfrac{\sqrt[3]{625} \cdot \sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{225}}$.

1. $\sqrt[3]{15}$; 2. 15; 3. $\sqrt[3]{225}$; 4. $\dfrac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{3}}$.

696. Упростить выражение $\dfrac{\sqrt[4]{32}}{\sqrt[4]{4} \cdot \sqrt[4]{64}}$.

1. $8\sqrt[4]{2}$; 2. $\sqrt[4]{8}$; 3. 8; 4. $\sqrt[4]{\dfrac{1}{8}}$.

697. Упростить выражение $\dfrac{\sqrt[3]{375} \cdot \sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{81}}$.

1. 45; 2. 5; 3. $\dfrac{5}{9}$; 4. $\dfrac{5}{3}$.

698. Упростить выражение $\dfrac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} + \dfrac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$.

1. 8; 2. 5; 3. $\sqrt{5} + \sqrt{3}$; 4. $\sqrt{5} - \sqrt{3}$.

699. Вычислить значение выражения

$\left(\dfrac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} - \dfrac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1}\right) \cdot \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ при $x = 3$.

1. 0; 2. 2; 3. $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$; 4. $\sqrt{3}$.

700. Найти значение выражения $\dfrac{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}}} - \dfrac{a^{\frac{1}{2}} - 3a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{4}}}{a^{\frac{1}{4}}}$,

если $a = 81$, $b = 16$.

1. –2; 2. –8; 3. –27; 4. 4.

701. Найти значение выражения $\dfrac{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}}} - \dfrac{a^{\frac{1}{2}} - 5a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{4}}}{b^{\frac{1}{4}}}$,

если $a = 81$, $b = 16$.

1. –10; 2. 12; 3. –27; 4. –12.

702. Найти значение выражения $\dfrac{p^{0,5}}{p^{0.5} + 5} - \dfrac{5p^{0,5}}{p - 25}$

при $p = 49$.

1. $-\dfrac{7}{24}$; 2. $-3\dfrac{23}{24}$; 3. $1\dfrac{11}{24}$; 4. $2\dfrac{1}{24}$.

703. Найти значение выражения $\dfrac{x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{4}}-y^{\frac{1}{4}}}-\dfrac{x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}}}$

при $x=81$, $y=16$.

1. 1; **2.** 9; **3.** 3; **4.** –1.

704. Найти значение выражения $\dfrac{x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}}}-\dfrac{x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}}-y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{4}}-y^{\frac{1}{4}}}$,

если $x=81$, $y=16$.

1. 1; **2.** 9; **3.** 3; **4.** –1.

705. Найти значение выражения $\dfrac{x-y}{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}-\dfrac{y^{\frac{1}{2}}+y}{y^{\frac{1}{2}}}$,

если $x=16$, $y=25$.

1. –7; **2.** –16; **3.** 3; **4.** 13.

706. Найти значение выражения $\dfrac{\log_7 98-\log_7 14}{7}$.

1. 1; **2.** $-\dfrac{1}{4}$; **3.** –1; **4.** $\dfrac{1}{7}$.

707. Указать значение выражения $\log_5 250-2\log_5 10$.

1. $5+8\log_5 2$; **2.** 2; **3.** $1-\log_5 2$; **4.** 0.

708. Найти значение выражения $\log_2 48+\log_2\dfrac{1}{6}$.

1. –5,5; **2.** 4,5; **3.** 3; **4.** –4,5.

709. Найти значение выражения $\dfrac{1}{3}\left(\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{27}+\log_{\frac{1}{2}}64\right)$.

1. $-4+\log_{\frac{1}{2}}3$; **2.** 0; **3.** $\log_2 3-2$; **4.** 4.

710. Найти значение выражения $\lg\sqrt{500}-\lg\sqrt{125}$.

1. lg2; **2.** 0,5; **3.** 3; **4.** 3lg2 + 1.

711. Найти значение выражения $\lg 75+\lg 45+\lg\dfrac{9}{125}$.

1. 0; **2.** 4lg3; **3.** lg3; **4.** 5lg3.

712. Упростить выражение $\operatorname{tg}^2(270°+\alpha)\cdot\sin^2(180°+\alpha)$.

1. $-\sin^2\alpha$; **2.** $\sin^2\alpha$; **3.** $\cos^2\alpha$; **4.** $-\cos^2\alpha$.

713. Упростить выражение

$$\sin 3\alpha\cdot\sin 5\alpha+\cos 3\alpha\cdot\cos 5\alpha-\sin(6\pi+2\alpha).$$

1. $\cos 2\alpha-\sin 2\alpha$;
2. $\sin 8\alpha-\sin 2\alpha$;
3. $\cos 2\alpha+\sin 2\alpha$;
4. $\cos 8\alpha-\sin 2\alpha$.

714. Упростить выражение

$$\cos 4\alpha\cdot\cos 6\alpha+\sin 4\alpha\cdot\sin 6\alpha+\cos(2\alpha-2\pi).$$

1. $\cos 10\alpha+\cos 2\alpha$;
2. $2\cos 2\alpha$;
3. $\sin 2\alpha+\cos 2\alpha$;
4. $\cos 2\alpha+\sin 10\alpha$.

715. Упростить выражение

$$\cos 5\alpha\cdot\cos 7\alpha+\sin 5\alpha\cdot\sin 7\alpha+\cos(4\pi-\alpha).$$

1. $\sin 2\alpha-\cos\alpha$;
2. $\cos 2\alpha+\cos\alpha$;
3. $\cos 2\alpha-\cos\alpha$;
4. $\sin 12\alpha-\cos\alpha$.

716. Упростить выражение

$$\cos 2\alpha\cdot\cos\alpha-\sin 2\alpha\cdot\sin\alpha+\cos(\alpha-6\pi).$$

1. $\cos 3\alpha+\sin\alpha$;
2. $2\sin\alpha$;
3. 0;
4. $\cos 3\alpha-\sin\alpha$.

717. Упростить выражение

$$\cos 3\alpha \cdot \cos 2\alpha - \sin 3\alpha \cdot \sin 2\alpha + \cos(2\pi + \alpha).$$

1. $\cos 5\alpha - \cos\alpha$;
2. $\cos 5\alpha + \cos\alpha$;
3. $2\cos\alpha$;
4. 0.

3.3.1.2. Уравнения и неравенства

718. Решить неравенство $\frac{1}{x+3} - 1 > 0$.

1. $(-\infty, -3)\cup(-2, +\infty)$; **2.** $(-\infty, -2)$; **3.** $(-3, 4)$; **4.** $(-3, -2)$;

719. Найти число целых решений неравенства $\frac{6-x}{x-9} \geq 0$.

1. 1; **2.** 2; **3.** 3; **4.** 4.

720. Решить неравенство $\frac{2x+14}{(x+4)(x-7)} \geq 0$.

1. $(-7, -4) \cup (7, +\infty)$;
2. $[-7, -4) \cup (7, +\infty)$;
3. $(-\infty, -7] \cup (4, 7)$;
4. $(-\infty, -4) \cup (7, +\infty)$.

721. Решить неравенство $\frac{x+7}{(2x-1)(8-x)} \geq 0$.

1. $(-\infty; 0{,}5) \cup (8, +\infty)$;
2. $(-\infty, -7] \cup (0{,}5; 8)$;
3. $[-7; 1] \cup [8, +\infty)$;
4. $[-7; 0{,}5] \cup (8, +\infty)$.

722. Указать промежуток, которому принадлежат корни уравнения $\sqrt{3-2x} = -x$.

1. $[-4, -2]$; **2.** $[-2, 0]$; **3.** $(-3, 1)$; **4.** $[-1, 3]$.

723. Указать промежуток, которому принадлежат корни уравнения $\sqrt{x-5} = 7 - x$.

1. $[0; 5{,}3]$; **2.** $[5{,}5; 6{,}3]$; **3.** $[7, 10]$; **4.** $[11; 12{,}5]$.

724. Указать промежуток, которому принадлежат корни уравнения $x - \sqrt{2x^2 - 9x + 5} = 3$.

1. $(-\infty, 1]$; **2.** $(1, 2]$; **3.** $(2, 5]$; **4.** $(5, +\infty)$.

725. Какому промежутку принадлежат корни уравнения $\sqrt{3x+1} = x - 1$?

1. $[0, 3)$; **2.** $[3, 5)$; **3.** $[-1, 2]$; **4.** $[5, 6]$.

726. Указать промежуток, в котором лежит корень уравнения $\sqrt{x} + 1 = x - 5$.

1. $[1, \frac{1}{4})$; **2.** $[10, 16)$; **3.** $(4, 5]$; **4.** $[9, 10)$.

727. Указать промежуток, которому принадлежит корень уравнения $\left(\frac{1}{25}\right)^{0,4x-2} = 125$.

1. $(-4, -2]$; **2.** $(-2, 0]$; **3.** $(2, 4]$; **4.** $(0, 2]$.

728. Указать промежуток, которому принадлежит корень уравнения $\left(\frac{1}{8}\right)^{1,5x-1} = 16$.

1. $(-1, 0]$; **2.** $(0, 1]$; **3.** $(1, 2]$; **4.** $(2, 3]$.

729. Указать промежуток, которому принадлежит корень уравнения $\left(\frac{1}{16}\right)^{1,2x-2} = 64$.

1. $(-3, 0]$; **2.** $(0, 2]$; **3.** $(2, 4)$; **4.** $[4, 6)$.

730. Указать промежуток, которому принадлежит корень уравнения $4^{-1,5x+1} = \frac{1}{8}$.

1. $(1, 2)$; **2.** $[2, 5]$; **3.** $[-2, -1)$; **4.** $(-1, 1]$.

731. Указать промежуток, которому принадлежит корень уравнения $9^{2,5x-2} = \frac{1}{27}$.

1. $[-2, -1)$; 2. $[-1, 0)$; 3. $[1, 2)$; 4. $[0, 1)$.

732. Указать промежуток, которому принадлежит корень уравнения $25^{3,5x+3} = \frac{1}{125}$.

1. $[-2, -1)$; 2. $[-1, 0)$; 3. $[0, 1)$; 4. $[1, 2)$.

733. Решить уравнение $3^x + 2 \cdot 3^{\frac{x}{2}} - 15 = 0$.

1. 1; 2. 2; 3. –5; 4. $\log_3 5$.

734. Решить неравенство $4 \geq 16^{x+1}$.

1. $(-\infty, -1{,}5]$; 2. $(-\infty, -0{,}5]$; 3. $(1{,}5; +\infty)$; 4. $[-0{,}5; +\infty)$.

735. Решить неравенство $16 \leq 2^{x+3}$.

1. –3; 2. $[7, +\infty)$; 3. $(-\infty, -1]$; 4. $[1, +\infty)$.

736. Решить неравенство $5^{3,5+x} \geq \frac{1}{125}$.

1. $[-0{,}5; +\infty)$; 2. $(-\infty; -6{,}5)$; 3. $(-\infty, 7]$; 4. $[-6{,}5; +\infty)$.

737. Решить неравенство $0{,}7^{5x+1} \geq 0{,}7^{2x-3}$.

1. $\left(-\infty, -\frac{4}{3}\right)$; 2. $\left[-\frac{3}{4}, +\infty\right)$; 3. $\left(-\infty, -\frac{2}{7}\right]$; 4. $\left[-\frac{4}{3}, +\infty\right]$.

738. Найти сумму корней уравнения
$2\log_{16}^2 x - \log_{16} x - 1 = 0$.

1. $4\frac{1}{16}$; 2. 8; 3. $16\frac{1}{4}$; 4. 4.

739. Указать промежуток, которому принадлежит корень уравнения $\log_5(x-1) - \log_5(x-3) = 1$.

1. $[-3, -1]$; 2. $[-1, 2]$; 3. $(2, 5]$; 4. $(5, +\infty)$.

740. Указать промежуток, которому принадлежит корень уравнения $\lg(5+x) - \lg(1-x) = \lg 2$.

1. $(-2, 0)$; 2. $(0, 8)$; 3. $(-5, -2)$; 4. $(8, 10)$.

741. Указать промежуток, которому принадлежит корень уравнения

$$2 - \log_4(x+5) = \log_4(x+3).$$

1. $(-6, -4)$; 2. $(-4, -3)$; 3. $(-3, 4)$; 4. $(4, 6)$.

742. Указать промежуток, которому принадлежит корень уравнения

$$4\log_3(x-5) = \log_3 16.$$

1. $[-3, 3)$; 2. $[3, 6)$; 3. $(6, 8)$; 4. $(8, 12)$.

743. Решить неравенство $\log_{0,4}(1{,}9x - 1{,}3) \geq -1$.

1. $\left(\frac{13}{19}, 2\right]$; 2. $(-\infty, 2]$; 3. $[2, +\infty)$; 4. $\left(\frac{12}{19}, \frac{13}{19}\right]$.

744. Решить неравенство $\log_{\frac{1}{6}}(1{,}6x + 36{,}8) \geq -2$.

1. $(-\infty, -0{,}5]$; 2. $(-23, -0{,}5]$; 3. $[-0{,}5, +\infty)$; 4. $(-23, +\infty)$.

745. Решить неравенство $\log_2(1 - 0{,}3x) \geq 4$.

1. $\left(\frac{10}{3}, 50\right)$; 2. $[50, +\infty)$; 3. $(-\infty, -50]$; 4. $\left(-\infty, -\frac{10}{3}\right)$.

746. Решить неравенство $\log_{2,2}(1{,}1 - 0{,}5x) \geq 1$.

1. $(-\infty; -2{,}2]$; 2. $(-\infty; 2{,}2)$; 3. $(-2{,}2; +\infty)$; 4. $[-2{,}2; 2{,}2)$.

747. Решить неравенство $\log_5(1{,}8 - 0{,}2x) \geq -1$.

1. $(-\infty, 9)$; 2. $(-\infty, 8]$; 3. $[8, +\infty)$; 4. $[8, 9)$.

748. Решить неравенство $\log_2(2 - 0{,}7x) \geq -2$.

1. $\left[2{,}5; 2\frac{6}{7}\right)$; 2. $\left[2\frac{6}{7}, +\infty\right)$; 3. $(-\infty; 2{,}5]$; 4. $[2{,}5; +\infty)$.

749. Указать наименьший неотрицательный корень уравнения $\sin^2 x - 5\sin x + 4 = 0$.

1. $\frac{3\pi}{2}$; 2. 0; 3. $\arcsin 4$; 4. $\frac{\pi}{2}$.

750. Решить уравнение $10\cos^2 x + 3\cos x + 1 = 0$.

1. $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n \quad (n \in Z)$;
2. $\pm\arccos\frac{1}{5} + 2\pi r \ (r \in Z)$;
3. $\pi + 2k\pi \quad (k \in Z)$;
4. Нет решений.

751. Указать наибольший отрицательный корень уравнения $\sin^2 x - \sin x - 2 = 0$.

1. $-\frac{\pi}{2}$; 2. $-\arcsin 2$; 3. 0; 4. $-\frac{3\pi}{2}$.

752. Найти все решения уравнения $\frac{1}{\cos^2 x} + \cos x = \operatorname{tg}^2 x$.

1. $\frac{\pi}{2} + 2\pi n \ (n \in Z)$;
2. $2\pi n \ (n \in Z)$;
3. $\pi n \ (n \in Z)$;
4. $\pi + 2\pi n \ (n \in Z)$.

753. Найти все решения уравнения
$\left(\operatorname{tg}^2 x + 1\right)\operatorname{tg} x = -\frac{1}{\cos^2 x}$.

1. $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n \ (n \in Z)$;
2. $\pi n \ (n \in Z)$;
3. $-\frac{\pi}{4} + \pi n \ (n \in Z)$;
4. $\frac{\pi}{4} + \pi n \ (n \in Z)$.

754. Найти все решения уравнения
$3\sin x + 1 + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} + 3$.

1. $\frac{\pi}{2} + 2\pi n \ (n \in Z)$;
2. $2\pi n \ (n \in Z)$;
3. $\pi n \ (n \in Z)$;
4. $\pi + 2\pi n \ (n \in Z)$.

755. Найти все решения уравнения $\frac{1}{\cos^2 x} + \cos x = \operatorname{tg}^2 x$.

1. $\frac{\pi}{2} + 2\pi n \ (n \in Z)$;
2. $2\pi n \ (n \in Z)$;
3. $\pi n \ (n \in Z)$;
4. $\pi + 2\pi n \ (n \in Z)$.

756. Найти все решения уравнения
$\left(\operatorname{tg}^2 x + 1\right)\operatorname{tg} x = -\frac{1}{\cos^2 x}$.

1. $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n \ (n \in Z)$;
2. $\pi n \ (n \in Z)$;
3. $-\frac{\pi}{4} + \pi n \ (n \in Z)$;
4. $\frac{\pi}{4} + \pi n \ (n \in Z)$.

757. Найти все решения уравнения
$3\sin x + 1 + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} + 3$.

1. $\frac{\pi}{2} + 2\pi n \ (n \in Z)$;
2. $2\pi n \ (n \in Z)$;
3. $\pi n \ (n \in Z)$;
4. $\pi + 2\pi n \ (n \in Z)$.

758. Решить уравнение $\sin\frac{3x}{2}\cdot\cos\frac{5x}{2}-\cos\frac{3x}{2}\cdot\sin\frac{5x}{2}=-\frac{1}{2}$.

1. $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n\ (n\in Z)$;
2. $\pm\frac{\pi}{6}+2\pi n\ (n\in Z)$;
3. $\pm\frac{\pi}{8}+2\pi n\ (n\in Z)$;
4. $(-1)^n\frac{\pi}{24}+\frac{\pi}{4}n\ (n\in Z)$.

3.3.1.3. Функции

759. Найти область определения функции $y=\sqrt{5^{7x+3}-\frac{1}{5}}$.

1. $\left[-\frac{7}{4},+\infty\right)$; **2.** $\left[-\frac{4}{7},+\infty\right)$; **3.** $\left(-\infty,-\frac{4}{7}\right)$; **4.** $\left(-\frac{4}{7},+\infty\right)$.

760. Найти область определения функции $y=\sqrt{3^{10x+5}-1}$.

1. $(-\infty;\ -0{,}5)$; **2.** $(-0{,}5;\ +\infty)$; **3.** $[-2,+\infty)$; **4.** $[-0{,}5;\ +\infty)$.

761. Найти область определения функции $y=\sqrt{5^{8x+5}-1}$.

1. $\left(-\infty,-\frac{5}{8}\right]$; **2.** $\left[-\frac{5}{8},+\infty\right)$; **3.** $\left[\frac{5}{8},+\infty\right)$; **4.** $\left(-\frac{5}{8},+\infty\right)$.

762. Найти область определения функции $y=\sqrt{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{3x-2}}$.

1. $\left[\frac{2}{3},+\infty\right)$; **2.** $[1{,}5;+\infty)$; **3.** $\left(-\infty,\frac{2}{3}\right]$; **4.** $\left(\frac{2}{3},+\infty\right)$.

763. Найти область определения функции $y=\sqrt{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{1-3x}}$.

1. $\left[\frac{1}{3},+\infty\right)$; **2.** $\left(-\infty,\frac{1}{3}\right)$; **3.** $\left(-\infty,\frac{1}{3}\right]$; **4.** $(-\infty,3)$.

764. Найти область определения функции
$y=\sqrt{1-0{,}5^{0{,}5x-3}}$.

1. $(6,+\infty)$; **2.** $(-\infty,6]$; **3.** $[1{,}5;+\infty)$; **4.** $[6,+\infty)$.

765. Найти область определения функции $\ln\left(x^2-3\right)$.

1. $\left(-\sqrt{3},\sqrt{3}\right)$;
2. $\left(-\infty,-\sqrt{3}\right]\cup\left[\sqrt{3},+\infty\right)$;
3. $\left(-\infty,\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3},+\infty\right)$;
4. $\left[-\sqrt{3},\sqrt{3}\right]$.

766. Найти область определения функции
$\log_{0,2}\frac{6-x}{6+2x}$.

1. $(-3,6)$; **2.** $(-6,6)$; **3.** $(-\infty,-3)\cup(6,+\infty)$; **4.** $(0,6)$.

767. Найти область определения функции
$\log_{\pi}\left(3x^2-4x\right)$.

1. $\left(0,\frac{3}{4}\right)$;
2. $(-\infty,0)\cup\left(\frac{4}{3},+\infty\right)$;
3. $\left[0,\frac{4}{3}\right]$;
4. $(-\infty,0]\cup\left(\frac{4}{3},+\infty\right)$.

768. Найти область определения функции $\log_{0,5}\left(25-x^2\right)$.

1. $[0,5)$; **2.** $[-5,5]$; **3.** $(-\infty,0)\cup(5,+\infty)$; **4.** $(-5,5)$.

3.3.1.4. Математический анализ

769. Указать первообразную функции $f(x) = e^x - 2x$.

1. $F(x) = e^x - 2$;
2. $F(x) = e^x - x^2$;
3. $F(x) = e^{x^2}$;
4. $F(x) = e^{x^2} - x^2$.

770. Указать первообразную функции $f(x) = 2x - \frac{1}{x^2}$ на промежутке $(0, +\infty)$.

1. $F(x) = x^2 - \frac{1}{x}$;
2. $F(x) = 2x - \frac{1}{x}$;
3. $F(x) = x^2 + \frac{1}{x}$;
4. $F(x) = 2 - \frac{1}{2x^3}$.

771. Указать первообразную функции $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$ на промежутке $(0, +\infty)$.

1. $F(x) = x - \frac{1}{x}$;
2. $F(x) = \ln x + \frac{1}{x}$;
3. $F(x) = \ln x - \frac{1}{x}$;
4. $F(x) = \ln x - \frac{1}{2x}$.

772. Указать первообразную функции $f(x) = 3e^x - 2x$.

1. $F(x) = 3e^x - x$;
2. $F(x) = 3e^x - 2$;
3. $F(x) = e^x - x^2$;
4. $F(x) = 3e^x - x^2$.

773. Указать первообразную функции $f(x) = \sin x + \cos x$.

1. $F(x) = \cos x - \sin x$;
2. $F(x) = -\cos x + \sin x$;
3. $F(x) = \cos x + \sin x$;
4. $F(x) = -(\cos x + \sin x)$.

774. Указать первообразную функции $f(x) = \sin x + 4$.

1. $F(x) = \cos x$;
2. $F(x) = -\cos x + 4x$;
3. $F(x) = \cos x + 4x$;
4. $F(x) = -\cos x$.

775. Найти первообразную F функции $f(x) = e^x + \sin x$, если известно, что $F(0) = -1$.

1. $F(x) = e^x + \cos x$;
2. $F(x) = xe^x - \cos x$;
3. $F(x) = e^x - \cos x - 1$;
4. $F(x) = e^x + \cos x - 1$.

776. Найти первообразную F функции $f(x) = e^x + 4x^3$, если известно, что $F(0) = -1$.

1. $F(x) = e^x + 3x^4 - 2$;
2. $F(x) = e^x + x^4 - 2$;
3. $F(x) = e^x + 12x^2 - 2$;
4. $F(x) = -e^x + 12x^2$.

777. Для функции $f(x) = 2e^x$ указать первообразную F, график которой проходит через точку $M(0, 24)$.

1. $F(x) = e^x + 24$;
2. $F(x) = 2e^x + 22$;
3. $F(x) = 2e^x + 24$;
4. $F(x) = 2xe^x + 24$.

778. Для функции $f(x) = 12x^5 - \sin x$ указать первообразную F, график которой проходит через точку $M(0, -9)$.

1. $F(x) = 2x^6 - \cos x - 9$;
2. $F(x) = 2x^6 + \cos x + 9$;
3. $F(x) = 2x^6 - \cos x - 8$;
4. $F(x) = 2x^6 + \cos x - 10$.

779. К графику функции $f(x) = \dfrac{1}{2x}$ проведена касательная в точке с абсциссой $x_1 = -0{,}5$. Как расположена точка пересечения этой касательной с осью Ox?

1. Правее точки (0, 0);
2. Левее точки (0, 0);
3. В точке (–0,5; 0);
4. В точке (1, 0).

3.3.2. Задачи

3.3.2.1. Числа

780. Найти значение выражения $5\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + \arcsin\left(-\dfrac{3}{5}\right)\right)$.

781. Найти значение выражения $10\cos\left(\operatorname{arctg}\sqrt{3}\right)$.

782. Найти значение выражения $3\sqrt{5}\operatorname{tg}\left(\arcsin\dfrac{2}{7}\right)$.

783. Найти значение выражения $\sqrt{21}\operatorname{tg}\left(\arcsin\dfrac{2}{5}\right)$.

784. Найти значение выражения $\sqrt{15}\operatorname{tg}\left(\arcsin\dfrac{1}{4}\right)$.

785. Найти значение выражения $3\operatorname{tg}\left(\arccos\dfrac{3}{5}\right)$.

3.3.2.2. Уравнения и неравенства

786. Пусть (a, b) — решение системы $\begin{cases} y + \sqrt{25 - x^2} = 0, \\ y + 5 = |x - 6|. \end{cases}$

Найти сумму $a + b$.

787. Пусть (a, b) — решение системы $\begin{cases} y = \sqrt{2 - x}, \\ y + \sqrt{(x-3)^2} = 3. \end{cases}$

Найти частное $\dfrac{a}{b}$.

788. Пусть (a, b) — решение системы $\begin{cases} y(x - 2) = 6, \\ y + \sqrt{(x-3)^2} = 0. \end{cases}$

Найти разность $a - b$.

789. Найти значение выражения $a - b$, если (a, b) является решением системы $\begin{cases} \log_y x = 0, \\ x^2 + y^2 = 272. \end{cases}$

790. Пусть (a, b) — решение системы $\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x+1}} = \dfrac{1}{y}, \\ \arcsin\left(x^2 + y^2\right) = \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$

Найти сумму $a + b$.

791. Вычислить значение выражения $a - b$, если (a, b) является решением системы $\begin{cases} \sqrt{x} + 2\sqrt{y} = 9, \\ x - 4y = 9. \end{cases}$

792. Указать промежуток, которому принадлежит корень уравнения $25^{3{,}5x+3} = \dfrac{1}{125}$.

793. Сколько корней имеет уравнение

$$\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)\cdot\log_2\left(4-x^2\right)=0\ ?$$

794. Сколько корней имеет уравнение

$$(\sin x+\cos x)\sqrt{x-x^2}=0\ ?$$

795. Сколько корней имеет уравнение

$$(\sin x+\cos x)\sqrt{-x^2+3x}=0\ ?$$

796. Сколько корней имеет уравнение

$$(\cos x\cdot\cos 3x+\sin x\cdot\sin 3x)\sqrt{-x^2+3x}=0?$$

797. Сколько корней имеет уравнение

$$(\sin 3x\cdot\cos x-\sin x\cos 3x)\sqrt{5x-x^2}=0\ ?$$

798. Сколько корней имеет уравнение

$$\left(\sin^4 x-\cos^4 x\right)\cdot\log_2\left(1-x^2\right)=0\ ?$$

799. Сколько корней имеет уравнение

$$\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)\cdot\log_2\left(4-x^2\right)=0\ ?$$

800. Сколько корней имеет уравнение

$$(\sin x+\cos x)\sqrt{x-x^2}=0\ ?$$

801. Сколько корней имеет уравнение

$$(\sin x-\cos x)^2\sqrt{-x^2+3x}=0\ ?$$

802. Сколько корней имеет уравнение

$$(\cos x\cdot\cos 3x+\sin x\cdot\sin 3x)\sqrt{-x^2+3x}=0\ ?$$

803. Сколько корней имеет уравнение

$$(\sin 3x\cdot\cos x-\sin x\cdot\cos 3x)\sqrt{5x-x^2}=0\ ?$$

804. Сколько корней имеет уравнение

$$\left(\sin^4 x-\cos^4 x\right)\cdot\log_2\left(1-x^2\right)=0?$$

805. Решить уравнение $2^{13-x}\cdot 3^{11-2x}\cdot 5^{9-3x}=360^{x+2}$.

806. При каких значениях a сумма $\log_a\left(2^x-1\right)$ и $\log_a\left(2^x-7\right)$ равна 1 ровно при одном значении x ?

807. Решить систему уравнений $\begin{cases} y=3-\sqrt{x^3-6y}, \\ \sqrt{x}=0{,}2\sqrt{y^2+9}. \end{cases}$

3.3.2.3. *Функции*

808. Найти наименьшее значение функции

$$g(x)=\log_{\frac{1}{3}}\left(9-x^2\right).$$

809. Найти наименьшее значение функции

$$g(x)=\log_{\frac{1}{3}}\left(27-x^2\right).$$

810. Найти наименьшее значение функции

$$g(x)=\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{81}-x^2\right).$$

811. Найти наименьшее значение функции

$$g(x)=\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{27}-x^2\right).$$

812. Найти наименьшее значение функции

$$g(x)=\log_{\frac{1}{3}}\left(6x-x^2\right).$$

813. Найти наименьшее значение функции

$$g(x)=\log_{\frac{1}{4}}\left(16-x^2\right).$$

814. При каком наибольшем целом значении m функция $f(x)=-x^3+\frac{1}{2}mx^2-5x+2$ убывает на всей числовой прямой?

815. При каком наименьшем целом значении a функция $f(x)=e^{2x}\cdot x^2+ae^{2x}+3$ возрастает на всей числовой прямой?

816. При каком наименьшем натуральном значении a функция $f(x)=e^{x}\cdot x^2+\frac{1}{4}a^2e^{x}-11$ возрастает на всей числовой прямой?

817. При каком наименьшем натуральном значении b функция $f(x)=25-e^{x}\cdot x^2-\frac{1}{9}b^2e^{x}$ убывает на всей числовой прямой?

818. При каком наименьшем натуральном значении m функция $f(x)=-e^{x}\cdot x^2-0{,}1m^2e^{x}+7$ убывает на всей числовой прямой?

819. При каком наибольшем натуральном значении a функция $f(x)=ax^2e^{x}+5e^{x}+2$ возрастает на всей числовой прямой?

820. Найти все значения параметра a, при каждом из которых в области определения функции

$$y=\sqrt{\log_a(x-a-2)-\log_a(ax+1)}$$

имеются натуральные числа, кратные 3, и их количество равно количеству натуральных чисел, кратных 4, принадлежащих этой области определения.

3.3.2.4. Геометрия

821. В основании пирамиды лежит треугольник со сторонами 10, 8 и 6. Боковые ребра наклонены к плоскости основания по углом 45°. Найти объем пирамиды.

822. Основание пирамиды — квадрат, сторона которого равна 3. Каждая боковая грань наклонена к плоскости основания пирамиды под углом, тангенс которого равен $\frac{4}{3}$. Найти площадь боковой поверхности пирамиды.

823. Основание пирамиды — квадрат со стороной $6\sqrt{2}$. Косинус угла наклона каждого бокового ребра к плоскости основания равен $\frac{3}{5}$. Найти объем пирамиды.

824. В основании пирамиды лежит равносторонний треугольник со стороной, равной 2. Одна из боковых граней пирамиды также равносторонний треугольник и перпендикулярна основанию. Найти объем пирамиды.

Раздел IV. ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ

1. *Указание.* Квадрат нечетного числа — нечетное число.

2. *Указание.* Любая степень нечетного числа — нечетное число.

3. Нет. *Указание.* Применить признак делимости на 3.

4. Нет. *Указание.* Применить признак делимости на 11 (см. Компендиум. Признаки делимости на 4, 8, 11 и 25).

5. *Указание.* См. указание к задаче 2.

6. *Указание.* Любая степень четного числа является четным числом, а нечетного числа — нечетным.

7. *Указание.* Подумать о четности-нечетности.

8. *Указание.* Заметить, что $3n^2 + 5n$ — всегда четное число.

9. Составным. *Указание.* Заданное число является разностью квадратов.

10. Составным. *Указание.* Заданное число является разностью кубов.

11. Составным. *Указание.* Заданное число является суммой кубов.

12. Нет. *Указание.* Данное число является разностью двух степеней с одинаковым показателем, а такая разность делится на разность оснований (см. Компендиум. Формулы разности и суммы степеней).

13. Нет. *Указание.* Представить заданное число разностью двух степеней с одинаковым показателем, а такая разность делится на разность оснований (см. указание к задаче 19).

14. Составным. *Указание.* Данное число является суммой двух степеней с одинаковым нечетным показателем, а такая сумма делится на сумму оснований (см. Компендиум. Формулы разности и суммы степеней).

15. Да. *Указание.* Числа 222 и 555 делятся на 111.

16. Составным. *Указание.* Числа 2002 и 13 делятся на 13.

17. Составным. *Указание.* Оба слагаемых в данной сумме делятся на 3.

18. Составным. *Указание.* Воспользоваться признаком делимости на 3.

19. Составным. *Указание.* Воспользоваться признаком делимости на 11 (см. Компендиум. Признаки делимости на 4, 8, 11 и 25).

20. Составным. *Указание.* Найти последнюю цифру заданного числа, пользуясь тем, что последняя цифра степени и разности зависит только от последних цифр соответственно основания степени и компонентов разности — вычитаемого и уменьшаемого.

21. Составным. *Указание.* Найти закономерности в последних цифрах степеней четверки и воспользоваться указанием к задаче 20.

22. Составным. *Указание.* См. указание и решение задачи 21.

23. *Указание.* Рассматривать последние цифры слагаемых заданной суммы.

24. Нет. *Указание.* Заметить, что показатель степени в заданном числе делится на 131.

25. *Указание.* Представить уменьшаемое в заданной разности числом в виде степени с большим основанием.

26. Нет. *Указание.* Провести эксперимент, который на втором шаге приведет к результату.

27. Нет. *Указание.* Эта задача в определенном смысле шутка — вам это сделать вряд ли удастся, так что сразу же смотрите комментарий к задаче.

28. Да. *Указание.* Если нужный пример не приходит вам в голову, узнайте у кого-нибудь или где-нибудь, что такое «египетский треугольник».

29. Нет. *Указание.* Подойдет «первый попавшийся» пример.

30. *Указание.* Перемножив суммы квадратов $a^2 + b^2$ и $c^2 + d^2$, к полученной сумме добавить и вычесть $2abcd$ и записать полученное выражение в виде суммы квадрата разности и квадрата суммы.

31. Нет. *Указание.* См. указание к задаче 29.

32. Нет. *Указание.* См. указание к задаче 27.

33. Нет. *Указание.* Искать контрпример (см. Компендиум. Простые и составные числа).

34. Нет. *Указание.* Искать контрпример.

35. Нет. *Указание.* Вспомнить об одном исключении среди простых чисел.

36. Нет. *Указание.* Искать контрпример.

37. Нет. *Указание.* Найти контрпример.

38. 2.

39. Нет. *Указание.* Применить признак делимости на 3.

40. Нет. *Указание.* Слагаемые разной четности.

41. Ни одним. Число 101 010 101 в виде суммы двух простых чисел нельзя записать. *Указание.* Если нечетное число равно сумме двух чисел, то одно из слагаемых четное, а другое нечетное.

42. Да. *Указание.* Числа $n! + k$, где $k < n$ делится на k $(n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n)$.

43. От 0 до 2. *Указание.* Не забыть привести нужные примеры — их можно найти среди первых 20 чисел.

44. Да. *Указание.* Найти такие числа можно даже в первом десятке.

45. 3, 5, 7. *Указание.* Три последовательных нечетных числа при делении на 3 дают разные остатки.

46. Да. *Указание.* Разложить заданное число на множители.

47. *Указание.* Опираться на **разложение натуральных чисел на простые множители** (см. Компендиум. Основная теорема арифметики).

48. Нет. *Указание.* Попробовать применить способ рассуждения в решении задачи 47, и осознав, почему оно в общем случае «не проходит», привести необходимый пример — контрпример (см. Компендиум).

49. Нет. *Указание.* Проверить, являются ли числа 2148 и 537 **взаимно простыми** (см. Компендиум).

50. Да. *Указание.* $231\,495 = 345 \cdot 671$.

51. $1837 \cdot 236$. *Указание.* Если d — общий простой делитель данных чисел, то остаток от деления первого на второе также делится на d. Далее «комбинировать» получаемые факты о делимости соответствующих чисел на d.

52. *Указание.* Из **основной теоремы арифметики** следует, что в разложение квадрата натурального числа все простые множители входят в четных степенях (см. Компендиум).

53. *Указание.* См. решение задачи 52.

54. *Указание.* В разложение куба натурального числа все простые множители входят в степенях, кратных 3. (см. Компендиум. Основная теорема арифметики).

55. $a = 1$. *Указание.* Числа 2 и 41 простые.

56. 24 мяча. *Указание.* Разделить 900 на 77 с остатком.

57. 8 стаканчиков. *Указание.* Найти устно ответ с помощью оценки.

58. 3.

59. 5.

60. 177.

61. Нет. *Указание.* Натуральное число не может быть одновременно четным и нечетным.

62. 38. *Указание.* Заметить, что $n + 4$ делится и на 6, и на 7. Алгебраическое решение задачи см. в разделе «Уравнения в целых числах», задача 218.

63. 69. *Указание.* Заметить, что $n + 3$ делится и на 8, и на 9.

64. 115. *Указание.* Если к данному числу прибавить 4, то оно разделится и на 7, и на 17.

65. 9. *Указание.* Заметить, что $k - 3$ делится на 5, а $k + 3$ делится на 11.

66. 64. *Указание.* Заметить, что $k - 2$ делится на 13, $k + 2$ делится на 7.

67. Нет. *Указание.* При делении на 6, как и на любое другое число, квадрат числа дает тот же остаток, что и квадрат его остатка.

68. 0 или 1. *Указание.* См. указание к задаче 67.

69. 0 и 1. *Указание.* См. указание и решение задачи 67.

70. 0, 1, 3, 4, 9, 10, 12. *Указание.* Удобно рассматривать «целые остатки» (см. Компендиум).

71. Да. *Указание.* Привести пример, заметив, что 4 — точный квадрат, и воспользоваться формулой разности квадратов.

72. Да. *Указание.* См. указание к задаче 71.

73. Да. *Указание.* См. указание и решение задачи 71.

74. Да. *Указание.* Привести пример, заметив, что 27 — точный куб, и воспользоваться формулой разности кубов.

75. Да. *Указание.* Заметить, что если к искомому точному кубу прибавить 1, то получится сумма кубов.

76. Да. *Указание.* См. указание к задаче 74.

77. Да. *Указание.* Заметить, что $443^9 + 1$ делится на 444.

78. Да. *Указание.* Показать, что это число делится на 4, и подобрать его.

79. Да. *Указание.* Число 243 — это пятая степень, а разность одинаковых степеней натуральных чисел делится на разность оснований (см. Компендиум).

80. Да. *Указание.* Вместо остатка 201 можно рассмотреть «целый остаток» — 243 и воспользоваться равенством $243 = 3^5$.

81. Да. *Указание.* 1 является двадцать пятой степенью.

82. Да, например, число 121. *Указание.* Заметив, что если n^2 — искомое число, то $n^2 - 32$ делится на 89, вычесть из этой суммы некоторое число, так чтобы разность можно было разложить на множители.

83. Да, например число 49. *Указание.* См. указание к задаче 82.

84. $a = 59$. *Указание.* Из первых двух утверждений может быть верно только одно.

85. 35 и 45. *Указание.* Обозначив меньший множитель через k, записать в нужном виде второе условие задачи и не забыть, что остаток от деления всегда меньше делителя.

86. 49 и 83. *Указание.* См. указание к задаче 85.

87. 53. *Указание.* Решать задачу проще алгебраически — с помощью уравнения.

88. Нет. *Указание.* Подсчитать число нулей.

89. Нет. *Указание.* Рассмотреть делимость числа на 2 и на 4.

90. Нет. *Указание.* Применить признаки делимости на 3 и на 9.

91. Нет. *Указание.* Точный куб четного числа делится на 8.

92. Нет. *Указание.* Шестая степень числа является квадратом его куба.

93. Нет. *Указание.* Если степень натурального числа с показателем $n > 1$ делится на некоторое простое число p, то она делится и на p^n — это следует из **основной теоремы арифметики** (см. Компендиум).

94. Нет. *Указание.* Применить признак делимости на 4.

95. Нет. *Указание.* Использовать признак делимости на 11 (см. Компендиум).

96. Нет. *Указание.* Обратить внимание на простые числа.

97. *Указание.* Рассмотреть остатки от деления на 3.

98. *Указание.* Рассмотреть последние цифры обоих чисел.

99. *Указание.* Рассмотреть «порядок» каждого из чисел.

100. 1, 3, 9. *Указание.* Не забыть о необходимости приведения **контрпримеров** (см. Компендиум) и о «крайнем случае» $n = 1$.

101. 1 и 7.

102. Нет.

103. Да.

104. 67 212, 67 716. *Указание.* Натуральное число делится на 36 только в случае, когда оно делится на 4 и на 9.

105. Нет. *Указание.* Обратить внимание на последнюю цифру.

106. Нет. *Указание.* Обратить внимание на последнюю цифру.

107. Последняя цифра числа должна быть равна 0, 1, 5 или 6. *Указание.* Как видно из способа умножения многозначных чисел столбиком, последняя цифра произведения та же самая, что и у произведения последних цифр сомножителей.

108. Нет. *Указание.* Возвести несколько чисел, оканчивающихся цифрой 5, в квадрат и найти нужную закономерность.

109. *Указание.* Записать утверждение с помощью букв.

110. Нет. *Указание.* Найти остаток от деления данного числа на 3 и доказать, что число с таким остатком не может быть точным квадратом (воспользоваться результатом задачи 68).

111. Нет. *Указание.* Рассмотреть остатки от деления на 4 и воспользоваться результатом задачи 69.

112. Нет. *Указание.* Разделить на 4 и представить частное в виде $4k + r$.

113. Нет. *Указание.* Разделить на 9 и показать, что частное не является точным квадратом.

114. Нет. *Указание.* Число 352 — четное.

115. Нет. *Указание.* Доказать сначала, что такое число не может быть n-й степенью натурального числа, где $n \geq 3$, затем убедиться, что оно не может быть и точным квадратом, поскольку его частное от деления на 25 дает при делении на 8 остаток, невозможный для точного квадрата.

116. $a = 19$. *Указание.* Первое и второе утверждения оба не могут быть верными.

117. Нет. *Указание.* Четное число является точным квадратом только в случае, когда оно делится на 4.

118. Нет. *Указание.* При делении на 4 заданная сумма дает остаток 3, а такое число не может быть **точным квадратом** (см. Компендиум).

119. Нет. *Указание.* При делении на 3 заданная сумма дает остаток 2 и поэтому не может быть **точным квадратом** (см. Компендиум).

120. *Указание.* Квадрат любого натурального числа, не делящегося на 3, при делении на 3 дает остаток 1: $(3k \pm 1)^2 = 3(3k^2 \pm 2k) + 1$.

121. 24. *Указание.* Перевести условие на алгебраический язык.

122. 38. *Указание.* Если к двузначному числу a приписать цифру 7 слева, то получится $700 + c$, а если справа, то $10c + 7$.

123. 303. *Указание.* При решении удобно обозначить двузначное «начало» искомого числа a через b.

124. 142 857. *Указание.* На основе правил записи чисел в десятичной системе счисления записать условие задачи алгебраически, обозначив через a пятизначное число, идущее в искомом числе после 1.

125. $a = 9n$, где n — целое число от 1 до 66.

126. 9109.

127. *Указание.* Левая часть данного уравнения всегда больше правой.

128. *Указание.* Разложить разность на множители и применить теорему: «Если произведение двух чисел делится на k и одно из чисел взаимно просто с k, то на k делится второе число».

129. 98. *Указание.* Разность любых двух чисел, записываемых одними и теми же цифрами, делится на 9.

130. *Указание.* Точные квадраты могут оканчиваться не на всякую цифру.

131. 7. *Указание.* Остаток от деления числа на 9 зависит только от суммы цифр этого числа.

132. Нет. *Указание.* Найти остатки от деления любого из полученных чисел на 3 и на 9.

133. Нет. *Указание.* Какие цифры могут быть последними у точных квадратов?

134. *Указание.* Воспользоваться **признаком делимости на 11** (см. Компендиум).

135. 6. *Указание.* См. указание к задаче 134.

136. $n = 11m$ ($m \in \mathbf{N}$). См. указание. задаче 134.

137. $n = 7k - 4$ ($k \in \mathbf{N}$). *Указание.* Выразить a_{n+1} через a_n и для решения без использования сравнений заметить, что 999 999 делится на 7, и «отщепить» от заданного числа последние 6 цифр.

138. $n = 13k - 9$ $(k \in N)$. *Указание.* См. указание и комментарий к задаче 137.

139. 14 пакетов. *Указание.* Начать с самых больших пакетов.

140. Нет. *Указание.* Обратить внимание на последние цифры обоих чисел.

141. 5. *Указание.* Заметить, что число слагаемых должно быть кратно пяти.

142. Число 1999...9, где цифра 9 повторяется 111 раз. *Указание.* Использовать как можно больше «больших» цифр и поместить их в младшие разряды.

143. *Указание.* Четырехзначное число тем больше, чем больше его первые цифры.

144. 1299. *Указание.* Четырехзначное число тем меньше, чем меньше его первые цифры.

145. 98. *Указание.* Разность любых двух чисел, записываемых одними и теми же цифрами, делится на 9.

146. 24. *Указание.* Чисел с суммой цифр 6 очень мало, и к тому же искомое число меньше своего обращенного.

147. 303.

148. 202. *Указание.* Прибавить 18 — то же, что прибавить 20 и одновременно вычесть 2.

149. 832.

150. 10 и 21.

151. 9109. *Указание.* Если удастся найти числа, начинающиеся с цифры 9, то одно из них будет решением задачи.

152. *Указание.* Если число делится на несколько попарно **взаимно простых чисел** (см. Компендиум), то оно делится и на их произведение.

153. 23. *Указание.* Из равенства $a = bq + r$, получаемого при делении числа a с остатком на число b, можно сделать вывод о делении того же числа a с остатком на число q. Далее заметим, что искомое число, увеличенное на 1, делится и на 3 и на 4.

154. 41.

155. 74.

156. 3762. *Указание.* Выписать все возможные представления чисел 13 и 85 в виде сумм двух квадратов натуральных чисел и приступить к перебору, экономя на том, что искомое число больше своего обращенного.

157. 83. *Указание.* См. указание к задаче 153.

158. 83. *Указание.* Искомое число при делении на 3 дает остаток 2.

159. 62 или 83. *Указание.* См. указания к задачам 157 и 158 и их решения.

160. 233, 390, 466 и 699.

161. 17. *Указание.* Заметить, что число грузовиков — и в одном, и в другом варианте загрузки — является делителем числа 323.

162. 452. *Указание.* Первому условию задачи удовлетворяет только одно число.

163. 24. *Указание.* Перебрать все двузначные числа, удовлетворяющие первому условию, и убедиться, что их только 7 и лишь одно является делителем числа 144.

164. 54. *Указание.* Из второго условия следует, что одна из цифр искомого числа равна 5.

165. 98. *Указание.* Первому условию задачи удовлетворяют только 2 числа.

166. 64. *Указание.* Первому условию задачи удовлетворяют всего 7 чисел, а из второго условия следует, что произведение цифр искомого числа четно и больше 16.

167. 729.

168. 280.

169. 1984. *Указание.* Найти самый ранний возможный год рождения человека.

170. 37 или 73. *Указание.* Перебрать и последовательно испытать все возможности для цифр искомого числа, удовлетворяющие первому условию задачи.

171. 432. *Указание.* Заметить, что рассматриваемая прогрессия является убывающей, а крайние цифры — обе четные.

172. 73. *Указание.* Последняя цифра произведения совпадает с последней цифрой произведения последних цифр сомножителей.

173. 231. *Указание.* Рассмотреть возможные последние цифры и разложить 3003 на множители.

174. Да. *Указание.* Подбирать числа, состоящие только из цифр 1 и 9.

175. 27. *Указание.* Найдя возможные последние цифры, в каждом случае осуществить прямой перебор.

176. 28. *Указание.* См. указание к задаче 175.

177. 10.

178. 36.

179. $x = 1$, $y = 2$. *Указание.* Заметить, что при натуральных x и y второй множитель $2x - 1 + y$ больше или равен 2.

180. Нет решений. *Указание.* Оценить снизу множители, стоящие в левой части.

181. $x = 1$, $y = 1$. *Указание.* См. указание к задаче 180.

182. $x = 2$, $y = 6$. *Указание.* Оценить второй множитель в левой части уравнения снизу.

183. Нет решений. *Указание.* Заметить, что разность сомножителей в правой части делится на 11, а число 11 — простое.

184. $(\pm 4, 2)$, $(\pm 4, -4)$. *Указание.* Выделить в правой части уравнения полный квадрат.

185. $(-1, -2)$, $(5, 2)$, $(1, 2)$, $(-5, -2)$. *Указание.* Рассматривая левую часть уравнения как квадратный трехчлен относительно x, разложить его на множители.

186. $(6, 1)$, $(2, -1)$, $(-6, -1)$, $(-2, 1)$. *Указание.* См. указание к задаче 185.

187. $(3, -1)$, $(-7, 5)$, $(-3, 1)$, $(7, -5)$. *Указание.* См. указание к задаче 185.

188. $(\pm 1, 0)$, $(0, \pm 1)$, $(1, 1)$, $(-1, -1)$. *Указание.* Рассмотреть левую часть уравнения как квадратный трехчлен относительно x и сосчитать его дискриминант.

189. Нет решений. *Указание.* См. указание к задаче 185. Заметить, что в полученном при решении уравнении $(x + 2y)(7x - 2y) = 21$ сумма сомножителей делится на 8.

190. Нет решений. *Указание.* Рассмотреть остаток от деления $7\left(x^2 - 3\right)$ на 4.

191. $(3, 2)$. *Указание.* См. указание к задаче 188.

192. $(1, 1)$, $(5, 1)$, $(5, 5)$ и $(9, 5)$. *Указание.* См. указание к задаче 188.

193. $(2, -2)$. *Указание.* См. указание к задаче 188.

194. $x = 6k^2 \pm 6k + 2$, $y = -6k^2$ $(k \in Z)$. *Указание.* См. указание к задаче 188.

195. $(4, 1)$ и $(10, 2)$. *Указание.* Выразить y через x.

196. $(1, 11)$, $(-1, -3)$, $(3, 1)$ и $(-11, -1)$. *Указание.* См. указание к задаче 195.

197. $(-7, 2)$. *Указание.* См. указание к задаче 195.

198. $(6, 6)$. *Указание.* Привести уравнение к виду $(11x - 5)(11y - 5) = 36$.

199. Нет решений. *Указание.* Привести уравнение к виду $(13x - 7)(13y - 7) = -16$.

200. $x = 0$, $y = 0$. *Указание.* Выразить x через y.

201. $x = 0$, $y = 0$. *Указание.* Заметить, что x делится на 3, и, упростив уравнение, полученное после подстановки $x = 3z$, заметить, что y также делится на 3, и после упрощения сравнить последнее уравнение с данным.

202. $x = 1$, $y = 1$. *Указание.* Вынести x за скобки и полученное равенство интерпретировать в терминах делимости.

203. Нет решений. *Указание.* Заметить, что число $y^2 + 3y$ четно при любом y.

204. Нет решений. *Указание.* Левая часть уравнения — четное число, а правая — нечетное.

205. $x = 6k - 1$, $y = 13k + 1$ $(k \in Z)$. *Указание.* Заметить, что для всякой пары (x, y), являющейся решением данного уравнения, $13x + 19$ делится на 6, а значит, и $x + 1$ делится на 6.

206. $x = 21p + 7$, $y = 8p + 3$ $(p \in Z)$.

207. $x = -46k - 11$, $y = 25k + 6$ $(k \in Z)$. *Указание.* Рассмотреть: если (x, y) — любое решение данного уравнения, то пара $(x - 46k, y + 25k)$ также является решением этого уравнения.

208. $x = 13$, $y = 12$. *Указание*. Доказать, что первое и второе равенства не могут быть оба верными, так же как первое и третье.

209. $28m - 5$ ($m \in \mathbf{N}$). *Указание*. Записать утверждение, что некоторое число входит в обе прогрессии как уравнение в целых числах.

210. 17. *Указание*. См. указание к задаче 209. Учесть ограничения, вытекающие из конечности данных прогрессий.

211. 32. *Указание*. Записать утверждение, что некоторое число входит в обе прогрессии как уравнение в целых числах и решить это уравнение с учетом ограничений, вытекающих из конечности данных прогрессий.

212. $a = 150$, $b = 50$. *Указание*. Доказать сначала, что третье и четвертое утверждения не могут быть истинными одновременно.

213. $(0, \pm 1), (\pm 1, \mp 1)$. *Указание*. Разложить 5 на сумму точных квадратов.

214. Нет решений.

215. 83.

216. 83.

217. 62 или 83. *Указание*. Другой способ решения см. в разделе «Комбинаторные рассуждения» — задача 62.

218. 38. *Указание*. Записав условие задачи на языке делимости с остатком, получим равенство $6q - 7p = 1$, $p = \frac{6q-1}{7}$, а эта дробь будет целым числом при $q = 6$, а значит, и при всех q вида $7k + 6$. Арифметический способ решения — см. задачу 66.

219. 64. *Указание*. Условие задачи непосредственно сводится к уравнению в целых числах.

220. Через 5 лет. *Указание*. Алгебраическое решение, скорее всего, наиболее простое.

221. 63. *Указание*. Начать алгебраическое решение и применить соображения делимости.

222. 233, 390, 466 и 699.

223. 54. *Указание*. Рассматриваемые числа образуют арифметическую прогрессию.

224. 54. *Указание*. См. указание к задаче 223.

225. 2.

226. На 10%. Указание. В этой «практической» задаче можно считать, что процент повышения является «разумным» числом.

227. На 10%. *Указание*. См. указание к задаче 226.

228. 6 монет. *Указание*. Найти остаток от деления числа монет в 3 лура на 5.

229. 16 путевок второго типа и одну путевку первого типа. *Указание*. Сравнить путевки по выгодности с точки зрения стоимости одного дня отдыха и рассматривать наименьшие общие кратные стоимостей путевок — на них можно купить путевки разных типов.

230. 10. *Указание*. Доказать, что задача имеет единственное решение, и подобрать его, рассматривая для начала четные числа.

231. 132.

232. 832.

233. 432.

234. Нет. *Указание*. Найти удвоенное число всех знакомств.

235. В 2 раза. *Указание*. В год события, о котором идет речь в условии, возраст сына является делителем разности их возрастов.

236. $x \geq \frac{3}{2}$.

237. R.

238. $x \leq -1$ или $x \geq 4$.

239. $\varnothing$.

240. $x \geq 0$.

241. $x \leq 0$.

242. R. *Указание.* Не рассматривать отдельно случаи $x \geq 0$ и $x < 0$.

243. R.

244. $\left[-\frac{85}{24}, 3\right]$.

245. 5 и –3. *Указание.* Заметить, что точка 1, в которой функция принимает свое наименьшее значение, есть середина отрезка $[-1, 3]$.

246. Наибольшего значения заданная функция не имеет, наименьшее значение равно 2. *Указание.* Обратить внимание на необходимость доказательства утверждения, что наибольшего значения заданная функция не имеет.

247. 13 и 1.

248. –37 и –5. *Указание.* Можно решить задачу с помощью графика заданной функции.

249. На заданном промежутке функция не имеет ни наименьшего, ни наибольшего значений.

250. Наибольшее значение равно 9, наименьшего значения функция не имеет.

251. $y_{\min} = -19$, наибольшего значения нет.

252. $y_{\max} = 2$, наименьшего значения нет.

253. Наибольшее значение равно 16, наименьшего значения функция не имеет.

254. $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{7}$.

255. $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{26}$.

256. Наибольшего значения функция не имеет, наименьшее значение равно $\sqrt{2}$.

257. Наименьшее значение равно –3, наибольшего значения нет.

258. Ни наибольшего, ни наименьшего значений функция не имеет.

259. Наибольшее значение равно 4, наименьшего значения нет.

260. Наименьшее значение равно $3\sqrt{5} - 6$, наибольшего значения нет.

261. 0. *Указание.* Модуль всегда неотрицателен и равен 0 только тогда, когда стоящее под знаком модуля выражение равно 0.

262. 2.

263. 3, наименьшего значения нет.

264. 3. *Указание.* Рассмотреть функцию $y+1$ и воспользоваться неравенством между средними.

265. 4. *Указание.* Выражение $|x-a|+|x-b|$ геометрически означает сумму расстояний от точки x до точек a и b.

266. 6. *Указание.* См. указание к задаче 265.

267. n^2. *Указание.* См. указание к задаче 265.

268. $n(n+1)$. *Указание.* См. указание к задаче 265.

269. $\{1\}$.

270. $\{0, 1\}$.

271. $-B$ и $-A$. *Указание.* При умножении обеих частей неравенства на -1 знак этого неравенства меняется на противоположный.

272. $2a - 3$ и $2b - 3$.

273. $5 - 3B$, $5 - 3A$. *Указание.* При умножении обеих частей неравенства на отрицательное число знак неравенства меняется на противоположный.

274. Если $c \geq 0$, то cA и cB; если $c < 0$, то cB и cA. *Указание.* См. указание к задаче 273.

275. Наибольшее значение равно $\frac{1}{A}$, наименьшее значение равно $\frac{1}{B}$.

276. Наибольшее значение равно $\frac{1}{A}$, наименьшее значение равно $\frac{1}{B}$. *Указание.* При умножении обеих частей неравенства на отрицательное число знак неравенства меняется на противоположный.

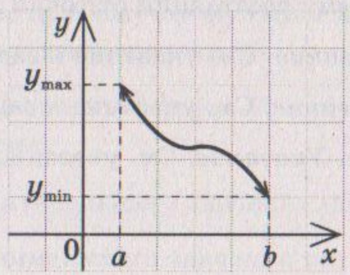
277. Нет. *Указание.* Рассмотреть любую функцию, принимающую только отрицательные значения.

278. Да. *Указание.* Требуемый пример можно получить, «сузив» должным образом область определения какой-нибудь тригонометрической функции.

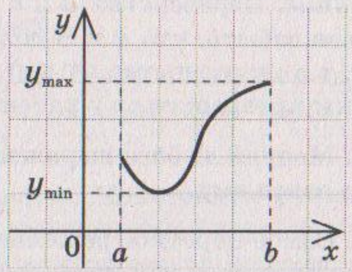
279. Да. *Указание.* См. указание к задаче 278.

280. Да. *Указание.* См. указание к задаче 278.

281. Да. *Указание.* Меньше всего умственного напряжения потребует пример функции, заданной графически.



282. Да. *Указание.* См. указание к задаче 281.



283. Нет.

284. Нет. *Указание.* См. решение задачи 283.

285. Нет. *Указание.* См. решение задачи 283.

286. Да. *Указание.* Записать указанное в условии свойство функции с помощью неравенств.

287. У постоянных функций. *Указание.* См. указание к задаче 286.

288. Нет. *Указание.* Нестрогое неравенство, полученное при сложении нестрогих неравенств, может оказаться на самом деле строгим.

289. Нет. *Указание.* См. указание и решение задачи 288.

290. Нет. *Указание.* При почленном перемножении неравенств одного знака можно быть уверенным в истинности получаемого неравенства только в случае, когда обе части каждого из неравенств положительны.

291. Нет. *Указание.* Контрпример искать среди функций, у которых наименьшее значение отрицательно.

292. Нет. *Указание.* Воспользоваться графическими соображениями.

293. Неравносильны; первое утверждение следует из второго.

294. «... функции f содержится в отрезке $[A, B]$».

295. Нет. *Указание*. Неравенство $a \le b$ верно и в случае $a < b$, так что нельзя забыть, что A и B должны быть значениями функции f, т.е. неравенства $A \le f(x) \le B$ хотя бы в одной точке должны превращаться в равенства.

296. *Указание*. Модуль любого выражения больше самого выражения или равен ему.

297. *Указание*. Самое короткое решение связано с одним из свойств графика произвольной квадратичной функции.

298. Нет. *Указание*. Монотонная функция не может принимать одно и то же значение в двух точках (см. Компендиум).

299. *Указание*. Функции $y = \sqrt{x+3}$ и $y = \sqrt{x+1}$ обе являются возрастающими.

300. *Указание*. Умножить и разделить разность данных радикалов на их сумму.

301. Да. *Указание*. См. указание к задаче 300.

302. Например, $y = -6x$. *Указание*. Искать линейную функцию.

303. Такой функции не существует.

304. Нет. *Указание*. Искать контрпримеры. Представить себе графики функций $y = x$ и $y = \sqrt{x}$ (конечно же, на одной координатной плоскости) и заметить, что первая функция быстрее растет, чем вторая.

305. Нет. *Указание*. Для отыскания нужных значений аргумента и функции отдельно рассмотреть большие и маленькие значения x, причем для числового подсчета логарифмов удобно экспериментировать не с целыми значениями x, а со «связанными» с числом e.

306. Функция возрастает. *Указание*. На основе свойств показательной функции доказать возрастание заданной функции, вставив между числами a^a и b^b промежуточное число.

307. Функция не является ни убывающей, ни возрастающей. *Указание*. При рассмотрении интервала $(0, 1)$ прибегнуть к эксперименту.

308. Да. *Указание*. Воспользоваться определением функции $y = \operatorname{sgn} x$ и определением неубывающей функции (см. Компендиум).

309. Нет. *Указание*. **Монотонная функция** не может принимать одно и то же значение в двух точках (см. Компендиум). Для подбора контрпримера естественно рассматривать искомые значения x «маленькими» и рациональными.

310. Нет. *Указание*. Подобрать **контрпримеры** (см. Компендиум) к обоим сформулированным утверждениям.

311. Функция f является или возрастающей, или убывающей, т.е. **монотонной** (см. Компендиум). *Указание*. Рассмотреть отдельно две возможности для знака данного выражения.

312. Любое конечное и даже бесконечное число раз. *Указание*. В точках пересечения графика функции с осью абсцисс функция принимает значение 0. Нужные примеры можно получить из любой «основной» тригонометрической функции.

313. Не более одного раза. *Указание*. В точках пересечения графика функции с осью абсцисс функция принимает значение 0.

314. Не более одного раза. *Указание*. Вопрос относится к самому понятию функции.

315. Не более одного раза.

316. Не более одного раза.

317. Любое число, в том числе и бесконечно много. *Указание*. Для построения соответствующих примеров использовать графики.

318. Не более одной. *Указание*. Определить, какое наибольшее число общих точек могут иметь графики убывающей и возрастающей функций.

319. Нет. *Указание.* Применить графики или вспомнить какую-нибудь из известных функций.

320. Нет. *Указание.* Вспомнить одну из **«экзотических» функций** (см. Компендиум) и воспользоваться тем, что любой интервал содержит как рациональные, так и иррациональные числа.

321. Нет. *Указание.* Искать контрпример среди кусочно заданных функций, используя графики.

322. Нет. *Указание.* Вспомнить о том, что функция может не быть непрерывной.

323. Да. *Указание.* Если непрерывная функция возрастает на интервале (a, b), то она возрастает и на промежутке $(a, b]$ (см. Компендиум).

324. Нет. *Указание.* Сконструировать контрпример из возрастающей линейной функции, опустив часть ее графика на каком-нибудь отрезке вниз.

325. Да. *Указание.* Общая часть двух интервалов является интервалом.

326. Да.

327. Да. *Указание.* Моментально следует из определения наибольшего значения.

328. Нет. *Указание.* Взять график непрерывной функции и сдвинуть вниз его «убывающую часть».

329. Да. *Указание.* Сконструировать пример, исходя из одной немонотонной функции.

330. Например, $y = 3\sin\pi x$. *Указание.* Можно исходить из простейшей тригонометрической функции.

331. Например, $y = 3\sin\pi x - 1$. *Указание.* Можно исходить из простейшей тригонометрической функции.

332. Например, $y = 9\sin\pi x + 4$. *Указание.* См. решение задачи 331.

333. π. *Указание.* Преобразовать выражение, которым задана функция.

334. π. *Указание.* См. указание к задаче 333.

335. 2π.

336. Да. *Указание.* Найти такое число k, которое «съело» бы тройку в знаменателе.

337. Да. *Указание.* Найти такое число k, которое «съело» бы оба знаменателя.

338. Нет.

339. Нет. *Указание.* Воспользоваться одним из основных свойств показательной функции.

340. Нет. *Указание.* Если функция $y = f(x)$ имеет период T, то всякое свое значение $f(a)$ она принимает и во всех точках вида $a + kT$.

341. Нет. *Указание.* Заданная функция является возрастающей.

342. Нет.

343. Нет. *Указание.* Выяснить, в каких точках функция y принимает значение 2.

344. Нет. *Указание.* Подставить 0 и T вместо x.

345. При a рациональном. *Указание.* Предположив, что заданная функция имеет период T, рассмотреть ее значения в точках 0 и T.

346. Да. *Указание.* Если аргумент периодической функции умножается на число, то она остается периодической.

347. *Указание.* Для доказательства периодичности функции достаточно указать любой, а не обязательно основной период.

348. Нет. *Указание*. Из равенства $(x+T)+\{x+T\} = x+\{x\}$ вывести, что $T < 0$.

349. Нет. *Указание*. Из равенства $(x + T) \cdot \{x + T\} = x \cdot \{x\}$ вывести, что T — период функции дробной части.

350. Да. *Указание*. При прибавлении к x слагаемого T его рациональность или иррациональность не должна изменяться.

351. Нет. *Указание*. Из равенства $y(0) = y(T)$ вывести, что T — период функции $y = D(x)$.

352. Да. *Указание*. Что можно сказать о периодичности функции $y = f(kx)$, если функции $y = f(x)$ периодическая?

353. Да. *Указание*. Рассмотреть отдельно рациональные и иррациональные значения аргумента.

354. *Указание*. См. указание к задаче 350.

355. Нет. *Указание*. Нужный пример имеется в запасе стандартных функций.

356. Нет. *Указание*. Нужный пример можно построить графически, но такой пример имеется среди «экзотических» функций (см. Компендиум).

357. Нет. *Указание*. Достаточно изменить знак у функции с областью определения **R**, но не имеющей наибольшего значения.

358. Да. *Указание*. Нужный пример имеется в запасе стандартных функций.

359. Да. *Указание*. Искать пример среди «экзотических» функций.

360. Нет. *Указание*. Вспомнить, сколько раз периодическая функция может принимать какое-либо свое значение.

361. Нет. *Указание*. См. задачу 358.

362. Да. *Указание*. Такая функция наверняка есть в вашем личном запасе функций.

363. Да. *Указание*. Функцию $y = \operatorname{tg} x$ можно «доопределить» так, чтобы полученная функция была периодической и определенной на всем множестве **R**.

364. Да.

365. Нет.

366. Нет. *Указание*. Рассмотреть две функции, у которых отношение наименьших положительных периодов является иррациональным числом.

367. *Указание*. Подставить в заданное равенство вместо x значение $x + a$.

368. *Указание*. Подставить в заданное равенство $x + a$ вместо x.

369. *Указание*. См. указание к задаче 366.

370. $\frac{7}{9}$. *Указание*. Мысленно умножить числитель и знаменатель правой части на 5 и заметить, что при заданном значении $x = \frac{3}{5}$ $5x = 3$ и $10x = 6$.

371. $2x + 6$. *Указание*. Положить $t = x - 3$ и после необходимых выкладок заменить t на x — обозначение переменной для задания функции не имеет значения.

372. $3x - 7$. *Указание*. См. указание к задаче 371.

373. $\frac{2x-3}{3x-5}$. *Указание*. В заданное выражение вместо x подставить $\frac{1}{x-1}$.

374. *Указание*. См. указание к задаче 371.

375. $f(x) = x^3 + 1$. *Указание*. См. указание к задаче 371.

376. $f(x) = x^2 + 1$ $(x \geq 0)$. *Указание*. Учесть область определения.

377. $x \neq -1$. *Указание.* Учесть область определения.

378. $x \neq -1$. *Указание.* Учесть область определения.

379. $x \neq 1$. *Указание.* Учесть область определения.

380. $x \neq 1$. *Указание.* Сделать первый шаг.

381. $x \neq -1$. *Указание.* Сделать три первых шага.

382. $x = 0$. *Указание.* Сделать первый шаг.

383. $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$. *Указание.* См. указание к задаче 380.

384. Решений нет. *Указание.* См. решение задачи 381.

385. Решений нет. *Указание.* См. решение задачи 380.

386. Решений нет.

387. $f(x) = \dfrac{2x^2 + 2x - 1}{3}$. *Указание.* Заменить в данном тождестве x на $1 - x$ и «скомбинировать» полученное новое тождество с данным.

388. $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{3}$. *Указание.* Заменить в данном тождестве x на $\dfrac{1}{x}$ и «скомбинировать» полученное новое тождество с данным.

389. $f(x) = -1$. *Указание.* Ввести переменную $t = \dfrac{4 - 2x}{x + 2}$, выразить x через t, в полученном новом тождестве заменить t на x и «скомбинировать» последнее тождество с данным.

390. $f(x) = -1$. *Указание.* См. указание к задаче 389.

391. Да. *Указание.* Вспомнить о том, что функция может быть постоянной.

392. Да. *Указание.* Пример такой функции можно найти среди линейных.

393. $y = ax + \dfrac{1}{2}$ (a — любое число).

394. Нет.

395. $f(x) = 3x$. *Указание.* Подставить сначала в данное тождество $y = 1$, затем $x = y = 1$.

396. $f(x) = 3x$. *Указание.* Воспользоваться результатом задачи 395, найти $f(0)$ и подставить в данное тождество сначала $y = -x$.

397. Да. *Указание.* Условию удовлетворяет одна из самых хорошо известных функций школьного курса.

398. Да. *Указание.* Искать пример можно среди «экзотических» функций (см. Компендиум).

399. Да. *Указание.* См. указание к задаче 398.

400. $f(n) = 2^n$. *Указание.* Положить $k = 1$ и «увидеть» геометрическую прогрессию.

401. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$. *Указание.* См. решение задачи 399.

402. *Указание.* Доказать сначала, что $f(0) = 1$, а потом в заданное тождество подставить $y = -x$.

403. *Указание.* Подставить в данное тождество $y = x$, а в полученном тождестве заменить x на $\dfrac{x}{2}$.

404. $f(x) = 3x$. *Указание.* Воспользоваться результатом задачи 396, распространить данное тождество на любое число слагаемых, затем найти значения $f\left(\dfrac{k}{n}\right)$ для произвольных целых чисел k и n.

405. Ни при каких. *Указание.* Рассмотреть сначала область определения данной функции, а потом подставить значения $x = 1$ и $x = -1$.

406. При $d = 0$. *Указание.* Рассмотреть сначала область определения данной функции, а затем подставить значения $x = 1$ и $x = -1$.

407. При $a = d = 0$. *Указание.* См. указание к задаче 406.

408. Функция является четной. *Указание.* Не поверить первому впечатлению и провести нужное тождественное преобразование.

409. Функция является четной. *Указание.* Рассматривать заданную функцию в точках, где меняют знаки «составляющие» ее выражения и на определяемых ими интервалах.

410. Функции вида $y = f(|x|)$ и $y = f(-|x|)$ являются четными.

411. Четные функции — любые, нечетные — нуль. *Указание.* Не забудьте о необходимых примерах.

412. *Указание.* Предложение не может быть верным, если хотя бы один из входящих в него символов не имеет смысла.

413. *Указание.* Опираться на «экономное» определение четной функции (см. задачу 412).

414. Да. *Указание.* Аккуратно рассмотреть допустимые значения x.

415. Да. *Указание.* См. указание и решение задачи 414.

416. Да. *Указание.* Не поддаваться влиянию ни смысла этих терминов в множестве целых чисел, ни смысла отрицательной частицы «не» в обычном языке.

417. Бесконечно много. *Указание.* См. решение задачи 416.

418. Многочлен, содержащий в стандартном виде только одночлены четной степени. *Указание.* Представить многочлен f в виде суммы многочленов $g + h$, где g и h состоят из одночленов соответственно четной и нечетной степени.

419. *Указание.* Получить требуемое представление функции f, комбинируя выражения $f(x)$ и $f(-x)$, с целью получить выражение, не изменяющееся при замене x на $-x$.

420. *Указание.* Начать с предположения, что «задача решена», т.е. функция f представлена в нужном виде, т.е. $f(x) = g(x) + h(x)$, где функция g — четная, а h — нечетная, причем области определения g и h обе равны $\mathbf{R}$.

421. Например, $y = \sqrt{x}$. *Указание.* Вспомнить свойство области определения произвольной четной или нечетной функции.

422. Да. *Указание.* Записать равенство $y = \dfrac{2}{x}$ в виде $xy = 2$ и заметить, что в это равенство x и y входят равноправным образом.

423. *Указание.* Симметричность любого множества точек на координатной плоскости, заданного равенством, определяется равноправием вхождения в это равенство переменных x и y, а здесь это явно неверно.

424. Нет. *Указание.* Сравнить данное равенство с тем, которое получится при замене x на y, а y на x.

425. Нет. *Указание.* При полной геометрической очевидности данного утверждения привести его строго логическое обоснование.

426. Да. *Указание.* Проследить, с помощью каких преобразований график данной функции можно получить из графика функции $y = \dfrac{1}{x}$.

427. $a = k\pi\ (k \in Z)$. *Указание.* Прямая $x = a$ является осью симметрии графика функции $y = f(x)$ тогда и только тогда, когда для любого $x \in D(f)$ выполняется равенство $f(x) = f(2a - x)$ (см. Компендиум).

428. Нет. *Указание*. См. указание к задаче 427.

429. Относительно оси абсцисс симметричны лишь графики функций, принимающих только нулевые значения, а следовательно, «неинтересные». *Указание*. Учесть то, что функция в каждой точке принимает единственное значение.

430. Да. *Указание*. Искать среди обычных «школьных» функций.

431. Да. *Указание*. Такую функцию можно найти среди самых знакомых функций.

432. Да.

433. Да. *Указание*. Нужный пример имеется в запасе стандартных функций.

434. Да.

435. Да. *Указание*. Примеры таких функций хорошо известны из школьной теории.

436. Да. *Указание*. Примеры таких функций хорошо известны из школьной теории.

437. Да. *Указание*. Вспомнить функции из школьного курса.

438. Да.

439. Ни одной или бесконечно много. *Указание*. Прямая $x = a$ является **осью симметрии графика функции** $y = f(x)$ тогда и только тогда, когда для любого $x \in D(f)$ выполняется равенство $f(x) = f(2a - x)$ (см. Компендиум).

440. Да. *Указание*. Искать пример среди простейших функций.

441. Да. *Указание*. Искать пример среди самых примитивных функций.

442. Имеет и вертикальную ось, и центр симметрии. *Указание*. График функции $y = f(-x)$ получается из графика функции $y = f(x)$ зеркальным отражением в оси ординат.

443. Имеет вертикальную ось, центр симметрии может иметь или не иметь. *Указание*. График функции $y = |f(x)|$ строится из графика функции $y = f(x)$ зеркальным отражением «отрицательной» части в оси абсцисс. Не забыть о необходимых примерах.

444. Графики функций вида $y = f(|x|)$ и $y = f(-|x|)$ всегда имеют вертикальную ось симметрии и могут иметь или не иметь центр симметрии, независимо от того, имела ли их функция $y = f(x)$. *Указание*. Воспользоваться геометрической интерпретацией. Обе заданные функции — четные.

445. Нет. Вспомнить самое простое свойство графика любой функции, связанное с вертикальными прямыми.

446. Да. *Указание*. Пример можно найти среди функций, изучавшихся уже в 7 классе.

447. Функция имеет вертикальную ось и центр симметрии.

448. *Указание*. Записать координаты точек оси абсцисс, симметричные относительно точки a.

449. *Указание*. Доказать равенство $f(a + x) = f(a - x)$ (см. задачу 448).

450. *Указание*. Вначале определить связь между координатами двух точек графика, симметричных относительно данной точки.

451. При $a = 0$ и $a = 1$. *Указание*. Функция, стоящая в левой части уравнения, не меняется при замене x на $1 - x$.

452. Да. *Указание*. Предположив противное, воспользоваться тем, что обратная к возрастающей функции сама является возрастающей.

453. Нет. *Указание*. Найти какую-нибудь прямую, симметричную относительно прямой $y = x$.

454. –5.

455. 1. *Указание.* Подобрать корень и применить соображения, связанные с монотонными функциями.

456. 12. *Указание.* См. указание к задаче 455.

457. 1. *Указание.* См. указание к задаче 455.

458. $x = 4$. *Указание.* См. указание к задаче 455.

459. Нет решений. *Указание.* Найти область определения уравнения и сравнить множества значений левой и правой частей.

460. Нет решений. *Указание.* Найти область определения уравнения и сравнить множества значений левой и правой частей.

461. 2. *Указание.* Функции, стоящие в левой и в правой частях, имеют «разное направление» монотонности.

462. 10. *Указание.* Отыскать «в районе» чисел 2714 и 2490 точный квадрат и воспользоваться монотонностью левой части.

463. 1. *Указание.* Воспользоваться монотонностью всякой показательной функции.

464. 1. *Указание.* Воспользоваться монотонностью всякой показательной функции.

465. 2. *Указание.* Воспользоваться монотонностью показательной функции.

466. 2. *Указание.* Разделить обе части на 5^x и отметить, что в новом уравнении левая часть — убывающая функция.

467. 3. *Указание.* Разделить обе части на 129^x и отметить, что в новом уравнении левая часть — убывающая функция.

468. 1. *Указание.* Разделить обе части на 129^x и убедиться, что в новом уравнении левая часть — убывающая функция.

469. ±2. *Указание.* Числа $2+\sqrt{3}$ и $2-\sqrt{3}$ — взаимно обратные.

470. 2. *Указание.* Разделить обе части на 2^x и отметить, что в новом уравнении левая часть — убывающая функция.

471. $x > 2$. *Указание.* Разделить обе части на 5^x и отметить, что в новом неравенстве левая часть — убывающая функция.

472. $x > 2$. *Указание.* Разделить обе части на 5^x и заметить, что в новом неравенстве левая часть — убывающая функция.

473. $x \le 1$. *Указание.* Разделить обе части на 129^x и заметить, что в новом неравенстве левая часть — убывающая функция.

474. $4\sqrt{2} - 3\sqrt{3}$.

475. $\sqrt{39} - 4\sqrt{2}$.

476. $x = y = 4$. *Указание.* Функция $y = x^2 + \sqrt{x}$ — возрастающая.

477. $x = 1$, $y = 1$. *Указание.* Представить первое уравнение системы в виде $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \sqrt{y+1} - \sqrt{y}$ и доказать, что функция $y = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$ — убывающая.

478. $x = 1$, $y = 1$. *Указание.* Функция $y = x^3 + 3x$ — возрастающая.

479. $x = y = 1$. *Указание.* Заметить, что функция $y = x^3 + x$ — возрастающая.

480. $x = y = -3$. *Указание.* Записать первое уравнение системы в виде $f(x) = f(2y)$ и заметить, что функция $y = x^3 + 2x$ — возрастающая.

481. Нет решений. *Указание.* Заметить, что функции $y = 3x^3 + x$ и $y = x^5 + 3x^3$ — возрастающие.

482. 2. *Указание.* Воспользоваться монотонностью показательной функции.

483. $x = a^2 + b^2 + c^2$. *Указание.* Подбирать в качестве корня выражение, симметричное относительно a, b, c.

484. $k\frac{\pi}{2}$ $(k \in \mathbf{Z})$. *Указание.* Воспользоваться ограниченностью синуса и косинуса.

485. $x = 2k\pi$ и $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ $(k \in \mathbf{Z})$. *Указание.* Заметить, что данное уравнение не может иметь решений x, при которых синус или косинус меньше 0, и воспользоваться ограниченностью синуса и косинуса.

486. $x = 2k\pi$ и $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ $(k \in \mathbf{Z})$. *Указание.* Заметить, что данное уравнение не может иметь решений x, при которых синус или косинус меньше 0, и воспользоваться ограниченностью синуса и косинуса.

487. $k\frac{\pi}{2}$ $(k \in \mathbf{Z})$. *Указание.* Воспользоваться ограниченностью синуса и косинуса.

488. $k\frac{\pi}{2}$ $(k \in \mathbf{Z})$. *Указание.* Воспользоваться ограниченностью синуса и косинуса.

489. $x = \pi + 2k\pi$ и $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ $(k \in \mathbf{Z})$. *Указание.* Воспользоваться формулами приведения и ограниченностью синуса и косинуса.

490. $x = 3(2k+1)\pi$, где k — любое целое число. *Указание.* Использовать то, что косинус любого аргумента по модулю не превосходит 1.

491. $x = 0$.

492. $\frac{42}{41}$. *Указание.* Найти наибольшие значения слагаемых и отметить, что они достигаются в одной и той же точке.

493. $6\pi - 1$. *Указание.* Для оценки первого слагаемого применить неравенство между средними арифметическим и геометрическим для двух чисел.

494. Бесконечно много.

495. 0.

496. *Указание.* Функция, стоящая в левой части уравнения, не меняется при замене x на $1 - x$.

497. $a = b = c = 0$. *Указание.* Сделав предположение, что хотя бы один из коэффициентов a, b, c не равен 0, рассмотреть периоды данных функций.

498. Второй вариант ответа. *Указание.* Воспользоваться признаками делимости.

499. Третий вариант ответа. *Указание.* Воспользоваться признаками делимости.

500. Третий вариант ответа. *Указание.* Воспользоваться признаками делимости.

501. Первый вариант ответа. *Указание.* Воспользоваться признаками делимости.

502. 4523. *Указание.* Найти среди данных составные числа.

503. Вариант 4. *Указание.* Применить признаки делимости на 3 и на 11. Где не получается, заметить закономерность в последовательности цифр числа.

504. Верным является первый вариант ответа. *Указание.* Увидеть четные числа и формулу суммы кубов.

505. Вариант 4. *Указание.* Проверка последнего числа потребует слишком много времени, даже если вы знаете, что достаточно искать лишь такие простые делители, которые меньше $\sqrt{2113} < 46$, т.е. числа 2, 3, 5, 7, ..., 41, 43.

506. Вариант 1. *Указание.* **Сумма степеней натуральных чисел с одинаковыми нечетными показателями делится на разность оснований (см. Компендиум). Там, где это свойство неприменимо, применить признак делимости на 5.**

507. Вариант 4. *Указание.* Вторые слагаемые меньше 100.

508. Вариант 4. *Указание.* Начать с меньших чисел.

509. Вариант 3. *Указание.* Использовать тот факт, что если в записи чисел только тройки, то число делится на 3.

510. Вариант 2.

511. Вариант 1. *Указание.* Учесть четность-нечетность слагаемых.

512. Вариант 2. *Указание.* Найти значения суммы при нескольких значениях n и «отмести» неверные варианты ответов.

513. Верным является третий вариант ответа. *Указание.* Искать контрпримеры.

514. Вариант 4. *Указание.* Рассматривать числа, начиная с самого большого.

515. Вариант 2. *Указание.* Заметить, что одно из чисел нечетное, проверку оставшихся начать с третьего числа.

516. Вариант 3. *Указание.* Заметить, что одно из чисел нечетное, и сразу исключить два неправильных варианта ответа.

517. Вариант 2. *Указание.* Начать с проверки первого числа.

518. 2.

519. 4.

520. Вариант 2.

521. Вариант 2. *Указание.* Выяснить логическую связь между предложениями «a делится на b» и «a^2 делится на b^2».

522. Вариант 4. *Указание.* Не забыть об одном «крайнем случае».

523. Вариант 4. *Указание.* Достаточно привести хотя бы один пример.

524. Вариант 2. *Указание.* Заметить логическую связь между данными предложениями. Не забыть привести необходимый пример.

525. *Указание.* Установить логическую связь между предложениями а) и г), а также «парами» предложений а) и б) с одной стороны и в) и г) — с другой. Не забыть о необходимости приведения соответствующего примера.

526. Вариант 3. *Указание.* Искать контрпримеры с как можно меньшими числами.

527. Вариант 3. *Указание.* Изучить связь между остатками, которые при делении на разные числа дают число k и его куб.

528. Вариант 4. *Указание.* К сумме цифр прибавить 1 и проверить, делится ли полученное число на 3.

529. Вариант 4.

530. Вариант 3. *Указание.* Рассмотреть число 5.

531. Вариант 4. *Указание.* Найти хотя бы одно число, которое при делении на 5 и на 9 дает остатки 3 и 7.

532. Вариант 4.

533. Вариант 4.

534. Вариант 2.

535. Вариант 1.

536. Вариант 1.

537. Вариант 3.

538. Вариант 2. *Указание.* Возвести в квадрат выражения $3k+1$ и $3k-1$.

539. Вариант 3. *Указание.* Рассмотреть случаи четного и нечетного чисел.

540. Вариант 4. *Указание.* Дробь является целым числом, если ее числитель делится на ее знаменатель, а тогда разность между числителем и учетверенным знаменателем также делится на знаменатель дроби.

541. Вариант 4. *Указание.* Если дробь является целым числом, отличным от 0, то ее числитель по модулю больше ее знаменателя, а обратное, конечно, неверно.

542. Вариант 1. *Указание.* Для того чтобы дробь с натуральными числителем и знаменателем была целым числом, надо чтобы ее числитель был не больше, чем знаменатель.

543. Вариант 1. *Указание.* См. указание и решение задачи 542.

544. Вариант 1. *Указание.* См. указание и решение задачи 542.

545. Вариант 3. *Указание.* Выделить в данной дроби целую часть (см. Компендиум).

546. Вариант 4. *Указание.* Проверку начать с самого маленького числа.

547. Вариант 2. *Указание.* Начать, естественно, с простейшего случая — когда прогрессия состоит из 3 членов.

548. Вариант 3. *Указание.* Для доказательства отсутствия корней уравнения, возникающего в ходе решения, использовать остатки от деления на 2 и на 3.

549. Вариант 2. *Указание.* См. комментарий к предыдущей задаче 548.

550. Вариант 3. *Указание.* Вычислить сумму прогрессии $1, 2, 4, \ldots, 2^n$.

551. Да. *Указание.* Выражение для суммы прогрессии, удовлетворяющей условию, можно разложить на множители.

552. Нет. *Указание.* Выражение для суммы прогрессии, удовлетворяющей условию, можно разложить на множители.

553. Вариант 2. *Указание.* Рассмотреть самую простую бесконечную убывающую геометрическую прогрессию.

554. Вариант 4. *Указание.* Воспользоваться признаком делимости на 3.

555. Вариант 4. *Указание.* Воспользоваться признаками делимости на 3 и на 9.

556. Вариант 1. *Указание.* Воспользоваться признаком делимости на 11.

557. Вариант 2. *Указание.* Рассмотреть остатки от деления на 3.

558. Вариант 2. *Указание.* Рассмотреть остатки от деления на 9.

559. Вариант 1. *Указание.* Проверить последние цифры.

560. Вариант 1. *Указание.* Рассмотреть остатки от деления на 7.

561. Вариант 4.

562. Вариант 3.

563. Вариант 2.

564. Вариант 3.

565. Вариант 4. *Указание.* Пользоваться признаками делимости.

566. Вариант 4. *Указание.* Использовать остатки от деления на 3.

567. Вариант 3. *Указание.* Изучить последние цифры заданных разностей.

568. Вариант 1. *Указание.* Искать делители данных чисел среди первых простых чисел — найти последние цифры и воспользоваться признаками делимости на 2 и на 5; делимость на 3 исследовать с помощью остатков.

569. Вариант 2. *Указание.* Установить закономерность, которой подчиняется последовательность последних цифр в степенях чисел 9 и 4.

570. Вариант 3. *Указание.* Установить закономерность, которой подчиняется последовательность последних цифр в степенях чисел 2 и 3.

571. Вариант 3. *Указание.* Установить закономерность, которой подчиняется последовательность последних цифр в степенях чисел 2 и 3.

572. Вариант 1. *Указание.* Установить закономерность, которой подчиняется последовательность последних цифр в степенях чисел 9 и 8.

573. Вариант 1. *Указание.* Рассмотреть вопрос о делимости данного числа на 7.

574. Вариант 2. *Указание.* См. указание и решение предыдущей задачи.

575. Вариант 4.

576. Вариант 2.

577. Вариант 1.

578. Вариант 4.

579. Вариант 1.

580. Вариант 2. *Указание.* Делимость на 13 можно не проверять — из логических соображений.

581. Вариант 3. *Указание.* Представить в виде суммы точных квадратов число 10 и заметить, что если некоторое натуральное число является суммой двух точных квадратов, то его произведение на любой точный квадрат также обладает этим свойством.

582. Вариант 2. *Указание.* См. указание к предыдущей задаче. С числом 20 поработать отдельно.

583. Вариант 4. *Указание.* Заметить, что сумма $(x+y)+(x-y)$ — четное число, так что числа $x+y$ и $x-y$ одной четности.

584. Вариант 2. *Указание.* Не забыть, что (x, y) и (y, x) — это разные решения.

585. Вариант 4. *Указание.* См. указание к задаче 584.

586. Вариант 3. *Указание.* Так как $x^2-y^2=(x-y)(x+y)$ и числа $x-y$ и $x+y$ имеют одинаковую четность, то ответить на поставленный вопрос — значит найти число представлений числа 7 в виде произведения двух чисел одинаковой четности.

587. Вариант 4. *Указание.* Все заданные числа нечетны.

588. Вариант 1. *Указание.* Воспользоваться одним из признаков делимости.

589. Вариант 4. *Указание.* Найти хотя бы одно решение и заметить, что для любого решения (x, y) данного уравнения можно сконструировать еще одно решение этого уравнения.

590. Вариант 4. *Указание.* Рассмотреть уравнение $3456x-3457y=1$ и воспользоваться указанием к задаче 589.

591. Вариант 1. *Указание.* Если (p, q) — решение этого уравнения, то $(p+b,\ q-a)$ — еще одно решение.

592. 4. *Указание.* В уравнении 1 воспользоваться неравенствами, в уравнении 2 — простотой числа 7.

593. Вариант 3. *Указание.* Пытаться подобрать решения. Попытки естественно начинать с простейших значений $x=0,\ y=0,\ x=\pm1$ и т.п.

594. Вариант 4. *Указание.* Применить подбор, а в третьем уравнении доказать, что дискриминант квадратного трехчлена $y^2-5xy-3$ не может быть точным квадратом.

595. Вариант 2. *Указание.* Разделить числитель на знаменатель с остатком.

596. Вариант 2. *Указание.* Очень хотелось бы вместо 26 иметь 27.

597. Одно. *Указание.* Число 19 — простое.

598. Вариант 1. *Указание.* Постараться использовать тот факт, что выражение $10x^3$ по модулю «гораздо больше», чем $6x + \frac{32}{3x - 5}$, и рассмотреть два случая: $x < 0$ и $x > 0$.

599. Вариант 2. *Указание.* Выразить y через x.

600. Вариант 2. *Указание.* Выразить y через x и рассмотреть, при каких значениях x полученная дробь положительна.

601. Вариант 1. *Указание.* Выразить y через x и сравнить модули числителя и знаменателя полученной дроби.

602. Вариант 2. *Указание.* См. сначала указание к задаче 601, а затем заметьте, что знаменатель полученной дроби не должен быть по модулю меньше, чем модуль числителя. Постарайтесь также по возможности избежать излишних громоздких вычислений — это, в частности, касается сокращения почти в 2 раза возникающего в ходе решения перебора.

603. Вариант 3. *Указание.* Алгебраическое решение сложнее, чем комбинаторное — найти возможное число монет в 5 евро.

604. Вариант 3. *Указание.* Ничего не изменится, если считать, что длина забора равна 22 м, а секции длиной 2 м и 3 м.

605. Вариант 1.

606. Вариант 4. *Указание.* Число 732 делится на все остальные заданные числа.

607. Вариант 4.

608. в). *Указание.* Заметить связи между членами заданных прогрессий.

609. в).

610. Вариант 4.

611. Вариант 4. *Указание.* См. комментарий к решению задачи 610.

612. Вариант 4. *Указание.* См. комментарий к решению задачи 610.

613. 2.

614. Вариант 1. *Указание.* Рассмотреть функцию $y = \sin x$ и числа A и B, отличные от ± 1.

615. Вариант 1. *Указание.* Убедиться, что вторая и третья функции равны, и отметить, что четвертая функция задается суммой двух взаимно обратных положительных выражений.

616. Вариант 4. *Указание.* См. указание к задаче 615.

617. Вариант 2. *Указание.* Заметить, что длина заданного отрезка больше периода функций 2 и 3. См. также указание к задаче 615.

618. Вариант 4. *Указание.* Так как оба сомножителя по модулю не больше единицы, то произведение равно 1 только в случае, когда они одновременно равны 1 или – 1.

619. Вариант 2. *Указание.* Найти в наборе заданных функций «слабое место».

620. Вариант 4. *Указание.* См. указание к задаче 618.

621. Вариант 3. *Указание.* Разложить произведения косинусов в сумму косинусов.

622. Вариант 1. *Указание.* Обратить внимание на иррациональность коэффициента при x.

623. Вариант 4. *Указание.* См. указание к задаче 618.

624. Вариант 3. *Указание*. Удвоенные — для простоты вычислений — выражения, задающие данные функции, преобразовать в суммы и выяснить, могут ли соответствующие слагаемые одновременно принимать значение 1.

625. 4. *Указание*. Ясно, что все значения каждой из заданных функций не больше 1, а функцию, которая принимает значение 1, выбрать, выяснив, при каком k $\cos\frac{k\pi}{2}$ равен 1.

626. Вариант 1. *Указание*. «Начать сначала» — рассмотреть функцию 1.

627. Вариант 2.

628. Вариант 2. *Указание*. Истинные предложения доказать, опираясь на общие свойства неравенств, для ложных приводить контрпримеры, которые все могут быть сконструированы из линейных функций.

629. Вариант 2. *Указание*. Вспомнить график функции $y=\frac{1}{x}$.

630. Вариант 2. *Указание*. Использовать поведение выражений x и $\sqrt{x}$ при $x \geq 0$.

631. Вариант 3.

632. Вариант 3. *Указание*. Для доказательства того, что третья и четвертая функция не являются возрастающими, можно привести простые примеры, а для первой и второй даже приводить примеров не надо — они принадлежат изучаемым классам функций: одна — линейная, другая квадратичная.

633. Вариант 4. *Указание*. Вспомнить о свойстве суммы возрастающих функций и о свойстве сложной функции с возрастающими или убывающими «внешней» и «внутренней» функциями.

634. Вариант 2. *Указание*. См. указание к задаче 633.

635. Вариант 3. *Указание*. Для исследования третьей функции перевести иррациональность в знаменатель.

636. Вариант 1.

637. Вариант 4.

638. Вариант 2.

639. Вариант 1. *Указание*. Функция, которая хотя бы в двух точках принимает одно и то же значение, не может быть ни возрастающей, ни убывающей (см. Компендиум). Решение без применения производной в действительности с вычислительной точки зрения проще.

640. Вариант 4. *Указание*. См указание к задаче 639.

641. Вариант 3. *Указание*. Для исследования функции 4 перевести иррациональность в знаменатель.

642. Вариант 3. *Указание*. Найти промежутки возрастания каждой из заданных функций.

643. Вариант 2. *Указание*. Достаточно рассмотреть только функции 1 и 2, после чего правильный вариант находится чисто логически.

644. Вариант 3.

645. Вариант 4.

646. Вариант 1. *Указание*. Первый вариант пропустить или вспомнить результат одной из предыдущих задач.

647. Вариант 4. *Указание*. Рассмотреть непрерывную функцию и изучить с помощью графиков, что происходит с приведенными неравенствами при изменении значения функции в точке c.

648. Вариант 4. *Указание*. Не всякая функция непрерывна, а нестрогое неравенство справедливо и в том случае, когда его части равны.

649. Вариант 2.

650. Вариант 2. *Указание.* Исследование проводить графически, начав с непрерывной функции.

651. Вариант 2. *Указание.* При необходимости см. задачи 327 и 328.

652. Вариант 4. *Указание.* Подумать, как сказывается «расширение» или «сужение» промежутка, на котором задана функция на ее возрастании.

653. Вариант 1. *Указание.* См. указание к задаче 650.

654. Вариант 2. *Указание.* Для функции 2 см. задачу 361, а для функции 4 можно использовать монотонность.

655. Вариант 4. *Указание.* Для функций 1 и 3 период указывается моментально, а функция 5 — возрастающая.

656. Функция 4. *Указание.* Правильный ответ можно обнаружить зрительно.

657. Функция 3.

658. Функция 4. *Указание.* Правильный ответ можно обнаружить зрительно.

659. Функция 3.

660. *Указание.* Сравнить прежде всего функции 1 и 4. Для одной из оставшихся функций период легко подбирается.

661. Вариант 3. *Указание.* Варианты ответа 2 и 4 отвергаются на основании свойств периодических функций, связанных с областью определения и с повторяемостью значений. В варианте 3 частично извлечь корни.

662. Вариант 4. *Указание.* Контрпример к утверждению 1 имеется в запасе стандартных функций, и он опровергает также утверждение 3. Для построения контрпримера к утверждению 2 достаточно выбросить из стандартной периодической функции часть области определения.

663. 1. *Указание.* Заметить логическую связь между заданными утверждениями и можно привести нужный пример для того из них, который является утверждением о существовании (см. Компендиум).

664. Вариант 4. Сколько раз принимают каждое свое значение монотонные и периодические функции?

665. Вариант 3. *Указание.* Рассмотреть функцию тангенс и доопределить ее в нужных точках.

666. Вариант 2.

667. Вариант 4.

668. Вариант 2. *Указание.* Нужный контрпример можно найти в разделе II. См. также указание к задаче 663.

669. Функция 3. *Указание.* См. задачу 667.

670. Вариант 3. *Указание.* См. задачу 667.

671. Только 1 и 2. *Указание.* См. задачу 667.

672. 2. *Указание.* См. Компендиум.

673. Вариант 1.

674. Вариант 3.

675. Вариант 4.

676. Вариант 4. *Указание.* Для функции 4 привести контрпример.

677. Вариант 2. *Указание.* Перемножить последние два множителя.

678. Вариант 2. *Указание.* Построить график заданной функций и заметить, что он симметричен относительно оси ординат.

679. Вариант 2. *Указание.* Построить график заданной функции и заметить, что он симметричен относительно оси абсцисс.

680. Вариант 2. *Указание.* Доказательство утверждений 1—4 проводится непосредственно, а для утверждений 5 и 6 построить контрпримеры. Заметить также, что для четности и нечетности несущественно, рассматривается ли сумма или разность функций.

681. Вариант 2. *Указание.* Для «одноименных» функций утверждения доказываются непосредственно по определению, а для «разноименных» во всех случаях можно привести контрпримеры.

682. Вариант 2. *Указание.* Извлечь из этого графика свойства, которыми обладает или не обладает заданная им функция.

683. Вариант 1. *Указание.* См. указание и комментарий к задаче 682.

684. Вариант 3. *Указание.* См. указание и комментарий к задаче 682.

685. Вариант 4. *Указание.* См. указание к задаче 682.

686. Вариант 4. *Указание.* Воспользоваться тем, что значения синуса и косинуса находятся в пределах от -1 до 1.

687. Вариант 2. *Указание.* Рассмотреть знаки синусов и косинусов заданных углов.

688. Вариант 2. *Указание.* Обратить внимание на знаки синусов и косинусов и воспользоваться формулой вспомогательного угла.

689. Вариант 1. *Указание.* Исследовать знаки данных чисел и провести грубую прикидку.

690. Вариант 3. *Указание.* См. указание к задаче 689.

691. Вариант 4. *Указание.* Возвести данное выражение в куб и, чтобы не «путаться в нулях», записать результат в виде обыкновенной дроби.

692. Вариант 1. *Указание.* См. указание к задаче 691.

693. Вариант 1. *Указание.* См. указание к задаче 691.

694. Вариант 3. *Указание.* Ни в коем случае не приводить корни к общему показателю. Два из трех корней «не извлекаются», но извлекаются частично.

695. Вариант 1. *Указание.* Привести корни к общему показателю и разложить подкоренные выражения на простые множители.

696. Вариант 4. *Указание.* См. указание к задаче 695.

697. Вариант 2. *Указание.* См. указание к задаче 695.

698. 8. *Указание.* «Честное» решение можно провести устно.

699. Вариант 2. *Указание.* См. указание к задаче 698.

700. 4. *Указание.* Из заданных значений a и b хорошо извлекаются корни. После соответствующей подстановки вычисления можно устно провести.

701. 4. *Указание.* См. указание к задаче 670.

702. Вариант 4. Решение можно устно провести.

703. Вариант 3. *Указание.* См. указание к задаче 672.

704. Вариант 4.

705. Вариант 1. *Указание.* «Честное» решение проводится устно и не сложнее числовых преобразований после подстановки.

706. Вариант 4.

707. Вариант 2.

708. Вариант 3.

709. Вариант 3.

710. Вариант 1.

711. Вариант 4.

712. $\cos^2\alpha$. *Указание.* При прибавлении к углу α угла $180°$ тригонометрическая функция не меняется, а при прибавлении $270°$ меняется на ко-функцию, а за знаками здесь следить не обязательно.

713. Вариант 1. *Указание.* «Честное» решение проводится устно.

714. Вариант 2. *Указание.* См. указание к задаче 713.

715. Вариант 2. *Указание.* См. указание к задаче 713.

716. Вариант 2. *Указание.* См. указание к задаче 713.

717. Вариант 2. *Указание.* См. указание к задаче 713.

718. Вариант 1. *Указание.* Рассмотреть «очень большие» по модулю положительные и отрицательные значения x.

719. Вариант 3. *Указание.* Поискать нужные решения «около» 6.

720. Вариант 4. *Указание.* В одном из интервалов должна стоять квадратная скобка.

721. Вариант 2. *Указание.* Привести неравенство к «нормальному» виду — в котором все коэффициенты положительны.

722. Вариант 1. *Указание.* Уравнение имеет единственный корень, и он является целым числом и отрицателен.

723. Вариант 2. *Указание.* Заметить, что в левой части уравнения стоит возрастающая функция, а в правой — убывающая, и хотя бы один корень удастся подобрать.

724. Вариант 3. *Указание.* Хотя не так просто сказать что-либо о монотонности функции в левой части, стоит «попытать счастья», подбирая корень.

725. Вариант 4. *Указание.* Подобрать корень, ориентируясь на то, чтобы корень в левой части «извлекался».

726. Вариант 4. *Указание.* Заметить, что корень данного уравнения больше 5, и взять «хорошее» число, различающее два оставшихся промежутка.

727. Вариант 4. *Указание.* «Честное» решение очевидно, настолько просто, что нецелесообразно тратить силы на поиск нестандартных рассуждений.

728. Вариант 1. *Указание.* См. указание к задаче 727.

729. Вариант 2. *Указание.* См. указание к задаче 727.

730. Вариант 1. *Указание.* См. указание к задаче 727.

731. Вариант 4. *Указание.* См. указание к задаче 727.

732. Вариант 1. *Указание.* См. указание к задаче 727.

733. 2. *Указание.* Последовательно перебирать варианты ответа.

734. Вариант 1. *Указание.* Заметить, что промежутки 3 и 4 содержат «очень большие» x, а промежуток 2 содержится в промежутке 1.

735. Вариант 1. *Указание.* Заметить, что при «больших» x данное неравенство выполняется, а затем в правую часть подставить $x = 0$.

736. Вариант 1. *Указание.* Заметить, что левая часть данного неравенства — возрастающая функция и свести, таким образом, неравенство к уравнению.

737. Вариант 1.

738. Вариант 1. *Указание.* «Честное» решение практически проводится устно: мысленно обозначив $\log_{16}x$ через y, заметить, что один из корней получившегося квадратного уравнения равен 1.

739. Вариант 3.

740. Вариант 1. *Указание.* Найти область определения данного уравнения и заметить, что функция $y = \lg(5 + x) - \lg(1 - x)$ — возрастающая.

741. Вариант 3. *Указание.* «Честное» решение проще.

742. Вариант 3. *Указание.* В левой части уравнения стоит убывающая функция, так что можно попытаться подобрать корень.

743. Вариант 2. *Указание.* Найти область определения данного неравенства и использовать убывание его левой части.

744. Вариант 2. *Указание.* Область определения неравенства не содержит «больших» по модулю значений x.

745. Вариант 3. *Указание.* Подумать, откуда могли появиться в вариантах ответов числа $\frac{10}{3}$ и -50.

746. Вариант 2. *Указание.* Подставить в неравенство числа 2,2 и −2,2 и сделать соответствующие выводы.

747. Вариант 2. *Указание.* Подставить $x = 8$ и воспользоваться тем, что функция $y = \log_5(1{,}8 - 0{,}2x)$ — убывающая.

748. Вариант 3. *Указание.* См. указание к задаче 747.

749. 2. *Указание.* Последовательно перебирать варианты ответа.

750. Вариант 4. *Указание.* Вычислить дискриминант квадратного уравнения, получающегося при замене $\cos x$ на y.

751. Вариант 1. *Указание.* Рассмотреть вариант 1.

752. Вариант 4. *Указание.* Во все варианты ответов подставить $n = 0$ и проверить соответствующие значения x.

753. Вариант 4. *Указание.* См. указание к задаче 752.

754. Вариант 1. *Указание.* См. указание к задаче 752.

755. Вариант 4. *Указание.* Во все варианты ответов подставить $n = 0$ и проверить соответствующие значения x.

756. Вариант 4. *Указание.* См. указание к задаче 752.

757. Вариант 1. *Указание.* См. указание к задаче 752.

758. Вариант 1.

759. Вариант 2. *Указание.* Сравнить варианты 2 и 4, а также воспользоваться тем, что подкоренное выражение задает возрастающую функцию.

760. Вариант 4. *Указание.* Сравнить варианты 2 и 4, а также воспользоваться тем, что подкоренное выражение задает возрастающую функцию.

761. Вариант 2. *Указание.* «Честное» решение проводится устно.

762. Вариант 1. *Указание.* См. указание к задаче 761.

763. Вариант 3. *Указание.* См. указание к задаче 761.

764. Вариант 4. *Указание.* См. указание к задаче 761.

765. Вариант 2. *Указание.* Числа $\sqrt{3}$ и 0 не входят в область определения данной функции.

766. Вариант 1. *Указание.* Рассматривать отдельные значения x.

767. Вариант 2. *Указание.* Рассмотреть «большие по модулю» положительные и отрицательные значения x.

768. Вариант 4. *Указание.* Заметим, что функция $y = \log_{0,5}(25 - x^2)$ — четная.

769. Вариант 2. *Указание.* Использовать не интегрирование, а дифференцирование.

770. Вариант 3. *Указание.* См. указание к задаче 769.

771. Вариант 2. *Указание.* См. указание к задаче 769.

772. Вариант 4. *Указание.* См. указание к задаче 769.

773. Вариант 2. *Указание.* При дифференцировании синус не меняет знака, а косинус меняет, а при интегрировании, т.е. при вычислении первообразной, — наоборот.

774. Вариант 2. *Указание.* См. указание к задаче 769.

775. Вариант 3. *Указание.* Сначала вычислить значения $F(0)$ во всех вариантах, а для выбора между оставшимися вариантами взять производную.

776. Вариант 2. *Указание.* Вычислять производную во всех вариантах ответа и, получив данную функцию, проверить выполнение условия $F(0) = -1$.

777. Вариант 2. *Указание.* График функции F проходит через точку $M(0, 24)$, если $F(0) = 24$.

778. Вариант 2. *Указание.* График функции F проходит через точку $M(0, 24)$, если $F(0) = -9$.

779. Вариант 2. *Указание.* Построить график заданной функции.

780. 4. *Указание.* Функция $y = \arcsin x$ — нечетная.

781. 5. *Указание.* Угол $\operatorname{arctg}\sqrt{3}$ — «хороший».

782. 2. *Указание.* Использовать прямоугольный треугольник с катетом 2 и гипотенузой 7.

783. 2. *Указание.* Использовать прямоугольный треугольник с катетом 2 и гипотенузой 5.

784. 1. *Указание.* Использовать прямоугольный треугольник с катетом 1 и гипотенузой 4.

785. 4. *Указание.* Использовать прямоугольный треугольник с катетом 3 и гипотенузой 5.

786. 1. *Указание.* Первое уравнение дает возможность раскрыть модуль во втором.

787. 1. *Указание.* Условие задачи подразумевает, что если система имеет более одного решения, то частное, о котором идет речь, одинаково для всех, и поэтому имеет смысл попытаться просто подобрать какое-нибудь одно решение. При «честном» решении учесть, что первое уравнение дает возможность раскрыть модуль во втором.

788. 3. *Указание.* См. указание к задаче 787.

789. 12. *Указание.* См. указание к задаче 787. Сначала выразить x из первого уравнения через y.

790. 1. *Указание.* См. указание к задаче 787.

791. *Указание.* См. указание к задаче 787. Корни подбирать, стараясь, чтобы x и y были точными квадратами.

792. $[-1, 0)$. *Указание.* Данное уравнение имеет единственный корень, и этот корень лежит в интервале, в концах которого функция $25^{3,5x+3} - \frac{1}{125}$ — принимает значения разных знаков.

793. 4. *Указание.* Использовать четность правой части.

794. 2. *Указание.* Сначала найти нули подкоренного выражения и область определения уравнения.

795. 3. *Указание.* См. указание к задаче 794.

796. 4. *Указание.* См. указание к задаче 794.

797. 3. *Указание.* См. указание к задаче 794.

798. 4. *Указание.* Использовать четность левой части.

799. 4. *Указание.* Использовать четность правой части.

800. 2. Сначала найти нули подкоренного выражения и область определения уравнения.

801. 3. *Указание.* См. указание к задаче 800.

802. 4. *Указание.* См. указание к задаче 800.

803. 5. *Указание.* См. указание к задаче 800.

804. 2. *Указание.* Использовать четность левой части.

805. $\frac{7}{4}$. *Указание.* Левая часть — убывающая функция, а правая — возрастающая.

806. $a > 0$, $a \neq 1$. *Указание.* Функция $y = \log_a\left(2^x - 1\right) + \log_a\left(2^x - 7\right)$ — возрастающая.

807. $(5, -2\sqrt{29})$

808. –2. *Указание.* Заметить, что заданная функция четная, и изучить ее монотонность на множестве $x > 0$.

809. –3. *Указание.* См. решение задачи 808.

810. 4. *Указание.* См. решение задачи 808.

811. 3. *Указание.* См. решение задачи 808.

812. –2. *Указание.* Заметить, что заданная функция четная, и изучить ее монотонность на множестве $x \geq 0$.

813. –2. *Указание.* См. решение задачи 812.

814. 7.

815. 1.

816. 2.

817. 3.

818. 4.

819. 5.

820. $\frac{1}{5} \leq a < \frac{3}{7}$, $\frac{5}{9} \leq a < \frac{3}{5}$.

821. 40. *Указание.* Заметить, что высота пирамиды проходит через центр окружности, описанной вокруг основания, можно вспомнить, где лежит центр окружности, описанной вокруг прямоугольного треугольника.

822. 15. *Указание.* Заметить, что высота пирамиды проходит через центр основания.

823. 192. *Указание.* Заметить, что боковые ребра пирамиды равны, а каждый из прямоугольных треугольников, составленный из высоты пирамиды, ребра и соответствующего отрезка диагонали основания, равны и подобны «египетскому».

824. 1. *Указание.* Заметить, что высота грани, перпендикулярной основанию, является высотой данной пирамиды.

Раздел V. РЕШЕНИЯ И КОММЕНТАРИИ

1. Так как квадрат нечетного числа всегда является нечетным числом, то первое слагаемое в данной разности нечетно, а вычтя из нее единицу, мы получаем четное число — ясно, что оно не равно 2.

2. См. решение задачи 1.

3. По признаку делимости на 3 число 648 732 делится на 3, и поэтому данная разность также делится на 3.

4. По признаку делимости на 11 число 2 964 764 делится на 11: $2+6+7+4=19$, $9+4+6=19$, а $19-19=0$ — делится на 11, и поэтому данная сумма также делится на 11.

5. Так как любая степень нечетного числа — нечетное число, то все слагаемые в заданной сумме — нечетные числа, а сумма четырех нечетных чисел — число четное и больше 2.

6. Так как любая степень четного числа — четное число, а любая степень нечетного числа — нечетное число, то с точки зрения четности-нечетности ничего не изменилось бы, если бы данные числа мы не возводили в степень, а просто сложили. Но среди 100 данных чисел половина нечетных, а сумма 50 нечетных чисел является четным числом, и поэтому сумма всех чисел является четным числом.

7. Ясно, что при любом n число $2n^2+4n$ — четно и поэтому не равно 31.

8. Ясно, что при четном n каждое слагаемое в сумме $3n^2+5n$ — четно, а значит, и сама сумма тоже четна. А при нечетном n оба слагаемых, наоборот, нечетны, и сумма $3n^2+5n$ снова четна, следовательно, не равна 31.

9. Так как шестая степень числа является квадратом его куба, а восьмая степень — квадратом его четвертой степени, то заданное число можно представить в виде разности квадратов, а из формулы $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ следует, что разность квадратов двух чисел делится на разность оснований. Поэтому заданное число является составным.

10. Так как шестая степень числа является кубом его квадрата, а девятая степень — кубом его куба, то заданное число можно представить в виде разности кубов, а из формулы $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ следует, что разность кубов двух чисел делится на разность оснований. Поэтому заданное число является составным.

11. Так как восемнадцатая степень числа является кубом его шестой степени, а двадцать седьмая степень — кубом его девятой степени, то заданное число можно представить в виде суммы кубов, а сумма кубов двух чисел делится на сумму оснований, это следует из формулы $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$, и поэтому заданное число является составным.

12. Из формулы

$$a^n-b^n=(a-b)\big(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\ldots+$$
$$+a^2b^{n-3}+ab^{n-2}+b^{n-1}\big)$$

Следует отметить, что разность двух степеней с одинаковым показателем делится на разность оснований, так что заданное число делится на $5853-742$.

13. Так как показатели обеих степеней в заданной разности делятся на 17, то каждая из этих степеней является семнадцатой степенью некоторого числа, а разность таких степеней делится на разность оснований (см. Компендиум. Формулы разности и суммы степеней), и поэтому заданное число делится на $5853-742$, т.е. является составным.

14. Из формулы

$a^{2k+1}+b^{2k+1}=(a+b)\big(a^{2k+1}-a^{2k}b+a^{2k-1}b^2-\ldots-a^2b^{2k-1}-$
$-ab^{2k}+b^{2k+1}\big)$, следует, что сумма $4654^{37}+64711^{37}$ делится на $4654+64711$, так что является составным числом.

15. Так как 222 и 555 делятся на 111, то каждое из слагаемых заданной суммы является сто одиннадцатой степенью, а сумма таких степеней — с нечетным показателем — делится на сумму оснований (см. Компендиум. Формулы разности и суммы степеней).

16. См. решение задачи 15.

17. Так как оба слагаемых в заданной сумме делятся на 3, то и их сумма делится на 3.

18. Так как последняя цифра степени и суммы зависит только от последней цифры соответственно основания степени или слагаемых, то далее будем рассматривать сумму $3^{76} + 6^{44}$. Первое слагаемое оканчивается цифрой 9, а последняя цифра второго слагаемого равна 6. Поэтому сумма оканчивается цифрой 5, и поэтому делится на 5.

19. Применяя признак делимости на 11, получаем, что числа 2 072 301 и 1 272 326 оба делятся на 11, так что и их сумма делится на 11.

20. Любая степень шестерки, так же как и любого числа, оканчивающегося на 6, оканчивается цифрой 6, так что уменьшаемое в заданной разности оканчивается цифрой 6, а последняя цифра вычитаемого, очевидно, равна 1. Поэтому разность оканчивается цифрой 5 и поэтому делится на 5.

21. Нетрудно заметить, что степень числа 4 с четным показателем оканчивается цифрой 6: $4^{2n} = 16^n$, а это число всегда, т.е. при любом n оканчивается на 6, а стало быть, уменьшаемое оканчивается на 6. Ясно, что вычитаемое в заданной разности всегда оканчивается на 1, и поэтому разность оканчивается цифрой 5, так что делится на 5.

22. Нечетная степень числа 4 оканчивается цифрой 4: $4^{2n+1} = 16^n \cdot 4$, и первый множитель здесь оканчивается цифрой 6, так что произведение оканчивается на 4, а заданная сумма оканчивается на 5, так что делится на 5.

23. Первое слагаемое данной суммы оканчивается цифрой 1, предпоследнее — цифрой 5, последнее — цифрой 6, $2^{22} = 16^5 \cdot 4$ — цифрой 4, $3^{33} = 81^8 \cdot 3$ — цифрой 3, $4^{44} = 16^{22}$ — цифрой 6, и поэтому последняя цифра суммы — та же, что у суммы $1 + 4 + 3 + 6 + 5 + 6 = 25$, т.е. 5, так что число делится на 5.

24. Так как $131\ 131 = 131 \cdot 1001$, то

$$2^{131131} - 1 = \left(2^{131}\right)^{131} - 1 = \left(2^{131}\right)^{131} - 1^{131}$$

как разность степеней с равным показателем делится на $2^{131} - 1$, т.е. является составным числом.

25. Так как число n, по условию, составное, то его можно представить в виде $n = pq$, где числа p и q оба больше 1. Тогда $2^n - 1 = \left(2^p\right)^q - 1$ делится на $2^p - 1$, а это число, очевидно, не равно данному числу и не равно 1, так что заданное число является составным.

26. При $n = 7$ $2^n - 1 = 127$, а это число простое: по соответствующим признакам делимости оно не делится ни на 3, ни на 11, непосредственно проверяется, что оно не делится на 7, а на простое, большее 11, оно не можно делиться — иначе частное было бы меньше $\frac{127}{13} < 10$ и делилось бы на какое-нибудь простое число, меньшее 100, а тогда бы и 127 делилось на это число, а это, как мы уже видели, неверно.

При $n = 11$ имеем число $2^{11} - 1 = 2047$, и проверять его простоту труднее. Имеем:

$2047 = 1300 + 747 = 1300 + 650 + 97 = 1300 + 650 + 95 + 2$ не делится на 13;

$2047 = 1700 + 347 = 1700 + 340 + 7$ не делится на 17;

$2047 = 2300 - 253 = 2300 - 230 - 23$ делится на 23,

так что 2047 — составное число.

27. ***Комментарий.*** Французский юрист XVII в., любитель математики Пьер Ферма высказывал предположение, что число вида $2^{2^n} + 1$ является простым, и доказал это для $n \leq 4$, но великий математик Леонард Эйлер, швейцарец по происхождению, много лет работавший в России, показал, что при $n = 5$ число такого вида является составным.

28. Да, простейший пример: $3^2 + 4^2 = 5^2$.

29. Нет, пример: $1^2 + 2^2 = 5$, а число 5 не является точным квадратом.

30. Так как

$$\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)=a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2=$$
$$=a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2+2abcd-2abcd=$$
$$=a^2c^2+b^2d^2+2abcd+a^2d^2+b^2c^2-2abcd=$$
$$=\left(ac+bd\right)^2+\left(ad-bc\right)^2,$$ что и требовалось доказать.

31. Нет: например, $1^3+2^3=9$, а число 9 не является точным кубом.

32. ***Комментарий.*** Тот факт, что сумма кубов двух натуральных чисел не может быть точным кубом, доказан Леонардом Эйлером, и его доказательство, безусловно, выходит далеко за пределы школьного курса. Его можно сформулировать как утверждение: «Уравнение $x^3+y^3=z^3$ не имеет решений в натуральных числах» — это частный случай так называемой Великой (или большой) теоремы Ферма: «При $n>2$ уравнение $x^n+y^n=z^n$ не имеет решений в натуральных числах». Сам Пьер Ферма не доказал этой теоремы, но лишь написал, что располагает ее доказательством, однако для него не хватает места на полях его рукописи. С тех пор в течение более чем трехсот лет математики искали это доказательство, и удалось это лишь в конце прошлого, XX в.

33. Утверждение легко опровергнуть — для этого достаточно привести контрпример: $4+9=13$.

34. Так как $2+5=7$, а 7 — простое число, утверждение неверно.

35. Число 2 — единственное четное среди простых, и $2+3=5$ — простое число.

Комментарий. Таких примеров можно привести много — например, $2+11=13$, $2+17=19$, $2+41=43$. Два простых числа, отличающихся на 2, в математике называют близнецами, и до сих пор не известно конечно или бесконечно множество пар простых чисел-близнецов. Самыми большими близнецами, известными на 1996 г., были $242206083\cdot2^{18880}\pm1$, а найдены они были с помощью компьютера.

36. Сумма простого числа 7 и составного числа 4 является простым числом 11, и этот пример показывает, что данное утверждение неверно.

37. Так как произведение единицы и любого простого числа — простое число, то данное утверждение неверно.

38. Каждое натуральное число можно представить в виде $1+k$, где k — натуральное число или нуль. Тогда сумму 10 000 натуральных чисел можно записать в виде суммы 10 000 единиц и еще 10 000 «натуральных чисел или нулей». По условию эти 10 000 «натуральных чисел или нулей» равны $10\,001-10\,000=1$, так что только одно из них равно 1, следовательно, среди данных по условию натуральных чисел одно равно 2, а остальные единицы. Поэтому их произведение равно 2.

39. Так как любое число, записанное с помощью цифры 3, делится на 3, и сумма чисел, делящихся на 3, тоже делится на 3, а число 1 000 000 не делится на 3, то данное число не может быть представлено в виде такой суммы.

40. Если нечетное число представлено в виде суммы двух слагаемых, то одно из них четно, другое нечетно. Единственное четное натуральное число это 2, а поскольку $1001-2=999$ — не простое число, то записать число 1001 в виде суммы двух простых натуральных чисел нельзя.

41. Так как число 101 010 101 нечетное, то слагаемые разной четности. Четное простое число — единственное, так что остается проверить, будет ли простым число $101\,010\,101-2=101\,010\,099$. По признаку делимости оно делится на 3, т.е. составное, так что заданное число нельзя представить в виде суммы двух простых натуральных чисел.

42. Если $k<n$, то $n!=1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n$ делится на k, а значит, и число $n!+k$ тоже. Поэтому все числа $n!+2$, $n!+3$, $n!+4$, ..., $n!+1\,000\,000$ при $n=1\,000\,001$ — составные, а их ровно 1 000 000.

43. Среди любых трех последовательных чисел имеется четное число — одно, если в этой тройке оно «среднее», и два, если они «крайние». Но четное число является простым только в случае, когда оно равно 2, но в тройке 1, 2, 3 число 1, как известно, не является простым. Иными словами, три последовательных натуральных числа не могут быть все простыми.

С другой стороны, в тройке последовательных натуральных чисел может быть одно простое — например, в тройке 12, 13, 14, может быть два простых — например, в тройке 5, 6, 7, вообще может не быть простых — например, в тройке 14, 15, 16.

44. Данным свойством обладает тройка 3, 5, 7.

45. Пусть n — первое число в некоторой тройке чисел, удовлетворяющей условию. Если $n \neq 3$, то оно не делится на 3 и при делении на 3 дает остаток 1 или 2, а тогда либо второе, либо третье число этой тройки делится на 3 и больше 3, так что $n = 3$. Таким образом, условию задачи удовлетворяет единственная тройка — это 3, 5, 7.

46. Так как $7^{13} + 7^{14} + 7^{15} = 7^{13}(1 + 7 + 49) = 7^{13} \cdot 57$, а 57 делится на 19, то данное число делится на 19.

47. Из равенства $a = 5k$, где a — целое число, следует, что в разложении числа a на простые множители содержится множитель 5, а из равенства $a = 18n = 2 \cdot 3^2 n$ следует, что в этом разложении есть множитель 2 и по крайней мере два множителя 3. Следовательно, в этом разложении есть произведение $5 \cdot 2 \cdot 3^2 = 90$, так что a делится на 90, что и требовалось доказать.

48. Рассуждая, как в решении задачи 47, из равенств $a = kb$ и $a = nc$ можно сделать вывод, что в разложение числа a входит все простые множители из разложения b и все простые множители из разложения числа c, причем и те, и другие в нужном количестве. Но если b и c имеют общие простые делители, то их произведение bc содержит их суммарное число, тогда как для делимости a на b и c достаточно наибольшего из них, и из этих соображений и находится нужный контрпример.

Для его построения надо взять числа b и c, имеющие общий простой делитель — например, $b = 4 = 2^2$ и $c = 6 = 2 \cdot 3$. Тогда a делится и на b, и на c, если в разложении a имеются две двойки и по крайней мере одна тройка, и достаточно взять $a = 12$. Это и будет искомый контрпример: $a = 12$ делится на $b = 4$, делится на $c = 6$, но не делится на $bc = 24$.

Комментарий. Самое простое решение этой задачи — рассуждение от противного: если бы это утверждение было верно, то из делимости a на b вытекало бы, то a делится на b^2, на b^3, на b^4, так что a имело бы бесконечно много делителей.

Отметим, что при решении этой задачи и задачи 47 фактически доказано, что утверждение этой задачи верно тогда и только тогда, когда числа b и c взаимно просты, т.е. не имеют общих простых делителей, или по-другому, их наибольший общий делитель равен 1. Это утверждение чрезвычайно важно для решения многих задач, связанных с делимостью целых чисел.

49. Так как оба числа 2148 и 537 делятся на 3, то число $a = 2148 \cdot 537 : 3$ делится на каждое из них, но оно меньше их произведения, и следовательно, не делится на $2148 \cdot 537$.

50. На поставленный вопрос можно дать утвердительный ответ только в случае, когда данные числа 345 и 671 ***взаимно просты***, т.е. не имеют общих простых делителей (см. Компендиум).

Выясним, верно ли это. Пусть p — их общий простой делитель, т.е. числа 345 и 671 оба делятся на p. Тогда на p делится число $2 \cdot 345 - 671 = 19$, так что $p = 19$. Но $345 = 380 - 35$ на самом деле на 19 не делится, так что 19 тем более не является общим делителем данных чисел, и полученное противоречие показывает, что они не имеют общих простых делителей, так что заданное утверждение верно.

51. Пусть d — общий простой делитель данных чисел. Разделим 3674 с остатком на 236: $3674 = 236 \cdot 15 + 134$, откуда следует, что 134 делится на d. Тогда на d делятся числа:

$$236 - 134 = 102,\ 134 - 102 = 32,\ 102 - 3 \cdot 32 = 6,$$
$$32 - 5 \cdot 6 = 2,$$

и поэтому $d = 2$. Иными словами, 2 — единственный общий простой делитель данных чисел, а значит, частные $3674 : 2 = 1837$ и $236 : 2 = 118$ общих простых делителей не имеют, т.е. их наименьшее общее кратное равно их произведению $1837 \cdot 118$, и поэтому наименьшее число, которое делится на оба заданных числа — их наименьшее общее кратное, равно $1837 \cdot 118 \cdot 2$.

Комментарий. Заниматься «чистой арифметикой» и перемножать полученные числа, другими словами, записывать их произведение в десятичной системе счисления, не обязательно — это не подразумевается условием задачи.

52. Пусть a^2 делится на b^2, т.е. $a^2 = kb^2$, где k — целое число. При разложении чисел a и b на простые множители, мы получим, что в квадраты a^2 и b^2 все эти множители входят в четных степенях, а тогда из равенства $a^2 = kb^2$ следует, что и в разложении числа k все простые множители входят в четных степенях, т.е. чисел k является точным квадратом, $k = n^2$, $a = nb$, так что a делится на b, что и требовалось доказать.

53. Если a^2 делится на b^2, то, как показано в решении задачи 52, a делится на b, откуда моментально следует, что a^3 делится на b^3.

54. Точно такие же рассуждения, как в задаче 52, показывают, что если a^3 делится на b^3, то a делится на b, а тогда a^2 делится на b^2.

55. Ни 2, ни 41 не имеют составных делителей — поэтому первое и второе утверждения, равно как и первое и третье, не могут быть верными одновременно. Второе и третье оба верны при $a = 1$.

56. Так как $900 = 770 + 77 + 53$, то наименьшее число мячей, которое надо добавить, равно 24.

57. Чтобы избежать дробей, будем считать деньги в копейках. Ясно, что 9 стаканчиков дороже 55 р., а 8 стаканчиков стоят меньше, чем $8 \cdot 6{,}5 = 52$ р., так что на заданную сумму можно купить 8 стаканчиков.

58. Данное число, по условию, можно записать в виде $15q + 8 = 5 \cdot 3q + 5 + 3 = 5(3q + 1) + 3$, и поскольку $3 < 5$, то остаток от деления данного числа на 5 равен 3.

59. По условию задачи, $m = 7q + 5 = 8p + 5$, откуда $7q = 8p$, и поскольку числа 7 и 8 взаимно просты, то q делится на 8, p делится на 7, т.е. $q = 8n$, $p = 7k$ и $m = 56n + 5$. Следовательно, искомый остаток равен 5.

60. Если при делении на 10 и 17 число дает остаток 7, то его можно представить в двух видах: $10p + 7$ и $17q + 7$, а из равенства $10p + 7 = 17q + 7$ следует, что $10p = 17q$, и поскольку числа 10 и 17 взаимно просты, то p делится на 17, q делится на 10, т.е. $p = 17k$, $q = 10n$. Число $10p + 7$ будет наименьшим при $p = 17$, и значит, искомое число равно 177.

61. Если число a удовлетворяет условию задачи, то из первого условия следует, что a четно, а из второго — что a нечетно, а этого не может быть.

62. Заметим, что число $n + 4$ делится и на 6, и на 7, а поскольку числа 6 и 7 взаимно просты, т.е. не имеют общих делителей, кроме 1, то оно делится и на 42. Это означает, что число $n + 4$ имеет вид $42k$, где $k \in \mathbf{Z}$, откуда $n = 42k - 4$, и следовательно, искомый остаток равен 38.

Комментарий. Условие задачи, казалось бы, неявно подразумевает, что все числа n, удовлетворяющие условию, дают при делении на 42 один и тот же остаток. На самом же деле может случиться, что это не так, и возможны, в принципе, несколько вариантов остатка, и это, однако, не делает задачу некорректной: в этом случае ее ответ записывается в виде «Остаток равен 5 или 8».

Кстати, если принять гипотезу о равенстве остатков для всех n, то в данном случае задача становится устной: ее условию удовлетворяет $n = 38$, и таким образом, искомый остаток от деления на 42 равен 38.

63. Заметим, что каждый из остатков меньше делителя на 3. Это означает, что число $n + 3$ делится и на 8, и на 9, а поскольку числа 8 и 9 взаимно просты, то оно делится и на 72. Это означает, что число $n + 3$ имеет вид $72k$, где $k \in \mathbf{Z}$, откуда $n = 72k - 3$, и следовательно, искомый остаток равен 69.

64. Как и в задаче 63, можно заметить, что $a + 4$ делится и на 7, и на 17, т.е. $a = 7 \cdot 17k - 3$, так что наименьшее натуральное число $a = 115$. Можно, однако, рассуждать более общим способом. Если при делении на 7 и 17 число a дает остатки 3 и 13, то его можно представить в двух видах: $7p + 3$ и $17q + 13$, т.е. $a = 7p + 3 = 17q + 13$, откуда $7p - 17q = 10$. Требуется найти самое маленькое натуральное p, при котором существует такое натуральное q, что

$$7p - 17q = 10, \quad p = \frac{17q + 10}{7} = 2q + 1 + \frac{3q + 3}{7},$$

так что число $3q + 3$, а значит и $q + 1$, должно делиться на 7, а это верно, например, при $q = 6$, а к числу p можно и не возвращаться: искомое число равно $17q + 13 = 115$.

Комментарий. Еще проще решить задачу почти без «алгебры». Именно, среди чисел вида $17p + 13$ надо найти число, которое при делении на 7 дает остаток 3, причем вместо числа $17p + 13$ можно рассматривать число $3p - 1$, имеющее тот же остаток от деления на 7, а это легко сделать с помощью таблицы:

p	1	2	3	4	5	6
$3p - 1$	2	5	8	11	14	17
Остаток от деления на 7	2	5	1	4	0	3

Таким образом, наименьшее значение p равно 6, а $17q + 13 = 115$.

Число испытываемых значений, как следует из теоретических соображений (см. Компендиум), не больше 7.

65. Условие задачи означает, что число $k - 3$ делится на 5, а $k + 3$ делится на 11, и следовательно, произведение $(k - 3)(k + 3) = k^2 - 9$ делится и на 5, и на 11, а поскольку числа 5 и 11 взаимно просты, т.е. не имеют общих делителей, кроме 1, то $k^2 - 9$ делится на 55. Но тогда 9 — это и есть остаток от деления числа k^2 на 55.

Комментарий. В разделе «Уравнения в целых числах» мы приводим общее решение этой задачи, которое не опирается на специальный подбор остатков под использование рассмотренного приема — см. задачу 219.

66. Заметим, что остаток от деления числа k на 13 равен 2, а от деления на 7 равен «-2». Поэтому число $k - 2$ делится на 13, $k + 2$ делится на 7, так что в силу взаимной простоты чисел 13 и 7 произведение $(k - 2)(k + 2) = k^2 - 4$ делится на 91, а это означает, что 4 — остаток от деления числа k^2 на 91.

67. Если r — остаток от деления k на 6, то k^2 и r^2 дают при делении на 6 один и тот же остаток: $k^2 - r^2 = (k - r)(k + r)$, а $k - r$ делится на 6. Причем, k при делении на 6 может давать остатки 0, 1, 2, 3, 4, 5, их квадраты — 0, 1, 4, 9, 16, 25, а остатки от деления квадратов — это 0, 1, 4, 3, 4, 1. Поскольку числа 5 в полученном списке нет, то ответ на вопрос задачи отрицательный.

68. Возможные остатки при делении на 3 — это 0, 1, 2, их квадраты — 0, 1, 4, а остатки от деления квадратов — это 0, 1, 1, так что при делении на 3 точный квадрат может давать остатки только 0 или 1.

69. Решение удобно оформить в виде таблицы:

r	0	1	2	3
r^2	0	1	4	9
Остатки r^2	0	1	0	1

70. Решение удобно оформить в виде таблицы:

r	4	±1	±2	±3	±4	±5	±6	7
r^2	0	1	4	9	16	25	36	49
Остатки r^2	0	1	4	9	3	12	10	10

Возможные остатки составляют вторую строку таблицы.

71. Если число n удовлетворяет условию, то $n^2 - 4$ делится на 18, а поскольку $n^2 - 4 = (n-2)(n+2)$, то для этого достаточно, чтобы $n - 2$ делилось на 18, что верно, например, при $n = 20$. Заметим, что еще проще было привести пример $n = 4$.

72. Число 400 есть точный квадрат, а $400 - 9 = 20^2 - 9 = (20+9)(20-9)$ делится на 17.

74. Так как $n^3 - 27 = (n-3)(n^2+3n+9)$, то $36^3 - 3$ делится на 33, т.е. остаток от деления этого числа на 33 равен 27.

75. Так как $n^3 + 1 = (n+1)(n^2 - n + 1)$, то $32^3 + 1$ делится на 33, и следовательно, «целый остаток» от деления 32^3 на 33 равен -1, а «нормальный» остаток равен $31 + 1 = 32$.

Комментарий. Разумеется, можно, хотя менее удобно, обойтись и без применения «целых остатков»: так как $32^3 + 1$ делится на 33, т.е. $32^3 + 1 = 33k$, то $32^3 = 33k - 1 = 33(k-1) + 32$. В решении «для себя» лучше применять «целые остатки», а в решении «для контроля» их вряд ли стоит использовать — не всякий проверяющий знаком с этой терминологией. При решении задач с выбором ответа, естественно, такие остатки можно применять.

76. Так как $n^3 - 8 = (n-2)(n^2+2n+4)$, то $32n^3 + 8$ делится на 33, и значит, при делении на 3 число 35^3 дает остаток 8.

80. Так как $243 = 3^5$, то из равенства $n^5 = 444k + 201 = 444(k+1) - 243$ получаем, что $n^5 + 3^5$ делится на 444, а для этого достаточно, чтобы число $n + 3$ делилось на 444: разность степеней натуральных чисел делится на разность оснований. Например, $n = 441$.

82. Если n^2 — искомое число, то $n^2 - 32$ делится на 89, а значит, и $(n^2 - 32) - 89 = n^2 - 121$ делится на 89, а для этого достаточно, чтобы $n - 11$ делилось на 89, что верно, например, при $n = 11$.

83. Если n^2 — искомое число, то $n^2 - 10$ делится на 39, а значит, и $(n^2 - 10) - 39 = n^2 - 49$ делится на 39, а для этого достаточно, чтобы $n - 7$ делилось на 39, что верно, например, при $n = 7$.

Комментарий. Приведенное решение показывает, что задачу можно решить проще, «для начала» проверив однозначные числа. При этом число 7 едва ли найдется не с первой попытки. Впрочем, то же самое можно сказать и о решении задачи 82.

84. Первое и второе утверждения не могут быть оба верными, так что третье утверждение верно, т.е. a равно либо 58, либо 59, либо 60. Но ни одно из этих чисел не делитель 26, а остаток от деления на 13 равен 7 при $a = 59$.

85. Неверное произведение имеет вид $50k + 25$, где k — меньший множитель, причем, поскольку остаток должен быть меньше делителя, то $k > 25$. Правильное произведение равно, по условию, $50k - 175$, так что, обозначив буквой m второй множитель, получим уравнение:

$$km = 50k - 175, \quad k(50 - m) = 175,$$

и поскольку $175 = 5 \cdot 5 \cdot 7$, то подходящие корни этого уравнения — числа 35 и 175. Учитывая, что k — меньший множитель, получим $k = 35$, а второй множитель — 45.

86. Если k — меньший сомножитель, то неверное произведение равно $90k + 29$, причем $k > 29$, а верное произведение km равно $90k + 29 - 372 = 90k - 343$:

$$km = 90k - 343, \quad k(90 - m) = 343.$$

Так как $343 = 7 \cdot 7 \cdot 7$, то меньший сомножитель следует искать среди чисел 49 и 343, однако во втором случае второй сомножитель равен $90 - 1 = 89$ — меньше первого, так что искомые числа 49 и 83.

87. Если a — искомое число, то согласно первому условию задачи вместо произведения $a(a+94)$ ученик написал $a(a+94)-40$, и после деления на $a+94$ получил $52(a+94)+107$. Поэтому

$$a(a+94)-40=52(a+94)+107,\quad (a-52)(a+94)=147,$$

и таким образом, число 147 представлено в виде произведения двух натуральных множителей, причем второй из них больше 94, а таких делителей у 147 только один — само число 147. Следовательно, $a+94=147$, т.е. $a=53$.

88. Так как число оканчивается цифрой 0, то оно делится на 10, а тогда его квадрат делится на 100. Но запись данного числа завершается тринадцатью нулями, так что оно не делится на 100, и значит, не может быть точным квадратом.

89. Данное число четно, а четное число не может быть квадратом нечетного, так что из равенства $a=b^2$ следует, что b — число четное, $b=2k$, а тогда число $a=4k^2$ делится на 4. Однако a не делится на 4, так как число 34, образуемое двумя его последними цифрами, на 4 не делится (см. Компендиум. Точные квадраты и кубы).

90. Сумма цифр данного числа равна $12\cdot 1309$, т.е. делится на 3, но не делится на 9, а такое число не может быть точным квадратом (см. Компендиум).

91. Всякое число, удовлетворяющее условию задачи, — четное, и поэтому может быть только кубом четного числа. Но куб четного числа всегда делится на 8: если $b=2k$, то $b^3=8k^3$, в то время как любое такое число a, описанное в условии, не делится на 8. В самом деле, числа 4, 44 и 444 не являются точными кубами, а если число a содержит больше трех цифр, то его можно представить в виде суммы числа с тремя нулями в конце и числа 444, а поскольку первое слагаемое делится на 1000 и поэтому делится на 8, а второе слагаемое $444=400+44$ на 8 не делится, то и их сумма не делится на 8. Следовательно, число рассматриваемого вида не может быть точным кубом.

Комментарий. Ясно, что в решении фактически доказано и более общее утверждение: число, составленное только из цифр 4, не может быть степенью натурального числа — разумеется, «в разумном смысле», т.е. с показателем, большим 1.

92. Так как шестая степень числа является в то же время квадратом его куба, то число, удовлетворяющее условию, должно быть точным квадратом, а этого, согласно задаче 111, не может быть.

Рассуждать можно иначе. Данное число должно иметь вид: $(10n\pm1)^2$. Но $(10n\pm1)^2=100n^2\pm20n+1$, так что предпоследняя цифра четная, так что заданное число не может быть шестой степенью натурального числа, отличного от 1.

93. Данное число делится на 2, и если оно является «настоящей» степенью натурального числа, т.е. с показателем $n>1$, то оно делится на 2^n, однако оно не делится даже на 4 — по соответствующему признаку делимости (см. Компендиум).

94. Заданное число делится на 2, но не делится на 4 — по соответствующему признаку делимости (см. Компендиум). Следовательно, оно не является степенью натурального числа с показателем степени, большим 1.

95. Из всех проверок по признакам делимости удачной является одна — данное число делится на 11, так как сумма цифр, стоящих на четных местах равна сумме цифр на нечетных. Поэтому естественно проверить, делится ли оно на какую-либо степень числа 11.

Заметив повторяющуюся группу цифр 9856, представим заданное число в виде произведения:

$$98\,569\,856\,985\,698\,569\,856=9856\cdot10\,001\,000\,100\,010\,001.$$

Теперь легко увидеть, что второй множитель не делится на 11, и убедиться, что первый не делится на 121:

$$9856=9900-44=11(900-4)=11\cdot896.$$

Поэтому данное число не делится даже на 11^2, и зна-чит, не является степенью натурального числа с показате-лем, большим 1.

96. Данное равенство естественно прежде всего сокра-тить на С и получить равенство П · Л · Ю = М · И · Н · У. Но ни одна из цифр в этом равенстве не может быть равна ни 5, ни 7 — в противном случае одна часть делится на 5, а дру-гая нет.

97. Данная сумма делится на 3 с остатком 1, а число — с остатком 2. Поэтому эти числа не могут быть равны.

98. При делении числа, последняя цифра которого 1, на число с последней цифрой 3 должно получиться число, у ко-торого последняя цифра равна 7, так что равенство невоз-можно.

99. Данное произведение меньше, чем произведение шести сотен, т.е. не больше чем 12-тизначное, а число в правой части — 13-тизначное.

100. Пусть n — такое число. Так как n делится на n, то сумма его цифр делится на n, но если цифр больше одной, то она меньше n, и этого не может быть. Следовательно, n — однозначное. Для $n = 1$, 3 или 9 утверждение верно, а для остальных однозначных n существуют контрприме-ры — числа, у которых сумма цифр не делится на n:

2	4	5	6	7	8
12	16	15	33	34	35

101. Данное число, очевидно, делится на 7 и не делится на 2, а значит, не делится ни на какое четное число. Ясно, что оно не делится на 5 и не делится на 3 (сумма его цифр равна 2005 · 7), а значит, не делится и на 9.

102. Число, удовлетворяющее условию задачи, должно делиться на 5, и следовательно, составлено только из цифр 5, но в этом случае оно не делится на 2.

103. Пусть число a составлено из одинаковых цифр b. Ясно, что число b четно. При этом b не может быть равно 2 или 6 — иначе a не будет делиться на 4, а при $b = 4$ оно оканчивается на 444 и равно, следовательно, $1000k + 444$, т.е. не делится на 8. Таким образом, b может быть равно только 8.

Чтобы число a делилось на 9, нужно, чтобы сумма его цифр делилась на 9, а для этого достаточно, чтобы число цифр делилось на 9. В этом случае a делится и на 3. Оста-лось выяснить вопрос с числом 7. Но из того, что 1001 де-лится на 7, следует, что 888 888 = 888 000 + 888 = 888 · 1001 делится на 7, и делимости на 7 можно добиться, взяв число восьмерок делящимся на 6.

Таким образом, число a будет делится на все однозначные числа, кроме 5, если оно состоит, например, из 18 цифр 8.

104. Натуральное число делится на 36 тогда и только то-гда, когда оно делится на 4 и на 9. По признаку делимости на 4 (см. Компендиум) на 4 должно делиться число $\overline{1n}$, так что n должно быть равно либо 2, либо 6. А для того чтобы за-данное число делилось на 9, надо, чтобы сумма $m + n + 14$ де-лилась на 9. При $n = 2$ число $m + 16$ делится на 9, если $m = 2$, а при $n = 6$ число $m + 20$ делится на 9, если $m = 7$, так что условию удовлетворяют два числа — 67 212 и 67 716.

105. Точный квадрат не может оканчиваться цифрой 7, и следовательно, данное число не является точным квадра-том.

106. Легко убедиться, что точный квадрат может окан-чиваться только цифрами 0, 1, 4, 5, 6 и 9, значит, данное число не является точным квадратом.

107. Последняя цифра степени числа зависит только от последней цифры самого числа, и поэтому достаточно рас-смотреть только однозначные числа. Числа 0, 1, 5 или 6 в любой степени оканчиваются цифрами 0, 1, 5 или 6, осталь-ные числа условию не удовлетворяют, так как их первые степени и квадраты оканчиваются различными цифрами:

$2^1=2$	$3^1=3$	$4^1=4$	$7^1=7$	$8^1=8$	$9^1=9$
$2^2=4$	$3^2=9$	$4^2=16$	$7^2=49$	$8^2=64$	$9^2=81$

Комментарий. Можно рассуждать и иначе: числа a и a^2 оканчиваются одинаковыми цифрами в том и только в том случае, когда разность $a^2 - a = a(a-1)$ делится на 10, а это верно только для $a = 0$, 1, 5, 6.

108. Если число оканчивается на 5, то его квадрат оканчивается на 25. Поэтому равенство неверно.

109. Число с последней цифрой 5 имеет вид $10a + 5$, где a — число, записанное остальными цифрами, а приписать к произведению $a(a + 1)$ число 25 — значит получить число $100a(a+1)+25$. Другими словами, мы должны убедиться, что $100a(a+1)+25=(10a+5)^2$:

$$(10a+5)^2 = 100a^2 + 2\cdot 10\cdot 5a + 25 =$$
$$= 100a^2 + 100a + 25 = 100a(a+1) + 25,$$

что и требовалось доказать.

Комментарий. Отметим, что эти приемом пользуются для устного возведения в квадрат не только для двузначных чисел: например, $175^2 = 30\ 625$, так как $17\cdot 18 = 306$.

110. Остаток от деления данного числа (обозначим его через a) на 3 совпадает с остатком, которое при делении на 3 дает его сумма цифр, а для его нахождения можно не учитывать как цифры, делящиеся на 3, так и группы цифр, сумма которых делится на 3. Поэтому подсчет можно упростить. Таким образом, остаток от деления данного a на 3 равен 2.

Следовательно, a не делится на 3, и если $a = b^2$, то b также не делится на 3, т.е. имеет вид либо $3k + 1$, либо $3k - 1$. Но $(3k\pm 1)^2 = 9k^2 \pm 6k + 1$, так что при делении на 3 число b^2 дает остаток 1 — в отличие от числа a. Полученное противоречие показывает, что данное число не является точным квадратом.

111. Данное число — обозначим его через a — нечетно, и если оно является точным квадратом, $a = b^2$, то b также нечетно и имеет вид либо $4k + 1$, либо $4k - 1$. Но $(4k\pm 1)^2 = 16k^2 \pm 8k + 1$, так что при делении на 4 число b^2 дает остаток 1, тогда как само число a — остаток 3: число $a - 11$ оканчивается на два нуля, т.е. делится на 100, а значит, и на 4, и поэтому a и 11 дают одинаковые остатки от деления на 4. Полученное противоречие показывает, что число a не является точным квадратом.

112. Данное число делится на 4 и последние цифры частного получаются от деления 156 на 4, т.е. равны 39. Обозначим полученное частное через a. Если это число является точным квадратом, то точным квадратом должно быть и число a.

Так как число a оканчивается цифрами 39, то его можно представить в виде $4k + 3$, где k — некоторое натуральное число. Однако мы знаем, что точный квадрат четного числа делится на 4 нацело, а нечетного при делении на 4 дает в остатке 1. Полученное противоречие показывает, что число 55 560 156 не является точным квадратом.

113. Представим данное число в виде $505050...5\cdot 9$, так что задача сводится к тому, чтобы выяснить, является ли точным квадратом число $505050...5$. Так как $2005\cdot 5$ при делении на 3 дает остаток 2, то это число не может быть точным квадратом, а следовательно, не является точным квадратом и исходное число.

114. Так как 352 — четное число, то 352-я степень натурального числа будет одновременно и точным квадратом. Сумма цифр данного числа равна 11 000 000, и следовательно, при делении на 3 дает остаток 2. Но точный квадрат при делении на 3 может давать только остатки 1 и 0:

$$(3k)^2 = 9k^2, \quad (3k\pm 1)^2 = 9k^2 \pm 6k + 1,$$

и поэтому данное число не может быть точным квадратом, а значит, и 352-й степенью натурального числа.

115. Всякое число a указанного в условии задачи вида делится на 25, а значит, и на 5, и если оно является n-й степенью натурального числа, где $n \geq 3$, то оно делится, по крайней мере на 125. Однако при делении «уголком» числа a на 25 в частном получится число, оканчивающееся на 1, которое не делится на 5. Поэтому число указанного в условии задачи вида не может быть кубом или большей степенью натурального числа.

Остается проверить, может ли число a быть точным квадратом, причем нечетного числа. Для этого точным квадратом, причем нечетного числа, должно быть частное от его деления на 25, а это частное, как легко видеть из деления «уголком», равно

$$101010...10101 = 101010...10000 + 101$$

и при делении на 8 дает остаток 5. Но квадрат нечетного числа при делении на 8 не может давать остаток 5: оно может быть представлено в виде $8k \pm 1$ или $8k \pm 3$, а

$$\left(8k \pm 1\right)^2 = 64k^2 \pm 16k + 1, \quad \left(8k \pm 3\right)^2 = 64k^2 \pm 48k + 9,$$

при делении на 8 дает остаток 1. Следовательно, число a не может быть точным квадратом.

116. Первое и второе утверждения не могут быть оба верными: если a^{12} оканчивается цифрой 1, то его квадрат a^{24} также оканчивается цифрой 1, так что третье утверждение верно, т.е. a равно либо 16, либо 19. Но все степени с натуральным показателем числа 16 оканчиваются на цифру 6, и поэтому $a \neq 16$, и стало быть, $a = 19$.

117. Оба числа в заданной сумме нечетны, т.е. имеют вид $2n + 1$ и $2k + 1$, так что их квадраты имеют вид $4p + 1$ и $4q + 1$, а сумма имеет вид $4m + 2$, и поэтому не является точным квадратом (см. Компендиум).

118. Все три числа в заданной сумме нечетны, следовательно, их квадраты имеют вид $4n + 1$, так что их сумма имеет вид $4m + 3$, и поэтому не является точным квадратом (см. Компендиум).

Комментарий. Из решения задачи 109 следует, что третья справа цифра числа указанного вида может быть только 0, 2 или 6. Учитывая этот факт, решение можно значительно сократить.

119. Поскольку числа $[50\pi]$ и $[100\pi]$ — это на самом деле 157 и 314, то оба они не делятся на 3, и поэтому их квадраты имеют вид $3n + 1$, а сама заданная сумма имеет вид $3m + 2$, и следовательно, не является точным квадратом (см. Компендиум).

120. Так как квадрат любого натурального числа, не делящегося на 3, при делении на 3 дает остаток 1, то сумма любых двух таких чисел при делении на 3 дает остаток 2, а такое число не может быть точным квадратом (см. Компендиум).

121. Пусть a и b — цифры данного числа. Тогда само число равно $10a + b$, а обращенное число $10b + a$ и по условию:

$$a + b = 6, \quad 10a + b + 18 = 10b + a,$$

откуда $a + b = 6$, $b - a = 6$, т.е. $b = 4$, $a = 2$, так что искомое число 24.

Комментарий. Комбинаторное решение задачи см. 146.

122. Поступим в соответствии с указанием, получим верное по условию равенство

$$700 + c = \left(10c + 7\right) + 351, \quad 9c = 342, \text{ откуда } c = 38.$$

123. Пусть первые две цифры искомого числа a образуют двузначное число b. Тогда, по условию, $a = 10b + 3$, преобразованное число было $10b + 3$, а преобразованное равно $300 + b$ и по условию, $300 + b = 10b + 3$, откуда $b = 30$, а искомое число равно 303.

124. Обозначим пятизначное число, идущее в искомом числе после 1, через a. Тогда искомое число равно $a + 1\,000\,000$, а после перестановки получается число $10a + 1$, и по условию,

$$3\left(a + 1\,000\,000\right) = 10a + 1, \quad 7a = 999\,999, \quad a = 142\,857.$$

125. Пусть первые две цифры числа образуют двузначное число k. Тогда первоначальное число было $10k + 3$, а преобразованное будет $300 + a$, откуда $300 + k = 10k + 3 + a$, так что $9k = 3 \cdot 99 + a$. Это уравнение имеет решение при всех a, кратных девяти, однако не все эти решения нас устраивают — число k должно быть двузначным. Поэтому

$$90 \le 3 \cdot 99 + a \le 9 \cdot 99, \text{ Откуда } -207 \le a \le 594,$$

и, учитывая, что a по условию положительное число, окончательный ответ можно записать в виде $a = 9n$, где n — целое число от 1 до 66.

126. Пусть цифры искомого числа a, b, c, d. Тогда разность искомого числа и его обращенного равна:

$$(1000a + 100b + 10c + d) - (1000d + 100c + 10b + a) =$$
$$= 999(a - d) + 99(b - c) + 9(c - d) + (d - a) = 90$$

Так как разность двух любых цифр (однозначных чисел) есть число от -9 до 9, то это равенство может выполняться только в случае, когда его первое слагаемое равно нулю, т.е. $a = d$, и оно принимает вид $11(b - c) + (c - d) = 10$ и не может быть верным, если b и c отличаются больше, чем на 1. Но при $b = c$ оно принимает вид $c - d = 10$, чего не может быть, так что $b - c = \pm 1$.

А для того чтобы искомое число было наибольшим, следует, очевидно, выбрать $a = d = 9$, $b = c + 1$, но поскольку требуется, чтобы сумма $b + d$ была наименьшей, то b нужно взять равным 1. Таким образом, искомое число определилось полностью — это 9109.

Комментарий. См. также иное, чисто «комбинаторное» решение этой задачи, помещенное ниже под номером 151.

127. Запишем данное уравнение:

$$100x + 10y + z = 10xy + yz$$

и заметим, что $100x > 10xy$, так как $y < 10$, а всякое «двузначное число» $10y + z$ (в данном случае оно может начинаться с цифры 0) не меньше произведения его цифр — это хорошо видно из таблицы умножения, но легко доказывается и формально: $(10y + z) - yz = (10 - z)y + z \ge 0$. Поэтому левая часть этого «равенства» всегда больше правой его части.

128. Пусть a и b — данные трехзначные числа. Шестизначные числа, составленные из них, равны соответственно $1000a + b$ и $1000b + a$, и по условию,

$$(1000a + b) - (1000b + a) = 999(a - b),$$

и так как разность неравных друг другу трехзначных чисел может быть равна любому числу от 1 до 899 (отрицательные разности в данном случае полностью аналогичны положительным), то надо доказать, что ни при каких натуральных k от 1 до 899 число $999k$ не делится на 2012.

Посмотрим, какие у этих чисел есть делители:

$$999k = 9 \cdot 111k = 9 \cdot 37 \cdot 3k = 27 \cdot 37k;$$
$$2012 = 4 \cdot 503,$$

дальше возникает подозрение, что число 503 простое, но мы не будем выяснять, так ли это на самом деле, — нам достаточно проверить, имеет ли оно общие делители с первым числом. Устроим проверку: по признаку делимости 503 не делится на 3, а так как $503 = 4 \cdot 111 + 63$, то оно не делится и на 37. Поэтому числа 999 и 2012 взаимно просты, и если число $999k$ делится на 2012, то на 2012 делится число k, но так как k — число от 1 до 899, то это невозможно, значит, разность полученных в задаче шестизначных чисел не делится на число 2012.

129. Пусть заданное число $10a + b$. Тогда $a = 10a + b - 10b - a$, $8a = 9b$, откуда $a = 9$, $b = 8$. Следовательно, искомое число есть 98. Другое решение см. 145.

130. Точный квадрат может оканчиваться только цифрами 0, 1, 4, 5, 6 и 9, откуда и следует требуемое утверждение.

131. Остаток от деления числа на 9 зависит только от суммы цифр этого числа, а при любой перестановке цифр эта сумма не меняется.

132. Сумма цифр любого из таких чисел равна 21. Поэтому все они делятся на 3 и не делятся на 9, значит, не могут быть точными квадратами.

133. Среди данных цифр последней у точных квадратов может быть только 5, а тогда точный квадрат оканчивается на 25, а две его первые цифры составляют число, являющееся произведением двух последовательных чисел (см. задачу 109). Однако ни 38, ни 83 таким произведением не является, и поэтому составить точный квадрат из данных цифр нельзя.

134. Если при указанной в условии задачи перестановке «начальная» группа оканчивается числом, стоящим на четном месте, то все цифры перейдут на нечетные места, в противном случае все останутся на четных. В первом случае суммы цифр на четных и нечетных местах поменяются местами и их разность поменяет знак, но на делимости на 11 это не скажется. Во втором случае тем более «ничего не изменится». Отсюда и следует доказываемое утверждение.

135. В соответствии с признаком делимости на 11, составим отдельно «четную», можно «нечетную», половины четырехзначного числа, так чтобы оно делилось на число 11. При этом разность между суммами цифр, стоящих в этих половинах, делится на 11 только в случае, когда эти суммы равны, и поскольку из заданных цифр можно единственным способом составить равные суммы по два слагаемых: $2 + 5 = 3 + 4$, то условию задачи удовлетворяют числа 2354, 5324, 2453 и 5324 — всего 6.

136. В числе a на нечетных местах стоят 1 и 5, и их сумма равна $n + 5n = 6n$, а на четных местах стоят 3 и 4, и их сумма равна $3n + 4n = 7n$, так что разность между этими двумя суммами равна n, так что a делится на 11 тогда и только тогда, когда n делится на 11.

137. Так как

$$a_{n+1} = a_n \cdot 10^6 + 541\,354 = 999\,999 a_n + a_n + 541\,354,$$

а число 541 354 при делении на 7 дает остаток 2, то $a_{n+1} - a_n - 2$ делится на 7, т.е. $a_{n+1} - a_n - 2 = 7k_n$. «Распишем» это равенство, начиная с $n = 1$:

$$a_2 - a_1 - 2 = 7k_1,$$
$$a_3 - a_2 - 2 = 7k_2,$$
$$a_4 - a_3 - 2 = 7k_3,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{n+1} - a_n - 2 = 7k_n,$$

и если мы сложим полученные n равенств, то в левой части друг за другом взаимно уничтожатся «почти все» слагаемые, кроме двоек, и останется лишь разность $a_{n+1} - a_1 - 2n$, а в правой части получится число, делящееся на 7. Так как $a_1 = 1354$ при делении на 7 дает остаток 3, то a_{n+1} делится на 7, если $2n + 3$ делится на 7, т.е. при делении на 7 число $2n$ дает остаток 4, а это верно, если n дает остаток 2: поскольку число 7 простое, разность $2n - 4$ делится на 7, если $n - 2$ делится на 7, $n = 7m + 2 \quad (m \geq 0)$.

Итак, a_{n+1} делится на 7, если $n = 7m + 2 \quad (m \geq 0)$, и переходя от $n + 1$ к n, а от n к $n - 1$, получаем, что a_n делится на 7, если $n - 1 = 7m + 2, \quad n = 7m + 3 \quad (m \geq 0)$. И последняя, можно сказать, эстетическая поправка: вместо $m \geq 0$ лучше иметь условие $m \in \mathbf{N}$ — мы все-таки рассматриваем только натуральные числа и поэтому m заменяем на $m - 1$, и получаем равенство $n = 7m - 4 \quad (m \in N)$ — это и есть искомые значения n.

Комментарий. А вот как выглядит это решение на языке *сравнений* — естественно, по модулю 7 (см. Компендиум). Так как 1001 делится на 7, т.е. $10^3 + 1 \equiv 0$, то $10^3 \equiv -1$, $10^6 \equiv 1$, и поскольку $a_{n+1} - a_n \cdot 10^6 + 541\,354 \equiv a_n + 2$, $a_1 = 1354$, то $a_1 \equiv 3$, $a_n \equiv 3 + 2(n-1) \equiv 2n + 1$, так что $a_n \equiv 0$ при $2n + 1 \equiv 0$, $6n + 3 \equiv 0$, $-n + 3 \equiv 0$, т.е. при $n \equiv 3 \equiv -4$. Таким образом, a_n делится на 7 при $n = 7k - 4$.

138. Решение проведем на языке *сравнений* по модулю 13. «Упростим» сначала число , заменив числа 13 и 54 их остатками при делении на 13:

$$a_n = 13541354\ldots1354 \equiv 00020002\ldots00020002,$$
и обозначим полученное число через b_n.

Так как 1001 делится на 13, т.е. $10^3 + 1 \equiv 0$, то $10^3 \equiv -1$, $10^6 \equiv 1$ и поскольку $b_{n+1} = b_n \cdot 10^6 + 20002 \equiv b_n + 8$, $b_1 = 1354$, то $b_1 \equiv 2$, $b_n \equiv 2 + 8n \equiv 8n - 6$, так что $b_n \equiv 0$ при $8n + 2 \equiv 0$, и умножая это сравнение на 5, получаем $40n + 10 \equiv 0$, $n \equiv -10 \equiv 3 \equiv -10$. Таким образом, b_n делится на 13 при $n = 13k - 9 \quad (k \in N)$.

Комментарий. Естественно возникает вопрос, как мы догадались умножить сравнение $8n + 2 \equiv 0$ именно на 5. Говоря конкретно, перебирая в уме числа, кратные 13, мы искали среди них числа, которые отличаются на 1 от числа, кратного 8, т.е. подбирали решение в натуральных числах одного из уравнений $13x - 8y = \pm 1$ — то же самое мы делали и в предыдущей задаче 137.

Теоретически это всегда можно сделать, так как 13 и 7 — простые числа: если p — число простое, то уравнение $px + ay = 1$ всегда имеет целочисленные решения (см. Компендиум). Подчеркнем в то же время, что для использования этого утверждения при решении задач мы не обязаны его доказывать — например, в двух этих задачах мы *указали* нужные множители, просто «взяв их с потолка», и никто не вправе видеть в этом какой-то логический пробел. Тем более это касается решения задач с выбором ответа.

На самом деле подбор соответствующего множителя для уравнения — это подбор хотя бы одного решения уравнения $px + ay = 1$, или *решения сравнения* вида $px \equiv 1 \pmod{a}$, а это всегда можно сделать алгоритмически — перебирая все возможные остатки от деления на p.

139. Если взять 11 пакетов вместимостью 9 кг, то для «лишних» 8 кг можно взять 2 пакета вместимостью 3 кг и 1 пакет вместимостью 2 кг, так что 14 пакетов достаточно. Если же взять хотя бы на 1 пакет вместимостью 9 кг меньше, то чтобы пересыпать оставшиеся не менее чем 17 кг, понадобится не меньше 7 пакетов, так что общее число пакетов будет больше 14.

140. Так как сумма двенадцати восьмерок оканчивается цифрой шесть, то этот случай невозможен.

141. Чтобы сумма чисел, последние цифры которых равны 8, была круглым числом, число слагаемых должно делиться на 5. Попробуем составить число 1000 из пяти слагаемых. Самое большое слагаемое в этой сумме может быть 888, и такое слагаемое может быть только одно, а так как $1000 - 888 = 112$, то может быть еще одно слагаемое 88, и, наконец, поскольку $112 - 88 = 24$, последние три слагаемые равны 8:

$$888 + 88 + 8 + 8 + 8 = 1000.$$

142. Число тем меньше, чем меньше цифр участвуют в его записи и чем «меньше» цифры в старших разрядах. Поэтому используем максимальное число девяток — 111 и поместим их в младшие разряды, а оставшуюся единицу — в самый старший. Так у нас получилось число 1999...9, где цифра 9 повторяется 111 раз.

143. Ясно, что чем большие цифры мы будем ставить в начало числа, тем большее число получится в результате, и поэтому мы начнем с цифры 9. Трех девяток в искомом числе не может быть, а при двух девятках наибольшее число получится, если к 99 приписать 50, так что искомое число есть 9950.

144. Ясно, что чем меньшие цифры мы будем ставить в начало числа, тем меньшее число получится в результате, и поэтому мы начнем с цифры 1. Если взять в начале числа две единицы, то сумма двух последних цифр должна быть равна 19, а это невозможно. Значит, вторая цифра не может быть единицей, а оставшуюся сумму 18 можно представить как сумму двух девяток, и полученное число 1299 будет наименьшим.

145. Разность, о которой говорится в условии задачи, делится на 9, и поскольку эта разность однозначное число — первая цифра данного числа, то первая цифра искомого числа есть 9. Вторая цифра тогда равна 8 — в противном случае разность больше 8. Следовательно, искомое число есть 98.

146. Так как искомое число меньше своего обращенного, то первая цифра меньше второй, а таких чисел с суммой цифр 6 всего два — 15 или 24. Но $15 + 18 \neq 51$, а $24 + 18 = 42$, и значит, искомое число 24.

147. Цифра единиц полученного числа та же, что цифра десятков в первоначальном, а вторая в разряде десятков та же, что цифра сотен в первоначальном. Но первоначальное число оканчивается цифрой 3, так что при увеличении его на 27 последней цифрой будет нуль. Это значит, что нуль был в разряде десятков первоначального числа, и тогда в разряде десятков полученного будет сумма $0 + 2$ и еще один полный десяток, образовавшийся при сложении цифр в разряде единиц, — в итоге запишется цифра 3. А в первоначальном числе эта же цифра стоит в разряде сотен, так что первоначальное число равно 303.

На бумаге это решение выглядит как отгадывание числового ребуса:

$$\begin{array}{r} \text{A}\;\text{B}\;3 \\ +\quad 2\;7 \\ \hline 3\;\text{A}\;\text{B} \end{array} \qquad \begin{array}{r} \text{A}\;0\;3 \\ +\quad 2\;7 \\ \hline 3\;\text{A}\;0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3\;0\;3 \\ +\quad 2\;7 \\ \hline 3\;3\;0 \end{array}$$

Комментарий. Отметим, что алгебраическое решение этой задачи проще. Отсюда вывод — прежде чем искать комбинаторное решение, желательно «прикинуть» возможную сложность алгебраического решения. Алгебраическое решение приведено в задаче 123.

148. В задаче описана трансформация, произошедшая с первоначальным числом, — изменение в порядке цифр и сопутствующее этому увеличение на 18. Посмотрим на это преобразование с другой стороны, поменяв ролями основное и сопутствующее изменения, — число, оканчивающееся

цифрой 2, увеличили на 18 и при этом цифры числа совершили «циклическую перестановку».

Увеличить число на 18 — все равно, что прибавить 20 и вычесть 2, т.е. из разряда единиц вычесть 2, а к разряду десятков прибавить 2. Так как в разряде единиц «старого» числа стояла двойка, то у «нового» числа на этом месте оказался нуль. Это значит, что нуль был в разряде десятков «старого» числа. Но тогда в результате прибавления к нему двойки мы получаем цифру 2 в разряде десятков «нового» числа — и соответственно, можем сказать, что она же была в разряде сотен «старого». Таким образом, «старое» число равно 202.

Комментарий. Здесь словами описано практически мгновенное мысленное действие, однако требовать таких решений от учащихся не стоит — их надо этому только учить. «Обычное» рассуждение — см. решение аналогичной задачи 122, 123.

149. Из трех разных цифр, отличных от нуля, каждый раз используя их все, можно составить 6 различных трехзначных чисел. В каждом разряде любая из цифр «побывает» дважды, поэтому их сумма будет равна $222(k + l + m)$, а учитывая, что это число больше 2700, но не превосходит 2900, мы получаем, что сумма $k + l + m$ может быть равна только 13.

Осталось построить самое большое четное число, в котором бы цифры не повторялись и в сумме давали 13. Цифра единиц может быть только 2 — наименьшая ненулевая четная. Если первая слева цифра 9, то цифра десятков совпадает с цифрой единиц, что не согласуется с условием, поэтому в качестве первой слева пробуем цифру 8: в этом случае цифра десятков равна 3, и мы получаем число 832, полностью удовлетворяющее условию.

150. Судя по условию, двузначные числа не слишком велики: сумма удвоенного большего числа и утроенного меньшего не может быть больше «упятеренного» меньшего, т.е. меньшее число находится в пределах от 10 до 14. Из всей «фантасмагории» с приписываниями и делением можно сделать вывод о четности меньшего числа — оно равно 10, 12 или 14. Большее число соответственно равно $(72-30):2=21$, $(72-30):2=18$ или $(72-30):2=15$. Осталось проверить, для каких пар выполняется описанное действие. Здесь удобно составить таблицу:

Пара	Первое число	Второе число	Свойство
10 и 21	21 010	10 210	$21\,010 = 2 \cdot 10\,210 + 590$
12 и 18	18 012	12 180	$18\,012 \neq 2 \cdot 12\,180 + 590$
14 и 15	15 014	14 150	$15\,014 \neq 2 \cdot 14\,150 + 590$

Проверяя равенство «по последней цифре», исключаем последние две строки, равенство в первой проверяем «честно» и убеждаемся, что искомые числа 10 и 21.

Комментарий. Если бы мы внимательнее читали «свойство», мы бы заметили, что меньшее из чисел — круглое и таблица бы не понадобилась.

151. Поскольку из всех чисел, обладающих описанным свойством, нужно только одно — наибольшее, то будем искать его среди четырехзначных чисел, первая цифра которых есть 9, а так как сумма цифр сотен и единиц принимает наименьшее возможное значение, то цифру сотен будем подбирать, начиная с нуля: ясно, что число 9009 не удовлетворяет условию, а $9109 = 9019 + 90$, так что это и есть искомое число.

152. Разложим число 1980 на взаимно простые множители:

$$1980 = 198 \cdot 10 = 99 \cdot 2 \cdot 10 = 9 \cdot 11 \cdot 4 \cdot 5,$$

и проверим, делится ли число 192021...80 на каждый из них — к счастью, для каждого делителя имеется удобный признак делимости.

С делителями 4 и 5 все просто — так как число оканчивается нулем, то оно делится на 5, последние две цифры составляют число 80, а оно делится на 4. Признаки делимости на 9 и на 11 предполагают нахождение сумм цифр, и мы начнем с «более сложного» признака делимости на 11 —

для его применения надо сосчитать отдельно суммы цифр, стоящих на четных и нечетных местах, откуда сразу же получится и сумма всех цифр, необходимая для применения признака делимости на 9.

На нечетных местах стоят единица, за ней десять двоек, десять троек, и т.д. до десяти семерок и последняя цифра восемь — всего

$$1 + 10(2+3+4+5+6+7) + 8 = 10 \cdot 27 + 9 = 279.$$

На четных местах стоят цифра 9, далее подряд шесть «кортежей» из всех десяти цифр от 0 до 9, затем последний нуль, и всего

$$9 + 6(0+1+2+\ldots+9) + 0 = 6 \cdot 45 + 9 = 279$$

и поскольку полученные суммы равны, то данное число делится на 11. На 9 оно тоже делится, так как 279 + 279 делится на 9. Таким образом 192021...80 делится на каждое из чисел 4, 5, 9 и 11, следовательно, делится и на их произведение, что и требовалось доказать.

153. Обозначим искомое число через a. Прочитаем условие «наоборот»: при первое условие означает, что при делении a на 4 получается остаток 3, а второе — что при делении a на 3 получается остаток 2. Поэтому $a+1$ делится на 4 и на 3, т.е. на 12, так что $a+1=12k$, $a=12k-1$, и кандидатами на «звание» искомого числа являются следующие восемь чисел:

$$11,\ 23,\ 35,\ 47,\ 59,\ 71,\ 83,\ 95.$$

По первому условию, сумма цифр числа a больше 3, т.е. число 11 «отпадает», а если разделить искомое число на сумму цифр, то целая часть частного будет равна 4, так что мы можем провести первое испытание:

$$11:2 = 5,\ldots;\ 23:5 = 4,\ldots;\ 35:8 = 4,\ldots;\ 47:11 = 4,\ldots;$$

$$59:14 = 4,\ldots;\ 71:8 = 8,\ldots;\ 83:11 = 7,\ldots;\ 95:14 = 6,\ldots,$$

после которого остались числа 23, 35, 47 и 59.

По второму условию, число a примерно в 3-4 раза больше произведения его цифр: если b — это произведение, то

$a = 3b + 5$ и $3b < a < 4b$. Это дает возможность моментально исключить из числа кандидатов

$$59 < 3 \cdot 5 \cdot 9, \quad 47 < 3 \cdot 4 \cdot 7 \text{ и } 35 < 3 \cdot 3 \cdot 5,$$

а единственное оставшееся число 23 и является решением задачи:

$$23 = 4 \cdot 5 + 3 = 3 \cdot 6 + 5.$$

154. Пусть a — данное число. Первое условие означает, что a имеет вид $8k + 1$, а из второго следует, что «обращенное» число имеет вид $4k + 2$, т.е. четно, но не делится на 4. Поэтому первая цифра числа a четна, и a есть одно из чисел 25, 41, 49, 65, 81. Проверим эти числа.

Их «обращенные» — это 52, 14, 94, 56, 18. Но 52 и 56 не удовлетворяют второму условию — они делятся на 4, и для остальных проверяем первое условие:

$$41 = 8 \cdot 5 + 1, \quad 49 = 3 \cdot 13 + 10, \quad 81 = 9 \cdot 9,$$

и таким образом, условию задачи удовлетворяет только число 41.

Комментарий. Можно решить задачу формально — с помощью системы уравнений. Если x и y — соответственно первая и вторая цифры числа a, то условие задачи записывается в виде

$$10x + y = 8(x + y) + 1, \quad 10y + x = 4(x - y) + 2$$

или

$$2x - 7y = 1, \quad -3x + 14y = 2,$$

а эта система решается с помощью известного алгоритма.

Первое решение, на наш взгляд, хорошо для себя, тогда как второе — для экзамена: его проще «оформить».

155. Пусть a — данное число. Из первого условия задачи следует, что a имеет вид $6k + 8$, причем $8 < k$ как остаток от деления, и a четно. Из второго условия следует, что «обращенное» число b имеет вид $15k + 2$, а такие двузначные числа — 17, 32, 47, 62, 77, 92, и поскольку сумма цифр числа b больше 8, то $b \in \{47, 77, 92\}$, а $a \in \{74, 77, 29\}$.

Из второго условия следует, что цифры числа a различны, т.е. $a \neq 77$,

$$74 = 6 \cdot 11 + 8, \quad 92 = 8 \cdot 11 + 4,$$

и таким образом, условию задачи удовлетворяет только число 74.

156. Сумма квадратов двух цифр равна 13 только в одном случае — когда одна из них 2, а другая 3, а 85 можно получить двумя способами — $2^2 + 9^2$ или $6^2 + 7^2$. Кроме того, искомое число больше своего обращенного (на 1089), так что первая цифра не может быть меньше последней, и следовательно, первая цифра есть 3, а последняя — 2, т.е. осталось рассмотреть всего четыре числа: 3292, 3922, 3672 и 3762.

А для этих чисел надо отнять 1089 и посмотреть, в каких случаях при вычитании получается обращенное число или, что, пожалуй, технически проще, к их обращенным числам 2923, 2293, 2763, 2673 прибавить 1089, т.е. прибавить 1100 и вычесть 11. А это делается, можно сказать, мгновенно и получаются числа: 4012, 3382, 3852, 3762, и значит, искомое число есть 3762.

157. Будем обозначать искомое число буквой a. Из первого предложения мы можем «выудить», что $a + 1$ делится и на 7, и на 3, т.е. делится на 21, так что $a + 1 = 21k$, $a = 21k - 1$. Следовательно, a — одно из чисел 20, 41, 62 и 83, а поскольку из второго условия следует, что произведение цифр числа a больше 11, то «отпадают» 20 и 41. (Заметим, что 20 «отпадает» и по другой причине — для него не имеет смысла второе условие задачи.)

Оставшиеся два числа проверяем непосредственно:

$$61 = 7 \cdot 8 + 5, \quad 83 = 11 \cdot 7 + 2 = 24 \cdot 3 + 11,$$

т.е. условию задачи удовлетворяет только число 83.

Комментарий. В переводе на язык алгебры эта задача принимает вид системы уравнений:

$$10x + y = 7(x + y) + 6 = 3xy + 11$$

и приемы для решения таких задач рассмотрены ниже — при решении уравнений в целых числах (задача 214). При прочтении условия, как правило, трудно сказать наверняка, какое решение будет проще — алгебраическое или комбинаторное, и поэтому полезно учиться/учить интуитивно оценивать объем предстоящего перебора и всячески стремиться к его сокращению, искать соответствующие возможности, учитывая «мельчайшие» подробности в условии задачи.

158. Будем обозначать искомое число буквой a. Из условия следует, что при делении на 3 число a дает остаток 2. Кроме того, произведение цифр числа a больше 11, откуда следует, что первая цифра числа a больше 1. Однако этой информации еще слишком мало, чтобы отважиться на полный перебор двузначных чисел, удовлетворяющих этим двум условиям, и при ориентации на комбинаторное решение следует еще хотя бы немного «повозиться» с условием. Впрочем, это зависит от индивидуального предпочтения — работать «головой», быть может безуспешно, или «руками», где успех в конце концов гарантирован.

При решении «руками» мы должны будем составить список кандидатов на «звание» искомого числа. Начав с 26, к последнему, уже полученному числу, прибавляем 3, перемножаем цифры и сравниваем это произведение с 11:

26, 29, 35, 38, 44, 47, 53, 56, 59, 62, 65, 68, 74, 77, 83, 86, 89, 92, 95, 98.

С другой стороны, нельзя не воспользоваться тем, что число a — двузначное, т.е. меньше 100, и если b — произведение цифр искомого числа, то $a = 3b + 11$, $3b < 89$, $b \le 29$, и это дает еще одну возможность уменьшить полученный длинный список, исключив из него 56 и 65, 59 и 95, 68 и 86, 89 и 98, 77. Кроме того, при беглом просмотре списка нетрудно заметить, что $b \ge 12$, так что $a = 3b + 11 \ge 47$, и «отпадают» еще 5 кандидатов, и их остается всего 6: 47, 53, 62, 92, 83, 74, а это уже достаточно мало, чтобы прибегнуть к непосредственной проверке по условию задачи.

Для организации проверки удобно использовать таблицу:

Число a	47	53	62	92	83	74
Произведение цифр	28	15	12	18	24	28
Остаток от деления	19	8	0	2	11	18

Из этой таблицы видно, что условию удовлетворяет только число 83.

Комментарий. Это решение показывает, что в предыдущей задаче 157 первое условие — лишнее. Обычное алгебраическое решение этой задачи приведено в рубрике «Уравнения в целых числах» — задача 216.

159. Пусть a — искомое число. Тогда из условия задачи следует, с одной стороны, что $a + 1$ делится на 7, т.е. $a = 7k - 1$, и с другой стороны, сумма его цифр больше 6. Список чисел, удовлетворяющих этим двум условиям, начинается с 27:

$$a \in \{27, 34, 48, 55, 62, 69, 76, 83, 90, 97\},$$

и составив таблицу

Число a	27	34	48	55	62	69	76	83	90	97
Произведение цифр	9	7	12	10	8	15	13	11	9	16
Остаток от деления на 7	0	6	0	5	6	9	11	6	0	1

видим, что только числа 34, 62 и 83 подходят, а поскольку и частное должно быть равно 7, то число 34 «отпадает», так что условию задачи удовлетворяют только числа 83 и 62.

Комментарий. Алгебраическое решение этой задачи приведено в задаче 215.

160. Так как сумма двух цифр не может быть больше 18, то из первого условия следует, что первая (слева) цифра любого числа, удовлетворяющего условию задачи, не больше 6. Из второго условия следует, что вторая цифра числа не меньше третьей, и, наконец, из третьего ясно, что разность двузначных «хвостов» числа меньше или равна 81 и не равна 0, т.е. она не делится на 81, и поэтому либо эти две цифры равны, либо цифра десятков не меньше 8.

Приступим к перебору и будем перебирать числа по их первой цифре, которая определяет сумму двух других, и, конечно, не будем забывать про ограничения на вторую и третью цифры. Для меньшей нагрузки составим таблицу:

a	1	2	3	4	5	6
$b + c$	3	6	9	12	15	18
	—	233	390,381	493,484	596,587	699

Теперь для проверки третьего условия задачи нужно провести соответствующие вычитания. Из разностей

$$33 - 33,\ 90 - 09,\ 93 - 39,\ 66 - 66,\ 84 - 48,\ 87 - 78,\ 99 - 99$$

на 81 делятся первая, вторая, четвертая и седьмая, т.е. условию задачи удовлетворяют числа 233, 390, 466 и 699.

Комментарий. Перебор всех возможностей в этой задаче оказался не слишком простым, и несколько более коротким оказывается решение, где перебор комбинируется с началом алгебры — введением обозначений. Такое решение приведено в задаче 222.

161. Если искомое число грузовиков равно x, то 323 делится на x и $x + 2$, т.е. 323 имеет два «соседних» и, естественно, нечетных делителя. Ни по одному из известных признаков делимости делители числа 323 найти не получается, и придется перебирать простые делители, начиная с 7.

Но $323 = 280 + 43$ на 7 не делится, $323 = 330 - 7$ на 11 не делится, $323 = 260 + 63$ на 13 не делится, но $323 = 17 \cdot 19$, так что $x = 17$.

162. Выписав квадраты нескольких первых натуральных чисел: 1, 4, 9, 16, 25, 36 и заметив, что сумма даже первых четырех квадратов меньше 45, так что один из квадратов равен 25 или 36. В первом случае 45 можно представить в виде сумм трех квадратов: $45 = 25 + 16 + 4$, а во втором — нельзя. Следовательно, искомое число составлено из цифр 5, 4, 2, причем, как ясно из второго условия, первая цифра больше последней, и остается проверить числа 542, 524 и 452. Из них второму условию удовлетворяет только число 452.

163. Первому условию задачи удовлетворяют только числа 13, 24, 35, 46, 57, 68, 79, а из второго условия следует, что искомое число является делителем числа 144. Просматривая выписанные числа, легко убедиться, что такое число одно — это 24.

164. Так как 2430 делится на 5, то либо само искомое число, либо число, образованное перестановкой его цифр, делится на 5, и следовательно, одна из цифр искомого числа есть 5 или 0. Поэтому надо проверить выполнение второго условия для чисел 54, 65 и 10. Так как

$$54 \cdot 45 = 2430,\ 65 \cdot 56 > 3000,$$

а при перестановке цифр числа 10 получается 01 — «запрещенная» запись натурального числа, то решением задачи является единственное число 54.

Комментарий. Заметим, что иногда запись натуральных чисел с одним или несколькими нулями в начале не считают запрещенной, и например, считают, что $0085 = 85$. При таком соглашении в этой задаче нужно еще убедиться, что $10 \cdot 1 \neq 2430$.

165. Из второго условия задачи следует, что произведение цифр данного числа больше 45. Из девяти двузначных чисел, у которых число десятков на единицу больше числа единиц, этому условию удовлетворяют только два — 87 и 98. Так как $8 \cdot 7 - 45 = 11 \neq 3 \cdot 8$, $\quad 9 \cdot 8 - 45 = 27 = 3 \cdot 9$, то искомое число есть 98.

166. Из семи двузначных натуральных чисел, у которого число десятков на два больше числа единиц, т.е. чисел

$$20,\ 31,\ 42,\ 53,\ 64,\ 75,\ 86,\ 97,$$

а второму условию удовлетворяют только те, у которых произведение цифр четно и больше 16, а таких среди выписанных только два — 64 и 86. Так как $64 = (6 \cdot 4) \cdot 2 + 16$, а $86 = (8 \cdot 6) + 38$, то искомое число 64.

167. Трехзначные кубы однозначных натуральных чисел — это 125, 216, 343, 512, 729, из них являются кубами цифры единиц только три — 125, 216 и 729. Двузначные числа, о которых говорится в условии, соответственно равны 21, 12 и 27. Квадраты первых двух из них оканчиваются цифрами 1 и 4 и не могут быть равны числам 125 и 216, а $27^2 = 729$, следовательно, это число и есть искомое.

168. Условие задачи замысловато, поэтому прежде всего упростим его. Первое условие означает только то, что задуманное число делится на 7, второе — что оно делится на 8. Третье условие можно заменить равносильным — если из задуманного числа вычесть 8, то результат разделится на 17 — в этом случае мы имеем общее число 8 со вторым условием. Попробуем этим воспользоваться.

Мы знаем, что задуманное трехзначное число делится на 8. Если из него вычесть 8, то оно «не перестанет» делиться на 8, но будет делиться и на 17, т.е. задуманное число имеет вид $17 \cdot 8k + 8$, где k — натуральное число от 1 до 7 и может быть равно 144, 280, 416, 552, 688, 824 или 960.

Но задуманное число должно делиться еще и на 7, а этому условию удовлетворяет всего одно из выписанных чисел — число 280, это и есть задуманное число.

169. Сумма двух цифр — число от 0 до 18. Поэтому этот человек не моложе 18 лет, так что мог родиться не ранее 1978 г. Однако в девяностых он родиться не мог — в этом случае сумма последних двух цифр года рождения была бы не меньше девяти, а возраст — не больше шести.

Рассмотрим восьмидесятые годы: сумма двух последних цифр растет от 8 — в 1981 г. до 17 — в 1989 г., а соответствующий возраст убывает от 16 до 7, и поэтому совпадение возможно только один раз и «где-то посередине». Подходящим является 1984 г., и остается проверить годы 1978 и 1979. Непосредственным подсчетом они исключаются, так что человек родился в 1984 г.

170. Выпишем пары цифр (без учета их порядка), у которых разность равна 4:

4 и 0, 5 и 1, 6 и 2, 7 и 3, 8 и 4, 9 и 5.

Сумма квадратов цифр должна быть больше 37, так что в «первом отборочном туре» выбывают первые две пары,

и остается второй тур — сравнение суммы квадратов и произведения цифр. Для его проведения заметим, что разность этих чисел 37 должна быть нечетной, и поэтому обе цифры не могут быть четными, и в этом туре выбывают пары 6 и 2, 8 и 4. Наконец, в «финале» — проверке второго условия — будем иметь:

$$7^2 + 3^2 = 58 = 21 + 37, \quad 9^2 + 5^2 = 106 \neq 45 + 37,$$

и «чемпионом» становится пара 7 и 3, так что решением задачи являются два числа — 73 и 37.

171. Из последнего условия задачи следует, что искомое число больше своего обращенного, так что первая его цифра больше последней, так что соответствующая прогрессия является убывающей. Из него следует также, что первая цифра больше последней на 2: если к обращенному числу прибавить 198, т.е. прибавить 200 и вычесть 2, то они, по условию, поменяются местами — при сложении перехода через разряды не происходит, так как вторая цифра сохраняется. Значит, разность прогрессии равна 1.

Для сокращения будущего перебора можно заметить также, что крайние цифры искомого числа должны иметь одинаковую четность: их сумма есть удвоенная вторая цифра — это характерное свойство арифметической прогрессии, и стало быть крайние цифры — либо обе четные, либо обе нечетные. Но во втором случае число нечетно и не делится на 48, как должно быть по второму условию.

Для дальнейших испытаний остаются три варианта ответа — 432, 654 и 876, причем первому и последнему условию они, естественно, удовлетворяют — по ним мы их и нашли, и $432 : 9 = 48$, $654 : 16 \neq 48$, $876 : 21 \neq 48$, так что искомое число есть 432.

172. Последние цифры сомножителей могут быть 3 и 7, 9 и 9 или 1 и 1. Поэтому двузначное число может быть 11, 99, 37 или 73. Так как $10\,001 = 9999 + 2$ не делится на 11 (можно воспользоваться признаком делимости на 11 (см. Компендиум)), то первые два числа не удовлетворяют условию задачи. Проверка показывает, что 10 001 на 37 не делится, причем уголком делить не обязательно, и выяснить это можно «окольным путем» — на основе «красивого» произведения $7 \cdot 11 \cdot 13 = 1001$: если бы число 10 001 делилось на 37, то и разность $9 = 10\,001 - 10\,010 - 9$ делилась бы на 37, что, конечно, неверно. Поэтому искомое двузначное число есть 73.

173. Последние цифры сомножителей — это 1 и 3 или 9 и 7. Поэтому двузначное число равно 13, 31, 97 или 79. Разложив 3003 на множители: $3003 = 3 \cdot 1001 = 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$, увидим, что 13 — единственный возможный вариант, так что следовательно, трехзначное число равно $3 \cdot 7 \cdot 11 = 231$.

174. Второе из двух последовательных чисел получается из первого прибавлением единицы, и для выполнения условия задачи при сложении должна получаться 1 «в уме» — происходит переход единицы в разряд десятков. Поэтому, если такие числа существуют, то меньшее из них оканчивается цифрой 9. Для простоты будем пытаться построить такие два числа из единиц и девяток.

Возьмем одну девятку и допишем слева столько единиц, чтобы сумма разделилась на 11 — это число 119, следующее за ним число 120 имеет сумму цифр 3, за числом 111 199 следует 111 200 с суммой цифр 5, за числом 111 111 999 идет 111 112 000, сумма цифр которого равна 7, и нетрудно заметить, что суммы цифр возникающих в нашем построении чисел на каждом шагу увеличиваются на 2, и скорее всего через два шага получится нужное нам число — меньшее из двух искомых. Оно будет состоять из пяти девяток в конце, а перед ними будут будут стоять 10 единиц — чтобы сумма цифр делилась на 11, т.е. это число равно 111 111 111 199 999. Следующее за ним число есть 111 111 111 200 000, и сумма его цифр тоже делится на 11.

Заметим, что девятки в конце записи числа — обязательны, а единицы впереди — нет: можно ими удобно «регулировать» сумму цифр. Поэтому мы теперь уже можем привести более «простые» примеры подходящих пар чисел:

5 599 999 и 5 600 000, 12 799 999 и 12 800 000,
123 499 999 и 123 500 000,

и тем же свойством будут обладать числа, сумма первых цифр которых равна 32 и «шлейф» состоит из 16 девяток, или сумма первых цифр 54 и 27 девяток в «шлейфе».

Комментарий. Приведем теперь самое короткое решение этой задачи. Такие числа существуют — например, 111 111 111 199 999 и 111 111 111 200 000. Это решение полностью скрывает «кухню» поиска, но в математике никто не имеет права требовать раскрытия этой «кухни», пути поиска, спрашивать, как именно человек пришел к своему открытию — это «тайны эвристики», «авторский секрет». Заметим, что в учебном процессе учитель не имеет права на такую тайну: именно он обязан раскрывать свои мысли перед учениками.

175. На последнем месте может быть либо 0, либо 5. Рассмотрим эти случаи по отдельности.

1) Если последняя цифра нуль, то надо узнать, сколько существует трехзначных чисел, делящихся нацело на 3, у которых сумма квадратов цифр не превосходит 26. Выпишем их:

102, 105, 111, 114, 120, 123, 132, 141, 150,
201, 204, 210, 213, 222, 231, 240,
300, 303, 312, 321, 330,
402, 411, 420,
501, 510 —

всего 26 чисел.

2) Если последняя цифра пять, то число только одно — 1005.

Таким образом, условию задачи удовлетворяют всего 27 чисел.

176. 1) Если последняя цифра 0, то сумма первых трех цифр должна делиться на 9, а сумма их квадратов не превышать 35. Сосчитаем эти тройки:

135, 144, 153,
225, 234, 243, 252,
315, 324, 333, 342, 351,
414, 423, 432, 441,
513, 522, 531 —

всего 19 чисел.

2) Если последняя цифра 5, возможны следующие случаи:

$$103, 112, 121, 130, 202, 211, 220, 301, 310 \text{ —}$$

итого 28 чисел.

177. Если оба данных числа делятся на n и на $n + 8$, то их разность 800 делится на эти числа, и точно так же разности

$$3920 - 4 \cdot 800 = 720,\ 800 - 720 = 80.$$

Новых, меньших чисел (естественно, ненулевых) сконструировать не удастся: так как оба данных числа делятся на 80, то при комбинировании из них всевозможных разностей (и сумм) всегда будет получаться число, делящееся на 80, т.е. не меньшее 80.

Все делители числа $80 = 16 \cdot 5$ нетрудно перечислить — это либо 1, либо степени числа 2 (с натуральным показателем), либо эти же числа 2, умноженные на 5, т.е. 1, 2, 4, 8, 16 и 5, 10, 20, 40, 80. Среди этих делителей отличаются на 8 только 2 и 10, а также 8 и 16, 10 и 20, так что n равно 2 или 8, а искомая сумма равна 10.

178. Разложим данные числа на множители:

$$3920 = 2^4 \cdot 5 \cdot 7^2,\ 4320 = 2^5 \cdot 3^3 \cdot 5,$$

так что первое из них имеет $5 \cdot 2 \cdot 3 = 30$ делителей, а второе $6 \cdot 4 \cdot 2 = 48$ делителей.

Составим таблицы делителей в виде «таблиц умножения» — расположив «по одной оси» степени двойки, а по другой соответственно тройки или семерки. При этом будем иметь в виду, что во всех строках каждое число равно удвоенному предшествующему.

1	2	4	8	16
7	14	28	56	112
49	98	196	392	784

1	2	4	8	16	32
3	6	12	24	48	96
9	18	36	72	144	288
27	54	198	216	512	1024

Недостающие блоки делителей можно было бы получить из первых умножением на 5, однако мы этого делать не будем — учтем, что в первом случае пропущены делители 5, 35 и 245, во втором — 5, 15, 45 и 135, а оставшиеся являются круглыми числами и нам не подходят, потому что ни в первом списке нет чисел, оканчивающихся цифрой 3, ни во втором — цифрой 7 (за исключением делителя 27, существование которого мы особо учтем).

Теперь остается прочитать и сложить подходящие делители из таблицы, не забыв про «крайние случаи»:

$$1 + 2 + 8 + 20 + 5 = 36.$$

179. Так как 11 — простое число, то существует ровно 4 варианта его разложения в произведение двух целых чисел:

$$11 = 1 \cdot 11 = 11 \cdot 1 = (-1) \cdot (-11) = (-11) \cdot (-1),$$

достаточно рассмотреть следующие 4 системы уравнений:

$$\begin{cases} x - 2y = 1, \\ 2x + y - 1 = 11, \end{cases} \quad \begin{cases} x - 2y = 11, \\ 2x + y - 1 = 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 2y = -1, \\ 2x + y - 1 = -11, \end{cases} \quad \begin{cases} x - 2y = -11, \\ 2x + y - 1 = -1. \end{cases}$$

Однако, если подумать, то выписывать все разложения числа 11 на множители и соответствующие системы не обязательно: для натуральных чисел x и y второй множитель $2x - 1 + y$ больше или равен $2 - 1 + 1 = 2$, а 11 имеет единственный такой множитель – 11, так что

$$2x + y - 1 = 11, \quad x - 2y = 1,$$

и сложив удвоенное первое равенство со вторым, получим $5x - 2 = 23$, откуда $x = 5$, и следовательно, $y = 2$.

180. Первый сомножитель в левой части данного уравнения больше или равен $11 + 6 - 8 = 9$, второй больше или равен $6 + 8 - 1 = 13$, и поэтому их произведение не меньше $9 \cdot 13$, т.е. больше 100, и значит, уравнение решений не имеет.

181. Так как при натуральных x и y $3x + 5y - 7 \geq 1$, $5x + 4y + 11 \geq 20$, уравнение может превратиться в истинное равенство только в случае, когда $3x + 5y - 7 \geq 1$, $5x + 4y + 11 = 20$, что возможно только при $x = 1$, $y = 1$, и пара (1, 1) является единственным решением данного уравнения.

182. Так как при натуральных x и y $31x + 4y - 6 \geq 31 + 4 - 6 = 29$, и в частности, больше 0, то в любом решении (x, y) оба сомножителя в левой части уравнения положительны, так что число $31x + 2y - 6$ является натуральным делителем числа 68, большим 29, и следовательно равно либо 34, либо 68. Но равенство $31x + 2y - 6 = 34$, или $31x + 2y = 40$, невозможно: x может быть равен только 1, а тогда y не будет целым. С другой стороны, равенство $31x + 2y - 6 = 68$, или $31x + 2y = 74$, выполняется только при $x = 2$, $y = 6$, а при этих значениях x и y первый сомножитель $51 - 4x - 7y$ как раз и равен 1, т.е. пара (2, 6) является решением данного уравнения.

183. Так как 11 — простое число, то один из множителей в левой части равен 11, а поскольку разность этих множителей $11x + 11y + 11$ делится на 11, то и второй множитель делится на 11. Но тогда произведение должно делиться на 121, и не может быть поэтому равно 11, так что уравнение не имеет решений.

184. Выделив в правой части данного уравнения полный квадрат и обозначив $y + 1$ через y, получим уравнение $x^2 = z^2 + 7$, или

$$x^2 - z^2 = 7, \quad (x + z)(x - z) = 7,$$

заметим, что полученное — предпоследнее — уравнение не меняется при изменении знаков x и z, так что для начала можно ограничиться поиском только их положительных (точнее, неотрицательных) значений, а потом произвольным образом изменять их знаки.

Благодаря этому ограничению будем иметь $x + z \geq x - z = 7$, и следовательно, при любом решении (x, z) полученного уравнения число 7 будет представлено в виде произведения двух натуральных множителей, первый из которых больше или равен второму, а поскольку число 7 — простое, то первый из них равен 7, а второй равен 1. Таким образом, $x + z = 7$, $x - z = 1$, откуда $x = 4$, $z = 3$, а «полное», т.е. с учетом знаков x и z, решение может быть задано формулами $x = \pm 4$, $z = \pm 3$, где предполагается, что возможна любая комбинация знаков, так что эти формулы описывают 4 решения.

Переходя к $y = z - 1$, получаем соответствующие 4 решения данного уравнения:

$x = 4$, $y = 2$; $x = 4$, $y = -4$; $x = -4$, $y = 2$; $x = -4$, $y = -4$.

185. Выражение $x^2 - 3xy + 2y^2$ является квадратным трехчленом относительно x, и его корни

$$x_{1,2} = \frac{3y \pm \sqrt{9y^2 - 8y^2}}{2} = \frac{3y \pm y}{2}, \quad x_1 = 2y, \quad x_2 = y,$$ так

что $x^2 - 3xy + 2y^2 = (x - 2y)(x - y)$. Поэтому мы можем переписать данное уравнение в виде $(x - 2y)(x - y) = 3$.

Так как простое число 3 раскладывается в произведение целых множителей четырьмя способами:

$$3 = 3 \cdot 1 = 1 \cdot 3 = (-3) \cdot (-1) = (-1) \cdot (-3),$$

то множество решений данного уравнения есть объединение множества решений систем:

$$\begin{cases} x - 2y = 3, \\ x - y = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} x - 2y = 1, \\ x - y = 3, \end{cases} \quad \begin{cases} x - 2y = -3, \\ x - y = -1, \end{cases} \quad \begin{cases} x - 2y = -1, \\ x - y = -3. \end{cases}$$

Вычитая в каждой системе первое уравнение из второго, из первой получаем $y = -2$, $x = -1$, из второй — $y = 2$, $x = 5$, из третьей — $y = 2$, $x = 1$, из четвертой — $y = -2$, $x = -5$. Соответствующие пары и составляют множество решений данного уравнения.

186. Выражение $x^2 - 4xy - 5y^2$ является квадратным трехчленом относительно x, и его корни легко подобрать устно: если бы вместо y стояла 1, то корнями были бы -1 и 5, а в общем случае, очевидно, корни $-y$ и $5y$, и поэтому данное уравнение приводится к виду $(x + y)(x - 5y) = 7$.

Так как простое число 7 раскладывается в произведение целых множителей четырьмя способами: $7 = 7 \cdot 1 = 1 \cdot 7 = (-7) \cdot (-1) = (-1) \cdot (-7)$, то множество решений данного уравнения есть объединение множества решений систем

$$\begin{cases} x + y = 7, \\ x - 5y = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 1, \\ x - 5y = 7, \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = -7, \\ x - 5y = -1, \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = -1, \\ x - 5y = -7. \end{cases}$$

Вычитая в каждой системе из первого уравнения второе, из первой получим $y = 1$, $x = 6$, из второй — $y = -1$, $x = 2$, из третьей — $y=-1$, $x=-6$, из четвертой — $y=1$, $x=-2$. Соответствующие пары и составляют множество решений данного уравнения.

Комментарий. В данном уравнении также есть симметрия: у переменных x и y можно одновременно поменять знаки, так что множество решений уравнения центрально симметрично относительно начала координат. Это позволяет проводить рассуждения, например, в правой полуплоскости, т.е. считать, что $x \geq 0$ или $y \geq 0$. Во втором случае $x+y \geq x-5y$, и вместо четырех вышеописанных систем мы могли бы рассматривать только две — первую и последнюю. «Стоит ли овчинка выделки?» — вопрос индивидуального вкуса, но вырабатывать у учащихся стремление к поиску разнообразных симметрий, безусловно, необходимо.

187. Выражение $2x^2+xy-6y^2$ является квадратным трехчленом относительно x, и его корни

$x_{1,2}=\dfrac{-y\pm\sqrt{y^2+48y^2}}{4}=\dfrac{-y\pm 7y}{4}$, $x_1=\dfrac{3y}{2}$, $x_2=-2y$, так что $2x^2+xy-6y^2=(2x-3y)(x+2y)$. Поэтому мы можем переписать данное уравнение в виде $(2x-3y)(x+2y)=3$.

Так как простое число 3 раскладывается в произведение целых множителей четырьмя способами: $3=3\cdot 1=1\cdot 3=(-3)\cdot(-1)=(-1)\cdot(-3)$, то множество решений данного уравнения есть объединение множества решений систем:

$$\begin{cases}2x+3y=3,\\x+2y=1,\end{cases}\quad \begin{cases}2x+3y=1,\\x+2y=3,\end{cases}\quad \begin{cases}2x+3y=-3,\\x+2y=-1,\end{cases}\quad \begin{cases}2x+3y=-1,\\x+2y=-3.\end{cases}$$

Вычитая в каждой системе из удвоенного второго уравнения первое, из первой получим $y=-1$, $x=3$, из второй — $y=5$, $x=-7$, из третьей — $y=1$, $x=-3$, из четвертой — $y=-5$, $x=7$. Соответствующие пары и составляют множество решений данного уравнения.

188. Рассмотрим выражение x^2-xy+y^2 как квадратный трехчлен от x. Его дискриминант равен $y^2-4y^2=-3y^2$. Попытка разложить левую часть уравнения на множители оказалась безуспешной. Попробуем выделить полные квад-

раты: $x^2-xy+y^2=\left(x-\dfrac{y}{2}\right)^2-\dfrac{y^2}{4}+y^2=\left(x-\dfrac{y}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}y^2$. Теперь уравнение можно переписать так: $(2x-y)^2+3y^2=4$. Так как $y\in Z$, то $y^2=0$ или $y^2=1$. Отсюда находим решения: $(0;\pm 1)$; $(\pm 1;0)$.

189. Рассмотрим выражение $7x^2+12xy-4y^2$ как квадратный трехчлен от x и разложим его на множители. При $y=1$ он имеет вид $7x^2+12x-4$, и одним из его корней является -2, а тогда — по теореме Виета — второй его корень равен $-\dfrac{2}{7}$, и поэтому он равен $(x+2)(7x-2)$, а значит, данное уравнение можно записать в виде $(x+2y)(7x-2y)=21$.

Число 21 раскладывается на целые множители восемью способами:

$21=21\cdot 1=7\cdot 3=1\cdot 21=3\cdot 7=(-21)\cdot(-1)=(-7)\cdot(-3)=$
$=(-1)\cdot(-21)=(-3)\cdot(-7)$,

но не стоит решать соответствующие 8 систем. Сумма сомножителей $x+2y$ и $7x-2y$ равна $8x$, т.е. делится на 8, но ни в одном из выписанных разложений числа 21 сумма слагаемых не делится на 8. Поэтому ни одна из систем не будет иметь решений, так что заданное уравнение не имеет решений.

Можно рассуждать и иначе. Перепишем уравнение в виде:

$$7(x^2-3)=4y(y-3x)$$

и заметим, что левая его часть должна делиться на 4, и поскольку 7 число простое, то на 4 делится «скобка» (x^2-3). Однако это невозможно, так как квадрат целого числа может давать при делении на 4 только два остатка — нуль и единицу (см. Компендиум), поэтому уравнение решений в целых числах не имеет.

190. $7x^2-21$ делится на 4, $7(x^2-3)$ делится на 4, x^2-3 делится на 4, $x^2=4k+3$, а этого не может быть.

191. Рассмотрим левую часть данного уравнения как квадратный трехчлен относительно x и запишем его в стандартном виде:

$$x^2-(4y-2)x+5y^2-8y+5=0.$$

Тогда

$$\frac{D}{4}=(2y-1)^2-(5y^2-8y+5)=-y^2+4y-4=-(y-2)^2\le 0,$$

откуда следует, что уравнение может иметь решение только если $y=2$. Тогда $x^2-6x+9=0$, $x=3$. Следовательно, данное уравнение имеет единственное решение (3, 2).

192. Так как

$$x^2-2xy+2y^2+4x-2y+5=x^2-(2y+4)x+2y^2-2y+5,$$

$\frac{D}{4}=(y+2)^2-(2y^2-2y+5)=-y^2+6y-1$, то $D\ge 0$ при $-y^2+6y-1\ge 0$, $y^2-6y+1\le 0$, $3-2\sqrt{2}\le y\le 3+2\sqrt{2}$, а целые числа в промежутке — это 1, 2, 3, 4, 5, то y может быть равен только одному из них.

Составим таблицу:

y	Уравнение	Корни
1	$x^2-6x+5=0$	1 и 5
2	$x^2-8x+9=0$	Нет
3	$x^2-10x+17=0$	Нет
4	$x^2-12x+29=0$	Нет
5	$x^2-14x+45=0$	5 и 9

Таким образом, данное уравнение имеет 4 решения: (1, 1), (5, 1), (5, 5) и (9, 5).

Комментарий. Обратим внимание на очевидную закономерность в коэффициентах полученных выше квадратных уравнений: коэффициенты при x образуют арифметическую прогрессию с разностью 2, а свободные члены — арифметическую прогрессию с разностью 4. Это не случайно, и эта закономерность может оказаться полезной для самоконтроля.

193. Так как

$$x^2+xy+y^2-2x+2y+4=x^2+(y-2)x+y^2+2y+4,$$

$$D=(y-2)^2-4(y^2+2y+4)=-3y^2-12y-12=-3(y+2)^2,$$

и значит, данное уравнение может иметь решение только при $y=-2$, а тогда $x^2-4x+4=0$, $x=2$, так что пара (2, −2) является его единственным решением.

194. Так как

$$x^2+2xy+y^2-4x+2y+4=x^2+2(y-2)x+y^2+2y+4,$$

$$\frac{D}{4}=(y-2)^2-(y^2+2y+4)=-6y,$$

и поскольку число $\frac{D}{4}$ должно быть точным квадратом — иначе x не будет целым числом, то y должен иметь вид $-6k^2$, где k — натуральное число. Тогда $x_{1,2}=(2+6k^2)\pm 6k$, т.е. $x_1=6k^2+6k+2$, $x_2=6k^2-6k+2$, и таким образом, уравнение имеет бесконечно много решений, которые описываются формулами:

$$x=6k^2\pm 6k+2,\quad y=-6k^2\quad (k\in Z).$$

195. Записав данное уравнение в виде $3x-6=(x+2)y$ и заметив, что если $x=2$, то $y=0$, так что пара (2, 0) является решением данного уравнения при $x\ne 2$, будем иметь $y=\frac{3x-6}{x+2}=3-\frac{12}{x+2}$. Поэтому для любого решения (x, y) уравнения 12 делится на $x+2$, причем $\frac{12}{x+2}\le 2$, т.е. $2x+4\ge 12$, $x+2\ge 6$, и, значит, $x+2$ равно либо 6, либо 12, а x равен либо 4, либо 10. Соответствующие значения y — это 1 и 2, и таким образом, данное уравнение имеет два решения: (4, 1) и (10, 2).

196. Записав данное уравнение в виде $y(3x-2)=13-2x$, видим, что для любого его решения (x, y) $13-2x$ делится на $3x-2$, $3(13-2x)+2(3x-2)=35$ делится на $3x-2$, и, в предвидении большого объема вычислений, будем использовать таблицу, в верхней строчке которой стоят все делители числа 35:

$3x-2$	1	−1	5	−5	7	−7	35	−35
x	1	—	—	−1	3	—	—	−11
$13-2x$	11			15	7			35
$y=\dfrac{13-2x}{3x-2}$	11			−3	1			−1

Отсюда видно, что данное уравнение имеет 4 решения (1, 11), (−1, −3), (3, 1) и (−11, −1).

Комментарий. Можно было рассуждать и иначе: так как дробь $\frac{13-2x}{3x-2}$ не равна 0, то она должна быть по модулю больше или равна 1 и достаточно решить это неравенство:

$$\left|\frac{13-2x}{3x-2}\right| \ge 1; \quad \frac{13-2x}{3x-2} \le -1 \text{ или } \frac{13-2x}{3x-2} \ge 1;$$

$$\frac{13-2x+3x-2}{3x-2} \ge 0 \text{ или } \frac{13-2x-3x+2}{3x-2} \ge 0;$$

$$\frac{11+x}{3x-2} \ge 0 \text{ или } \frac{15-5x}{3x-2} \ge 0; \quad -11 \le x < \frac{2}{3} \text{ или } \frac{2}{3} < x \le 3,$$

т.е. $-11 \le x \le 0$ или $1 \le x \le 3$. И теперь понадобится проделать перебор, более объемный, чем в проведенном решении.

Замечание. Если применить группировку, то уравнение можно записать в виде $(3x-2)(3y+2)=35$ и при помощи таблицы найти его решения:

$3x-2$	1	−1	5	−5	7	−7	35	−35
x	1	—	—	−1	3	—	—	−11
$3y+2$	35			−7	5			−1
y	11			−3	1			−1

197. Записав данное уравнение в виде $y(3x-6)=7x-5$, видим, что при $x=2$ оно не имеет решений, и для любого его решения (x, y) $7x-5$ делится на $3x-6$, $3(7x-5)-7(3x-6)=27$ делится на $3x-6$, и построим таблицу, в верхней строчке которой стоят все делители числа 27:

$3x-6$	1	−1	3	−3	9	−9	27	−27
x	—	—	3	1	5	−1	11	−7
$7x-5$			16	2	30	−12	72	−54
y			—	—	—	—	—	2

Из этой таблицы видно, что данное уравнение имеет единственное решение (−7, 2).

Замечание. Переписав уравнение в виде $(x-2)(7-3y)=-9$, можно составить таблицу делителей числа −9 и выписать из нее решение:

$x-2$	1	−1	3	−3	9	−9
x	3	2	5	−1	11	−7
$7-3y$	−9	9	−3	3	−1	1
y	—	—	—	—	—	2

198. Перепишем уравнение в виде $11xy-5x-5y-1=0$ и сделаем группировку в левой части:

$$11xy-5x-5y-1=y(11x-5)-5x-1=$$

$$=y(11x-5)-\frac{5}{11}(11x-5)-\frac{25}{11}-1=(11x-5)\left(y-\frac{5}{11}\right)-\frac{36}{11},$$

так что уравнение примет вид $(11x-5)(11y-5)=36$, т.е. числа $11x-5$ и $11y-5$ являются взаимно дополнительными делителями числа 36. Однако число 36 имеет 18 целых делителей и поэтому естественно подумать над тем, как можно сократить перебор.

Заметим, что в данном уравнении есть симметрия: переменные x и y можно поменять местами, так что если какая-либо пара (a, b) является решением уравнения, то пара (b, a) тоже будет решением. Это позволяет сначала испытать только «половину» всех делителей, считая, например, что

$x \le y$. Очевидно, что уравнения $11x - 5 = \pm 1$, $11x - 5 = \pm 2$, $11x - 5 = \pm 3$, $11x - 5 = \pm 4$ и $11x - 5 = -6$ в целых числах решений не имеют, а решением уравнения $11x - 5 = 6$ является число 1. Это значит, что пара чисел (1, 1) является решением данного уравнения, а в силу ее симметрии других решений нет.

199. В левой части уравнения увидим сумму, которую можно получить, раскрыв скобки в выражении вида $(13x-7)(y-a)+b$. Подберем числа a и b:

$$(13x-7)(y-a)+b=(13x-7)\left(y-\frac{7}{13}\right)+\frac{16}{13},$$

так что уравнение приводится к виду

$$(13x-7)(13y-7)=-16.$$

Заметим, что при целых значениях x и y в левой части уравнения на промежутке от -16 до 16 множители принимают значения -7 и 6, не являющиеся делителями числа -16, так что уравнение не имеет решения в целых числах.

200. Записав данное уравнение в виде $3x(y-1)=y^3$, заметим, что любом его решении (x, y) $y \neq 1$, и при $y \neq 1$ перепишем его в виде $3x=\frac{y^3}{y-1}$ и выделим в дроби $\frac{y^3}{y-1}$ целую часть:

$$\frac{y^3}{y-1}=\frac{y^3-1+1}{y-1}=y^2+y+1+\frac{1}{y-1}.$$

Следовательно, эта дробь будет целым числом только в случае, когда $y-1=\pm 1$, т.е. при y, равном 2 или 0, так что $3x$ равно 8 или 0. Так как число x целое, то $x = 0$, и пара (0, 0) является единственным решением данного уравнения в целых числах.

201. Заметим сразу же, что в любом решении (x, y) данного уравнения x^3 делится на 3, так что x делится на 3, $x = 3z$, и уравнение можно переписать в виде:

$$27z^3-27yz+3y^3=0, \quad 9z^3-9yz+y^3=0.$$

Значит, y также делится на 3, $y = 3t$, т.е.

$$9z^3-27tz+27t^3=0, \quad z^3-3tz+9t^3=0.$$

Но тогда и t делится на 3, $t = 3u$, т.е.

$$3z^3-9uz+3u^3=0, \quad z^3-3uz+u^3=0,$$

и мы пришли к исходному уравнению, но для переменных $z=\frac{x}{3}$ и $u=\frac{y}{3}$. Следовательно, z и u делятся на 3 и, проделав те же самые рассуждения, мы снова получим исходное уравнение для частных $\frac{z}{3}=\frac{x}{9}$ и $\frac{u}{3}=\frac{y}{9}$, и этот процесс можно продолжать сколь угодно долго — до бесконечности. А это означает, что в любом решении (x, y) данного уравнения x и y делятся на любую степень числа 3, а это возможно только в случае, когда они равны 0 — это и есть единственное решение данного уравнения.

202. Если пара (x, y) является решением данного уравнения, то 8 делится на x^2, так что x^2 равен либо 1, либо 4, т.е. x равен либо 1, либо 2. При $x = 1$ из этого уравнения получаем $y = 1$, а при $x = 2$ получаем уравнение $48 + 40y - 8 = 0$, которое не имеет натуральных решений. Поэтому единственным решением данного уравнения является $x = 1$, $y = 1$.

203. Число $y^2 + 3y$ четно при любом y: при четном y оба слагаемых четны, а при нечетном — нечетны. Поэтому левая часть данного уравнения всегда четна и не может быть равна 21, так что уравнение не имеет решений.

204. Переписав данное уравнение в виде $8x - 14y = -7$, получаем равенство, левая часть которого четное, а правая — нечетное число, а такое равенство не может быть верным. Значит, данное уравнение не имеет решений.

205. Пусть пара (x, y) — произвольное решение данного уравнения. Тогда $13x + 19$ делится на 6, $x + 1$ делится на 6, а следовательно, $x=6k-1$ $(k \in \mathbb{Z})$,

$$13(6k-1)=6y-19, \quad 13k+1=y,$$

и таким образом, все пары (x, y), удовлетворяющие заданному равенству, могут быть описаны формулами $x = 6k - 1$, $y = 13k + 1$, где k — произвольное целое число.

206. Так как правая часть уравнения делится на 7, то $8x$ делится на 7, а поскольку числа 8 и 7 взаимно просты, т.е. не имеют общих натуральных делителей, отличных от 1, то x делится на 7, $x = 7k$ $(k \in \mathbf{Z})$, и данное уравнение принимает вид $56k = 21y - 7$, или $8k = 3y - 1$. Тогда число $8k + 1 = 3y$ делится на 3, т.е. $(8k+1) - 9k = -k+1$ делится на 3, откуда

$$k = 3p + 1,\ \ 8(3p+1) + 1 = 3y,\ \ y = 8p + 3,$$

$$x = 7(3p+1) = 21p + 7$$

и таким образом, все пары (x, y), удовлетворяющие заданному равенству, могут быть описаны формулами $x = 21p + 7$, $y = 8p + 3$, где p — произвольное целое число.

207. Для любой пары (x, y), удовлетворяющей данному равенству, число $46y - 1$ делится на 25, $(46y - 1) - 50y = -4y - 1$ делится на 25, $4y + 1$ делится на 25, а это верно, например, для $y = 6$, а значит и для любого y вида $6 + 25k$. Тогда $x = \dfrac{1 - 46\cdot(6+25k) - 46k}{25} = -11$, так что решение уравнения записывается формулами:

$$x = -46k - 11,\ \ y = 25k + 6\ \ (k \in \mathbf{Z}).$$

208. Первое и второе равенства не могут быть оба верными — в противном случае после их сложения получилось бы равенство, у которого левая часть делится на 9, а правая — нет, и следовательно, третье равенство верно, а значит, y — четно. Но при четном у первое равенство не может быть верным, так что верно второе равенство, и комбинируя его с верным третьим, получаем:

$$2(8x + 3y) - 3(7x + 2y) = 280 - 345,$$

$$-5x = -65,\ \ x = 13,\ \ 91 + 2y = 115,\ \ y = 12.$$

209. Число c входит в обе заданные прогрессии, если его можно представить и в виде $1 + 4(n - 1)$, и в виде $6 + 7(k - 1)$, т.е.

$$1 + 4(n-1) = 6 + 7(k-1),\ \ 4n = 7k + 2,$$

где n и k — натуральные числа, так что $4n - 2$, а стало быть и $2n - 1$, делится на 7. Перебирая возможные остатки r от деления n на 7, получаем, что это имеет место лишь при $r = 4$, а стало быть, при всех n вида $7m + 4$, или $n = 7m - 3$, где m натуральное число. Члены первой прогрессии с этими номерами, т.е. $1 + 4(7m - 4) = 28m - 15$ и являются общими для заданных прогрессий.

Комментарий. Заметим, что общие члены двух заданных арифметических прогрессий сами также составляют арифметическую прогрессию.

210. Число c входит в обе заданные прогрессии, если его можно представить и в виде $3 + 4(n - 1)$, и в виде $2 + 7(k - 1)$, т.е.

$$3 + 4(n-1) = 2 + 7(k-1),\ \ 4n = 7k - 4,\ \ 4(n+1) = 7k,$$

где n и k — натуральные числа, причем $n \le 221$, $k \le 71$ — эти неравенства определяются числом членов в заданных прогрессиях. Следовательно, $n + 1$ делится на 7, и при этом $k = \dfrac{4(n+1)}{7}$ должно быть не больше 71, т.е. $4(n + 1) \le 497$, $n \le 124$, а от 1 до 124, как нетрудно убедиться, имеется 17 таких чисел, и таким образом, заданные прогрессии имеют 17 общих членов.

211. Число c входит в обе заданные прогрессии, если его можно представить и в виде $1 + 4(n - 1)$, и в виде $5 + 7(k - 1)$, т.е.

$$1 + 4(n-1) = 5 + 7(k-1),\ \ 4n = 7k + 1,$$

где n и k — натуральные числа, причем $n \le 222$, $k \le 72$ — эти неравенства определяются числом членов в заданных прогрессиях. Поэтому $4n - 1$ делится на 7.

Так как $n \le 222$, $7m - 5 \le 222$, то $m \le 32$, и следовательно, нужных чисел n имеется 32. Но $k = \frac{4n-1}{7}$ должно быть не больше 72, т.е. $4n - 1 \le 504$, $n \le 126$, а значит, при всех полученных n соответствующее число k будет не больше 72, и таким образом, прогрессии имеют 31 общий член.

212. Третье и четвертое утверждения не могут быть истинными одновременно, в противном случае разность $(9a + 13b) - (a + b) = 8a + 12b$, и в то же время она равна 1778, чего не может быть, так как одно число делится на 4, а другое не делится. Поэтому одно из этих утверждений ложно, а стало быть, первое и второе утверждения оба истинны, откуда следует, что $\frac{a}{3b} = 1$, т.е. $a = 3b$. Но в этом случае третье равенство принимает вид $4b = 222$ и для натурального числа b неверно, и следовательно, четвертое равенство истинно. Таким образом, $a = 3b$ и $9a + 13b = 2000$, откуда $a = 150$, $b = 50$.

213. Число 5 можно представить в виде суммы двух точных квадратов двумя способами (порядок слагаемых важен): $5 = 4 + 1$ и $5 = 1 + 4$. Рассмотрим эти две возможности.

$3x + 2y$	2	–2	2	–2	1	–1	1	–1
$x - y$	1	1	–1	–1	2	2	–2	–2
$5x$	4	0	0	–4	5	3	–3	–5
x	—	0	0	—	1	—	—	–1
y	—	–1	1	—	–1	—	—	1

Таким образом, условию задачи удовлетворяют четыре пары: (0, 1), (0, –1), (1, –1), (–1, 1).

215. Переведем условие данной задачи на алгебраический язык. Если x и y — первая и вторая цифры искомого числа, то оно имеет вид $10x + y$, и выполняются равенства

$$10x + y = 7(x + y) + 6, \quad 10x + y = 3xy + 11,$$

и упрощая первое равенство, получаем $3x = 6y + 6$, $x = 2y + 2$, после соответствующей подстановки второе равенство принимает вид:

$$20y + 20 + y = 6y^2 + 6y + 11, \quad 6y^2 - 15y - 9 = 0,$$

$$2y^2 - 5y - 3 = 0$$

и истинно при единственном натуральном значении $y = 3$. Тогда $x = 8$, так что искомое число есть 83.

Комментарий. Приведенное формальное решение представляется более простым, чем решение комбинаторное, и более подходит для какой-либо «экзаменационной ситуации». Но, по нашему мнению, в процессе обучения для ученика это решение дает весьма мало, тогда как «гимнастика ума», проделываемая в процессе комбинаторного решения, безусловно, способствует его математическому развитию.

Отметим также, что комбинаторное решение может быть доступно учащимся младших классов.

216. Если x и y — первая и вторая цифры искомого числа, то оно имеет вид $10x + y$ и выполняется равенство $10x + y = 3xy + 11$, или $10x - 11 = (3x - 1)y$, так что $10x - 11$ делится на $3x - 1$. Но тогда на $3x - 1$ делится и разность $(10x - 11) - 3(3x - 1) = x - 8$.

Ясно, однако, что $x - 8$ — целое число от -8 до 1 (точнее, от -7 до 1, так как по условию цифры искомого числа не равны нулю), так что в случае, когда $3x - 1$ — двузначное, т.е. при $x \ge 4$, $x - 8$ не может делиться на $3x - 1$ — за исключением случая, когда $x - 8 = 0$, т.е. $x = 8$. Остается, таким образом, рассмотреть для x четыре возможности: 1, 2, 3 и 8, и простая проверка (–7 не делится на 2, – 6 не делится на 5, –4 не делится на 8, 0 делится на 11) показывает, что условию задачи удовлетворяет только число 83.

Можно и иначе рассуждать, например, так: число y не может быть четным — в противном случае в левой части равенства окажется четное число, тогда как в правой число будет нечетным. Если y нечетно, то $10x + y$ и $3xy + 11$ оба нечетны, и поэтому $3xy$ четно, т.е. x четно. Заметим, что $x \ne 0$ — иначе искомое число нельзя было бы делить на произведение его цифр, и проверим, какое из уравнений

$$20 + y = 6y + 11,\ \ 40 + y = 12y + 11,\ \ 60 + y = 18y + 11,$$
$$80 + y = 24y + 11,$$
имеет решением однозначное натуральное число:

$$5y = 9, \quad 11y = 29, \quad 17y = 49, \quad 23y = 69\ ,$$

и мы видим, что решением задачи является число 83.

Комментарий. Так как в данном случае мы решаем уравнение не «в целых числах», а «в цифрах», то допустимо просто «тупо» перебрать все возможные значения одной переменной и проверить, будет ли «цифрой» значение другой, однако для «гимнастики ума» — именно для этого и учат математику в школе — всегда полезно поискать пути сокращения перебора.

217. Пусть x и y — соответственно первая и вторая цифры искомого числа. Тогда выполняется равенство $10x + y = 7(x + y) + 6$ или $3x = 6y + 6$, $x = 2(y + 1)$, и поскольку x и y однозначные натуральные числа, то дальнейшему исследованию подлежат числа 41, 62 и 83.

В то же время 41, как ни странно, не удовлетворяет условию задачи, хотя при $x = 4$, $y = 1$ равенство $10x + y = 7(x + y) + 6$ верно. Дело в том, что это равенство является неполным переводом на язык алгебры утверждения: «Число с цифрами x и y при делении на $x + y$ дает в частном 7 и в остатке 6»: к этому равенству надо добавить, что $6 < x + y$ — таково определение деления с остатком.

Для чисел 62 и 83 это неравенство верно, так что данная задача имеет два решения – 62 и 83.

218. Из условия следует, что $n + 4 = 6q + 6 = 7p + 7$, т.е. $n + 4$ делится и на 6, и на 7, а стало быть, делится на 42, так что при делении на 42 число n дает остаток 38.

Можно рассуждать и иначе: так как $n = 6q + 2 = 7p + 3$, то $6q - 7p = 1$, $\quad p = \dfrac{6q - 1}{7}$. Перебирая число q от 0 до 6, получаем, что эта дробь является целым числом при $q = 6$. Тогда, как легко убедиться — это легко проверить непосредственной подстановкой, она будет целым числом и при

$q = 7k + 6$. А при этих q $\ n = 6(7k + 6) + 2 = 42k + 38$, и следовательно, искомый остаток равен 38.

219. Из равенства $n = 13p + 2 = 7q + 5$ или $7q = 13p - 3$, следует, что $13p - 3$ делится на 7, т.е. $6p - 3 = 3(2p - 1)$ делится на 7, т.е. $2p - 1$ делится на 7. Соответствующие значения p будем искать с помощью таблицы:

p	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2p −1	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	20
Остаток от деления на 7	1	3	5	0	2	4	6	1	3	5	0

и мы видим, что остатки с $n = 8$ начинают повторяться через 7 шагов, так что $2p - 1$ делится на 7 при $p = 4 + 7q$, а тогда

$$n = 13(4 + 7q) + 2 = 91q + 54, \qquad n^2 = 91k + 54^2 \qquad (k \in Z),$$

и поскольку

$$54^2 = (50 + 4)^2 = 2500 + 400 + 16 = 2916 = 91 \cdot 32 + 4\ ,$$

то искомый остаток равен 64.

Комментарий. Проще было бы использовать конкретику числовых данных задачи. Именно, по условию, $k - 2$ делится на 13, $k + 2$ делится на 7, а поскольку 13 и 7 взаимно просты, то $k^2 - 4$ делится на 91, так что искомый остаток равен 4.

220. Если возраст сына равен k, то возраст отца равен $7k$, и через год им будет соответственно $k + 1$ и $7k + 1$ лет. По условию задачи, $7k + 1 = 6(k + 1)$, откуда $k = 5$, $7k = 35$. Если сын станет младше отца в 4 раза через n лет, то $35 + n = 4(5 + n)$, откуда $n = 5$.

221. Если a и b — первая и вторая цифры искомого числа, то оно равно $10a + b$, и по условию, $10a + b = 3ab + 9$, $(a + b)^2 - ab = 10a + b$, откуда $(a + b)^2 - ab = 3ab + 9$, $a^2 + b^2 - 2ab = 9$, $(a - b)^2 = 9$, $a - b = \pm 3$. Но из первого условия следует, что искомое число делится на 3, а значит, и сумма его цифр $a + b$ делится на 3. Так как $a - b$ делится на 3, то сумма и разность

$$(a+b)+(a-b)=2a, \quad (a+b)-(a-b)=2b$$

делятся на 3, так что сами числа a и b делятся на 3. Поэтому искомое число одно из следующих: 36, 63, 69, 96. Проверяя для этих чисел выполнение, например, второго условия задачи, получаем равенства:

$$81-18 \neq 36,\ 81-18=63,\ 225-54 \neq 69,\ 225-54 \neq 96,$$

и следовательно, решением задачи является число 63.

222. Если число, удовлетворяющее условию задачи, составлено из цифр a, b, c в данном порядке (такое число принято обозначать символом $\overline{abc}$), то рассматриваемая в условии разность между числом $\overline{abc}$ и числом $\overline{acb}$, получающимся из него перестановкой двух последних его цифр, зависит, очевидно, только от этих последних двух цифр и равна $(10b+c)-(10c+b)=9(b-c)$. Поэтому она делится на 81 только в случае, когда разность $b - c$ равна 0 или ± 9.

А поскольку $b + c$, равная, по условию, $3a$, делится на 3 и не меньше 3, то числа b и c оба делятся на 3, причем, как следует из третьего условия, $c \leq b$, т.е. разность $b - c$ равна 0 или 9. Поэтому для двузначного «хвоста» имеются лишь 4 возможности: 99, 90, 66, 33, а поскольку разности этих чисел с обращенными равны соответственно 0, 81, 0, 0, то условию задачи удовлетворяют числа 699, 466, 260 и 233.

Комментарий. Отметим, что в этом решении для числа 90 обращенным считалось число 09, хотя иногда считают, что у числа с последней цифрой 0 обращенного числа просто не существует. Явных договоренностей по этому вопросу не существует, и учащимся можно в подобных случаях лишь рекомендовать рассматривать более общий вариант понимания обращенного числа, а в конце решения сделать соответствующее замечание, что при ином понимании некоторые из полученных решений являются «лишними» — в данной задаче это число 390.

223. Из 90 двузначных чисел половина четные, и они составляют арифметическую прогрессию, сумма которой равна $\frac{10+98}{2} \cdot 45 = 54 \cdot 45$, числа 54 и 45 удовлетворяют всем условиям задачи: 54 — четное двузначное, на которое делится сумма всех четных двузначных, а 45 — частное от деления этой суммы на 54, и оно отличается от делителя порядком цифр, так что одно решение мы получили сразу.

Посмотрим, нет ли других решений. Выпишем четные двузначные числа, сумма цифр которых равна 9: 18, 36, 54, 72 и 90, и составим произведения из них и их «зеркальных отражений» (кроме последнего — его отражение не является двузначным числом), т.е. $18 \cdot 81$, $36 \cdot 63$, $54 \cdot 45$, $72 \cdot 27$. Но найденная сумма, равная $54 \cdot 45$, оканчивается нулем, а остальные произведения оканчиваются цифрами 1, 8, 4, т.е. не удовлетворяют условию задачи.

224. Четные двузначные числа, кратные девяти, — это 18, 36, 54, 72 и 90, из них последнее не годится, так как при изменении порядка цифр двузначного числа не получается.

Сумму всех четных двузначных чисел можно найти, воспользовавшись формулой суммы первых n членов арифметической прогрессии — первый член 10, последний 98, всего их 45 (можно, например, из 99 первых натуральных чисел вычесть 9 и результат разделить на 2, так как за каждым четным идет нечетное), откуда сумма равна $54 \cdot 45$.

Перемножать двузначные числа нетрудно, но скучно, поэтому заметим, что это произведение оканчивается цифрой 0, а из пар выписанных нами чисел и чисел, полученных из них перестановкой цифр, оканчивается нулем только произведение тех же чисел, которые мы получили при нахождении суммы всех четных двузначных, — 54 и 45, и мы делаем вывод, что задача имеет единственное решение — число 54.

225. Из условия следует, что вклад четверок в общую сумму равен либо 40, либо 80. Но вклад пятерок не меньше 10, а так как троек больше, чем пятерок, то их вклад не меньше 9, и общая сумма не меньше 99, что неверно, так что четверок 10, а тогда пятерок 2, 4, 6 или 8.

Если пятерок 8, то троек 9, а $40 + 27 + 40 > 93$, что противоречит условию. Если их 6, то вклад двоек и троек равен 23, но троек не меньше 7, а тогда их ровно 7, а двойка одна. Но общее число оценок в этом случае равно $1 + 7 + 10 + 6 = 24$, что неверно, так что число пятерок не равно 6.

Если пятерок 4, то вклад двоек и троек равен 33, вместе их $30 - 10 - 4 = 16$, причем троек не меньше 5. Если их 5, то двоек 11, и общий вклад двоек и троек равен 27, а при каждом увеличении числа троек на 1 и соответствующем уменьшении на 1 числа двоек получатся вклады 28, 29, 30, 31, меньшие 33.

Следовательно, пятерок было получено 2.

226. Попытаемся подобрать искомое число процентов экспериментально: ясно, что задача может иметь лишь единственное решение — при меньшем или большем проценте повышения пенсия будет соответственно меньше или больше заданной.

Если бы первое повышение было на 5%, то после него пенсия была бы $1800 + 90 = 1890$ р., а после второго — на 10% — оказалось равной $1890 + 2 \cdot 198 < 1900 + 400 < 2376$ р. А если первое повышение — на 10%, то после него пенсия составила бы $1800 + 180 = 1980$ р., а после второго — на 20% — оказалось равной $1980 + 2 \cdot 198 = 2376$ р.

Иными словами, условию задачи удовлетворяет 10%, а решение задачи явно единственное — при меньшем или большем проценте повышения пенсия будет меньше или больше заданной.

227. Как и задача 226, эта задача может иметь лишь единственное решение, и в первой попытке рассмотрим цифру в 10%. Тогда после первого снижения собрание стоило $350\,000 - 35\,000 = 315\,000$ батов, а после второго — $315\,000 - 31\,500 = 283\,500$, так что первая же попытка оказалась удачной, и каждый раз стоимость собрания снижалась на 10%.

228. Если число монет в 3 и 5 луров равно соответственно x и y, то $3x + 5y = 53$, откуда следует, что при делении на 5 $3x$ дает остаток 3, а значит, x дает остаток 1. Поэтому монет в 3 лура может быть 1, 6, 11 или 16, а монет в 5 луров — соответственно 10, 7, 4 или 9.

После указанной замены получилась сумма $5 + 30 = 35$, $30 + 21 = 51$, $55 + 12 = 62$ или $80 + 27 = 107$, и только во втором случае она уменьшится не более чем в 1,5 раза, и таким образом, монет в 3 лура было 6.

229. За 36 батов можно купить соответственно 9, 6 и 4 путевок разных типов, а отдохнуть соответственно 72, 84 и 80 дней, так что по «убыванию выгодности» типы путевок распределяются так: второй, третий, первый.

Поэтому вместо 3 путевок первого типа на те же деньги можно купить 2 путевки второго типа и тем самым увеличить число дней отдыха. Иными словами, в нужной покупке число путевок первого типа не больше 2. Точно так же на 18 батов можно купить 3 путевки второго типа или 2 путевки третьего типа, однако второй вариант хуже, так что путевок третьего типа следует покупать не более одной. Но если купить одну, то на остальные путевки придется 91 батов, а это число нечетно, тогда как каждая из этих путевок стоит четное число батов, так что путевок третьего типа вообще не следует покупать.

Поэтому на 100 батов надо как можно больше купить путевок второго типа, а поскольку их стоимость должна делиться на 6, то их нужно купить 16, а на оставшиеся 4 бата — одну путевку первого типа.

230. Задача имеет единственное решение: если k — искомое число, то при $n > k$ третьему умельцу, чтобы догнать второго, после того как он догнал первого, понадобится меньше, а при $n < k$ — больше полутора часов. Попытаемся подобрать число k, причем $k \geq 9$.

Так как число 5 нечетно, то посмотрим, что происходит через час после начала работы первого, и при подборе, чтобы не связываться с дробями, рассмотрим сначала число 10. Тогда к указанному моменту и первый, и третий изготовят по 5 игрушек, т.е. поровну, а еще через полтора часа третий изготовит еще 15 игрушек, т.е. всего 20 игрушек. К этому времени второй умелец работал 2,5 ч и изготовил $2{,}5 \cdot 8 = 20$ игрушек. Значит, число 10 удовлетворяет условию задачи.

231. Пусть a, b, c — число соответственно одно-, двух- и трехкомнатных квартир. Тогда, по условию, $b = 4a$, c делится на a и $5c = b + 22$, $a + b + c \geq 100$.

Следовательно, $5c = 4a + 22$ делится на a, т.е. 22 делится на a, и значит a равно 1, 2, 11 или 22. Но $4a + 2 = 5c - 20$ делится на 5, и этому условию удовлетворяют только $a = 2$ и $a = 22$. При $a = 2$ получаем $b = 8$, $5c = 30$, откуда $a + b + c < 100$, а при $a = 22$, $b = 88$, $c = 22$, и общее число квартир равно 132.

232. Обозначим число девушек-гимназисток через x и заполним таблицу:

ДГ	ЮГ	ДЛ	ЮЛ
x	$x + 20$	$5x$	$n(x + 20)$

По первому условию задачи,

$$5x + n(x + 20) = x + x + 20 + 620, \quad nx + 3x + 20n = 620,$$

$$x(n + 3) + 20(n + 3) = 680, \quad (x + 20)(n + 3) = 680,$$

и поскольку $6 \leq n \leq 12$, $9 \leq n + 3 \leq 15$, а $680 = 17 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5$, как нетрудно заметить, имеет только один делитель от 9 до 15 — число 10, так что $n = 7$, $x + 20 = 680 : 10 = 68$, $x = 48$. Общее число заявлений равно

$$7x + 20 + 7(x + 20) = 14 \cdot 48 + 160 = 700 - 28 + 160 = 832.$$

233. Пусть x и y — число аудиторий в первом корпусе. Тогда в каждой аудитории экзаменовалось x абитуриентов, так что всего абитуриентов было $3x^2$, а во втором варианте проведения экзамена в каждой из y аудиторий экзаменовалось бы y^2 человек, и следовательно, абитуриентов было $2y^3$, и таким образом, $3x^2 = 2y^3$.

Отсюда следует, что x делится на 2, а y делится на 3, т.е.

$$x = 2a, \quad y = 3b, \quad 12a^2 = 54b^3, \quad 2a^2 = 9b^3,$$

$$a = 3c, \quad b = 2d, \quad 18c^2 = 72d^3, \quad c^2 = 4d^3,$$

$$c = 2p, \quad 4p^2 = 4d^3, \quad p^2 = d^3.$$

Наименьшие числа, удовлетворяющие этому равенству — это $p = d = 1$. Далее получаем $c = 2$, $a = 6$, $x = 12$, $3x^2 = 432$.

234. Перенумеруем мысленно всех участников конференции и сделаем «список знакомств», а «знакомством» будем считать пару чисел, являющихся номерами людей, знакомых друг с другом. Список организуем так: сначала пойдут семь «знакомств» первого по порядку участника конференции, затем семь «знакомств» второго и т.д. Так как каждый человек знаком ровно с семью другими, то всего имеется $77 \cdot 7$ «знакомств», но каждое «знакомство» в этом списке появится ровно 2 раза — так как мы не считаем человека «знакомым с самим собой», то в каждой паре номера различны. Поэтому число $77 \cdot 7$ должно делиться на 2, а это неверно. Значит, ситуация, описанная в задаче, невозможна.

235. Каждый раз, когда сын младше отца в целое число k раз, разность их возрастов также в целое число раз больше возраста сына, и поэтому требуется найти, сколько существует натуральных чисел от 2 до 72, при которых число $k + 2$ является делителем числа 26. Так как 26 имеет 2 делителя, больших 2, то событие, о котором идет речь в условии задачи, случится 2 раза.

236. Область определения данной функции задается неравенством $2x - 3 \geq 0$, решение которого $x \geq \frac{3}{2}$.

237. Подкоренное выражение имеет смысл при любом x, а корень нечетной степени можно извлечь из любого действительного числа, поэтому область определения данной функции есть множество **R**.

238. Область определения данной функции задается неравенством $x^2 - 3x - 4 \geq 0$, которое выполняется при $x \leq -1$ и при $x \geq 4$.

239. Область определения заданной функции задается неравенством $-2x^2 + 3x - 5 \geq 0$ или $2x^2 - 3x + 5 \leq 0$. Это неравенство не имеет решений, так как дискриминант квадратного трехчлена, стоящего в левой части, отрицателен, а старший коэффициент положителен. Иными словами, неравенство ложно при любом x, так что область определения заданной функции — пустое множество, т.е. эта функция есть **нигде не определенная функция** (см. Компендиум).

240. Область определения данной функции задается неравенством $2x - |x| \geq 0$. При $x \geq 0$ неравенство принимает вид $x \geq 0$, так что любое число $x \geq 0$ является его решением. При $x < 0$ оно имеет вид $3x \geq 0$, и значит, не имеет отрицательных решений, и функция определена только при $x \geq 0$.

241. Если $x \geq 0$, то подкоренное выражение равно $-2x$ и неотрицательно лишь при $x = 0$. Если $x < 0$, то подкоренное выражение равно $-6x$ и при любом $x < 0$ положительно, и следовательно, область определения заданной функции состоит из всех неотрицательных чисел.

242. Подкоренное выражение неотрицательно при любых действительных x, поскольку является суммой двух неотрицательных слагаемых.

243. Подкоренное выражение является многочленом и определено при любом x, как и корень нечетной степени, значит, областью определения данной функции является множество **R**.

Комментарий. Тот факт, что подкоренное выражение является многочленом и определено при любом x, можно было опустить, и при этом решение нельзя рассматривать как недостаточно строгое.

244. Область определения данной функции задается неравенством $255 - 24x^2 - 13x \geq 0$, или $24x^2 + 13x - 255 \leq 0$,

для его решения прежде всего надо решить уравнение $24x^2 + 13x - 255 = 0$, а для этого нужны его корни. Нетрудно эти корни найти методом подбора: при $x = 1$ и при $x = 2$ выражение $24x^2 + 13x$ меньше 255, а при $x = 3$ в левой части получаем $24 \cdot 9 + 39 = 240 - 24 + 39 = 255$, так что 3 — корень этого уравнения. А тогда, по теореме Виета, его второй корень равен $-\dfrac{255}{3 \cdot 24} = -\dfrac{85}{24}$. Следовательно, неравенство выполняется при $-\dfrac{85}{24} \leq x \leq 3$. Это и есть область определения заданной функции.

245. Заданная квадратичная функция принимает свое наименьшее значение при $x = 1$, а это число принадлежит рассматриваемому отрезку, поэтому $y(1) = -3$ и есть ее наименьшее значение. Наибольшее значение на $[-1, 3]$ она принимает в его концах, а поскольку 1 — середина этого отрезка, то эти значения равны, и значит, наибольшее значение функции равно $y(-1) = 5$.

Комментарий. Поскольку в решении сказано, что речь идет о *заданной* функции, то мы и не ссылались на то, что коэффициент 2 при x^2 положителен.

246. Заданная квадратичная функция принимает свое наименьшее значение при $x = 1$, а это число принадлежит рассматриваемому интервалу, поэтому $y(1) = 2$ — ее наименьшее значение.

А наибольшего значения заданная функция не имеет. В самом деле, на отрезке $[1, 3]$ она возрастает от 2 до $f(3) = 3$, но значение 3 принимает только в точке 3, и если бы в какой-то точке a она имела наибольшее значение, то при любом x из интервала $(-1, 3)$, большем a, она принимала бы значение, большее, чем в точке a. Аналогично рассматривается «вторая половина» отрезка $[-1, 3]$.

Комментарий. Функция, монотонная на интервале, не может иметь ни наибольшего, ни наименьшего значения (см. Компендиум). Конечно, это утверждение вполне очевидно, но в нынеших учебниках его нет, а ссылка на Компендиум, разумеется, некорректна. Однако, зная этот факт, им можно эффективно воспользоваться при решении задач с выбором ответа.

247. Заданная квадратичная функция принимает свое наименьшее значение при $x = 1$, а это число принадлежит рассматриваемому интервалу, поэтому $y(1) = 1$ — ее наименьшее значение. А «замкнув» промежуток $(-1, 3]$, т.е. рассмотрев отрезок $[-1, 3]$, мы получим, что свое наибольшее значение функция принимает в одном из его концов, и поскольку $y(-1) = 13$, $y(3) = 13$, а точка 3 принадлежит «незамкнутому» промежутку $(-1, 3]$, то 13 — это и есть ее наибольшее значение на этом промежутке.

248. Абсцисса вершины параболы, являющейся графиком заданной квадратичной функции, равна 1, ветви параболы направлены вниз. Поэтому на заданном промежутке функция возрастает и принимает свое наибольшее значение в точке -3, а наименьшее значение в точке 1. Так как $y(-3) = -37$, $y(1) = -5$, то -37 и -5 — это и есть ее искомые «крайние» значения.

249. Абсцисса вершины параболы, являющейся графиком заданной квадратичной функции, равна 1, ветви параболы направлены вниз. Поэтому на заданном промежутке функция возрастает, а монотонная функция, непрерывная на интервале, не достигает ни наибольшего, ни наименьшего значения ни в одной точке этого интервала.

***Комментарий*.** См. комментарий к решению задачи 246.

250. Абсцисса вершины параболы, являющейся графиком заданной квадратичной функции, равна 2, ветви параболы направлены вниз. Поэтому на заданном промежутке функция возрастает и достигает своего наибольшего значения в точке 2 (оно равно 9), а наименьшего значения не имеет.

251. Графиком данной квадратичной функции является парабола, абсцисса вершины которой равна 1, а ветви направлены вверх. Поэтому наибольшего значения функция не достигает, а наименьшее значение достигается в точке 1 и равно -19.

252. Графиком данной квадратичной функции является парабола, абсцисса вершины которой равна 2, а ветви направлены вниз. Поэтому наименьшего значения функция не достигает, а наибольшее значение достигается в точке 2 и равно 2.

253. См. решение задачи 246.

254. На заданном отрезке функция $f(x) = \sqrt{x-1}$ положительна и возрастает, поэтому данная функция $y = \dfrac{1}{f(x)}$ убывает и принимает свое наибольшее значение в точке 10 — оно равно $\dfrac{1}{3}$, а свое наименьшее значение в точке 50 — оно равно $\dfrac{1}{7}$.

255. На заданном отрезке функция $y = f(x) = x^2 + 1$ положительна и возрастает, поэтому заданная функция $y = \dfrac{1}{f(x)}$ убывает и принимает свое наибольшее значение в точке 1 — оно равно $\dfrac{1}{2}$, а свое наименьшее значение — в точке 5, и оно равно $\dfrac{1}{26}$.

256. На заданном промежутке $y = \sqrt{x-3}$ возрастает, поэтому наименьшего значения она достигает в точке 5 и оно равно $\sqrt{2}$, а наибольшего значения функция не имеет: у каждого значения $f(a)$ есть большее его — при $b > a$.

257. Данная функция является возрастающей, а ее область определения есть промежуток $\left[-\frac{1}{3}, +\infty\right)$. Поэтому наименьшее значение функция принимает в конце этого промежутка, т.е. оно равно $f\left(-\frac{1}{3}\right) = -1$, а наибольшего значения функция не имеет, поскольку для любого ее значения можно указать большее.

258. Данная функция является возрастающей на множестве действительных чисел, поэтому не имеет ни наименьшего, ни наибольшего значений.

259. Данная функция является убывающей на области определения, т.е. на промежутке $\left[-\frac{1}{2}, \infty\right)$. Поэтому наименьшего значения функция не достигает, а наибольшее значение достигается в точке $-\frac{1}{2}$ и равно 4.

260. При всех действительных значениях переменной подкоренное выражение не меньше 5 и может принимать любое значение, большее 5. Поэтому наибольшего значения данная функция не имеет, а ее наименьшее значение достигается в точке 0 и равно $3\sqrt{5} - 6$.

261. Так как модуль всегда больше или равен 0, то посмотрим, может ли он быть равным 0. Уравнение $-x^2 + 2x + 3 = 0$ или $x^2 - 2x - 3 = 0$ имеет корни -1 и 3, так что наименьшее значение заданной функции равно 0.

262. Так как модуль всегда больше или равен 0, то посмотрим, может ли он быть равным 0. Уравнение $-x^2 + 2x - 3 = 0$ или $x^2 - 2x + 3 = 0$ имеет отрицательный дискриминант, поэтому корней оно не имеет, а квадратный трехчлен $-x^2 + 2x - 3$ всегда отрицателен — его коэффициент при x^2 меньше 0. Поэтому $y = \left|-x^2 + 2x - 3\right| = x^2 - 2x + 3$

и выделив полный квадрат, получим $y = (x-1)^2 + 2$, откуда следует, что свое наименьшее значение y принимает при $x = 1$, и оно равно 2.

263. Так как $|x|^2 = x^2$, то заданную функцию можно записать в виде $y = 3 - 2|x| - |x|^2$ или $y = 3 - 2z - z^2$, где $z \geq 0$. Квадратичная функция $y = 3 - 2z - z^2$ имеет отрицательный коэффициент при z^2 и поэтому возрастает при $z \leq -1$ и убывает при $z \geq -1$. Но она интересует нас только для $z \geq 0$ и поскольку при этих z она убывает, то принимает свое наибольшее значение в точке 0, а $y(0) = 3$. Таким образом, наибольшее значение заданной функции равно 3.

Выделив в полученном квадратном трехчлене полный квадрат, получим $y = 4 - \left(|x| + 1\right)^2$.

Правая часть полученной зависимости представляет собой разность двух выражений. Уменьшаемое равно 4, а вычитаемое не меньше 1 при любом действительном значении переменной и может принимать сколь угодно большие значения. Поэтому наименьшего значения данная функция не имеет. Наибольшее значение разности достигается при наименьшем значении вычитаемого, т.е. при $x = 0$ и равно 3.

264. Функция $y + 1$ является суммой двух выражений, произведение которых равно 4, т.е. постоянно, а в таких случаях работает неравенство Коши между средними, и следовательно, все значения функции $y + 1$ больше или равны $2\sqrt{4} = 4$, так что y всегда больше или равен 3. Так как при $x = 1$ $y = 3$, то 3 — это и есть искомое наименьшее значение функции y.

265. Сумма первого и четвертого слагаемых принимает свое наименьшее значение 3 в любой точке отрезка [1, 4], сумма второго и третьего слагаемых — наименьшее значение 1 в любой точке отрезка [2, 3]. Поэтому, например, в точке 2 они обе принимают свои наименьшие значения, так что в этой точке и все выражение принимает свое наименьшее значение $3 + 1 = 4$.

266. Из геометрических соображений — на основе расстояний — имеем:

$$\forall x\left(|x-1|+|x-5|\ge 4\right) \text{ и } |x-1|+|x-5|=4 \Leftrightarrow x\in[1,5],$$

$$\forall x\left(|x-2|+|x-4|\ge 2\right) \text{ и } |x-2|+|x-4|=2 \Leftrightarrow x\in[2,4].$$

Поэтому

$$\forall x\left(|x-1|+|x-5|+|x-2|+|x-4|\ge 6\right),$$

и при $x=3$ $|x-1|+|x-2|+|x-3|+|x-4|+|x-5|=6$.

Таким образом, наименьшее значение заданного выражения равно 6.

267. Из геометрических соображений, каждая из сумм слагаемых, равноудаленных от начала и конца заданного выражения, принимает свое наименьшее значение, в частности, в точке $x=n$. Поэтому в этой точке принимает свое наименьшее значение и заданное выражение, т.е. искомое наименьшее значение равно:

$$(n-1)+(n-2)+\ldots+1+0+1+2+\ldots+n=2(1+2+\ldots+n)-n=$$
$$=n(n+1)-n=n^2.$$

268. При нечетном числе слагаемых заданная сумма имеет «среднее» слагаемое $|x-n-1|$. Рассуждая точно так же, как в задаче 267, получаем, что заданное выражение — без учета этого слагаемого — принимает свое наименьшее значение в точке $x=n+1$, а в этой точке свое наименьшее значение 0 принимает и «неучтенное» слагаемое $|x-n-1|$. Поэтому искомое наименьшее значение равно:

$$n+(n-1)+\ldots+1+0+1+2+\ldots+n=2(1+2+\ldots+n)=n(n+1).$$

269. Так как все значения функции $y=\operatorname{sgn}x$, т.е. ±1 и 0 — числа рациональные, то $D(\operatorname{sgn}x)=1$ при любом x.

270. Так как функция Дирихле принимает только значения 1 и 0 и оба они неотрицательны, то функция y принимает два значения 1 и 0, т.е. $D(y)=\{0,1\}$.

271. Умножив все три части двойного неравенства $A\le f(x)\le B$ на -1, получаем $-A\ge f(x)\ge -B$, и осталось доказать, что оба неравенства в этом двойном неравенстве могут оказаться равенствами. Но при некоторых c и d, по условию, имеют место равенства $f(c)=A$, $f(d)=B$, а тогда — $-f(c)=-A$, $-f(d)=-B$, так что числа $-B$ и $-A$ действительно является соответственно наименьшим и наибольшим значениями функции $y=-f(x)$.

272. По условию $a\le f(x)\le b$, откуда на основании свойств числовых неравенств получаем $2a\le 2f(x)\le 2b$ и $2a-3\le 2f(x)-3\le 2b-3$. То, что оба неравенства могут обратиться в равенства, показывается так же, как в задаче 271.

273. По условию, $A\le f(x)\le B$, откуда на основании свойств числовых неравенств имеем $-3A\ge -3f(x)\ge -3B$, $5-3A\ge 5-3f(x)\ge 5-3B$, причем оба неравенства могут обратиться в равенства — это можно показывать так же, как в задаче 271.

274. Так как любое неравенство не нарушается при умножении на положительное число, то умножив все три части двойного неравенства $A\le f(x)\le B$ на положительное число c, получим неравенство $cA\le f(x)\le cB$, причем обе части этого двойного неравенства могут превратиться в равенства, поскольку при некоторых значениях x выполняются равенства $f(x)=A$ и $f(x)=B$. При $c=0$ данная функция y — нулевая, так что ее наименьшее и наибольшее значения равны. При $c<0$ мы должны изменить знак неравенства на противоположный, и тогда приходим к неравенству $cA\ge cf(x)\ge cB$, но осталось еще доказать, что оба неравенства могут превратиться в равенства (см. решение задачи 271. Поэтому cB — наименьшее, а cA — наибольшее значение рассматриваемой функции y.

275. Из условия следует, что при любом x (разумеется, из области определения функции f) выполняется неравенство $0<A\le f(x)\le B$, а поскольку для *положительных* чи-

сел, чем больше данное число, тем меньше обратное к нему, то $\frac{1}{A} \ge \frac{1}{f(x)} \ge \frac{1}{B}$, то наибольшее и наименьшее значения функции f равны соответственно $\frac{1}{A}$ и равно $\frac{1}{B}$ — эти значения принимаются в тех же точках, в которых f принимает значения A и B.

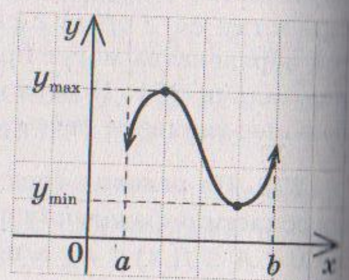
Комментарий. Вместо того чтобы говорить о неравенстве между обратными для положительных чисел, можно сослаться на убывание функции $y = \frac{1}{x}$ на множестве положительных чисел: если $a > b > 0$, то $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

276. Из условия следует, что при любом x (разумеется, из области определения функции f) выполняется неравенство $A \le f(x) \le B < 0$, а поскольку на множестве отрицательных чисел функция $y = \frac{1}{x}$ убывает, то $\frac{1}{A} \ge \frac{1}{f(x)} \ge \frac{1}{B}$, то наибольшее и наименьшее значения функции f равны соответственно $\frac{1}{A}$ и $\frac{1}{B}$ — эти значения принимаются в тех же точках, в которых f принимает значения A и B.

277. В качестве контрпримера можно рассмотреть функцию $y = x$ на отрезке $[-2, -1]$. Ее наибольшее значение на указанном отрезке равно -1, а наибольшее значение функции $y = |x|$ на том же отрезке равно 2.

278. Да, например, функция $y = \sin x$ на интервале $(-\pi, \pi)$.

Комментарий. Не менее убедительным может быть пример, задающий требуемую функцию графиком (см. рис.).



279. Может, например, функция $y = \sin x$ на интервале $(0, \pi)$.

280. Может, например, функция $y = \sin x$ на интервале $(-\pi, 0)$.

283. Любая из «школьных» функций непрерывна в области определения, а непрерывная на отрезке функция обязательно имеет на этом отрезке и наименьшее, и наибольшее значения (см. Компендиум).

286. Если число A является одновременно и наибольшим, и наименьшим значением функции f, то для всех значений x из ее области определения выполняется двойное неравенство $A \le f(x) \le A$, так что $f(x) = A$.

Комментарий. Можно вообще не рассуждать, а просто взять пример, дающий утвердительный ответ на поставленный в условии вопрос, скажем, $y = 1$.

287. Если число A является одновременно и наибольшим, и наименьшим значениями функции f, то для всех значений x из ее области определения выполняется двойное неравенство $A \le f(x) \le A$, откуда $f(x) = A$.

288. Если наибольшие значения функций f и g равны соответственно A и B, т.е. $f(x) \le A$ при всех $x \in D(f)$, а $g(x) \le B$ при всех $x \in D(g)$. Тогда $f(x) + g(x) \le A + B$, и надо выяснить, всегда ли можно здесь добиться равенства в некоторой точке c.

Но чтобы получить равенство $f(c) + g(c) = A + B$, нужно, чтобы значение $f(c)$ равнялось A, а значение $g(c)$ равнялось B, т.е. чтобы функции f и g принимали свое наибольшее значение в одной и той же точке, а это ниоткуда не следует, т.е. утверждение, о котором идет речь в условии, скорее всего неверно, и требуется искать контрпример. Простейший пример дают квадратичные функции, например, $y = -x^2$ и $y = -(x-1)^2$: обе они имеют наибольшее значение 0, но принимают его в разных точках, а их сумма $y = -2x^2 + 2x - 1$ принимает наибольшее значение при $x = \frac{1}{2}$ и оно равно $-\frac{1}{2} + 1 - 1$, т.е. $-\frac{1}{2}$.

289. Примером, дающим отрицательный ответ на вопрос задачи, являются функции $y = x^2$ и $y = (x-1)^2$.

290. Пусть наименьшие значения функций f и g равны соответственно A и B, т.е. $f(x) \geq A$, $g(x) \geq B$ для всех допустимых значений x, т.е. $x \in D(f)$ для первого неравенства и $x \in D(g)$ для второго. Но из этих двух неравенств не следует, что выполняется неравенство $f(x)g(x) \geq AB$, поскольку неравенства, у левой и правой частей которых знаки неизвестны, нельзя перемножать.

Это соображение кажется достаточно серьезным препятствием для дальнейших попыток доказательства и поэтому желательно искать контрпример. В качестве примера рассмотрим функции $y = x$ и $y = 2x$, заданные на отрезке $[-2; -1]$. На этом отрезке их наименьшие значения равны соответственно -2 и -4, а наименьшее значение их произведения на этом отрезке равно 2.

291. Если выполняются неравенства $f(x) \geq A$ и $g(x) \geq B$, то утверждать, что выполняется также и неравенство $f(x)g(x) \geq AB$ мы не имеем права, поскольку если мы ничего не знаем о знаках левой и правой частей двух неравенств, то их нельзя почленно перемножать. Поэтому естественно искать контрпример — две функции, наименьшее значение каждой из которых отрицательно.

При этом для построения контрпримера ничто не мешает взять эти функции равными и, например, из множества квадратичных функций. В случае $f = g$ надо будет выяснить, следует ли из неравенства $f(c) \geq A$ неравенство $f(c) \geq A^2$. Предположим, $f = x^2 - 1$: ее наименьшее значение равно -1, а наименьшее значение функции ее квадрата $y = (x^2 - 1)^2$ равно, очевидно, 0, так что ответ в задаче отрицательный.

292. Выполнение неравенства $A \leq f(x) \leq B$ означает лишь то, что график функции f расположен в полосе координатной плоскости между прямыми $y = A$ и $y = B$ и совсем не обязан иметь общие точки с граничными прямыми. В качестве контрпримера можно взять функцию $y = x$ $(x \in [0, 1])$, $A = -1$, $B = 1$.

293. Из того, что $E(f) = [a, b]$, следует, что $a \leq f(x) \leq b$. Но из неравенств $a \leq f(x) \leq b$ не следует, что множеством значений функции f является весь отрезок $[a, b]$, а не его часть, так что утверждения неравносильны.

294. Данное неравенство означает, что при любом $x \in D(f)$ значение $f(x)$ принадлежит отрезку $[A, B]$, т.е. для любого $x \in D(f)$ $f(x) \in [A, B]$. Но это в точности то же самое, что $D(f) \subset [A, B]$.

Комментарий. Ответ можно сформулировать и в других видах — например, или «... функции f является частью (подмножеством) отрезка $[A, B]$».

295. Если бы этот вывод был правильным, то любое число C, большее B, также было бы наибольшим значением f: из $f(x) \leq B$ следует, что $f(x) \leq C$.

296. Возникает задача: имея только функцию f, сконструировать две связанных с ней функции, принимающие одна только неотрицательные, другая только неположительные значения. Это несложно, но требуемые функции можно взять разве лишь «с потолка»: всегда неотрицательной является сумма выражения с его модулем, неположительной — разность между выражением и его модулем. Поэтому для функции f естественно рассмотреть выражения $g(x) = f(x) + |f(x)|$ и $h(x) = f(x) - |f(x)|$. Тогда $g(x) + h(x) = 2f(x)$, и $f(x) = \frac{f(x) + |f(x)|}{2} + \frac{f(x) - |f(x)|}{2}$ — нужное представление функции f.

297. Квадратичная функция не является ни возрастающей, ни убывающей, так как в точках, симметричных относительно абсциссы ее вершины, она принимает одинаковые значения.

Комментарий. Разумеется, на это свойство квадратичной функции можно ссылаться без предварительного его доказательства как на совершенно очевидное, но надо уметь логически строго доказывать даже и столь очевидные утверждения — если, конечно, школьный курс математики позволяет это сделать (в рамках существующего курса, например, нельзя доказать основные законы арифметики и мн. др.). Решение можно провести и более формально, основываясь на иной идее: функция $y = ax^2 + bx + c$ принимает значение c в двух точках: $x = 0$ и $x = -\frac{b}{a}$, и эти точки различны при $b \neq 0$, поэтому при $b \neq 0$ функция не является монотонной (см. Компендиум). А при $b = 0$ она принимает значение c также в двух точках: например, $x = \pm 1$.

298. Для отрицательного ответа на поставленный в условии вопрос достаточно убедиться, что функция хотя бы два раза принимает одно и то же значение. Проще всего рассмотреть значение 7: уравнение $2x^3 - 3x + 7 = 7$, или $2x^3 - 3x = 0$ имеет три корня, т.е. данная функция принимает значение 7 три раза, и значит, не является монотонной.

299. Так как функции $y = \sqrt{x+3}$ и $y = \sqrt{x+1}$ — возрастающие, а заданная функция является их суммой, то она также является возрастающей (см. Компендиум).

Комментарий. Напомним, что утверждение о возрастании суммы возрастающих функций содержит некоторое уточнение, а именно, сумма возрастает на любом промежутке, на котором она определена. Поэтому, строго говоря, в решение этой задачи лучше было бы добавить замечание, что область определения данной функции y является промежутком $(-1, +\infty)$, и потому к ней может быть применена теорема о возрастании суммы (см. также Компендиум).

300. Данная функция представляет собой разность возрастающих функций, а такая разность может быть «какой угодно» — и возрастающей, и убывающей, и ни возрастающей, ни убывающей. Поэтому утверждать что-либо на основании «общих соображений» невозможно. Здесь помогает искусственный прием: умножим и разделим выражение, задающее функцию y, на сумму радикалов:

$$\sqrt{x-2} - \sqrt{x+1} = \frac{(x+2)-(x+1)}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}} = \frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}},$$

а функция в знаменателе возрастающая (см. решение задачи 299) и принимает только положительные значения (см. Компендиум), то функция y — убывающая.

301. Так как

$$y = \sqrt{x+2} - \sqrt{x-3} = \frac{x+2-x+3}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-3}} = \frac{5}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-3}}.$$

Теперь в знаменателе стоит сумма положительных чисел и при увеличении x знаменатель увеличивается, так что дробь (заметим, что она имеет положительный числитель) уменьшается, и следовательно, функция y — убывающая.

Комментарий. Приведенное в решении рассуждение полностью заменяет ссылку на возрастание $y = \sqrt{x+2} + \sqrt{x-3}$.

302. Проще всего искать линейную функцию вида $y = f(x) = ax$ и поскольку линейная функция возрастает в том и только в том случае, когда ее коэффициент при x положителен, то нам нужно такое число a, чтобы выполнялись неравенства $a + 7 > 0$ и $a + 5 < 0$. Очевидно, что оба этих неравенство верны, например, при $a = -6$.

303. Будем искать линейную функцию вида $y = f(x) = ax$ — наличие свободного члена на монотонность рассматриваемых функций не влияет. Так как линейная функция возрастает в том и только в том случае, когда ее коэффициент при x положителен, то нам надо такое число a, чтобы выполнялись два неравенства $a+5>0$ и $a+7<0$, т.е. $a>-5$ и в то же время $a<-7$, а это невозможно. Значит, требуемой функции не существует.

304. По графикам функций $y = x$ и $y = \sqrt{x}$ легко заметить, что первая функция растет быстрее, чем вторая, так что при больших x, «в бесконечности» заданная функция (будем обозначать ее через f), скорее всего, возрастает, а что происходит с «маленькими» значениями аргумента, не совсем ясно.

Будем подбирать примеры, максимально удобные для вычислений. При $x = 9$ и $x = 16$ имеем $f(x) = 6$ и $f(x) = 12$, т.е. $9 < 16$ и $f(9) < f(16)$, откуда следует, что функция f не является убывающей. С другой стороны, $f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$, $f\left(\frac{1}{9}\right) = \frac{1}{9} - \frac{1}{3} = -\frac{2}{9}$ и как легко проверить, $-\frac{1}{4} < -\frac{2}{9}$ (так как $-9 < -8$), т.е. $f\left(\frac{1}{4}\right) < f\left(\frac{1}{9}\right)$, тогда как $\frac{1}{4} > \frac{1}{9}$, так что возрастающей функция f также не является.

305. Взяв $a = 1$, $b = e^2$, найдем сначала целую часть b. Так как $e \approx 2{,}71$, то $2{,}7 < e < 2{,}8$, а $7{,}29 < b < 7{,}84$, и следовательно, $[b] = 7$. Поэтому $f(1) = 1$, $f(b) = 7 - 4 = 3$, так что $f(a) < f(b)$. Поскольку $a < b$, то функция f не является убывающей. Теперь возьмем $a = e^{-2}$, $b = 1$. Тогда $0 < a < 1$, так что $[a] = 0$, $f(a) = 4$, $f(1) = 4$, так что $f(a) > f(b)$, и поскольку $a < b$, функция f не является возрастающей.

306. Скорее всего заданная функция является возрастающей — при увеличении аргумента увеличивается и основание, и показатель степени (ясно, напр., что $5^5 < 6^6$: $5^5 < 5^6 < 6^6$) и эта гипотеза оказывается верной. В самом де-

ле, если $1 < a < b$, то $a^a < a^b$, так как функция $y = a^x$ — возрастающая, а неравенство $a^b < b^b$ или $\left(\frac{a}{b}\right)^b < 1$ верно в силу того, что функция $y = \left(\frac{a}{b}\right)^x$ — убывающая (можно сослаться и на то, что степень положительного числа, меньшего 1, будет меньше 1, если показатель степени положителен). Таким образом, $a^a < b^b$, т.е. данная функция действительно является возрастающей.

307. Хотелось бы думать, что эта функция, как и функция, рассмотренная в задаче 306, — возрастающая, но дело обстоит гораздо сложнее. В самом деле, если для доказательства неравенства $a^a < b^b$ (при $0 < a < b < 1$) попытаться повторить то же рассуждение — с помощью двойного неравенства $a^a < a^b < b^b$, — то уже левая часть этого двойного неравенства неверна: показательная функция с основанием $a < 1$ убывает, так что в данном случае $a^a > a^b$.

Остается еще надежда на то, что и в правой части стоит неверное неравенство, т.е. $a^b > b^b$, — в этом случае мы также получим ответ на вопрос задачи: функция не будет ни возрастающей, ни убывающей, но и эта надежда оказывается напрасной: неравенство $a^b > b^b$ или $\left(\frac{a}{b}\right)^b > 1$ также не выполняется, поскольку основание степени меньше 1, и после возведения в степень с положительным показателем остается меньше 1. Следует, очевидно, внимательно заняться числами x от 0 до 1.

Возьмем «для разведки» два значения x из этого интервала «наугад», например, $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$, и сравним значения функции f в этих точках: $f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $f\left(\frac{1}{3}\right) = \sqrt[3]{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$. Для простоты вычислений будем сравнивать не сами полученные значения, а их шестые степени — возведение в шестую степень двух положительных чисел не нарушает неравенство между ними, а именно шестая степень выбрана по достаточно очевидной причине: при возведении в эту степень мы одновременно избавляемся и от квадратного, и от кубического корня. Имеем: $\left(\sqrt{2}\right)^6 = \left(\left(\sqrt{2}\right)^2\right)^3 = 8$, $\left(\sqrt[3]{3}\right)^6 = \left(\left(\sqrt[3]{3}\right)^3\right)^2 = 8$ и теперь мы должны сравнить числа $\frac{1}{8}$ и $\frac{1}{9}$.

Ясно, что $\frac{1}{8} > \frac{1}{9}$, но и $\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$, мы получили дополнительную надежду, что и на интервале (0, 1) функция возрастает. Но прежде чем перейти к общему доказательству этого утверждения, проведем «на всякий случай» еще один эксперимент — рассмотрим точки $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{4}$. При этом $\frac{1}{2} > \frac{1}{4}$, и $f\left(\frac{1}{4}\right) = \sqrt[4]{\frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = f\left(\frac{1}{2}\right)$, мы получили ответ на вопрос задачи: рассматриваемая функция принимает одно и то же значение в двух точках, и следовательно, не является ни убывающей, ни возрастающей.

Комментарий. Поиск решения задачи оказался весьма непростым, но зато окончательное решение можно записать «в одну строчку», и оно только что приведено. Конечно, числа $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{4}$ взяты «с потолка» и мы «догадались» это сделать, зная, что с числами 2 и 4 связаны и некоторые другие «чудеса», проявляющиеся в других задачах.

308. Из определения функции $y = \operatorname{sgn} x$ следует, что если $x_1 < x_2$, то $\operatorname{sgn} x_1 \le \operatorname{sgn} x_2$, что и означает «неубывание» функции $y = \operatorname{sgn} x$.

309. Странно было бы, если бы такая «дикая» функция обладала «хорошим» свойством монотонности, а для отрицательного ответа на поставленный в условии вопрос достаточно убедиться, что функция хотя бы 2 раза принимает одно и то же значение.

Для поиска двух таких точек первое слагаемое «заставляет» взять x маленьким, а второе — рациональным. Ясно, что $y\left(\frac{1}{2}\right) = y\left(\frac{1}{3}\right) = 1$ — степени этих дробей рациональны и имеют целую часть, равную 0.

Комментарий. Можно рассуждать и иначе: при любом $x \in (0, 1)$ первое слагаемое в левой части равно 0, так что данная функция на этом интервале совпадает с функцией $D\left(x^{200}\right)$ и равна 0 для любого рационального числа из этого интервала.

310. Едва ли столь «плохая» функция обладает «хорошим» свойством, и поэтому сразу же будем подбирать примеры значений аргумента, показывающие, что она не является монотонной. Вычислим несколько значений функции f: $f(0) = 0$, $f(1) = 2^{100}$, $f(2) = 0$ и уже видно, что $0 < 1 < 2$, но $f(0) < f(1)$ и $f(1) > 2$, и значит, функция f не является ни убывающей, ни возрастающей.

311. Если заданное выражение положительно, то при $a < b$ числитель и знаменатель оба положительны, т.е. $f(b) - f(a) > 0$, $f(b) > f(a)$. Иными словами, из $a < b$ следует, что $f(a) < f(b)$, т.е. функция f — возрастающая. Точно так же в случае, когда заданное выражение отрицательно, функция f является убывающей.

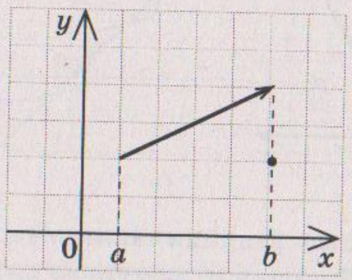
312. График функции $y = \sin x$ пересекает ось абсцисс в бесконечном числе точек, а «обрезав» его, можно получить любое заданное число точек пересечения, в том числе и 0 — рассматривая синус, скажем, только на интервале (0, 1). Таким образом, число точек пересечения графика функции f с осью абсцисс может быть любым — конечным или бесконечным.

Комментарий. Естественно, 0 считается конечным числом как число элементов пустого множества, которое также считается конечным.

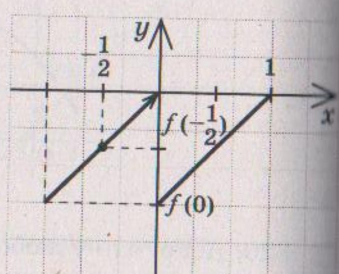
313. Если график возрастающей функции пересекает ось абсцисс в разных точках a и b, то $f(a) = 0$, $f(b) = 0$, т.е. $f(a) = f(b)$, а это противоречит возрастанию функции f.

кривые, являющиеся графиками функций. Поэтому искать контрпример надо среди «экзотических» функций, на ум сразу же приходит функция Дирихле. И действительно, она не обладает указанным в условии свойством: на любом интервале (a, b) имеются и рациональные, и иррациональные числа. Если c — рациональное число из интервала (a, b), то взяв на интервале (c, b) иррациональное число d, получим, что $c < d$, но $f(c) = 1 > f(d) = 0$, т.е. функция не является возрастающей на (a, b). Точно так же, если взять c иррациональным, то взяв на интервале (c, b) рациональное число d, получим, что $c < d$, но $f(c) = 0 < f(d) = 1$, т.е. функция не является убывающей на (a, b).

321. Контрпример к рассматриваемому утверждению легко найти среди кусочно заданных функций, сдвигая вниз «правую» часть графика какой-нибудь возрастающей функции, но при этом обязательно захватить граничную точку (рис. а). Можно привести и конкретный пример — взять функцию $y = x(-1 \le x \le 1)$ и сдвинуть вниз на 1 ее график на отрезке $[0, 1]$), т.е. рассмотреть функцию $y = f(x) = \begin{cases} x & \text{при } -1 \le x < 0, \\ x - 1 & \text{при } 0 \le x \le 1. \end{cases}$ Эта функция возрастает на интервале $(-1, 0)$: если $-1 < a < b < 0$, то $f(a) = a$, $f(b) = b$, т.е. $f(a) < f(b)$. Но на отрезке $[-1, 0]$ она не является возрастающей: $-\frac{1}{2} < 0$, но $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} > f(0) = -1$ (рис.б).



а)



б)

Комментарий. Такого рода пример можно найти, «порывшись» и в своем запасе «экзотических» функций: функция $y = [x]$ возрастает на интервале $(0, 1)$, но не является возрастающей на $[0, 1]$. Ну и конечно, можно взять какую-нибудь известную возрастающую на отрезке функцию и «испортить» ее, переопределив на концах отрезка так, чтобы полученная кусочно заданная функция не являлась монотонной.

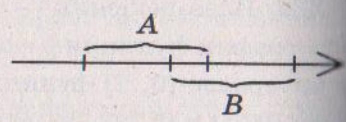
322. Идея решения — та же, что и в задаче 321: «сдвинув» график функции $y = x$ на интервале $(1, 2)$, мы получим на интервале $(0, 2)$ функцию, которая возрастает на интервалах $(0, 1)$ и $(1, 2)$, но не является возрастающей.

Комментарий. Конечно, в качестве примера можно привести функцию $y = -\frac{1}{x}$, которая возрастает, например, на $(-1, 0)$ и на $(0, 1)$, но не является возрастающей на $(-1, 1)$.

323. Так как в школьном курсе точное определение непрерывной функции отсутствует, то мы ограничимся графической очевидностью этого важного свойства непрерывной функции.

324. Условие задачи означает, что если числа a и b оба принадлежат промежутку A или промежутку B, то выполняется неравенство $f(a) < f(b)$, но этой информации слишком мало, чтобы судить о выполнении этого неравенства в случае, когда a и b принадлежат разным промежуткам. Поэтому естественно искать контрпример. Такой пример легко построить графически — например, положив, $f(x) = x$ на $[0, 2]$ и $f(x) = x$ на $[3, 4]$. Но проще всего вспомнить о функции $y = -\frac{1}{x}$ — она возрастает и на луче $(-\infty, 0)$, и на луче $(0, +\infty)$, но не является возрастающей: $-1 < 1$, но $y(-1) = 1 > y(1) = -1$.

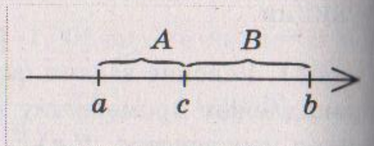
325. Дополнительное, по сравнению с задачей 323, условие наличия у данных интервалов общей точки позволяет продолжить начало рассуждения этой задачи, оказавшееся в ней тупиковым: общая часть двух интервалов является интервалом, и в том случае, когда a и b принадлежат различным интервалам, значения $f(a)$ и $f(b)$ можно попытаться сравнить с помощью $f(c)$, где c — некоторая общая точка интервалов A и B. Пусть a и b принадлежат разным интервалам и $a < b$, а $c > a$ — некоторая общая точка интервалов (см. рис.). Тогда $f(a) < f(c)$, так как точки a и c принадлежат интервалу A, а $f(c) < f(b)$, так как b и c принадлежат интервалу B, так что $f(a) < f(b)$.



Комментарий. Разумеется, для формальной полноты решения не грех рассмотреть и случай, когда точки a и b принадлежат одному из данных интервалов.

326. Если общая часть отрезков A и B является промежутком, то данное утверждение истинно и доказывается так же, как в решении задачи 325.

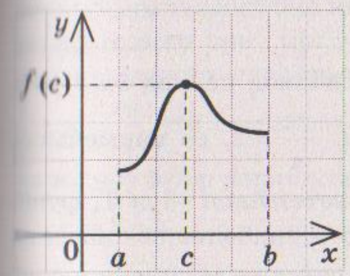
Если же они имеют только одну общую точку — их общий конец c (см. рис.), то при $a < b$ имеем $f(a) < f(c) < f(b)$, так что $f(a) < f(b)$.



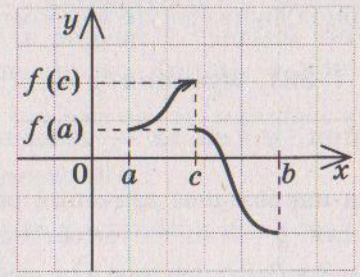
Комментарий. Отметим, что контрпример типа построенного в решении задачи 321, «не проходит», поскольку в общей точке отрезков значение функции, полученной после сдвига, нельзя однозначно определить.

327. По условию задачи, при $x \in [a, c]$ выполняется неравенство $f(x) \le f(c)$, а при $x \in [c, b]$ — неравенство $f(c) \ge f(x)$, т.е. все значения функции f больше или равны $f(c)$, так что c — наибольшее значение функции f.

328. Для «обычной» непрерывной функции, удовлетворяющей условию задачи, значение $f(c)$, конечно же, является ее наибольшим значением (рис. а), но если эту функцию «разорвать», то ситуация может измениться. Если мы сдвинем вниз «убывающую часть» графика функции f вместе с точкой $(c, f(c))$ так, чтобы эта точка стала ниже точки $(a, f(a))$, то c уже не будет наибольшим значением новой функции, так как $f(c) < f(a)$ (рис. б) . Эта новая функция будет по-прежнему возрастать на промежутке $[a, c)$ и убывать на промежутке $(c, b]$, так что построенный пример функции дает отрицательный ответ на поставленный вопрос.



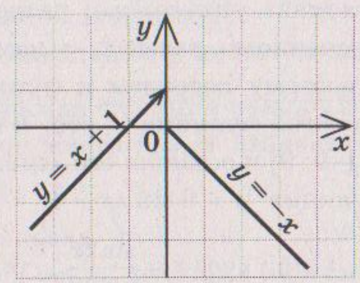
а)



б)

Комментарий. В качестве примера можно привести и функцию, заданную формально:

$$y = \begin{cases} x+1 & \text{при} \quad x < 0, \\ -x & \text{при} \quad x \ge 0. \end{cases} \quad \text{(рис. в).}$$



в)

Из этой таблицы сразу же видно, что произведение $(1+q)(1+q^2)$ делится на 100 только при $q = 7$, а тогда $a = 2$, т.е. рассматриваемая прогрессия есть 2, 14, 98, 686, так что сумма прогрессии, удовлетворяющая условию, может быть равной 800.

Комментарий. Приведенное решение можно рассматривать как черновое, а соответствующее чистовое решение можно провести в одну строчку: «Такая прогрессия существует — например, 2, 14, 98, 686».

552. Пусть q — знаменатель геометрической прогрессии, a — ее первый член, $2n$ — количество ее членов (длина). Сумма этой прогрессии равна, как известно, $a\dfrac{q^{2n}-1}{q-1}$ и поскольку числитель этой дроби делится на q^2-1 как разность степеней натуральных чисел, т.е. $q^{2n}-1 = c(q^2-1)$ $(c \in \mathbf{N})$, то $\dfrac{q^{2n}-1}{q-1} = c(q+1)$ — составное. А число 131 — простое: оно не делится на 3, 5, 7, 11, а дальше можно не проверять, так как достаточно искать простые делители, не большие, чем $\sqrt{131} < 13$ (см. Компендиум).

Таким образом, сумма прогрессии, удовлетворяющей условию, не может быть равна 131.

553. Самой простой бесконечной убывающей геометрической прогрессией является, скорее всего, последовательность $1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \ldots$. Ее сумма равна $\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$, а сумма четвертых степеней ее членов равна $\dfrac{1}{1-\frac{1}{16}} = \dfrac{16}{15}$. Эта прогрессия условию задачи не соответствует, и мы ее попробуем «подправить», изменив первый член: его достаточно умножить на 15, а тогда

сумма четвертых степеней умножится на 15^4 и станет равной $16\cdot 15^3 = 16\cdot 15\cdot 15\cdot 15 = 80\cdot 25\cdot 3\cdot 3\cdot 3 = 2000\cdot 27 = 54\,000$, и таким образом, правильный вариант ответа — второй.

Комментарий. Решение этой задачи приведет к равенствам

$$a = 30(1-q),\quad a^4 = 54\,000(1-q^4),$$

исключая из которых a, получим уравнение для q:

$$30^4(1-q)^4 = 54\,000(1-q^4),\quad 900(1-q)^4 = 60(1-q^4),$$

$$15(1-q)^4 = 1-q^4,$$

а это уравнение имеет четвертую степень, и для его решения, в частности, надо уметь подбирать рациональные корни многочленов с целыми коэффициентами, а это умение не входит в школьную программу. В то же время можно попытаться подобрать хотя бы один его корень, испытав простейшее значение $q = \frac{1}{2}$: $15\left(1-\frac{1}{2}\right)^4 = 15\cdot\frac{1}{16}$, $1-\left(\frac{1}{2}\right)^4 = 1-\frac{1}{16} = \frac{15}{16}$ и $\frac{1}{2}$ оказалась корнем. Иными словами, прогрессия 15, $\frac{15}{2}$, $\frac{15}{4}$, $\frac{15}{8}$, ... соответствует условию задачи.

554. Число 7533 делится на 3, и значит, это произведение делится на 3, а данные числа имеют сумму цифр, равную соответственно 32, 34, 35 и 36, и следовательно, первое, второе и третье числа на 3 не делятся, так что правильный вариант ответа — четвертый.

555. Оба множителя в данном произведении делятся на 3, и значит, это произведение делится на 9, а данные числа имеют сумму цифр, равную соответственно 23, 24, 25 и 27, и следовательно, первое, второе и третье числа на 9 не делятся, так что правильный вариант ответа — четвертый.

556. Так как $8+6 = 6+8$, т.е. суммы цифр, стоящих в числе 8668 на четных и на нечетных местах равны, то это число делится на 11 — по признаку делимости на 11. Поэтому и данное произведение делится на 11.

Для первого числа такие суммы равны $6 + 4 + 3 + 9 = 22$ и $0 + 3 + 2 + 6 = 11$ и поскольку их разность $22 - 11$ делится на 11, то это число делится на 11. Второе число получается из первого перестановкой цифр 2 и 9, т.е. одна из сумм увеличивается на $9 - 2 = 7$, а другая уменьшается на 7 и в результате такой перестановки цифр разность четной и нечетной сумм либо увеличивается, либо уменьшается на 14 и перестает делится на 11. Аналогично обстоит дело с третьим и с четвертым числами: одно из них получается из первого перестановкой второй и третьей цифр, другое — четвертой и седьмой цифр.

Таким образом, последние три числа не делятся на 11, так что правильный ответ — первый.

557. Первый сомножитель этого произведения при делении на 3 дает остаток 2, второй — остаток 1, и следовательно, при делении на 3 произведение дает остаток 2. Так как суммы цифр данных чисел равны соответственно 31, 32, 33 и 34 и при делении на 3 дают остатки 1, 2, 0 и 1, то правильный вариант ответа — второй.

558. Первый сомножитель этого произведения при делении на 9 дает остаток 4, второй — остаток 2, и значит, при делении на 9 произведение дает остаток 8. Так как суммы цифр данных чисел равны соответственно 49, 50, 51 и 52 и при делении на 9 дают остатки 1, 2, 3 и 4, то правильный вариант ответа — второй.

559. Последняя цифра произведения двух чисел совпадает с последней цифрой произведения их последних цифр, а в вариантах ответов 2, 3, 4 это не так, и следовательно, правильный вариант ответа — первый.

560. Первый сомножитель данного произведения при делении на 7 дает остаток 5, второй — остаток 2, и значит, при делении на 7 произведение дает остаток тот же, что и 10, т.е. 3. Разделив уголком первое число на 7, получим,

что остаток от его деления на 7 равен 3, а поскольку остальные числа получаются из первого прибавлением $10 = 7 + 3$, то их остатки от деления на 7 — это $3 + 3 = 6$, $3 + 6 = 9$, т.е. остаток 2 и $2 + 3 = 5$. Поэтому последние три варианта отпадают, и правильный вариант ответа — первый.

561. Первое равенство не верно, поскольку в правой его части есть множитель 5, а число в левой части на 5 не делится. Второе равенство неверно из-за того, что каждое из трех слагаемых меньше 0,2, а сумма больше единицы. В третьем равенстве выражение в левой части вычислить трудно, но можно попытаться сделать какую-нибудь несложную оценку, например, по знаку или по последней цифре — в числителе разность квадратов отрицательна и результат оканчивается цифрой 9, в знаменателе видим полный квадрат и последнюю цифру даже не выясняем — число в левой части «равенства» отрицательно. Остается четвертое равенство, которое мы считаем верным по «правилу исключения неверных ответов».

562. Сразу бросается в глаза несоответствие последних цифр в четвертом равенстве. В первом равенстве видим, что левая часть делится на 3, и, проверив по признаку делимости число из правой части, убеждаемся, что это равенство неверно.

Остается сделать выбор между вторым и третьим. Здесь оба рассуждения несложны: второе неверно, так как уж очень велико число $(-8)^{12}$, чтобы его можно было обнулить остальными ничтожными по сравнению с ним слагаемыми; а в третьем читается квадрат суммы в числителе и равный ему квадрат разности в знаменателе, так что верным является третье равенство.

563. Здесь, на наш взгляд, верное равенство можно найти сразу — преобразованию разности квадратов в школе уделяется традиционно много внимания, а во втором примере нужные пары даже идут в правильном порядке.

Однако можно найти это равенство и методом исключения. Так, в первом равенстве слева — число, большее, чем 10^{12}, а справа — меньшее, чем произведение шести сотен. В третьем примере достаточно прикинуть, что в числителе дроби стоит число, меньшее единицы, в знаменателе же — большее. Наконец, в четвертом примере числитель дроби отрицательный, а знаменатель положительный.

564. Левая часть первого равенства является четным числом, а правая нечетным — следовательно, первое неверно. Во втором случае левая часть делится на 4 с остатком 1, а правая с остатком 3 — тоже неверно. В четвертом нет соответствия последних цифр. Так что остается сделать вывод о том, что верным является третье равенство. Впрочем, его можно увидеть и сразу — преобразования разности квадратов и квадрата суммы прозрачны и легко выполняются устно.

565. В первой разности оба слагаемых делятся на 3, во второй, если знать, что $121 = 11^2$, естественно испытать и убедиться, что $2 - 9 + 6 - 4 + 7 - 6 + 4 = 0$ делится на 11, так что второе число — также составное. Для третьего числа признак делимости на 11 тоже подходит, а для четвертого числа подходит признак делимости на 3. Поэтому правильный вариант ответа — четвертый.

566. Так как $7^{33} = (6+1)^{33}$, то при перемножении 3 сумм 6 + 1 мы во всех слагаемых, кроме последнего, будем иметь множитель 6, а последнее слагаемое имеет вид $6k + 1$, и следовательно, при делении на 3 дает остаток 1, откуда следует, что во всех представленных вариантах суммы делятся на 3, так что правильный вариант ответа — четвертый.

567. Любая степень шестерки оканчивается цифрой 6, так что последняя цифра первой разности — 5 и поэтому она делится на 5. Второе число является суммой четных чисел, т.е. четно. Для третьей разности что-нибудь хорошее придумать трудно и мы перейдем к четвертой. Степени числа 4 оканчиваются либо на 4, либо на 6, причем первый случай имеет место при нечетном показателе степени, второй — при четном. Так как показатель 295 нечетный, то четвертое число оканчивается цифрой 5, и значит, делится на 5. Поэтому три составных числа мы уже обнаружили.

Больше трех составных чисел быть не может по условию. И таким образом, все три рассмотренных числа — составные, а $2^{31} - 1$ — число простое, хотя, с чисто математической точки зрения мы это не доказали. А правильный вариант ответа — третий.

568. Отбросим сразу же вариант 4 — второе из записанных чисел — четное, а остальные будем исследовать с точки зрения делимости на следующее простое число — 3. Так как $2^{61} = (3-1)^{61} = (3-1)(3-1)(3-1)\ldots(3-1)(3-1)$, то после перемножения во всех слагаемых, кроме последнего, будет тройка, а последнее слагаемое есть -1, т.е. 2^{61} можно записать в виде $3k - 1$, а тогда

$$2^{61} - 1 = 3k - 2, \quad 2^{61} - 5 = 3k - 6, \quad 2^{61} - 7 = 3k - 8,$$

и теперь можно отбросить вариант 3 — одно из этих трех чисел (точнее, $2^{61} - 5$) делится на 3.

Следующее простое число 5, поэтому будем искать последнюю цифру: так как $2^{61} = 2^{60} \cdot 2 = 16^{15} \cdot 2$, а число с последней цифрой 6 в любой степени оканчивается также цифрой 6, то 2^{61} оканчивается той же цифрой, что и $6 \cdot 2$, т.е. цифрой 2, так что одно из оставшихся чисел — число $2^{61} - 7$ оканчивается цифрой 5, и следовательно, является составным. Поэтому вариант 3 тоже оказался неверным.

Последнее число уже исследовать не нужно, так как остался единственный вариант — первый, он и является правильным.

569. Понаблюдаем за последними цифрами чисел, являющихся степенями чисел 9 и 4. Для этого составим таблицу:

N	1	2	3	4
Последняя цифра 9^n	9	1	9	1
Последняя цифра 4^n	4	6	4	6

Из таблицы видно, что 9 в нечетной степени оканчивается на 9, а 4 в нечетной степени на 4, так что данное выражение оканчивается цифрой 3.

570. Рассмотрим последние цифры чисел, которые являются степенями чисел 2 и 3. Для этого составим таблицу:

N	1	2	3	4	5	6
Последняя цифра 2^n	2	4	8	6	2	4
Последняя цифра 3^n	3	9	7	1	3	9

Из таблицы видно, что степени, отличающиеся на 4, оканчиваются одинаковыми цифрами. Поэтому 2^{45} оканчивается на ту же цифру, что 2^1, а 3^{26} — на ту же, что 3^2, так что данное выражение оканчивается цифрой 1.

571. Рассмотрим последние цифры степеней чисел 7 и 4. Для этого составим таблицу:

N	1	2	3	4	5	6
Последняя цифра 7^n	7	9	3	1	7	9
Последняя цифра 4^n	4	6	4	6	4	6

Так как степени числа 7, отличающиеся на 4, оканчиваются одинаковыми цифрами, то 7^{37} оканчивается той же цифрой, что и 7^1, а поскольку все нечетные степени числа 4 оканчиваются цифрой 4, то данное выражение оканчивается цифрой 1.

572. Составим таблицу последних цифр степеней чисел 9 и 8:

N	1	2	3	4	5	6	7
Последняя цифра 9^n	9	1	9	1	9	1	9
Последняя цифра 8^n	8	4	2	6	8	4	2

Все нечетные степени числа 9 оканчиваются цифрой 9, а все степени числа 8, отличающиеся на 4, оканчиваются одинаковыми цифрами и поэтому 8^{64} оканчивается той же цифрой, что и 8^4, так что данное выражение оканчивается цифрой 5.

573. Вариант ответа 1 не подходит, так как отсутствует делитель 1, и остается проверить, делится ли данное число на 7. Начав деление уголком, легко убедиться, что число 333 333 делится на 7, и значит, любое число, составленное из таких шестерок также делится на 7. Поскольку $2005 = 2004 + 1$, а 2004 делится на 6 — оно четно и сумма его цифр делится на 3, то в процессе деления на 7 получится остаток 3, т.е. варианты 3 и 4 — неправильные, а правильным является вариант 1.

Комментарий. Тот факт, что число 333 333, как и любое шестизначное число, в котором вторая половина совпадает с первой половиной — например, 631 631 — делится на 7, следует из классического равенства $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$, весьма полезного при решении задач и поэтому достойного запоминания. Поэтому и числа $333\,333 = 333\,000 + 333 = 333 \cdot 1001$ и $631\,631 = 631 \cdot 1001$ делится на 7.

574. Так как 1001 делится на 13, то число $461\,461 = 461 \cdot 1001$ также делится на 13, и точно так же на 13 делится число 162 162. Поэтому, зачеркнув первые $6k$ цифр, мы не изменим делимости данного числа на 13. Но число 2004 в варианте 2 делится на 6, и следовательно, этот вариант ответа — правильный.

575. Если бы такой удобный признак делимости был верен не только для 3 и 9, но и для 2 или 7, то он был бы всем хорошо известен, так что варианты 2 и 3 вряд ли верны. А поскольку при $n = 1$ он, безусловно, верен, и о нем никогда не говорится только потому, что признак делимости на 1 никому не нужен, то правильный ответ — вариант 4.

Комментарий. Разумеется, аргумент, приведенный в решении, строго говоря, не имеет отношения к математике, но дает возможность сразу дать правильный ответ без математического обоснования — таковы особенности «теории тестов».

576. Например, трехзначное число 111 не делится на 9. Остальные варианты надо знать.

577. Испытания первого числа показывают, что оно не делится ни на 2, ни на 3, ни на 11, и поэтому на время его оставим. Второе число делится и на 2, и на 4, но сумма его цифр равна $12 + 14 + 16 = 42$, так что это число делится на 3, но не делится на 9 и поэтому не является степенью. Третье число делится и на 2, и на 4, имеет сумму цифр 35, т.е. не делится на 3, и мы применим к нему признак делимости на 11: разность $(8+5+7)-(6+1+2)=11$ делится на 11, так что это число делится на 11. В то же время, как можно проверить непосредственным делением, $865\,172 : 11 = 78\,652$ не делится на 11 и поэтому третье число также не является степенью. Наконец, четвертое число делится на 2, но не делится на 4, т.е. не является степенью, и поэтому правильный вариант — первый.

578. Заметим, что все представленные варианты ответов включают делимость числа a на 11, и делимость на 11 поэтому проверять не понадобится.

Выясним, как обстоит дело с делимостью на 7 и на 13. Для этого — в надежде, что при каком-то небольшом числе блоков 15 — число разделится на 7 и на 13, возьмем число 1515151515151515... и будем делить его уголком сначала на 7, затем на 13.

При делении на 7 последовательно будем иметь: первый остаток 1, а далее 11 (остаток 4), 45 (остаток 3), 31 (остаток 3), 35 — делится на 7, и следовательно, уже число из трех блоков делится на 7. Поэтому при делении уголком числа a, состоящего из $462 : 3 = 154$ блоков, оно разделится на 7.

Точно так же поступим и с числом 13: первый остаток 2, а далее 21 (остаток 8), 85 (остаток 7), 71 (остаток 6), 65 — делится на 13, и следовательно, уже число из трех блоков делится на 7, а значит, и a разделится на 13, так что правильный вариант ответа — четвертый.

Комментарий. Это решение проще, чем исследование делимости способом, примененным в задачах 573—575.

579. Сразу же замечаем, что число a делится на 3 — по соответствующему признаку делимости, а на 11 оно также

делится — на нечетных и четных местах числа заданного блока стоят одни и те же числа 1, 2, 3, 4, 5. Остается проверить делимость на 7.

Отбрасывая 21 в конце и заменяя в начале 12 на 5, превращаем данный блок в $b = 5\,345\,543$, и деля его уголком на 7 — так же, как в задаче 578, получаем: 4 (остаток 4), 44 (остаток 2), 25 (остаток 4), 45 (остаток 3), 34 (остаток 6), 63 — делится на 7. Оказалось, таким образом, что сам заданный блок делится на 7, и поэтому — независимо от n — правильный вариант ответа — первый.

Комментарий. Опыт решения задач, связанных с делимостью чисел, составленных из одинаковых блоков, на 7, 11, 13, может подсказать, что делимость зависит от числа блоков, а в данном случае «основной закон» задач с выбором ответа, подсказывает, напротив, что результат не зависит от n. Поэтому и неудивительно, что сам блок оказался делящимся на 7.

580. Заметим сразу же, что сам заданный блок, а значит и число a, делится на 11. Делится этот блок и на 7: $1771 = 17 \cdot 253$, а на 13 не делится — это легко проверить разными способами: например, вычтя 1690, получим 81. Поэтому варианты ответа 1, 2 и 4 неверны и правильный вариант ответа — второй.

581. Так как $10 = 1^2 + 3^2$, то первый вариант ответа неверный. Второй и третий неверны, поскольку произведение суммы двух точных квадратов на любой точный квадрат также является суммой двух точных квадратов. Поэтому верным является четвертый вариант ответа.

582. Так как $10 = 1^2 + 3^2$, то

$$40 = 4\left(1^2 + 3^2\right) = 2^2 + 6^2,\quad 90 = 9\left(1^2 + 3^2\right) = 3^2 + 9^2,$$

а поскольку $20 = 4 + 16$, то правильный вариант ответа — второй.

583. Сумма целых чисел $x + y$ и $x - y$ равна $2x$ — четное число, так что эти сумма и разность имеют одинаковую четность, т.е. либо обе четны, либо обе нечетны. Квадраты этих чисел также имеют одинаковую четность и поэтому число a может быть только четным, а так как среди данных значений четное только одно, то правильный вариант ответа — четвертый.

Комментарий. Можно было также заметить, что 666 делится на 9, и попытаться представить в виде суммы двух квадратов частное $666 : 9 = 74$, а это легко: $74 = 5^2 + 7^2$, так что $666 = 15^2 + 21^2$, т.е. четвертый вариант ответа и есть правильный.

584. Из заданного уравнения следует, что $x^2 \le 16$, так что достаточно проверить числа $x = 1, 2, 3, 4$, и окажется, что уравнению удовлетворяют только числа $x = 1$, $y = 4$ и $x = 4$, $y = 1$, так что правильный вариант ответа — второй.

585. Из заданного уравнения следует, что $x^2 \le 16$, так что достаточно проверить числа x от 1 до 8. Составим таблицу:

x	1	2	3	4	5	6	7	8
x^2	1	4	9	16	25	36	49	64
$65 - x^2$	64	61	56	49	40	29	16	1
y	8	—	—	7	—	—	4	1

Таким образом, уравнение имеет четыре решения, т.е. правильный ответ — четвертый.

586. Так как $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$ и числа $x - y$ и $x + y$ имеют одинаковую четность, а число 16 раскладывается на натуральные множители как $16 = 2 \cdot 8 = 4 \cdot 4 = 8 \cdot 2$, и из этих представлений можно получить еще три представления для целых x и y, то заданное уравнение имеет 6 целых решений. Таким образом, правильный вариант ответа — третий.

Комментарий. Разложения $2 \cdot 8$ и $8 \cdot 2$ мы считали здесь разными, так как x и y входят в данное уравнение неравноправным образом.

587. Уравнение $x^2 - y^2 = a$ может быть записано в виде $(x - y)(x + y) = a$, и равенство выполняется, если, например, $x + y = a$, $x - y = 1$. При a нечетном это равенство выполняется при $x = \frac{a+1}{2}$, $y = \frac{a-1}{2}$. Поэтому все данные числа могут быть представлены в требуемом виде. Правильный вариант ответа — четвертый.

588. Так как коэффициенты при x и y делятся на 9, а свободный член не делится на 9, то данное уравнение не имеет решений.

589. Легко заметить, что пара $(-1, 1)$ является решением данного уравнения. Но если пара (x, y) — любое решение этого уравнения, то пара $(x + 3457, y + 3456)$ также является его решением:

$$3456(x + 3457) - 3457(y + 3456) = 3456x + 3456 \cdot 3457 -$$
$$-3457y - 3457 \cdot 3456 = 3456x - 3457y = 1.$$

Поэтому правильным является четвертый вариант ответа.

590. Легко заметить, что пара $(-1, 1)$ является решением уравнения $3456x - 3457y = 1$. Но тогда если $(5311x, 5311y)$ является решением данного уравнения, то пара $(5311x + 3457, 5311y + 3456)$ также является его решением:

$$3456(5311x + 3457) - 3457(5311y + 3456) =$$
$$= 3456 \cdot 5311x + 3456 \cdot 3457 - 3457 \cdot 5311y - 3457 \cdot 3456 =$$
$$= 3456x - 3457y = 5311.$$

Поэтому правильным является четвертый вариант ответа.

591. Легко привести пример уравнения $ax + by = c$, не имеющего решения, — скажем, $2x + 2y = 1$, и поэтому утверждение 1 ложно, а утверждение 2 истинно. Далее, если (p, q) — решение этого уравнения, то положив $x = p + q$, $y = q - a$, мы получим еще одно решение: действительно, $a(p + b) + b(q - a) = c$. Иными словами, по каждому решению можем построить еще одно решение, так что уравнение данного вида, например $2x + 3y = 5$, имеет бесконечно много решений, так что утверждение 3 истинно, а утверждения 4 и 5 ложны.

592. В левой части уравнения 1 оба множителя при любых целых x и y нечетны и поэтому уравнение не может иметь решений в натуральных числах.

Так как 7 — простое число, то один из множителей в левой части равен 7, а поскольку разность этих множителей $7x - 7y + 14$ делится на 7, то и второй множитель делится на 7. Но тогда произведение должно делиться на 49 и не может быть поэтому равно 7, так что второе уравнение также не имеет решений.

В уравнении 3 второй множитель $21x + 2y - 6 \geq 21 + 2 - 6 = 17$, так что для любого решения (x, y) этого уравнения первый множитель положителен, и поскольку 38 делится на $21x + 2y - 6$, то последнее число либо равно 19, либо 38. Но $21x + 2y - 6 = 19$, $21x + 2y = 25$ только при $x = 1$, $y = 2$, а тогда $33 - 2x - 5y = 21 \neq 2$, и точно так же $21x + 2y - 6 = 38$, $21x + 2y = 44$ при $x = 2$, $y = 1$, т.е. $33 - 2x - 5y = 24 \neq 1$, так что рассматриваемое уравнение не имеет решений, а значит, первые три варианта ответов — неправильные.

Комментарий. Для доказательства правильности данного теста отметим, что уравнение 4 действительно имеет по крайней мере одно решение: $x = 11$, $y = 13$. Ясно, что начать решение задачи именно с этого уравнения вряд ли кто-нибудь осмелится, а найти это решение тоже вряд ли удастся.

593. Самая простая и естественная попытка подобрать какое-нибудь решение уравнения — это, конечно, испытать нулевые значения переменных. При $x = 0$ заданные уравнения принимают вид:

$$3 = 0, \ -2y^3 + 2 = 0, \ y^2 - 5y + 31 = 0, \ -2y^2 + 3y - 5 = 0$$

и мы видим, что эта попытка оказалась удачной только для уравнения 2: второе из полученных уравнений имеет целый корень 1, т.е. уравнение 2 имеет, по крайней мере, одно решение: $x = 0$, $y = 1$, а третье и четвертое уравнения не имеют корней, так как их дискриминанты отрицательны.

Подставим теперь в данные уравнения $y = 0$, пропустив, естественно, уже отвергнутое уравнение 2:

$$2x^4 + 3 = 0, \ x^2 + 31 = 0, \ 2x^2 - 5 = 0,$$

и эта попытка оказалась совсем неудачной — ни одно из полученных уравнений не имеет целых корней.

Подставим $x = 1$:

$$2 - 5y + 3 = 0, \ y^2 - 6y + 34 = 0, \ 2 + 3y - 5 = 0,$$

т.е. уравнения 1 и 4 оба имеют решение $x = y = 1$, и таким образом, уравнения 1, 3 и 4 имеют решения, так что правильный вариант ответа — третий.

Комментарий. Черновое решение, связанное с подбором, удобно проводить с помощью таблицы:

	$x = 0$	$y = 0$	$x = 1$
$2x^4 - 5x^3y + 3 = 0$	$3 = 0$	$2x^4 + 3 = 0$	$2 - 5y + 3 = 0$
$3x^3 + 5xy - 2y^3 - 7x + 1 = 0$	$-2y^3 = 2$		
$x^2 - xy + y^2 - 5y + 33 = 0$	$y^2 - 5y + 33 = 0$	$x^2 + 33 = 0$	$y^2 - 6y + 34 = 0$
$2x^2 + 2xy^2 - 2y^2 + 3y - 5 = 0$	$-2y^2 + 3y - 5 = 0$	$2x^2 - 5 = 0$	$2 + 3y - 5 = 0$

Заметим также, что если наудачу начать с третьего уравнения — оно совершенно обычное, и такого типа уравнения мы уже ранее решали — с помощью квадратного трехчлена, то решение было бы даже проще: его дискриминант как квадратного трехчлена относительно x равен:

$$y^2 - 4y^2 + 20y - 132 = -3y^2 + 20y - 132$$

и при любом y отрицателен, так как $100 - 3 \cdot 132 < 0$.

594. Уравнению 1 не удовлетворяют слишком маленькие значения x и y, и «слабое место» этого уравнения состоит в том, что оно является квадратным относительно y, его дискриминант D равен $x^2 - 4x^3 - 4x + 100$ и нужно подобрать x так, чтобы он был точным квадратом. Естественно начать подбор с $x = 2$, и тогда $D = 4 - 32 - 8 + 100 = 64$, и попытка оказалась удачной. При $x = 2$ уравнение принимает вид $y^2 + 2y - 15 = 0$ и имеет целые корни, так что уравнение 1 имеет решения в целых числах.

Подстановка нулей в уравнение 2 ничего не дает, а при $x = 1$ оно принимает вид $3 + 5y - 2y^3 - 6 = 0$ или $2y^3 - 5y + 3 = 0$, т.е. имеет корень 1, а пара (1, 1) является решением уравнения 2.

Слагаемое $y^2 - 5xy + 3$ в левой части уравнения 3 является квадратным трехчленом относительно y, дискриминант которого равен $25x^2 - 12$, и поскольку при любом целом x это число оканчивается либо цифрой 8 — при четных x, либо цифрой 33 — при нечетных x, то это уравнение не имеет решений в целых числах. Правильным вариантом ответа является, таким образом, вариант 4.

Комментарий. Маловероятно, чтобы кто-нибудь догадался, что уравнение 4 имеет, например, решение (7, –6), хотя стандартным приемом — с помощью квадратного трехчлена это и другие решения могут быть найдены.

595. Дробь в первом предложении является целым числом, если $5y - 14$ делится на $y - 3$. Но $5y - 14 = 5(y - 3) + 1$, так что дробь делится на $y - 3$ лишь при $y = 4$ и при $y = 2$. Подставляя эти значения во второе уравнение системы, получаем $x^2 + 16 = 641$ и $x^2 + 4 = 641$. Отсюда следует, что $y = 4$, $x = \pm 25$, т.е. данное уравнение имеет в целых числах 2 решения, и таким образом, правильный вариант ответа — второй.

596. Добавив и вычтя 1 в числителе дроби, запишем ее в виде $3 - \dfrac{1}{y+3}$, и поэтому дробь будет целым числом в том и только в том случае (см. Компендиум), когда 1 делится на $y + 3$, т.е. $y + 3 = \pm 1$, так что y равен –2 или –4. Из второго уравнения системы при $y = -2$ получаем $x^2 = 112$, что при целом x невозможно, а при $y = 4$ получаем $x^2 = 100$, т.е. $x = \pm 10$. Таким образом, заданная система имеет две пары решений: в целых числах (10, –2) и (–10, –2), поэтому правильный вариант ответа — второй.

597. Число y будет целым только в случае, когда 19 делится на $12x - 7$, а поскольку число 19 — простое, то $12x - 7$ равно либо ± 1, либо ± 19. Из соответствующих четырех уравнений решения имеет только уравнение $12x - 7 = -19$, откуда $x = -1$ и, подставляя это значение во второе уравнение, получаем $y = -6$. Числа $x = -1$ и $y = -6$ удовлетворяют и второму уравнению системы и поэтому являются ее решениями, т.е. заданная система имеет одно решение.

598. При больших положительных x выражение $10x^3$, очевидно, гораздо больше, чем $6x + \dfrac{32}{3x-5}$, и докажем это строго: при $x \ge 2$ $10x^3 > 6x$, $\dfrac{32}{3x-5} \le 0$, т.е. $10x^3 > 6x + \dfrac{32}{3x-5}$. Поэтому x может быть равен только 1, а при $x = 1$ из первого уравнения заданной системы получаем $y = 6 + (-16) = -10$, а из второго $y = 10$, и следовательно, система действительно не имеет решений при $x \ge 1$.

Точно так же система не имеет решений, в которых x — большое по модулю отрицательное число: при этих x выражение гораздо больше по модулю, чем $6x$, т.е. меньше $6x$ а выражение $\dfrac{32}{3x-5}$ маленькое и неравенства не испортит. Проведем строгое рассуждение. Неравенство $10x^3 < 6x$ выполняется при $10x^2 > 6x$ (напомним, что сейчас мы рассматриваем $x < 0$), т.е. при $x \le -1$, но прибавление к $6x$ отрицательного выражения может его нарушить. Но это нарушение будет не сильным, поскольку эта дробь быстро становится по модулю меньше 1, а целые числа $10x^3$ и $6x$ отличаются не меньше, чем на 1.

Так как $|3x - 5| < 32$, т.е. $-32 < 5 - 3x < 32$, $-27 < 3x < 37$, и x — отрицательное целое число, и кроме того, 32 делится на $3x - 5$, что возможно только при нечетном x, то для $3x$ возможен лишь один вариант: $3x = -3$, $x = -1$. Таким образом, проверке подлежит только $x = -1$ и при этом x из первого уравнения системы получим $y = -6 + (-4) = -10$, а из второго уравнения также $y = -10$, т.е. пара $x = -1$, $y = -10$

является решением заданной системы, и притом единственным, поскольку мы не рассмотрели еще $x = 0$, а как легко проверить, в этом случае система не имеет решений. Значит, правильный вариант — первый.

Комментарий. Число 32 имеет слишком много делителей — 36 (см. Компендиум), чтобы отважиться их все по очереди перебирать, хотя, учитывая, что x должен быть нечетным, перебор можно сократить вдвое. Представляется даже, что решение с перебором проще и во всяком случае требует напряжения не головы, а рук, однако что делать в случае, когда вместо 32 в систему входит число с еще большим числом делителей? В этом случае решение «с помощью головы» изменяется не слишком существенно, тогда как решение «с помощью рук» может стать «непробиваемым».

Мы полагаем, что в данной задаче на экзамене было бы вполне естественно использовать механический перебор, тогда при подготовке к нему целесообразно рассмотреть именно приведенное решение.

599. Выражая y через x, получим:

$$y = \frac{22 - 5x}{2x - 6}, \quad 2y = \frac{22 - 5x}{x - 3} = -5 + \frac{7}{x - 3},$$

так что 7 должно делиться на $x - 3$, что верно при $x - 3 = \pm 1, \pm 7$, так что y равен соответственно $-4, -6, 2, -12$. Таким образом, заданное уравнение имеет 4 решения в целых числах, и правильный вариант ответа — второй.

600. Выражая y через x, получим: $y = \dfrac{28 - 3x}{x - 7}$ и рассмотрим, при каких натуральных x эта дробь положительна. При x от 1 до 6 ее числитель положителен, а знаменатель отрицателен, при $x = 8$ и $x = 9$ положительны и числитель, и знаменатель, а при $x > 9$ они снова имеют разные знаки. При $x = 8$, $y = 4$, а при $x = 9$ дробь не является целым числом. Следовательно, в натуральных числах данное уравнение имеет ровно одно решение, и правильный вариант ответа — второй.

601. Выразим y через x: $y = \dfrac{3x}{715x + 1}$, так что y может быть натуральным числом только в случае, когда знаменатель полученной дроби не больше ее числителя, что невозможно. Поэтому требуемых натуральных чисел x и y не существует, и значит, правильный вариант ответа — первый.

602. Выразив x через y: $y = \dfrac{3x - 2868}{715x + 1}$, заметим, что y может быть целым числом только в случае, когда знаменатель полученной дроби по модулю не больше модуля ее числителя, т.е. $|715x + 1| \le |3x - 2868|$.

При $x \ge 2868$ полученное неравенство принимает вид $715x + 1 \le 3x - 2868$, $712x \le -2869$ и при положительных x не выполняется. При $x < 2868$ неравенство имеет вид:

$$-715x - 1 \le -3x + 2868, \quad 712x \ge -2869,$$

т.е., учитывая, что число x — целое, получаем что $x \ge -4$, и остается рассмотреть всего почти 3000 чисел x — от 1 до 2867. Это тупик и из него надо искать выход — думать, как избавиться от этих трех тысяч, т.е. нужна новая идея.

Достаточно очевидно, что большие положительные числа x не подходят: все-таки $715x$ гораздо больше, чем $3x$, но где начинается это «гораздо»? Чтобы это прояснить, рассмотрим неравенство $715x - 1 \le 3x - 2868$, $712x \le 2867$, откуда $x \le 4$, так что при $x \ge 5$ числитель дроби $\dfrac{3x - 2868}{715x + 1}$ меньше ее знаменателя, и y не будет целым числом. Эта спасительная идея позволила нам рассматривать только целые числа x от -4 до 4.

Однако проводить перебор и этих 9 чисел — дело хлопотное, и мы его сократим почти в 2 раза, заметив, что при нечетном x числитель дроби $\dfrac{3x - 2868}{715x + 1}$ — нечетный, а знаменатель четный, т.е. она не является целым числом и остались уже только $x = \pm 4, \pm 2, 0$. А для этих x мы не видим конструктивной идеи, которая избавила нас от арифметических вычислений, и мы составим таблицу:

x	-4	-2	0	2	4
$3x - 2868$	-2880	-2874	-2868	-2862	-2856
$715x + 1$	-2859	-1429	1	1431	2831

Из таблицы мы видим, что рассматриваемая дробь является целой только при $x = 2$, а тогда $y = -2$, и мы получили, наконец, единственное решение системы: $x = 2$, $y = -2$, так что правильный вариант ответа — второй.

603. Монет в 5 евро может быть только четное число — иначе общая сумма монет будет нечетной, не равной 20, если это число четно, то оставшуюся сумму можно дополнить монетами в 2 евро. Поскольку монет в 5 евро может быть 0, 2 или 4, то имеется 3 способа размена.

604. Ясно, что число способов не изменится, если считать, что длина забора равна 22 м, а секции длиной 2 м и 3 м. Тогда секций длиной 3 м может быть не больше 7 и их число не может быть нечетным — иначе оставшаяся часть забора будет иметь нечетную длину, и ее нельзя будет достроить двухметровыми секциями. А при любом четном их числе трехметровых секций это сделать можно, так что это число равно 2, 4 или 6, и искомое число способов равно, следовательно, 3.

605. Если число a делится на число b, то a делится и на любой делитель b. Но числа 18, 66, 792 все делятся на 6, и поэтому если a делится хотя бы на одно из них, то a делится по крайней мере на два из заданных чисел, что противоречит условию задачи. Значит, a делится на 6.

606. Число 792 делится и на 6, и на 18, и на 66, и поэтому если a — делитель 6, 18 или 66, то a — делитель 792: если a — делитель b, то a — делитель любого числа, кратного b. Поэтому если a — делитель хотя бы одного из чисел 6, 18 и 66, то a — делитель 792, т.е. a — делитель по крайней мере двух из заданных чисел, что противоречит условию. Следовательно, a — делитель числа 792.

607. Первые три варианта не могут быть верными поодиночке — всегда верным окажется и следующий.

608. Прогрессия а) «распадается» на числа, большие 0 и меньшие или равные 0, т.е. целиком содержится в объединении прогрессий в) и г), и поэтому число a в нее не входит. Точно так же a не входит в прогрессию б) — вся эта прогрессия входит в прогрессию в). А прогрессия г) входит в а), так что a не может входить и в б), и остается только одна возможность — число a входит в прогрессию в).

609. Прогрессия г), состоящая из всех отрицательных четных чисел, целиком содержится в прогрессии а), а значит, число a в прогрессию г) входить не может — в противном случае оно бы входило, по крайней мере, в две из заданных прогрессий. Следовательно, a — положительное четное число и входит в прогрессию в).

610. Если арифметическая прогрессия возрастает, то утверждения 1 и 3 ложны, утверждение 2 также ложно, и значит, правильный вариант ответа — четвертый.

Комментарий. Возможен и иной подход к решению, основанный на том, что в задачах с выбором ответа правильный вариант определяется однозначно, даже если условие далеко не однозначно. Поэтому можно рассмотреть хотя бы один пример, обеспечивающий существование и единственность ответа, и таков «простейший» пример — прогрессия 1, 2, 3, ... Для этой прогрессии варианты ответов принимают вид соответственно $15 < 10$, $15 > 20$, $15 < 7$, $15 > 8$, и истинно только последнее неравенство.

611. Прогрессия 1, 2, 4, 8 удовлетворяет условию задачи, и для нее варианты ответов принимают вид соответственно $2^{15} < 2^{10}$, $2^{15} > 2^{20}$, $2^{15} < 2^7$, $2^{15} > 2^8$ и истинно только последнее неравенство. Поэтому правильный вариант ответа — четвертый.

Комментарий. Заметим, что эта задача может быть приведена к предыдущей: если взять логарифмы — по любому основанию — от членов геометрической прогрессии с положительными членами, то получится, как известно, арифметическая прогрессия, и в данном случае она будет удовлетворять условию предыдущей задачи 610, откуда и следует, что правильный ответ в варианте 4.

612. Для простейшей геометрической прогрессии $1, 2, 4, 8, \ldots$ варианты ответов соответственно принимают вид $2^{15} > 2^{10}$, $2^{15} < 2^{20}$, $2^{15} > 2^{7}$, $2^{15} < 2^{8}$, и истинны три первые неравенства, а четвертое ложно, т.е. она не удовлетворяет условию. Однако ее легко подправить так, чтобы истинные и ложные неравенства поменялись местами — для этого достаточно рассмотреть убывающую последовательность обратных чисел: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$, и для нее верным является только одно — последнее неравенство, т.е. правильный вариант ответа — четвертый.

613. Из утверждения в) следует б) и поэтому в) неверно — в противном случае верны, по крайней мере, два из данных утверждений. Утверждения а) и г) — это неравенства $a + b > a$ и $a + b > a - b$, т.е. при $b > 0$ оба верны, а при $b < 0$ оба неверны, этого не может быть по условию задачи. Остается единственный вариант — верно утверждение б).

Комментарий. Задачу можно решить и экспериментально: ее корректность подразумевает, что для любых a и b получается один и тот же ответ, и поэтому достаточно подобрать хотя бы один пример чисел a и b, для которых выполняется условие задачи. Сразу же ясно, что для положительных a и b верны утверждения а) и г), а например, при $a = 1$, $b = -1$ сумма 0 меньше первого слагаемого, больше второго слагаемого и меньше разности этих чисел, т.е. а) и г) неверны, в) неверно, так что взятые числа a и b удовлетворяют условию, и таким образом, верно — и в общем случае — утверждение б).

614. Вариант ответа А неверен, например, для функции $y = \sin x$ — в противном случае из очевидно верного для любого x неравенства $-2 \le \sin x \le 3$ следовало бы, что

$E(\sin(x)) = [-2, 3]$, а это неверно: синус не принимает, скажем, значения 3. Этот же пример показывает, что неверны также и варианты 3 и 4, а следовательно, правильный вариант ответа — второй.

615. Первая из заданных функций принимает свое наименьшее значение в точке $x = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$, принадлежащей промежутку (1, 4). Наименьшее значение второй функции равно 0 и принимается в точках $x = -\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbf{Z})$, и соответствующая $k = 1$ точка $x = -\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} + \pi = \frac{7\pi}{6} \approx \frac{22}{6} = \frac{11}{3}$ также принадлежит промежутку (1, 4).

Для третьей функции заметим сначала, что 2π — ее период, так что $y = \operatorname{ctg}^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$, и значит, она совпадает со второй. Наконец, для четвертой функции заметим, что сумма двух взаимно обратных положительных выражений имеет наименьшее значение 2, и принимает его только в случае, когда оба этих выражения равны 1, т.е. в данном случае при $x = 2 \in (1, 4)$.

Таким образом, все заданные функции на промежутке (1, 4) принимают свои наименьшие значения и правильный вариант ответа — первый.

616. Первая из заданных функций принимает свое наименьшее значение в точке $x = -\frac{5}{6} \notin (-3, -1)$. Наименьшее значение второй функции равно 0 и принимается в точках $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ $(k \in \mathbf{Z})$ и соответствующая $k = -1$ точка $x = -\frac{3\pi}{4} \approx -2{,}5$ также принадлежит заданному промежутку. Для третьей функции заметим сначала, что 2π — ее период, так что $y = \mathrm{tg}^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$, и в той же точке $-\frac{3\pi}{4}$ она принимает свое наименьшее значение 0.

Наконец, для четвертой функции заметим, что сумма двух взаимно обратных положительных выражений имеет наименьшее значение 2 и принимает его только в случае, когда оба этих выражения равны 1, т.е. при $\sin^4 x = \frac{1}{\sin^4 x}$, $\sin^8 x = 1$, $\sin x = \pm 1$, $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbf{Z})$. Точка x, соответствующая $k = -1$, т.е. $x = -\frac{\pi}{2} \approx -1{,}57$ входит в промежуток (1, 4).

Таким образом, все заданные функции на промежутке (1, 4) принимают свои наименьшие значения и правильный вариант ответа — четвертый.

617. Первая из заданных функций принимает свое наименьшее значение в точке $x = -\frac{11}{4} = -2{,}75 \notin [-1, 3)$. Так как наименьшие значения обеих функций 2 и 3 равны 0, а длина заданного отрезка больше периода π этих функций, то хотя бы одна точка, в которой они принимают это значение, принадлежит этому промежутку. Наконец, для четвертой функции заметим, что сумма двух взаимно обратных положительных выражений имеет наименьшее значение 2 и принимает его только в случае, когда оба эти выражения равны 1, т.е. при $\mathrm{tg}^2 x = \frac{1}{\mathrm{tg}^2 x}$, $\mathrm{tg}^4 x = 1$, $\mathrm{tg} x = \pm 1$, $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ $(k \in \mathbf{Z})$. Точка x, соответствующая $k = 0$, т.е. $x = \frac{\pi}{4} < 3$, входит в промежуток (1, 4).

Таким образом, все заданные функции, кроме первой, на промежутке (1, 4) принимают свои наименьшие значения и правильный вариант ответа — второй.

618. Произведение двух синусов равно 1 только в случае, когда они оба равны 1 или оба равны –1. Но если $\sin x = \pm 1$, то $\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x = 0$, так как $\cos x = 0$. Точно так же в этом случае $\sin 4x = 2\sin 2x \cdot \cos 2x = 0$, и таким образом, варианты ответов 1 и 4 — неправильные.

Для рассмотрения вариантов 2 и 4 заметим, что обе эти функции периодические, и их достаточно рассматривать на отрезке $[0, 2\pi]$, где $\sin x = 1$ при $x = \frac{\pi}{2}$, $\sin x = -1$ при $x = \frac{3\pi}{2}$, и в первом случае $\sin 3x = -1$, а во втором $\sin 3x = 1$, так что их произведение равно –1. Это означает, что функция 2 не принимает значения 1, так что вариант 3 — неправильный, и остается один вариант — четвертый.

619. Нахождение наибольшего значения функции $y = \sin x + 2\cos x$ связано с формулой вспомогательного угла, и без необходимости с ней лучше не связываться, не говоря уж о функциях 3 и 4, так что самое слабое место в заданном наборе функций — это функция $y = \cos x + \cos \pi x$. Ясно, что она всегда меньше или равна 2, а при $x = 0$ принимает значение 2, так что ее наибольшее значение действительно равно 2, и правильный вариант ответа — второй.

620. Так как все заданные функции имеют период 2π и являются четными, то можно рассматривать их наименьшие значения только на отрезке $[0, \pi]$. Так как произведение двух синусов по модулю не больше 1, то каждая из этих функций больше или равна –1 и равна –1 только в случае, когда один из сомножителей равен 1, а другой равен –1.

Если $\sin x = 1$, то $x = \frac{\pi}{2}$;

$$\sin\frac{22\pi}{2} = 0,\ \sin\frac{33\pi}{2} = \sin\left(16\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1,$$

$$\sin\frac{44\pi}{2} = 0,\ \sin\frac{55\pi}{2} = \sin\left(27\pi + \frac{\pi}{2}\right) = -1,$$

и поэтому функции 1, 2, 3 не принимают значения –1, и правильный вариант — четвертый.

621. Во избежание дробей разложим все удвоенные заданные произведения в сумму:

1. $2\cos x \cdot \cos 12x = \cos 13x + \cos 11x$;
2. $2\cos x \cdot \cos 13x = \cos 14x + \cos 12x$;
3. $2\cos x \cdot \cos 14x = \cos 15x + \cos 13x$;
4. $2\cos x \cdot \cos 15x = \cos 16x + \cos 14x$.

Так как косинус всегда больше или равен -1, то сумма двух косинусов больше или равна -2 и равна -2 только в случае, когда оба слагаемых равны -1.

Для функции 1 далее будем иметь:

$$\cos 12x = -1 \text{ при } x = \frac{(2k+1)\pi}{13},$$

$$\cos 10x = -1 \text{ при } x = \frac{(2n+1)\pi}{11} \quad (k, n \in \mathbf{Z}),$$

и следует выяснить, имеют ли эти две серии хотя бы один общий корень, т.е. существуют ли такие целые числа k и n, что

$$\frac{(2k+1)\pi}{13} = \frac{(2n+1)\pi}{11}, \quad 11(2k+1) = 13(2n+1).$$

И если мы выберем k и n, так чтобы $2k + 1 = 13$, $2n + 1 = 11$, т.е. $k = 6$, $n = 5$, то соответствующий корень x, очевидно, равный π, будет общим для двух серий — он имеет номер $k = 6$ в первой из них и номер $n = 5$ — во второй.

Таким образом, $\cos 12x$ и $\cos 10x$ могут одновременно равняться -1, и значит, наименьшее значение функции 1 равно -2.

Для функции 2 мы точно так же получаем уравнение:

$$\frac{(2k+1)\pi}{14} = \frac{(2n+1)\pi}{12}, \quad 6(2k+1) = 7(2n+1),$$

которое не имеет решений, так как число, стоящее в левой части всегда нечетно, тогда как число в правой части, напротив, всегда четно. Следовательно, $\cos 14x$ и $\cos 12x$ не могут быть одновременно равны 1, так что наименьшее значение функции 2 не равно -2.

Понятно, что та же ситуация будет и с функциями 3 и 4: в этих случаях мы придем к уравнениям соответственно:

$$\frac{(2k+1)\pi}{15} = \frac{(2n+1)\pi}{13}, \quad \frac{(2k+1)\pi}{16} = \frac{(2n+1)\pi}{14};$$

$$13(2k+1) = 15(2n+1), \quad 7(2k+1) = 8(2n+1)$$

и первое из этих уравнений имеет решение $k = 7$, $n = 6$, а второе не имеет решений по тем же соображениям четности. Поэтому наименьшее значение -2 имеют только функции 1 и 3 и правильный ответ представлен в варианте 3.

622. Различие в данных функциях бросается в глаза: функция 1 выделяется тем, что у нее оба коэффициента при x являются рациональными, а при одном рациональном и другом иррациональном коэффициенте меньше шансов на то, что оба сомножителя примут свое наибольшее значение 1 или наименьшее значение -1 в одной точке, а только при этом условии наибольшее значение произведения будет равно 1. Поэтому можно поставить сто против одного, что правильный ответ указан в варианте 1.

Впрочем, получив из этого эвристического рассуждения самый вероятный ответ, его правильность можно строго доказать. В самом деле, больше 1 произведение синусов быть не может, а сделать его равным 1, проще всего, взяв $x = \frac{\pi}{4}$: тогда $\sin 2x = 1$, $\sin 10x = \sin\frac{5\pi}{2} = 1$, так что 1 действительно является наибольшим значением функции 1.

623. По своему внешнему виду функция 4 отличается от остальных тем, что оба коэффициента при x являются рациональными, и поэтому у этой функции больше шансов на то, что в некоторой точке один из косинусов равен 1, а другой -1. Проще всего получить $\cos 3x = -1$, положив $x = \pi$ и при этом $\cos 8x = \cos 8\pi = 1$. Таким образом, функция 1 принимает значение -1, а меньше -1 ее значение быть не может — в противном случае по крайней мере один из косинусов оказался бы по модулю больше 1. Таким образом, правильный вариант ответа — четвертый.

624. Так как

$$2y = 2\cos 3x \cdot \sin 4x = \sin 7x + \sin x \le 2;$$
$$2y = 2\cos 5x \cdot \sin 7x = \sin 12x + \sin 2x \le 2;$$
$$2y = 2\cos 8x \cdot \sin 11x = \sin 19x + \sin 3x \le 2;$$
$$2y = 2\cos 5x \cdot \sin 9x = \sin 14x + \sin 4x \le 2,$$

то любая из заданных функций будет иметь наибольшее значение 1, если соответствующая сумма может принять значение 2, а поскольку синус всегда меньше или равен 1, то для этого необходимо и достаточно, чтобы каждое слагаемое было равно 1, причем значение 1 они приняли хотя бы в одной общей точке.

Но если $\sin x = 1$, т.е. $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \ (k \in \mathbf{Z})$, то $\sin 3x = \sin\left(\frac{7\pi}{2} + 6k\pi\right) = \sin\frac{7\pi}{2} = -1$, так что в первом равенстве слагаемые не могут одновременно равняться 1, и значит, наибольшее значение функции 1 не равно 1.

Если $\sin 2x = 1$, т.е. $2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \ (k \in \mathbf{Z})$, $x = \frac{(4k+1)\pi}{4}$, то $\sin 12x = \sin(12k + 3\pi) = 0$, так что и во втором равенстве слагаемые не могут одновременно равняться 1, и следовательно, наибольшее значение функции 2 не равно 1.

Если $\sin 3x = 1$, т.е. при $3x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \ (k \in \mathbf{Z})$, $x = \frac{(4k+1)\pi}{6}$, то $\sin 19x = \sin\frac{19(4k+1)\pi}{6} = \sin\frac{(76k+19)\pi}{6}$ и... не слишком ясно, можно ли при каком-нибудь целом k получить равенство $\sin 19x = 1$.

Поэтому немного изменим наше рассуждение. Мы хотим узнать, возможно ли равенство $\sin 3x = \sin 19x = 1$ хотя бы при одном значении x. Первое из них выполняется, как мы уже видели, при $x = \frac{(4k+1)\pi}{6}$, а второе, как по аналогии нетрудно получить, при $x = \frac{(4k+1)\pi}{38}$, и мы должны узнать, имеют ли эти две серии корней хотя бы один общий корень, т.е. возможно ли равенство $\frac{(4k+1)\pi}{6} = \frac{(4n+1)\pi}{38}$. Заметим, что новая буква n здесь появилась не случайно: возможный общий корень вовсе не обязан иметь один и тот же номер в обеих сериях. Это и предусматривается введением новой буквы — в первую серию x входит с номером k, а во вторую — с номером n.

Если мы сможем подобрать такие целые числа k и n, чтобы полученное равенство было верным, то соответствующее значение x и будет удовлетворять равенствам $\sin 19x = \sin 3x = 1$.

Преобразуем это равенство:

$$\frac{(4k+1)\pi}{6} = \frac{(4n+1)\pi}{38}, \quad 19(4k+1) = 3(4n+1);$$

$$76k - 12n = -16, \ \ 3n - 19k = 4, \ \ 3n = 19k + 4,$$

и поэтому достаточно выбрать k таким, чтобы число $19k + 4$ делилось на 3, а это верно, например, при $k = 2$, и при этом $x = \frac{3\pi}{2}$. Таким образом, при $x = \frac{3\pi}{2}$ значение функции 3 равно 1, и 1 и есть ее наибольшее значение.

Комментарий. В приведенном решении описан ученический подход к задаче, а если подойти к этой задаче по-взрослому, то естественно возникает более общая, но одновременно и более простая задача «При каких целых a и b уравнения $\sin ax = 1$ и $\sin bx = 1$ имеют общее решение?». Следуя рассуждениям, примененным выше для функции 3, получаем вопрос о существовании целых чисел k и n, для которых

$$\frac{(4k+1)\pi}{2a} = \frac{(4n+1)\pi}{2b}, \quad b(4k+1) = a(4n+1),$$

$$76k - 12n = a - b,$$

и теперь очевидно, что если разность $a - b$ не делится на 4, то требуемых k и n не существует. А этому условию удовлетворяет только функция 3.

625. Так как синус и косинус по модулю всегда не больше 1, то из заданных функций надо выбрать ту, которая принимает значение 1. Для этого каждый множитель в выражении, задающем функцию, должен быть равен либо 1, либо –1, и в простейшем случае $x = \frac{\pi}{2}$ имеем $\cos\frac{2\pi}{2} = -1$, $\cos\frac{3\pi}{2} = 0$, $\cos\frac{4\pi}{2} = 1$, т.е. функция $y = \sin x \cdot \cos 4x$ принимает значение 1, так что правильный вариант ответа — четвертый.

626. Рассмотрим функцию 1. Так как $2y = 2\sin 3x \cdot \cos 4x = \sin 7x - \sin x = 2$, то поскольку $\sin 7x \le 1$, $-\sin x \le 1$, $2y \le 2$ и 2 будет наибольшим значением функции 1, если хотя бы при одном значении x $\sin 7x = 1$, $\sin x = -1$. Второе равенство выполняется, в частности, при $x = -\frac{\pi}{2}$, а при этом значении x $\sin 7x = \sin\left(-\frac{7\pi}{2}\right) = \sin\left(4\pi - \frac{\pi}{2}\right) = -1$. Таким образом, функция принимает значение 1, которое и является ее наибольшим значением.

627. Произведение двух синусов не может быть больше 1, а удвоенное произведение не больше 2, а поскольку оно является разностью двух косинусов, то равно 2 только в случае, когда первый косинус (уменьшаемое) равен 1, а второй (вычитаемое) равен –1.

Рассмотрим общий вопрос: «При каких a и b существует такое значение x, что $\cos ax = 1$, $\cos bx = -1$?». Первое равенство выполняется при $ax = 2k\pi$, второе — при $bx = (2n + 1)\pi$, где k и n — целые числа, и эти две серии корней имеют общий корень, если при некоторых k и n выполняется равенство:

$$\frac{2k\pi}{a} = \frac{(2n+1)\pi}{b}, \quad 2bk = a(2n+1).$$

Сразу же видно, что при нечетном a таких чисел k и n не существует, и так же обстоит дело при $a = 4p + 2$ и четном $b = 2q$: в этом случае равенство принимает вид $2qk = (2p + 1)(2n + 1)$.

Стоит ли для решения данной задачи продолжать искать ответ на поставленный общий вопрос, решим после того, как разложим в разность все данные произведения синусов:

$$2y = 2\sin 3x \cdot \sin 4x = \cos 7x - \cos x = 2;$$
$$2y = 2\sin 5x \cdot \sin 7x = \cos 8x - \cos 2x = 2;$$
$$2y = 2\sin 8x \cdot \sin 11x = \cos 9x - \cos 3x = 2;$$
$$2y = 2\sin 5x \cdot \sin 9x = \cos 10x - \cos 4x = 2.$$

Из уже полученных результатов следует, что первое, третье и четвертое уравнения не имеют решений, и таким образом, правильный вариант ответа — второй.

628. Напомним, что функция называется возрастающей, если для любых a и b из ее области определения из неравенства $a < b$ следует, что $f(a) < f(b)$, и убывающей, если из $a < b$ следует, что $f(a) > f(b)$. Напомним также, что неравенства одного направления, например $<$ или $\le$, можно почленно складывать, а неравенства разных направлений, например $<$ или $>$, можно почленно вычитать.

Поэтому предложения 1 и 2 истинны, а в случаях 3 и 4 потребуется складывать неравенства разных направлений, и поэтому соответствующие предложения, скорее всего, ложны, а нужные контрпримеры могут быть сконструированы из линейных функций. Скажем, сумма функций $y = 2x$ и $y = -x$ — возрастающая, а сумма функций $y = 2x$ и $y = -3x$ — убывающая, и следовательно, предложения 3 и 4 действительно ложны.

При попытке доказательства утверждений 5 и 6 придется вычитать почленно неравенства одного направления и контрпримерами к этим утверждениям могут служить функции $y = x$ и $y = 2x$ — для утверждения 5 и функции $y = -x$ и $y = -2x$ — для утверждения 6.

Для доказательства утверждения 7 понадобится вычитать неравенства разных направлений: из неравенства $a < b$ следует, что $f(a) > f(b)$ и $g(a) < g(b)$, а тогда $f(a) - g(a) > f(b) - g(b)$, т.е. это утверждение истинно. Естественно, что поэтому утверждение 8 ложно.

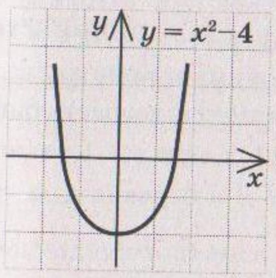
Аналогично, истинно утверждение 9: из $a < b$ следует, что $f(a) < f(b)$ и $g(a) > g(b)$, а тогда $f(a) - g(a) < f(b) - g(b)$, т.е. разность функций — возрастающая функция. Естественно, что поэтому утверждение 10 ложно.

Итак, истинны утверждения 1, 2, 7 и 9, так что правильный вариант ответа — второй.

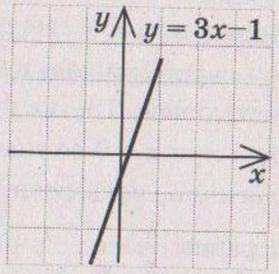
629. По графику функции $y = \frac{1}{x}$ сразу же видно, что она не является ни возрастающей, ни убывающей, т.е. не является монотонной, так что варианты ответа 1 и 3 отпадают. Функция $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ определена при $x > 0$, и чем больше x, тем больше $\sqrt{x}$ и тем меньше y, иными словами, эта функция — убывающая. Значит, правильный вариант ответа — второй.

630. Функция **А** является суммой двух возрастающих функций, функция **Б** при $x = 0$ равна 0, а при $x > 0$ — произведение двух возрастающих функций: $y = x$ $(x > 0)$ и $y = \sqrt{x}$. Следовательно, эти функции — возрастающие. Но тогда знаменатели у выражений, задающих функции **В** и **Г**, положительны, и с возрастанием x увеличиваются, а стало быть соответствующие дроби уменьшаются, так что эти функции — убывающие. Таким образом, среди заданных функций возрастающих две и правильный вариант ответа — второй.

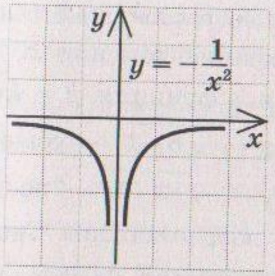
631. Сразу же замечаем, что линейная функция $y = 3x - 1$ — возрастающая, так что условию задачи не удовлетворяет. Квадратичная функция $y = x^2 - 4$ возрастает при $x \geq 0$ и убывает при $x \leq 0$, а значит, соответственно возрастает и убывает на их частях — отрезках [2, 3] и [–3, –2]. Далее, при $x > 0$ x^2 возрастает, $\frac{1}{x^2}$ убывает, $-\frac{1}{x^2}$ возрастает, т.е. на отрезке [2, 3] функция $y = -\frac{1}{x^2}$ возрастает, а поскольку она четная, а график всякой четной функции симметричен относительно оси ординат (см. рис.), т.е. на отрезке [–3, –2] эта функция убывает.



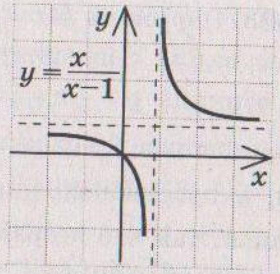
а)



б)



в)



г)

Представляется маловероятным, чтобы функция $y = \frac{x}{x - 1}$ удовлетворяла условию задачи, и поэтому не будем ее исследовать «научно», а рискнем сначала прибегнуть к эксперименту: в точке 2 она равна 2, в точке 3 равна $\frac{3}{2}$, так что эта функция не является возрастающей на [2, 3].

Таким образом, правильный вариант ответа — третий.

Комментарий. «Научное» исследование функции $y = \frac{x}{x-1}$ также несложно: так как $\frac{x}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}$, а при возрастании $x > 1$ дробь $\frac{1}{x-1}$ уменьшается, то при $x > 1$ рассматриваемая функция убывает.

632. Первая из заданных функций убывает как противоположная к возрастающей функции $y = 2\sqrt{x}$, вторая функция — квадратичная, а такая функция никогда не является возрастающей. Третья функция не является возрастающей, так как при $x = 0$ ее значение равно 11, в при $x = 1$ равно 3. Аналогично, четвертая функция при $x = 0$ равна 1, а при $x = 1$ равна $\frac{2}{3}$.

Таким образом, ни одна из этих функций не является возрастающей и правильный вариант ответа — третий.

633. Первая из заданных функций возрастает как линейная функция с положительным коэффициентом при x. Так как функция $y = -x + 1$ — убывающая, а функция $y = \sqrt{x}$ — возрастающая, то сложная функция $y = \sqrt{-x+1}$ — убывающая, а противоположная функция $y = -\sqrt{-x+1}$ — возрастающая, так что вторая функция — возрастающая. Третья и четвертая функции также возрастают как суммы двух возрастающих, и следовательно, правильный вариант ответа — четвертый.

634. Из заданных функций убывающими являются: третья — как линейная с отрицательным коэффициентом при x, четвертая — как сумма двух убывающих функций: $y = -3x^3$ и $y = -5x^3 + 15$. Первая функция как квадратичная не является убывающей, а для второй функции проще всего отметить, что при $x = 1$ и при $x = 1$ она принимает одно и то же значение, а для убывающей функции это невозможно.

Таким образом, убывающими являются две из заданных функций, и правильный вариант ответа — второй.

Комментарий. Аргумент, использованный для второй функции, конечно, может быть применен и для первой, и в обоих случаях достаточно было отметить, что эти функции — четные.

635. Первая функция как квадратичная не является убывающей. При возрастании x убывает $-2x + 3$ и поэтому $2\sqrt{-2x+3}$ также убывает. Для третьей функции применим несколько раз уже встречавшееся преобразование — перевод иррациональности в знаменатель:

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{x-1} = \frac{4}{\sqrt{x+3} + \sqrt{x-1}},$$

и поскольку в знаменателе полученной дроби стоит сумма положительных возрастающих функций, то дробь убывает. Наконец, четвертая функция является суммой двух убывающих функций: $y = -2x^{11}$ и $y = -x^7 + 3$, т.е. является убывающей, и таким образом, правильный вариант ответа — третий.

636. Первая функция, скажем, при $x = 1$ и при $x = -1$ принимает одно и то же значение, так что не является убывающей, вторая принимает равные значения при любых x, равноудаленных от 1 — например, при $x = 0$ и при $x = 2$ и не является убывающей. Третья функция не является убывающей как линейная функция с положительным коэффициентом при x, а четвертая есть сумма двух убывающих функций: $y = -3x^5$ и $y = -x^3 + 37$, так что и сама убывает. Значит, правильный вариант ответа — первый.

637. Функции 1 и 3 являются возрастающими, как сумма двух возрастающих (см. Компендиум). Так как функция $y = \sqrt{x+2}$ возрастает, то $y = -\sqrt{x+2}$ —убывает и правильный ответ — первый.

638. Функция 1 является возрастающей: ее производная $3x^2 - 4x + 5$ всегда положительна, поскольку имеет отрицательный дискриминант. Функция 3 является противоположной к функции $y = e^x + 2\ln x$, а эта функция возрастает как сумма возрастающих функций (см. Компендиум). Для функции 4, освобождаясь от иррациональности в знаменателе, т.е. умножая числитель и знаменатель дроби $\frac{1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}$ на сумму $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}$, получаем $y = \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}{2}$, откуда следует, что эта функция — возрастающая. Следовательно, правильный вариант ответа — функция 2.

Функция 2, заданная многочленом четной степени, при очень больших — как положительных, так и отрицательных x, принимает очень большие значения, так что горизонтальная прямая $y = a$ при достаточно большом a пересечет график этой функции по крайней мере в двух точках, т.е. эта функция удовлетворяет условию задачи. Если же знать свойство многочленов четной степени, как свои пять пальцев, то немонотонность функции 2 бросится в глаза, и в силу единственности правильного варианта ответа этот вариант и будет правильным, а исследование остальных функций, проведенное выше, совсем не понадобится.

639. Самую «незнакомую» функцию 1 — *показательно-степенную* — сначала пропускаем. Функция 2 равна 0 при $2x^2 - 1 = x^2 + 1$, т.е. $x^2 = 2$, т.е. имеет нулевое значение в двух точках и не является ни возрастающей, ни убывающей. Функция 3 — четная, так что в точках например, -1 и 1, принимает одно и то же значение. Функция 4 принимает значение -7 при $x = 0$ и при $x = 3$. Следовательно, единственной возрастающей среди данных функций является функция 1.

640. Самая простая на вид из данных функций — функция 4, а значение 4 она принимает в трех точках — корнях уравнения $x^3 - 3x = 0$, а значит, не является ни возрастающей, ни убывающей.

641. Пробегая взглядом предложенные варианты ответов, легко заметить, что функция 1 принимает нулевые значения в точках ± 1, т.е. не является возрастающей, но с тремя оставшимися явно более основательно придется поработать, тем более что вторая и третья отличаются только областью определения. Но именно это отличие частично спасает ситуацию: функция 2 не может быть возрастающей — в противном случае возрастающей была бы и функция 1, а двух правильных вариантов ответа в тестах с выбором, по определению, быть не может.

Остается рассмотреть варианты 3 и 4, причем функция 4 представляется более простой для исследования на возрастание — к ней, в крайнем случае, можно применить дифференцирование, причем продифференцировать ее не очень сложно.

Но можно обойтись и элементарными средствами. В самом деле, при $x = 1$ она принимает значение $-\sqrt{2} = -1{,}41\ldots$, а при $x = 2$ — значение $1 - \sqrt{3} = 1 - 1{,}73\ldots = -0{,}73\ldots < -\sqrt{2}$ — например, по правилу сравнения бесконечных десятичных дробей, так что эта функция не является возрастающей. Однако еще проще воспользоваться преобразованием, которое уже встречалось при решении предыдущих задач — переведем иррациональность в знаменатель:

$$\sqrt{x-1} - \sqrt{x+1} = \frac{2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}.$$

В знаменателе правой части стоит сумма положительных возрастающих функций, а дробь с положительными числителем и знаменателем и постоянным числителем убывает при возрастании знаменателя, так что функция 4 — убывающая.

Таким образом, возрастающей является функция 3 и правильный вариант ответа — третий.

642. Первая функция возрастает на луче $x \geq 0$, вторая — на луче $x \geq -\frac{7}{2}$, третья — на луче $x \leq -\frac{6}{5}$, четвертая — на всем множестве **R**. Отрезок $[-5, -1]$ входит только в третий и четвертый лучи, так что правильный вариант ответа — третий.

643. Для первой из заданных функций проще всего заметить, что при $x = 0$ она равна 36, а при $x = 1$ равна 35, и следовательно, на $[-6, 1]$ она не является возрастающей. Вторая функция возрастает на луче $x \le 2$, содержащем отрезок $[-6, 1]$, так что на этом отрезке она возрастает. Значит, варианты 1, 3 и 4 не могут быть правильными, так что правильный вариант ответа — второй.

644. На заданном отрезке $x \le 3$, так что функция 1 есть $y = 3 - x$ и на нем не является возрастающей. Отрезок $[0, 3]$ входит в промежуток $\left(\frac{5}{6}, +\infty\right)$ возрастания функции 2, так что на этом отрезке она является возрастающей. Функция 3 принимает значение 11 в двух различных точках: $x = 0$ и $x = 2$, принадлежащих $[0, 3]$, и поэтому возрастающей на нем не является. Наконец, функция 4 — убывающая, т.е. также не является возрастающей на заданном отрезке. Следовательно, правильный вариант ответа — третий.

645. Функции 1 и 3 являются возрастающими, как сумма двух возрастающих (см. Компендиум). Так как функция $y = \sqrt{x+2}$ возрастает, то $y = -\sqrt{x+2}$ —убывает и правильный вариант ответа — четвертый.

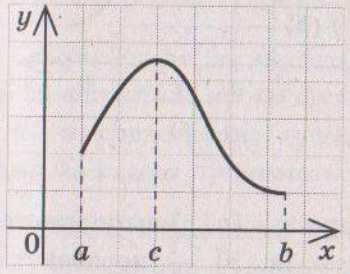
646. Функция 2 возрастает, так как функция $y = 1 - x^3$ убывает, логарифм по основанию $2 - \sqrt{2}$ также убывает, а убывающая функция от убывающей возрастает (см. Компендиум).

Область определения функции 3 есть множество $x > 0$, а на этом множестве функция $y = x^2$ возрастает, а поскольку функция $y = e^x$ является возрастающей, а возрастающая от возрастающей также возрастает, то функция $y = e^{3x^2}$ возрастает. Функция $y = 3\ln x^5 = 15\ln x$ — возрастающая, и значит, функция 3 возрастает как сумма двух возрастающих функций (см. Компендиум). Функция 4 также является суммой возрастающих функций и правильный вариант ответа — первый.

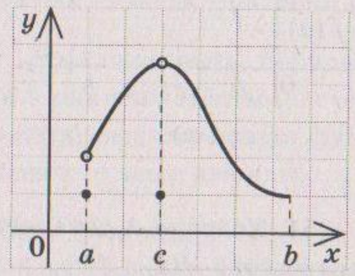
Комментарий. Если действовать по второму варианту указания, то в задаче 646 уже доказано, что функция $y = x - \sqrt{x}$ не является ни возрастающей, ни убывающей.

647. В простейшем случае, когда заданная функция непрерывна (рис. а), верно только утверждение **А**. Изменим ее значение в точках a и c, взяв $f(a) = f(c) = f(b)$. Очевидно, что в этом случае все четыре утверждения истинны. График соответствующей функции f приведен на рисунке б.

648. В решении задачи показано, что верными могут быть одно и четыре из приведенных утверждений. Возможен также случай, когда, например, $f(a) > f(c) = f(b)$ — верными будут только утверждения **В** и **Г**, т.е. всего два. Покажем, что ровно три утверждения верными быть не могут. Пусть это так. Тогда либо одновременно выполняются утверждения **А** и **Г**, откуда немедленно следует, что $f(a) = f(b) = f(c)$, а в этом случае, как мы уже видели, верны все утверждения, либо одновременно верны утверждения **Б** и **В**, что приводит к тому же результату, и поэтому правильным является вариант ответа 4.



а



б

649. Два утверждения из данных могут быть верными только в случае, когда значение $f(c)$ равно одному из значений $f(a)$ и $f(b)$, в противном случае, т.е. при $f(c) \ne f(a)$ и $f(c) \ne$

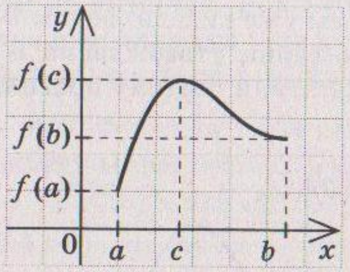
$f(b)$, любые два утверждения содержат строгие, но противоположные неравенства, так что будет верно только одно утверждение.

Пусть, например, $f(c) = f(a)$. Тогда данные утверждения упрощаются и принимают вид:

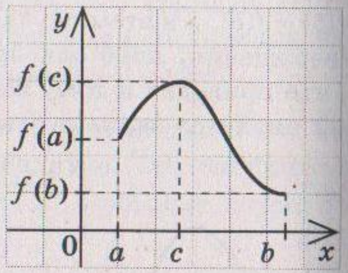
А. $f(a) \geq f(b)$ **Б.** $f(a) \leq f(b)$ **В.** $f(a) \geq f(b)$ **Г.** $f(a) \leq f(b)$,

а поскольку, по условию, $f(a) \neq f(b)$, то все эти утверждения — строгие неравенства, так что верными является ровно два из них. Следовательно, правильный вариант ответа — второй.

650. Ясно, что никакие два из представленных вариантов логические не совместимы, поскольку соответствующие числа связаны противоположными неравенствами, так что правильными вариантами ответа могут быть только первый и второй. Но для самой «обычной» непрерывной функции (см. рис. а, б) верно утверждение **А**, так что вариант 1 — неправильный, и значит, правильный вариант ответа — второй.



а)



б)

651. Условие **А** означает, что при $x \in [a, c]$ выполняется неравенство $f(x) \leq f(c)$, а при $x \in [c, b]$ — неравенство $f(c) \geq f(x)$, т.е. все значения функции f больше или равны $f(c)$, так что $f(c)$ — наибольшее значение функции f, так что вариант 1 отпадает. С другой стороны, функция

$$y = \begin{cases} x+1 & \text{при } x < 0, \\ -x & \text{при } x \geq 0 \end{cases}$$

удовлетворяет условию **Б**, но $f(c) = 0$ не является ее наибольшим значением, т.е. отпадают и варианты 2 и 4, и остается только вариант 2.

652. Если произвольная функция возрастает на каком-то промежутке, то она, как это следует из определения, возрастает и на любой части этого промежутка. Самый маленький из промежутков 1—4 — интервал (3, 5), и поэтому варианты 1, 2, 3 не могут быть правильными, так что правильным является вариант 4.

653. Если произвольная функция на каком-то промежутке не является ни возрастающей, ни убывающей, то она не является ни возрастающей, ни убывающей и на всяком большем, т.е. содержащем его промежутке. Поэтому не могут быть правильными варианты 2, 3, 4, так что правильный вариант ответа — первый.

654. Число 2π является периодом функций 1 и 3, функция 2 непериодична, а функция 4 при $x \geq 0$ является возрастающей, так что также не является периодической: при $x > 0$ и $T > 0$ ее значения $f(x)$ и $f(x + T)$ не могут быть равны. Таким образом, периодическими являются только функции 1 и 3, и правильный вариант ответа — второй.

655. Число 2π является, как легко проверить, периодом всех функций, кроме функции 5, а она является возрастающей и, следственно, непериодической: возрастающая функция не может принимать одно значение даже дважды.

656. Пройдя мимо «неприятных» функций 1—3, замечаем, что именно функция 4 скорее всего является периодической, а для доказательства достаточно взять число, являющееся общим периодом для синуса и косинуса, т.е. $2k\pi$, но при k, которое «съело» бы знаменатели — например, $k = 72 \cdot 31$, так что $2 \cdot 72 \cdot 31\pi$ — период обоих сомножителей, а значит, и функции 4.

657. Функция 4 является периодической — ее периодом является, например, 6π. Точно так же периодической является функция 1 — ее периодом является, например, число 2. Чтобы отыскать какой-нибудь период T функции 2 ее период T также нетрудно подобрать: он должен быть целым числом, чтобы «съесть» четверку в знаменателе дробной части, а число $\frac{2}{5}\pi T$ должно иметь вид $2k\pi$, для чего достаточно взять $T = 5$. Тогда слагаемые в функции 2 имеют общий период 10, который будет общим периодом их суммы. Следовательно, непериодической является функция 3.

Комментарий. Разумеется, для опытного взгляда достаточно очевидно, что непериодической является именно функция 3. Решая аналогичные задачи, можно осознать, что непериодичность несложной комбинации двух периодических функций связана с тем, что период одной из них является рациональным числом, а период другой — иррациональное число, а точнее — отношение их периодов является иррациональным числом.

660. Функция 4 получается из функции 1 заменой x на πx, а такое изменение аргумента не изменяет ситуации с периодичностью, и поэтому эти функции либо обе периодические, либо обе непериодические, но двух правильных вариантов ответов не может быть, так что варианты 1 и 4 оба неправильны. Для функции 2 общий период не приходит в голову — во всяком случае, если к x прибавить какой-нибудь период функции $y = \operatorname{tg} x$, то что произойдет с дробной частью $\{3\pi x\}$, совершенно неясно. Но для функции 3 ситуация противоположная: при замене x на $x + \pi$ выражение $\frac{3}{\pi}x$ перейдет в $\frac{3}{\pi}x + 3$ и его дробная часть не изменится, и таким образом, функция 3 имеет период π.

661. Пропустив функцию 1, заметим, что функция 2 равна -1 при $x^3 - 3x = 0$, т.е. в трех точках, а периодическая функция каждое свое значение принимает бесконечно много раз. Так как $\sqrt{98} = 7\sqrt{2}$, $\sqrt{162} = 9\sqrt{2}$, то слагаемые в ней имеют основные периоды соответственно $\frac{2\pi}{7\sqrt{2}}$ и $\frac{2\pi}{9\sqrt{2}}$, и поэтому $\frac{2\pi}{\sqrt{2}}$ является их общим периодом: $\frac{2\pi}{\sqrt{2}} = 7 \cdot \frac{2\pi}{7\sqrt{2}} = 9 \cdot \frac{2\pi}{9\sqrt{2}}$, а следовательно, и периодом суммы.

Функция 4 также не является периодической. Это очевидно прежде всего потому, что 1 — единственное число, не входящее в ее область определения, однако это «очевидно» в данном случае неприемлемо даже «для себя» — периодичность функции 1 не менее сомнительна. Иными словами, ее непериодичность нуждается в настоящем доказательстве.

Предположим противное и пусть некоторое число $T > 0$ — период функции 4, которую будем обозначать через f. Так как $0 \in D(f)$, то выполняется равенство $f(T) = f(0)$, и значит, $T \in D(f)$, $-T \in D(f)$, а поскольку $T + 1 \neq 1$, $T + 1 \in D(f)$, и следовательно, должно выполняться равенство $f(T+1) + f(-T) = f(1)$, а оно не имеет смысла.

Таким образом, функции 1—3 не являются периодическими, и значит периодической является функция 1.

Комментарий. Периодичность функции $y = D(x) \times D\left(x\sqrt{2}\right)$ строго доказана в задаче 353.

662. Утверждение 1 опровергается контрпримером $y = \operatorname{tg} x$, эта же функция опровергает утверждение 3. Контрпример к утверждению 2 может быть получен, например, из функции $y = \sin x$ — достаточно выбросить из ее области определения все значения $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$. Поэтому верно утверждение 4, так что правильный вариант ответа — четвертый.

663. Данные утверждения противоречат друг другу, каждое из них является *отрицаниями* другого, т.е. ровно одно из них истинно, а пример функции $y = \operatorname{tg} x$ показывает, что истинно утверждение **А**, и следовательно, правильный вариант ответа — первый.

664. Монотонная, т.е. возрастающая или убывающая функция каждое свое значение принимает один раз, а периодическая функция — бесконечно много раз. Оба заданных утверждения означают одно и то же и оба ложны, так как для монотонной функции f из равенства $f(x+T) = f(x)$ сейчас же следует, что $x + T = x$, т.е. $T = 0$.

665. Функция $y = \operatorname{tg} x$ показывает, что утверждение **А** истинно, если доопределить ее в точках $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, например, значением 0, то новая функция будет иметь область определения **R** и принимать те же значения, что и тангенс, так что утверждение **В** также истинно, и правильный вариант ответа — третий.

666. Сразу ясно, что вариант ответа 1 — неправильный: в противном случае правильным был бы и вариант 2. Но взяв, скажем, $g(x) = \sin x$, будем иметь функцию $y = f(\sin x)$, и если, например, $f(x) = x$, то $y = f(\sin x) = \sin x$ — периодическая функция, так что функция $f(g(x))$ может быть периодической, так что вариант ответа 3 — также неправильный. А для выбора между вариантами 3 и 4 остается выяснить, может ли функция $y = f(g(x))$ быть непериодической.

Естественный «кандидат» на период число T, действительно, оказывается, периодом: $f(g(x+T)) = f(g(x))$, так как $g(x+T) = g(x)$ по условию. Таким образом, правильный вариант — второй.

Комментарий. В данном случае анализ вариантов ответа оказался не слишком эффективным, и при «честном решении» ответ мог бы получен моментально: по условию, $g(x+T) = g(x)$, так что $f(g(x+T)) = f(g(x))$.

667. Как из данного равенства $f(x+T) = f(x)$ получить равенство $f(g(x+T)) = f(g(x))$ совершенно неясно — одновременно превратить $x + \mathrm{T}$ в $g(x+T)$, а $x = g(x)$, так что вариант ответа 1 представляется маловероятным. Столь же маловероятен и вариант 2 — откуда может взяться другой период?

Но вариант 3 уж слишком оптимистический, чтобы быть правильным, и он легко отвергается примером, когда f — постоянная функция $y = c$: в этом случае функция $y = f(g(x))$ — также постоянная, т.е. является периодической. Таким образом, правильный ответ — в варианте 4.

668. В разделе II (см. задачу 343) представлены примеры периодических функций, сумма которых не является периодической, так что утверждение **В** истинно, а его отрицание **А**, следовательно, ложно, и поэтому правильный вариант ответа — второй.

669. В решении задачи 364 показано, что функция $y = f(g(x))$ является периодической для любой периодической функции g, так что вариант ответа 4 — правильный.

670. В решении задачи 364 показано, что функция $y = f(g(x))$ является периодической для любой периодической функции g, а значит, функция $y = g(f(x))$ является периодической для любой периодической функции f, так что варианты ответа 1 и 2 — неправильны. С другой стороны, в ряде задач мы уже видели, что сумма двух периодических функций может не быть периодической (см. задачу 343), так что вариант 4 также неправильный.

671. В решении задачи 364 показано, что функция $y = f(g(x))$ является периодической для любой периодической функции g, а тогда, разумеется, и функция $y = g(f(x))$ является периодической для любой периодической функции f — достаточно в этом утверждении поменять местами буквы f и g. Поэтому варианты ответа 3 и 4 неправильны.

Но сумма и произведение двух периодических функций могут не быть периодическими (см. задачи 668 и 669), так что вариант 1 также неправильный.

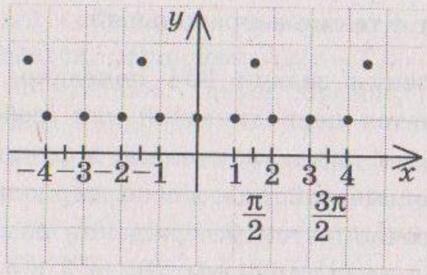
672. Вариант 1 просто не имеет смысла: предложение $f(x+T)=f(x)$ не является высказыванием — оно зависит и от T, и от x, и если относительно x можно подразумевать, как часто и делают, что это равенство выполняется для всех x, то статус буквы T совершенно неясен. Положение не спасает и уточнение, сделанное в предложении 2, которое также не имеет смысла.

Предложение 3 тоже не может служить другим определением периодической функции, поскольку из него не следует, что должно быть верно и равенство $f(x-T)=f(x)$ $(x\in D(f))$, и периодической оказалась бы, например, функция $y=\sin\left(\sqrt{x}\right)^2=\sin x\ \ (x\geq 0)$.

По той же причине не подходит и предложение 5. Предложение 7 также не подходит: оно позволяет для каждого $x\in D(f)$ иметь свое значение T, а в нормальном определении периодической функции число T должно быть общим для всех x, и контрпримером для этого предложения может служить функция

$$f(x)=\begin{cases}1 \text{ при } x=n\ \ (n\in N)\\ 2 \text{ при } x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n\ \ (n\in N),\end{cases}$$

график которой изображен на рисунке.



Итак, не годятся в качестве «альтернативного определения» предложения 1, 2, 3, 5, 7 — всего 5, и следовательно, правильный вариант ответа — второй.

673. Функция 1 — четная, так как $\sin^2(-x)=(-\sin x)^2=\sin^2 x$, функция 2 — также четная, так как постоянная функция всегда принимает одно и то же значение. Функция 3 не является четной, так как, например, $(-1)^3\neq 1^3$, а функция 4 принимает разные значения, скажем, при $x=1$ и при $x=-1$ — соответственно 2 и 4. Следовательно, правильный вариант ответа — первый.

674. Четность функций 1-4 очевидна, а значения функции 5 при $x=1$ и при $x=-1$ различны: первое равно 0, второе равно 2, и следовательно, правильный вариант ответа — третий.

675. Четность функций 1, 2, 3 и 5 легко доказывается непосредственно по определению, а для функции 4 получаем:

$$\frac{x}{x^2-(-x)-1}=\frac{x}{x^2+x-1}\neq\pm\frac{x}{x^2-x-1},$$

так что функция 4, скорее всего — с вероятностью почти 100%, не является ни четной, ни нечетной. Но для собственного спокойствия лучше это утверждение доказать, тем более что это очень просто.

Например, при $x=-1$ значение функции равно -1, а при $x=1$ ... тоже 1, но если взять значения 2 и -2, то соответствующие значения функции равны 2 и $-\frac{2}{5}$, т.е. не равны и не противоположны, т.е. функция действительно не является ни четной, ни нечетной, и следовательно, правильный вариант ответа — четвертый.

676. Четность функции 1 очевидна, для функции 2:

$$y(-x)=\frac{|-x|}{-x}=-\frac{|x|}{x}=-y(x),$$

т.е. эта функция нечетна. Аналогично, для функций 3 и 4 имеем:

$$y(-x) = 3^{-x} - 3^{x} = -\left(3^{x} - 3^{-x}\right) = -y(x),$$

$$y(-x) = \frac{1}{-x+1} + \frac{1}{-x-1} = -\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} = -y(x),$$

так что обе эти функции нечетны.

Комментарий. Нечетность функции 4 становится очевидной, если заметить, что $y = \frac{2x}{x^2 - 1}$.

677. Так как $\left(|x| + x\right)\left(|x| - x\right) = |x|^2 - x^2 = x^2 - x^2 = 0$, т.е. заданная функция при любом x равна 0, и является поэтому и четной, и нечетной, так что правильный вариант ответа — второй.

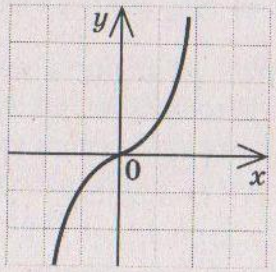
678. Проведем доказательство четности данной функции без использования геометрических соображений, обозначив заданную функцию через f. Возьмем произвольное значение x, а для вычисления значения $f(x)$ придется рассматривать два случая: $x > 0$ и $x < 0$ — в противном случае мы не будем знать, какой строчкой из определения f пользоваться для вычисления $f(-x)$.

В первом случае $-x < 0$, а тогда надо пользоваться второй строчкой, так что $f(-x) = -(-x)^2 = -x^2 = -f(x)$ — так как $x > 0$, то для вычисления $f(x)$ нужно пользоваться первой строчкой. Во втором случае $-x > 0$, значение $f(-x)$ вычисляется по первой строчке: $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = -f(x)$ — на этот раз $x < 0$, и для вычисления $f(x)$ следует пользоваться второй строчкой.

Таким образом, равенство $f(-x) = -f(x)$ выполняется при любом x из области определения заданной функции, так что функция f — нечетная, и правильный вариант ответа — второй.

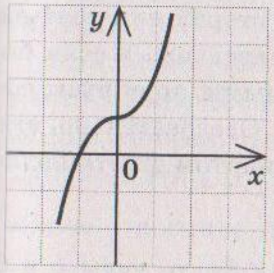
680. Утверждения 1-4 моментально вытекают из определения, а к предложениям 5 и 6 легко привести контрпримеры: функция $y = x^2 + x$ — сумма четной и нечетной функций — сама не является ни четной, ни нечетной: при $x = 1$ и при $x = -1$ она принимает значения соответственно 3 и -1 — не равные, и не противоположные друг другу. Значит, правильный вариант ответа — второй.

681. Ясно, что утверждения 1 и 2 истинны, а для остальных легко привести контрпримеры: сумма функций $y = x^2$ и $y = x$, т.е. функция $y = x^2 + x$ не является ни четной, ни нечетной, так же, как и разность этих функций. Следовательно, правильный вариант ответа — второй.



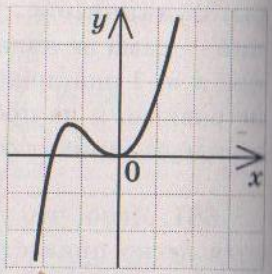
682. Функция, заданная этим графиком, является возрастающей и нечетной, и этими двумя свойствами обладает функция 2. Функция 1 нечетной не является, так как $y(0) \neq 0$, функция 3 не является возрастающей, и поэтому правильный вариант ответа — второй.

Комментарий. Впрочем, достаточно было воспользоваться «законом задач с выбором ответа», можно сделать правильный вывод, рассмотрев лишь функцию 1: вариант ответа 1 — правильный, так что остальные — неправильные. В то же время «честное» решение здесь вполне просто.

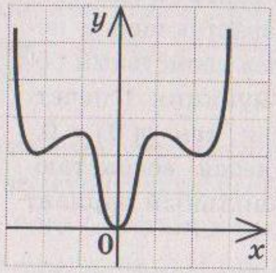


683. Функция, заданная этим графиком, возрастает и не является ни четной, ни нечетной, и этими двумя свойствами обладает функция 1: $y(0) \neq 0$, функция 2 — нечетная, а функция 3 не является возрастающей: она принимает значение 0 при $x = 0$ и при $x = -\frac{b}{a}$. Поэтому правильный вариант ответа — первый.

684. Функция, заданная этим графиком, не является возрастающей, и не является нечетной, и этими двумя свойствами обладает функция 3. Функция 2 — нечетная, функция 3 не является возрастающей, и поэтому правильный вариант ответа — первый.



685. Функция, заданная этим графиком, — четная, а ни одна из заданных функций четной не является, и поэтому правильный вариант ответа — четвертый.



686. Так как $-1 \le \sin 2004 \le 1$, а на отрезке $[-1, 1]$ косинус положителен, то $b > 0$. Точно так же $0 < \cos(\cos 2004) < 1$, так что $0 < (\sin(\cos(\cos 2004))) < 1$, и тангенс этого угла положителен, т.е. $a > 0$.

687. Так как углы 2, 3 и 4 лежат во второй или третьей четверти, то косинусы этих углов отрицательны, и если бы последние три неравенства были истинными, то синусы соответствующих углов были бы больше 1. Следовательно, эти неравенства неверны и правильным вариантом ответа является второй.

688. Так как $\frac{3\pi}{2} < 5 < 6 < 2\pi$, $\frac{5\pi}{2} < 8 < 3\pi$, то углы 5 и 6 лежат в четвертой четверти, а угол 8 во второй четверти. Поэтому sin 5, sin 6 и cos 8 отрицательны, откуда следует, что первое, второе и четвертое неравенства верны, и остается более детально рассмотреть третье неравенство — угол 7 лежит в первой четверти.

Проведем грубую прикидку: угол 7 составляет примерно 420°, но немного меньше 420°, т.е. его синус и косинус примерно равны соответственно $\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\frac{1}{2}$, так что это неравенство, скорее всего, верно, но это необходимо доказать.

Ясно, что $\sin 7 > \frac{\sqrt{3}}{2}$ — в первой четверти синус возрастает, однако косинус убывает, так что $\cos 7 < \frac{1}{2}$, и для его оценки «снизу» (т.е. нахождения такого числа a, что $\cos 7 > a$), что нужно найти угол, больший 60°, но такого угла с подходящим косинусом нет. Поэтому придется заняться не слишком, но все же достаточно подходящим углом 75°, а еще лучше — углом 15°: $\cos 75° = \sin 15°$.

Так как $\sin^2 15° = \frac{1 + \cos 30°}{2} = \frac{2 + \sqrt{3}}{4}$, то рассматриваемое неравенство будет доказано, если мы установим, что $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} > 1$, или $\sqrt{3} + \sqrt{2+\sqrt{3}} > 2$, а это неравенство вполне очевидно: $\sqrt{3} > 1{,}7$, $\sqrt{2+\sqrt{3}} > \sqrt{3} > 1{,}7$.

Таким образом, правильным вариантом ответа является второй.

Комментарий. Для нахождения правильного варианта ответа можно воспользоваться и другими, менее строгими соображениями. Приближение угла 7 углом 420° не так уж неточно и эти углы отличаются не так сильно, кроме того, в районе $\frac{\pi}{3}$ косинус убывает не очень быстро, так что замена cos 7 на $\frac{1}{2}$ вряд ли повлияет на выполнение неравенства $\sin 7 + \cos 7 < 1$.

689. Так как угол 4 лежит в третьей четверти, где синус и косинус отрицательны, то четвертое число отрицательно. Угол 3 лежит во второй четверти и очень близок к π, так что его синус очень маленький, а косинус близок к -1 и поэтому сумма $\sin 3 + \cos 3$ наверняка отрицательна.

А так как $1 \approx \frac{\pi}{3}$, $2 \approx \frac{2\pi}{3}$, то $\sin 2 \approx \sin 1$, $\cos 2 \approx -\cos 1$, $\sin 2 + \cos 2 \approx \sin 1 - \cos 1$, и поскольку $\cos 1$ положителен и примерно равен $\frac{1}{2}$, то грубость проведенной прикидки вряд ли повлияет на результат. Поэтому наибольшее из данных чисел наверняка первое.

690. Беглая проверка показывает, что в каждой сумме, кроме третьей, имеются слагаемые разных знаков, и скорее всего, именно третье — отрицательное — является наименьшим. Но сразу сделать такой вывод было бы легкомысленно без более детального изучения остальных сумм: может оказаться, что в какой-нибудь из остальных сумм положительное слагаемое маленькое, а отрицательное большое — разумеется, по модулю.

И именно так в данном случае обстоит дело: во второй сумме синус близок к 0, а косинус близок к -1, так что сравнить вторую и третью сумму придется детально. Геометрически ясно, что $\sin 3 > \sin 4$, но $\cos 3 < \cos 4$, т.е. сравнить эти суммы с помощью сложения двух неравенств не удается.

Прибегнем к прикидке:

$$4 \approx \frac{4\pi}{3};\quad \sin 4 \approx -\frac{\sqrt{3}}{2} \approx -0{,}86;\quad \cos 4 \approx -\frac{1}{2} = -0{,}5;$$

$$\sin 4 + \cos 4 \approx -1{,}36$$

а поскольку $\sin 3 + \cos 3 \approx -1$, то наверняка $\sin 4 + \cos 4 < < \sin 3 + \cos 3$, и таким образом, третья сумма все же оказалось меньше второй.

На всякий случай сравним третью сумму с первой и четвертой: но первая больше, чем $\cos 2$, т.е. больше -1, а четвертая больше, чем $\sin 5$, т.е. также больше -1. Таким образом, первая гипотеза оказалась верной, и правильный вариант ответа — третий.

691. Куб данного выражения равен $(-0{,}3)\cdot(-0{,}09) = = 0{,}027 = \frac{27}{1000}$, и значит, само выражение равно $\frac{3}{10}$, так что правильный ответ — в варианте 4.

692. Куб данного выражения равен $125 \cdot 0{,}027 = 5^3 \cdot \frac{27}{1000}$, и следовательно, само выражение равно $5 \cdot \frac{3}{10} = \frac{3}{2}$, так что правильный ответ — в варианте 1.

693. Куб данного выражения равен $(-0{,}016)\cdot(-0{,}02) = = \frac{16}{1000} \cdot \frac{2}{100} = \frac{32}{10^5}$, и значит, само выражение равно $\frac{2}{10} = 0{,}2$, так что правильный ответ — в варианте 1.

694. Так как $54 = 3^3 \cdot 2$, $250 = 5^3 \cdot 2$, $16 = 4^2$, то данное выражение равно $\frac{3}{5} \cdot 4 = \frac{12}{5} = 2{,}4$.

695. Так как $625 = 5^4$, $225 = 5^2 \cdot 3^2$, $81 = 3^4$, то данное выражение равно $\dfrac{5^{\frac{4}{3}} \cdot 3^{\frac{4}{3}}}{5^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{\frac{2}{3}}}$, т.е. $5^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{\frac{2}{3}}$, или $\sqrt[3]{225}$.

696. Так как $32 = 2^5$, $4 = 2^2$, $16 = 2^4$, то данное выражение равно $\sqrt[4]{\dfrac{2^5}{2^2 \cdot 2^6}} = \sqrt[4]{\dfrac{1}{2^3}}$, так что правильный вариант ответа — четвертый.

697. Так как $375 = 3 \cdot 5^3$, $27 = 3^3$, $81 = 3^4$, то данное выражение равно $\sqrt[3]{\dfrac{3^4 \cdot 5^3}{3^4}} = \sqrt[3]{5^3}$, так что правильный вариант ответа — второй.

698. Если к квадрату суммы двух чисел a и b прибавить квадрат их разности, то удвоенные произведения взаимно уничтожатся, а останется удвоенная сумма квадратов. Поэтому при сложении двух данных дробей получится дробь, в числителе у которой будет 16, а в знаменателе 2, так что данное выражение равно 8.

Отметим, что правильный ответ легко получить с помощью приближенных вычислений: $\sqrt{5} \approx 2{,}2$; $\sqrt{3} \approx 1{,}7$, т.е. $\sqrt{5}+\sqrt{3} \approx 4$, $\sqrt{5}-\sqrt{3} \approx 0{,}5$, так что первое слагаемое примерно равно 8, тогда как второе положительно. Следовательно, правильный вариант ответа — первый.

Комментарий. Приближенные оценки, разумеется, нестрогие, но достаточно точны, чтобы быть уверенным, что остальные варианты ответа неправильные. Строгое решение можно провести на основе оценок. Именно, $\sqrt{5} > 2{,}2$ $\sqrt{3} > 1{,}7$ так что $\sqrt{5}+\sqrt{3} > 3{,}9$. С другой стороны, $\sqrt{5} < 2{,}3$, $\sqrt{3} > 1{,}7$, откуда $\sqrt{5}-\sqrt{3} > 0{,}6$, и значит, $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} > \frac{3{,}9}{0{,}6} > 5 > \sqrt{5}+$ $+\sqrt{3} > \sqrt{5}-\sqrt{3}$.

699. При вычислении разности в скобках в числителе получится разность квадратов суммы минус разность квадратов разности, и при вычитании суммы квадратов взаимно уничтожатся и останутся лишь два удвоенных произведения $2\sqrt{x}-\left(-2\sqrt{x}\right)=4\sqrt{x}$, что при умножении на $\frac{1}{\sqrt{x}}$ даст 4. А знаменатель выражения в скобках будет равен $x-1=1$, так что значение исходного выражения равно 2.

700. Так как

$$a^{\frac{1}{2}}=\sqrt{81}=9,\ a^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{81}=3,\ b^{\frac{1}{2}}=\sqrt{16}=4,\ b^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{16}=2,$$

то числитель первой дроби равен $9-4=5$, знаменатель равен $3+2=5$, так что первая дробь равна 1. Числитель второй дроби равен $9-3\cdot3\cdot2=-9$, знаменатель равен 3, так что вторая дробь равна -3, и следовательно, значение данного выражения равно 4.

701. Так как

$$a^{\frac{1}{2}}=\sqrt{81}=9,\ a^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{81}=3,\ b^{\frac{1}{2}}=\sqrt{16}=4,\ b^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{16}=2$$

то числитель первой дроби равен $9-4=5$, знаменатель равен $3+2=5$, так что первая дробь равна 1. Числитель второй дроби равен $9-5\cdot3\cdot2=-21$, знаменатель равен 3, так что вторая дробь равна -7, и значит, значение данного выражения равно 12, а правильный вариант ответа — второй.

Комментарий. Решение связано с очевидными и весьма неприятными тождественными преобразованиями — формулами сокращенного умножения и свойствами степеней, и его пришлось бы проводить, если бы корни из заданных значений a и b не извлекались. В частности, надо отметить, что в первой дроби числитель представляет собой разность квадратов чисел, стоящих в знаменателе.

702. Так как $p^{0,5}=7$, то первая дробь равна $\frac{7}{12}$, а вторая равна $-\frac{35}{24}$, так что заданное выражение равно $\frac{14+35}{24}=\frac{49}{24}$, т.е. правильный вариант ответа — четвертый.

703. Так как

$$a^{\frac{1}{2}}=\sqrt{81}=9,\ a^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{81}=3,\ b^{\frac{1}{2}}=\sqrt{16}=4,\ b^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{16}=2,$$

то числитель первой дроби равен $9-4=5$, знаменатель равен $3-2=1$, так что первая дробь равна 5. Числитель второй дроби равен $6+4$, знаменатель равен 5, так что вторая дробь равна 2, и следовательно, значение данного выражения равно 3.

Комментарий. См. комментарий к задаче 701.

704. Так как

$$a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{81} = 9,\ a^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{81} = 3,\ b^{\frac{1}{2}} = \sqrt{16} = 4,\ b^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{16} = 2,$$

то числитель первой дроби равен $9 - 4 = 5$, знаменатель равен $3 + 2 = 5$, так что первая вторая дробь равна 1. Числитель второй дроби равен $6 - 4 = 2$, знаменатель равен 1, так что вторая дробь равна 2, и значит, значение данного выражения равно -1.

Комментарий. См. комментарий к задаче 701.

705. Так как степень с показателем $\frac{1}{2}$ — это квадратный корень, то первая дробь равна $\sqrt{x} - \sqrt{y}$, а правая равна $1 + \sqrt{y}$, так что данное выражение равно $\sqrt{x} - 1 - 2\sqrt{y} = 7$.

706. $\log_7 98 - \log_7 14 = \log_7 \frac{98}{14} = \log_7 7 = 1$.

707. $\log_5 250 - \log_5 10 = \log_5 25 = 2$.

708. $\log_2 48 + \log_2 \frac{1}{6} = \log_2 48 - \log_2 6 = \log_2 \frac{48}{6} = 3$.

709. $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{27} = \log_2 3^3 = 3\log_2 3,\ \log_{\frac{1}{2}} 64 = -6$, поэтому данное выражение равно $\log_2 3 - 2$.

710. $\lg\sqrt{500} - \lg\sqrt{125} = \frac{1}{2}\left(\lg 500 - \lg 125\right) = \frac{1}{2}\lg\frac{500}{125} = \lg 2$.

711. $\lg 75 + \lg 45 + \lg\frac{9}{125} = \lg\frac{75 \cdot 45 \cdot 9}{125} = \lg(3 \cdot 9 \cdot 9) = 5\lg 3$.

712. По формулам приведения при прибавлении к углу α угла 180° тригонометрическая функция не меняется, а при прибавлении 270° меняется на ко-функцию, а так как за знаками здесь следить не обязательно, поскольку все равно соответствующее выражение возводится в квадрат, то данное выражение есть произведение квадрата котангенса на квадрат синуса, т.е. равно $\cos^2\alpha$.

Можно рассуждать иначе: так как данное выражение не может быть отрицательным, то оно равно либо выражению 2, либо выражению 3. При $\alpha = -90°$ заданное выражение равно 0, а выражение 2 равно 1, и поэтому данное выражение равно выражению 3.

Комментарий. Строго говоря, данное выражение равно $\cos^2\alpha$ только для тех α, для которых множитель $\mathrm{tg}^2(270° + \alpha)$ имеет смысл. При преобразованиях выражений на такие тонкости часто не обращают внимания и их не считают существенными составители задач ЕГЭ, откуда и заимствована эта задача. Но если эти тонкости полностью игнорировать, то решая, например, уравнение $\mathrm{tg}^2(270° + x) \cdot \sin^2(180° + x) = 0$, после упрощения получится уравнение $\cos^2 x = 0$, корнями которого являются как раз те значения x, которые не входят в область определения исходного уравнения.

713. Сумма первых двух слагаемых представляет собой косинус разности $5\alpha - 3\alpha = 2\alpha$, а так как 6π — период синуса, то $\sin(6\pi + 2\alpha) = \sin 2\alpha$, так что правильный вариант ответа — первый.

714. Сумма первых двух слагаемых представляет собой косинус разности $6\alpha - 4\alpha = 2\alpha$, а так как 2π — период косинуса, то $\cos(2\alpha - 2\pi) = \cos 2\alpha$, так что правильный вариант ответа — второй.

Искать правильный вариант ответа можно и подстановкой конкретных значений α: при $\alpha = 0$ данное выражение равно 2, так что варианты 3 и 4 отпадают, а при $\alpha = \frac{\pi}{2}$ оно равно $-1 - 1 = -2$, а это значение выражения 2.

715. Сумма первых двух слагаемых представляет собой косинус разности $7\alpha - 5\alpha = 2\alpha$, а так как 4π — период косинуса, то $\cos(4\pi - \alpha) = \cos(-\alpha) = \cos\alpha$, так что правильный вариант ответа — второй.

Подстановка $\alpha = 0$ также легко приводит к выбору правильного ответа: данное выражение при этом равно 2 и только выражение в ответе 2 равно 2 при данном значении α.

716. Сумма первых двух слагаемых представляет собой косинус суммы $2\alpha - \alpha = \alpha$, а так как 6π — период косинуса, то $\cos(\alpha - 6\pi) = \cos\alpha$ так что правильный вариант ответа — второй.

Подстановка $\alpha = 0$ также легко приводит к выбору правильного ответа: данное выражение при этом равно 2 и только выражение в ответе 2 равно 2 при данном значении α.

717. Сумма первых двух слагаемых представляет собой косинус суммы $3\alpha + 2\alpha = 5\alpha$, а 2π период косинуса, так что правильный вариант ответа — второй.

718. Очень большие по модулю отрицательные x являются решениями данного неравенства, а положительные — нет, так что правильным является вариант 1.

719. Число 6 — решение данного неравенства, поэтому поищем еще решения около 6. Числа 7 и 8 — его решения, а при $x > 9$ числитель дроби отрицателен, а знаменатель положителен, т.е. дальше 6 других целых решений не будет. Если же $x < 6$, то числитель дроби положителен, а знаменатель отрицателен, так что среди этих значений x решений также нет, и следовательно, правильным является вариант 3.

720. Применяя метод интервалов к нестрогому неравенству, всегда внимательно следят за корнями двучленов, стоящих в числителе, — им в ответе соответствуют квадратные скобки. В данном случае это -7, поэтому правильными могут быть только варианты 2 и 3, а для их выбора достаточно проверить $x = 5$: оно не является решением неравенства, но входит в объединение 3. Таким образом, правильным является вариант 2.

Комментарий. При большом опыте решения неравенств методом интервалов можно привыкнуть к тому, что для приведенного неравенства, т.е. с различными корнями двучленов и положительными коэффициентами при x, на

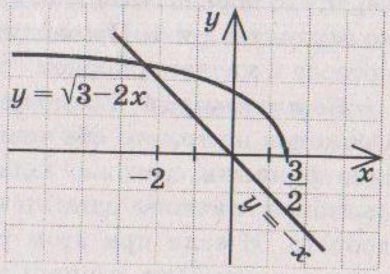
правом луче ставится плюс, и поскольку знаки чередуются, то данное неравенство выполняется на левом луче и на промежутке, следующем через один. Поэтому можно сразу указать на вариант 2.

721. Переписав данное неравенство в виде

$$\frac{x+7}{(2x-1)(8-x)} \le 0,$$

заметим, что после нанесения на координатную прямую корней -7, $\frac{1}{2}$, 8 двучленов, входящих в дробь, она разобьется на 4 промежутка, и неравенство выполняется на самом левом из них — луче $(-\infty, -7]$ и на следующем через один отрезке $\left[\frac{1}{2}, 8\right]$, так что правильный вариант — второй.

722. При просмотре вариантов легко отбросить вариант 2: соответствующий отрезок содержится в интервале 3 и если этот вариант правильный, то правильными являются оба варианта 1 и 3. И если далее действовать в соответствии с указанием, то отрицательный целый корень подобрать нетрудно: $x = -3$, так что правильным является вариант 1.



Комментарий. Если не следовать указанию, то эффективными оказываются графические соображения: функция $y = \sqrt{3-2x}$ — убывающая с областью определения $x \le \frac{3}{2}$ (см. рис.), и пересекается с прямой $y = -x$ явно левее точки -2, и правильным, очевидно, будет именно вариант 1.

723. Так как всякий корень уравнения должен удовлетворять неравенствам $x \ge 5$ и $7 - x \ge 0$, т.е. $5 \le x \le 7$, то естественно испытать числа 5, 6 и 7, из них 6 оказывается корнем, и поскольку он лежит в промежутке 2, то этот вариант и является правильным.

724. Попытаемся подобрать корень. Так как $\sqrt{2x^2-9x+5}\ge 0$, то всякий корень данного уравнения больше или равен 3. Число 3 является корнем, если подкоренное выражение при $x=3$ равно 0, а это неверно — конечно, это можно проверить непосредственной подстановкой, но проще отметить, что 5 не делится на 3 и сослаться на теорему о целых корнях (см. Компендиум). С другой стороны, при $x=4$ $2x^2-9x+5=32-36+5=1$, так что 4 — корень данного уравнения и принадлежит промежутку 3.

725. Перебирая числа 1, 2, 3, 4, 5, получаем, что 5 — корень данного уравнения, так что правильный ответ — в четвертом варианте.

726. Так как левая часть данного уравнения положительна, то его корень больше 5, так что для выбора остаются только варианты 2 и 4. Промежутки 2 и 4 различаются числом 9, которое и является корнем уравнения: $\sqrt{9}+1=4=9-5$.

Комментарий. Возможен и иной вариант рассуждений. Несмотря на то, что обе части уравнения задают возрастающие функции, условие задачи подсказывает, что корень у данного уравнения один, и имеет смысл попытаться его подобрать. И если при этом учитывать, что кандидат на корень должен быть точным квадратом, то максимум со второй попытки корень 9 будет найден.

727. $5^{-0,8x+4}=5^3,\ -0,8x+4=3,\ \frac{4}{5}x=1,\ x=\frac{5}{4},\ 0<\frac{5}{4}<2.$

728. $2^{-4,5x+3}=2^4,\ -4,5x+3=4,\ \frac{9}{2}x=-1,\ x=-\frac{2}{9},$

$$-1<-\frac{2}{9}<0.$$

729. $2^{-4,8x+8}=2^6,\ -4,8x+8=6,\ 2,4x=1,\ x=\frac{5}{12}$

$$0<\frac{5}{12}<1.$$

Комментарий. Решение было бы чуть экономнее, если бы мы заметили, что $\frac{1}{64}$ и 64 — «хорошие» степени числа 4:

$$4^{-2,4x+4}=4^3,\ -2,4x+4=3,\ 2,4x=1,\ x=\frac{5}{12}.$$

730. $2^{-3x+2}=2^{-3},\ -3x+2=-3,\ 3x=5,\ x=\frac{5}{3},\ 1<\frac{5}{3}<2.$

731. $2^{5x-4}=3^{-3},\ 5x-4=-3,\ x=\frac{1}{5},\ 0<\frac{1}{5}<1.$

732. $5^{7x+6}=5^{-3},\ 7x+6=-3,\ x=-\frac{9}{7},\ -2<-\frac{9}{7}<-1.$

733. Никакое нечетное число не является корнем данного уравнения, так как при подстановке его в левую часть уравнения получается иррациональное число. Число 2 при подстановке дает $6+2\cdot3-15=0$, т.е. является корнем данного уравнения.

Комментарий. Имея в виду только получение правильного ответа, решать это уравнение «честно» в данном случае было бы неразумно. Но если бы ответ был иной, например, $\log_3 5$, то «честное» решение могло оказаться наиболее простым.

734. Так как при больших x данное неравенство не выполняется, то вариант 3 и 4 не могут быть правильными. Вариант 2 не может быть правильным, так как промежуток $(-\infty,\ -0,5)$ содержится в промежутке $(-\infty,\ 1,5)$, т.е. в этом случае правильным был бы и вариант 1.

735. Так как при больших x данное неравенство выполняется, то правильным может быть только один из вариантов 2 или 4. Подставив для выбора между ними $x=2$, получим, что правильным является вариант 4.

736. Так как левая часть данного неравенства — возрастающая функция и равенство $5^{3,5+x} = \frac{1}{125} = 5^{-3}$ выполняется при $3{,}5 + x = -3$, $x = -0{,}5$, то неравенство выполняется при $x \ge -0{,}5$.

737. Так как показательная функция $y = 0{,}7^x$ — убывающая, то при переходе к неравенствам между показателями знак неравенства следует заменить на противоположный и переписать в виде:

$$5x + 1 \le 2x - 3,\ \ 3x \le 2,\ \ x \le -\frac{4}{3},$$

так что правильным является вариант 1.

Комментарий. Впрочем, правильный ответ можно получить и иными рассуждениями. Именно, при очень больших x данное неравенство не выполняется, так что варианты 2 и 4 отпадают, а при $x = -1$, различающем промежутки 1 и 3 и лежащем в промежутке 3, неравенство не выполняется, т.е. правильный ответ — в варианте 1.

738. Положив $\log_{16} x = y$, получим квадратное уравнение $2y^2 - y - 1 = 0$, один из корней которого равен -1, а другой, по теореме Виета, равен $\frac{1}{2}$. Соответствующие значения x равны $16^{-1} = \frac{1}{16}$ и $\sqrt{16} = 4$, так что правильный вариант — первый.

739. Решим данное уравнение «честно»:

$$\log_5(x-1) = \log_5(x-3) + 1,\ \ \log_5(x-1) = \log_5 5(x-3),$$

$$x - 1 = 5x - 15,\ \ x = \frac{7}{2},$$

так что правильным является вариант 3.

Заметим, что это решение не совсем честно — в нем полностью игнорируется возможность появления посторонних корней.

740. В области определения данного уравнения $x + 5 > 0$, $1 - x > 0$, т.е. $-5 < x < 1$ и поэтому корень уравнения не может лежать в интервалах 2 и 4. Остается выяснить, больше или меньше -2 рассматриваемый корень. Так как $y(-2) = \lg 3 - \lg 3 = 0$, то этот корень меньше 0, и правильным является вариант 1.

Комментарий. Отметим, что «честное» решение в этой задаче вряд ли сложнее: последовательно имеем

$$\lg\frac{5+x}{1-x} = \lg 2,\ \ \frac{5+x}{1-x} = 2,\ \ x + 5 = 2 - 2x,\ \ x = -1,$$

и проверка показывает, что -1 действительно является корнем данного уравнения и лежит в интервале 1. Впрочем, заметив, что функция $y = \lg(5+x) - \lg(1-x)$ — возрастающая, этот корень можно было бы найти подбором.

741. С первого взгляда отвергаются варианты 1 и 2 — область определения данного уравнения $x > -3$, но неясно, какой вариант из оставшихся правилен, т.е. больше или меньше 4 его корень. Левая часть уравнения — убывающая функция, правая — возрастающая, так что можно попытаться подобрать единственный корень, но скажем, забегая вперед, не удастся, и поэтому приведем «честное» решение:

$$2 = \log_4(x+5) + \log_4(x+3),\ \ 2 = \log_4(x+5)(x+3),$$

$$(x+5)(x+3) = 16;\ \ x^2 + 8x - 1 = 0,\ \ x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{17}}{2}.$$

Проверка значения, очевидно, приведет к «плохим» логарифмам, а числа $x + 5$ и $x + 3$, отличающиеся на 2, оба будут «хорошими», т.е. в данном случае степенями 4, если они равны соответственно 4 и 2, т.е. при $x = -1$, -1 и является корнем данного уравнения и лежит в интервале 3.

Комментарий. «Честное» решение этой задачи не сложнее.

742. Всякий корень данного уравнения больше 5, а его левая часть — возрастающая функция, так что максимум со второй попытки получаем корень $x = 7$.

743. Функция $y = \log_{0,4}(1{,}9x - 1{,}3)$ является убывающей и поэтому заданное неравенство выполняется при всех значениях x, меньших или равных корню уравнения $\log_{0,4}(1{,}9x - 1{,}3) = -1$, входящих в область определения функции.

Решим это уравнение:

$$1{,}9x - 1{,}3 = 0{,}4^{-1},\ \ 1{,}9x = 1{,}3 + 2{,}5,\ \ x = 2,$$

так как область определения задается неравенством $1{,}9x - 1{,}3 > 0$, $x > \dfrac{13}{19}$, то решения данного неравенства составляют промежуток 2.

Комментарий. «Честное» решение этой задачи едва ли сложнее:

$$\log_{0,4}(1{,}9x - 1{,}3) \ge -1;\ \ 0 < 1{,}9x - 1{,}3 \le 2{,}5;$$
$$1{,}3 < 1{,}9x < 3{,}8;\ \ \frac{13}{19} < x < 2.$$

744. При больших x левая часть неравенства отрицательна и велика по модулю, т.е. меньше -2, так что варианты 3 и 4 не являются правильными. Для выбора между двумя оставшимися вариантами заметим, что различающее промежутки 1 и 2 значение $x = -100$ не входит в область определения, так что правильным является вариант 2.

Комментарий. «Честное» решение этой задачи так же просто, но требует больше арифметики:

$$\log_{\frac{1}{6}}(1{,}6x + 36{,}8) \ge -2;\ \ 0 < 1{,}6x + 36{,}8 \le 36;$$
$$-36{,}8 < 1{,}6x \le -0{,}8;\ \ -23 < x \le -0{,}5.$$

745. Глядя на варианты ответов, можно заподозрить, что точка $\dfrac{10}{3}$ связана с областью определения левой части, и действительно, $1 - 0{,}3 \cdot \dfrac{10}{3} = 0$, так что область определения данного неравенства $x < \dfrac{10}{3}$, а значит, варианты 1—2 отпадают.

А точка -50 тоже появилась не случайно и, скорее всего, обращает это неравенство в равенство: $1 - (-15) = 16$, а $\log_2 16 = 4$, и следовательно, правильный ответ — третий.

746. Подставим в заданное неравенство явно важные для него, судя по представленным на выбор вариантам, числа 2,2 и $-2{,}2$. Первое из них не входит в область определения неравенства, так как $1{,}1 + 0{,}5 \cdot 2{,}2 = 0$, и она, очевидно, задается неравенством $x < 2{,}2$, а для второго имеем неравенство $\log_{2,2}(1{,}1 + 0{,}5 \cdot 2{,}2) = \log_{2,2} 2{,}2 = 1$. Благодаря первому утверждению, отвергаются варианты 1 и 3, благодаря второму — вариант 2.

747. Так как $1{,}8 - 0{,}2 \cdot 8 = 0{,}2 = \dfrac{1}{5}$, то 8 — решение данного неравенства, и поскольку функция $y = \log_5(1{,}8 - 0{,}2x)$ убывающая как возрастающая от убывающей (см. Компендиум), то решениями являются значения $x \le 8$, входящие в его область определения. Но промежуток 1 не содержит 8, а промежутки 3 и 4 — содержат значения x, большие 8. Поэтому правильным является вариант 2.

748. В представленных вариантах ответов особую роль играют числа 2,5 и $2\dfrac{6}{7}$ и подставив эти значения в данное выражение, получим:

$$\log_2(2 - 0{,}7 \cdot 2{,}5) = \log_2\left(2 - \frac{7}{10} \cdot \frac{5}{2}\right) = \log_2\left(2 - \frac{7}{4}\right) = \log_2 \frac{1}{4} = -2,$$

а выражение $\log_2\left(2 - 0{,}7 \cdot \dfrac{20}{7}\right)$ не имеет смысла. Поэтому 2,5 — решение неравенства, а область определения неравенства задается условием $x < 9$, и поскольку функция $y = \log_2(2 - 0{,}7x)$ — убывающая, то множество решений неравенства — промежуток $x \le 2{,}5$, представленный в варианте 3.

749. Число $\dfrac{3\pi}{2}$ не является корнем данного уравнения, так как его синус равен -1, 0 также не является его корнем, выражение arcsin 4 просто не имеет смысла — аргумент арксинуса не может быть больше 1, таким образом, правильный ответ — четвертый.

Комментарий. «Честное» решение будет проще, если его технично провести: отметить, что из данного уравнения сразу же следует, что $\sin x$ равен 1 или 4, откуда ясно, что правильный ответ — четвертый.

750. При замене $\cos x$ на y получается квадратное уравнение с дискриминантом $9-40<0$, поэтому данное уравнение не имеет решений.

751. Ясно, что вариант 2 не имеет смысла — нет угла, у которого синус равен 2, число 0 из варианта 3 не является корнем уравнения, $\sin\frac{\pi}{2}=-1$, т.е. $-\frac{\pi}{2}$ — корень уравнения, а поскольку он больше, чем $-\frac{3\pi}{2}$, то правильным является вариант 1.

752. При $n=0$ в предложенных вариантах имеем соответственно углы $\frac{\pi}{2}$, 0, 0, π, но $\frac{\pi}{2}$ не принадлежит области определения уравнения — при $x=\frac{\pi}{2}$ тангенс не определен, при $x=0$ уравнение превращается в равенство $1+1=0$, и значит, варианты 1, 2 и 3 — неправильные.

753. При $n=0$ в предложенных вариантах имеем соответственно углы $-\frac{\pi}{2}$, 0, $-\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4}$, но $-\frac{\pi}{2}$ не принадлежит области определения уравнения — при этом значении x тангенс не определен, при $x=0$ уравнение превращается в неверное равенство $0=1$, при $x=-\frac{\pi}{4}$ получаем верное равенство $-2=-2$, и наконец, при $x=\frac{\pi}{4}$ левая часть уравнения положительна, тогда как правая отрицательна. Следовательно, правильным является вариант 3.

754. В углах трех последних серий синус равен 0, так что правильный вариант ответа — первый.

755. При $n=0$ в предложенных вариантах имеем соответственно углы $\frac{\pi}{2}$, 0, 0, π, но $\frac{\pi}{2}$ не принадлежит области определения уравнения — при $x=\frac{\pi}{2}$ тангенс не определен, при $x=0$ уравнение превращается в равенство $1+1=0$, и значит, варианты 1, 2 и 3 — неправильные.

756. При $n=0$ в предложенных вариантах имеем соответственно углы $-\frac{\pi}{2}$, 0, $-\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4}$, но $-\frac{\pi}{2}$ не принадлежит области определения уравнения — при этом значении x тангенс не определен, при $x=0$ уравнение превращается в неверное равенство $0=1$, при $x=-\frac{\pi}{4}$ получаем верное равенство $-2=-2$, и наконец, при $x=\frac{\pi}{4}$ левая часть уравнения положительна, тогда как правая отрицательна. Следовательно, правильным является вариант 3.

757. При $n=0$ в предложенных вариантах имеем соответственно углы $\frac{\pi}{2}$, 0, 0, π, но последние три значения x не принадлежат области определения уравнения — при $x=0$ в знаменателе в правой части уравнения стоит 0, значит, варианты 2, 3 и 4 — неправильные.

Комментарий. В условии задачи есть подвох — выделена 1 и если мы, пользуясь тождеством $1+\operatorname{ctg}^2 x=\frac{1}{\sin^2 x}$, перейдем к уравнению $3\sin x=3$ и не заметим, что при этом расширилась область определения уравнения, то получим именно неправильный вариант ответа 1.

758. Левая часть данного уравнения является нечетной функцией, откуда следует, что при двух противоположных значениях x она не может принимать одно и тоже ненулевое значение. Поэтому варианты ответа 2 и 3 — неправильные: в соответствующих сериях содержатся углы $\pm\frac{\pi}{6}$ и $\pm\frac{\pi}{8}$.

Левая часть этого уравнения — по формуле синуса разности — равна $\sin\left(\frac{3x}{2}-\frac{5x}{2}\right)$, поэтому уравнение можно представить в виде $\sin x = \frac{1}{2}$. Подставив $n = 0$ во все варианты ответов, получим соответственно углы $\frac{\pi}{6}$, $\pm\frac{\pi}{6}$, $\pm\frac{\pi}{8}$ и $\frac{\pi}{24}$, а поскольку из этих углов только $\frac{\pi}{6}$ имеет синус, равный $\frac{1}{2}$, то варианты 2, 3 и 4 — неправильные.

759. Варианты 2 и 4 отличаются единственной точкой $\frac{4}{7}$, а при этом значении x $7x+3=-1$, так что $y=0$, а поскольку функция $y=5^{7x+3}-\frac{1}{5}$ возрастающая, то она неотрицательна при $x \geq \frac{4}{7}$, т.е. правильным ответом является второй.

Комментарий. «Честное» решение несложно, и в нем надо знать, но совсем не надо думать:

$$5^{7x+3}-\frac{1}{5} \geq 0,\ \ 5^{7x+3}-\frac{1}{5} \geq 0,\ \ 5^{7x+3} \geq 5^{-1},\ \ 7x+3 \geq -1,\ \ x \geq -\frac{4}{7}.$$

760. Варианты 2 и 4 отличаются единственной точкой –0,5, а $10\cdot(-0{,}5)+3=1$, так что $y=0$, а поскольку функция $y=5^{7x+3}-\frac{1}{5}$ возрастающая, то она неотрицательна при $x \geq -0{,}5$, т.е. правильным ответом является четвертый.

Комментарий. «Честное» решение даже проще и проводится устно: $10x+5 \geq 0,\ \ x \geq -\frac{1}{2}$.

761. $8x+5 \geq 0,\ \ x \geq -\frac{5}{8}$.

762. $\left(\frac{1}{4}\right)^{3x-2} \leq 1,\ \ 3x-2 \geq 0,\ \ x \geq \frac{2}{3}$.

763. $\left(\frac{1}{4}\right)^{1-3x} \leq 1,\ \ 1-3x \geq 0,\ \ x \leq \frac{1}{3}$.

764. $0{,}5^{0{,}5x-3} \leq 1,\ \ 0{,}5x-3 \geq 0,\ \ x \geq 6$.

765. Так как $\sqrt{3}$ не входит в область определения данной функции, то 2 и 4 — неправильные варианты. Число 0 тоже не входит в область определения, т.е. вариант 1 также неправильный.

766. Будем рассматривать значения x, при которых указанные варианты ответов «различаются», т.е. которые входят в одни интервалы, но не входят в другие. Самое простое значение $x=0$ входит в область определения, но содержится только в интервалах 1 и 2, так что остается выбрать лишь правильный из них. А эти интервалы различаются числом 5, входящим только в интервал 1, так что правильным является вариант 1.

767. Так как $3x^2-4x$ больше 1 при больших по модулю положительных и отрицательных значениях x, то в множество решений данного неравенства входят некоторые лучи — правый и левый, а таких вариантов два — 2 и 4. Но объединение 4 содержит точку 0, не входящую в область определения уравнения, так что правильным является вариант 2.

768. Так как функция $y=\log_{0,5}\left(25-x^2\right)$ — четная, то ее область определения симметрична относительно начала координат, и поскольку число 5 в нее не входит, то правильный ответ — четвертый.

769. Производная первой функции равна e^x, производная второй равна $e^x - 2x$, так что правильный вариант ответа — 2.

Комментарий. Разумеется, вычислять первообразную здесь несложно, но если уже указано 4 «кандидата» на эту роль, то естественно проверять их нужно с помощью дифференцирования. Кроме того, если бы вариант 2 стоял последним, его стоило бы рассмотреть раньше остальных, более сложных функций — отбрасывать неверные, точнее, маловероятные варианты ответов совсем не обязательно в том порядке, в котором они написаны.

770. Чтобы при дифференцировании $F(x)$ появился x^2, надо, чтобы в $F(x)$ содержался x^3 с некоторым коэффициентом, и следовательно, правильный ответ либо 1, либо 3, и дифференцирование показывает, что правильный ответ — третий.

Комментарий. Можно, что в определенной степени неожиданно, применить достаточное условие возрастания: каждая из функций 1, 2 и 4 на промежутке $(0, +\infty)$ возрастает как *возрастающая минус убывающая*, и их производные положительны, а данная функция отрицательна, например, при $x = \frac{1}{10}$, так что соответствующие варианты ответов — неправильные. В этом решении не применяется не только интегрирование, но и дифференцирование.

771. Так как в варианте 1 производная равна 1 плюс что-то еще, перейдем к варианту 2, где производная оказывается равна именно данной функции.

Комментарий. Если очень не хочется вспоминать производную функции $y = \frac{1}{x}$, что все же пришлось сделать в приведенном решении, то можно, как и в задаче 770, использовать свойство монотонности: каждая из функций 1, 3 и 4 на промежутке $(0, +\infty)$ возрастает как *возрастающая минус убывающая*, и их производные положительны, а данная функция отрицательна, например, при $x = \frac{1}{2}$, так что соответствующие варианты ответов — неправильные.

772. В варианте 1 производная есть $3e^x - 1$, в варианте 2 равна $3e^x$, в варианте 3 равна $e^x - 2x$, а в варианте 4 равна данной функции.

Комментарий. Если действовать грамотно, то для данной функции в кандидатах на ее первообразную нужно искать 3 перед e^x и слагаемое x^2, что сразу же приводит к варианту 4. Правда, экономия здесь в общем-то минимальная.

773. В соответствии с указанием, при интегрировании синуса получаем $-\cos x$, а при интегрировании косинуса получаем $\sin x$, так что из представленных в вариантах ответа функций первообразной данной функции является функция 2.

774. В соответствии с указанием, при интегрировании синуса получаем $-\cos x$, а при интегрировании слагаемого 4 получаем $4x$, так что правильный ответ — второй.

775. Подсчитав сначала $F(0)$ во всех вариантах ответа, получим, что это значение равно соответственно 2, –1, –1 и 1, т.е. остается рассматривать только варианты 2 и 3, а для выбора между ними возьмем производную, причем начнем с функции 3 она выглядит проще: ее производная равна $e^x + \sin x$, так что именно этот вариант — правильный.

776. В варианте 1 производная функции F равна $e^x + 12x^3$, в варианте 2 производная равна $e^x + 4x^3$ и $F(0) = -1$, так что вариант 2 — правильный.

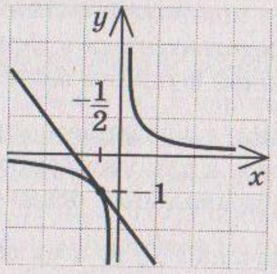
Комментарий. Отметим, что в этой задаче значения $F(0)$ во всех случаях равны –1, так что приходится решать задачу почти «честно», почти — потому что мы все-таки ищем не первообразную, а производную, что проще.

777. График функции F проходит через точку $M(0, 24)$, если $F(0) = 24$, а это равенство выполняется только в вариантах 2 и 4. При этом в варианте 2 производная функции F равна $2e^x$, т.е. этот вариант — правильный.

778. График функции F проходит через точку $M(0, -9)$, если $F(0) = -9$, а поскольку $\cos 0 = 1$, то это выполняется только в вариантах 3 и 4. Но в варианте 3 производная функции F равна $12x^5+\sin x$, так что этот вариант — неправильный.

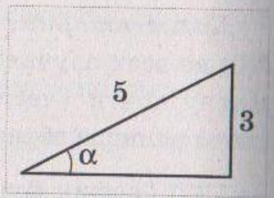
779. Построив график заданной функции (см. рис.) и проведя к нему касательную в заданной точке, сразу же видим, что правильным является вариант 2.

780. Так как $\arcsin\left(-\frac{3}{5}\right)=-\arcsin\frac{3}{5}$ (см. Компендиум), то



$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\arcsin\left(-\frac{3}{5}\right)\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{3}{5}\right)=\cos\left(\arcsin\frac{3}{5}\right),$$

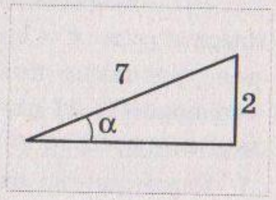
а это выражение легко вычислить с помощью прямоугольного треугольника (см. рис.): в треугольнике угол α — это arcsin, и так как второй катет равен 4, то $\cos\alpha=\frac{4}{5}$, т.е. заданное выражение равно 4.



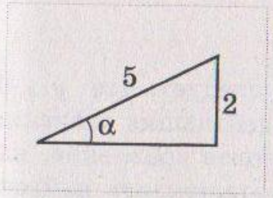
781. Так как $\operatorname{arctg}\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}$, то его косинус равен $\frac{1}{2}$, а заданное выражение равно 5.

782. В прямоугольном треугольнике с катетом 2 и гипотенузой 7 (см. рис.) угол, противолежащий этому катету,

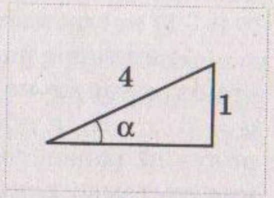
есть $\arcsin\frac{2}{7}$, а поскольку второй катет равен $\sqrt{49-4}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$, то тангенс этого угла равен $\frac{2}{3\sqrt{5}}$, так что искомое значение равно 2.



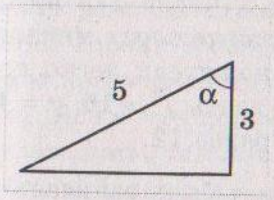
783. В прямоугольном треугольнике с катетом 2 и гипотенузой 5 (см. рис.) угол, противолежащий этому катету, есть $\arcsin\frac{2}{5}$, а поскольку второй катет равен $\sqrt{21}$, то тангенс этого угла равен $\frac{2}{\sqrt{21}}$, так что искомое значение равно 2.



784. В прямоугольном треугольнике с катетом 1 и гипотенузой 4 (см. рис.) угол, противолежащий этому катету, есть $\arcsin\frac{1}{4}$, а поскольку второй катет равен $\sqrt{15}$, то тангенс этого угла равен $\frac{1}{\sqrt{15}}$, так что искомое значение равно 1.



785. В прямоугольном треугольнике с катетом 3 и гипотенузой 5 (см. рис.) угол, прилежащий к этому катету, есть $\arccos\frac{3}{5}$, а поскольку второй катет равен 4, то тангенс этого угла равен $\frac{4}{3}$, так что искомое значение равно 4.



786. Из первого уравнения системы получаем, что $x^2\le 25$, так что $x<5<6$, и второе уравнение системы переписываем в виде $y+5=6-x$, или $x+y=1$. Так как (a,b) — решение, то $a+b=1$.

787. Возьмем $y = 1$. Тогда из первого уравнения системы следует, что $x = 1$, и при подстановке этих значений во второе уравнение получаем верное равенство $1 + \sqrt{4} = 3$, так что пара (1, 1) является решением системы. Значит, искомое частное равно 1.

Решение: из первого уравнения системы получаем, что $x \le 2$, так что $x\sqrt{(x-3)^2} = |x-3| = 3 - x$, второе уравнение системы переписываем в виде $y + 3 - x = 3$, т.е. $y = x$. Так как (a, b) — решение, то $\frac{a}{b} = 1$.

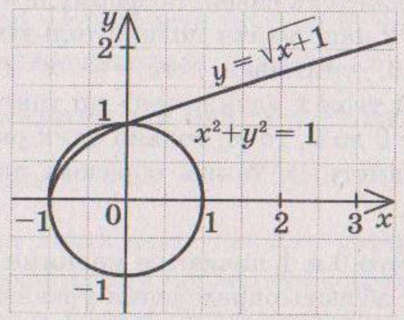
788. Из второго уравнения системы следует, что $y \le 0$, а из первого — что $y \ne 0$, и испытаем небольшие значения y: будем подставлять эти значения в первое уравнение, находить соответствующее значение x и подставлять найденную пару во второе уравнение.

При $y = -1$ $x = -4$, и при этих значениях второе уравнение превращается в равенство $-1 + \sqrt{49} = 0$, так что пара $(-4, -1)$ не удовлетворяет второму уравнению. При $y = -2$ $x = -1$, и второе равенство принимает вид $-2 + \sqrt{16} = 0$, т.е. эта пара также не удовлетворяет второму уравнению. При $y = -3$ $x = 0$, и после подстановки во второе уравнение мы получим равенство $-3 + \sqrt{9} = 0$, так что пара $(0, -3)$ решение системы, искомая разность равна 3.

789. Из первого уравнения системы получаем равенство $x = y^2$ и после подстановки во второе получаем уравнение $y^4 + y^2 = 272$ или $y^2(y^2 + 1) = 272$, т.е. число 272 представлено в виде произведения двух положительных множителей, отличающихся на 1. А такие множители легко подобрать: $272 = 16 \cdot 17$ и поэтому можно взять $y^2 = 16$, $y = 4$, тогда $x = 16$, так что искомая разность равна 12.

790. Первое уравнение системы может быть записано в виде $y = \sqrt{x+1}$ $(x \ne -1)$, а второе уравнение означает, что $x^2 + y^2 = 1$. Естественно проверить случаи, когда x и y равны либо 0, либо ± 1. При $x = 0$ мы получаем $y = 1$, так что искомая сумма равна 1.

Комментарий. Можно использовать взаимным расположением графиков функции $y = \sqrt{x+1}$ и окружности $x^2 + y^2 = 1$. График функции $y = \sqrt{x+1}$ (см. рис.) пересекает полуокружность $x^2 + y^2 = 1\,(y \ge 0)$ в двух точках — $(-1, 0)$ и $(0, 1)$ и поскольку $x \ne -1$, то $(0, 1)$ — единственное решение данной системы, так что $a = 0$, $b = 1$, $a + b = 1$.



791. Значение $y = 1$ не подходит, так как $x = 13$ не удовлетворяет первому уравнению, а при $y = 4$ из второго уравнения следует, что $x = 25$, так что полученная пара (25, 4) является решением системы, искомая разность равна 21.

792. Функция $y = 25^{3{,}5x+3} - \frac{1}{125}$ — возрастающая, и может быть равна 0 только в одной точке, причем соответствующий корень уравнения лежит в таком интервале, где в левом конце функция отрицательна, а в правом положительна. Ясно, что положительное число не может быть корнем уравнения, так как степень с положительным показателем числа, большего 1, больше 1. Значит, варианты ответов 3 и 4 отпадают. Так как

$$f(0) = 25^3 - \frac{1}{125} > 0,\; f(-1) = 25^{-0{,}5} - \frac{1}{125} = \frac{1}{\sqrt{25}} - \frac{1}{125} < 0,$$

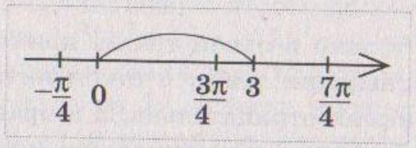
то правильный вариант — второй.

793. Так как левая часть данного уравнения задает четную функцию и 0 не является его корнем, то достаточно найти число положительных корней. Ясно, что корни уравнения $4 - x^2 = 1$ являются корнями этого уравнения — первый множитель этому не помешает, так как имеет смысл при любом x, и следовательно, уравнение уже имеет один положительный корень «за счет» второго множителя.

Первый множитель равен, по формуле косинуса двойного угла, $\cos x$, и надо найти положительные корни уравнения $\cos x = 0$, учитывая, что $4 - x^2 > 0$, т.е. $x^2 < 4$, $0 < x < 2$. Когда угол x «движется» по тригонометрической окружности от 0 до 2, то он только один раз пробегает вертикальный диаметр, и таким образом, данное уравнение имеет 4 корня.

794. Ясно, что 0 и 1 являются корнями данного уравнения, и так как область определения уравнения есть отрезок [0, 1], то в этом промежутке и синус, и косинус положительны, и первый множитель на нем не обращается в 0.

795. Ясно, что 0 и 3 являются корнями данного уравнения и поскольку область определения уравнения есть отрезок [0, 3], то в этом промежутке первый множитель обращается в 0 только в точке $\frac{3\pi}{4}$ (см. рис.), и значит, уравнение имеет 3 корня.



796. Подкоренное выражение обращается в 0 при $x = 0$ и $x = 3$, и положительно при $0 < x < 3$. Первый множитель в уравнении равен $\cos 2x$, и когда угол $2x$ «движется» по тригонометрической окружности от 0 до 6, то он «пробегает» вертикальные диаметры $\frac{\pi}{2}$ и $\frac{3\pi}{2}$, так что этот множитель

обращается в 0 при $x = \frac{\pi}{4}$ и при $x = \frac{3\pi}{4}$, т.е. данное уравнение имеет 4 корня.

797. Подкоренное выражение обращается в 0 при $x = 0$ и $x = 5$ и положительно при $0 < x < 5$. Первый множитель в уравнении равен $\sin 2x$, и когда угол $2x$ «движется» по тригонометрической окружности от 0 до 6, то он «пробегает» только один горизонтальный диаметр $x = \pi$, так что этот множитель обращается в 0 при $x = \frac{\pi}{2}$, т.е. данное уравнение имеет 3 корня.

798. Так как левая часть данного уравнения — четная функция и 0 является его корнем, то достаточно найти число положительных корней. Тогда второй множитель в левой части определен при $1 - x^2 > 0$, т.е. при $0 < x < 1$, а на этом промежутке синус и косинус больше 0, так что первый множитель равен 0 при $\sin x = \cos x$, а это уравнение на интервале $(-1, 1)$ имеет корень $\frac{\pi}{4}$ (ясно, что $\frac{\pi}{4} < 1$).

799. Так как левая часть данного уравнения задает четную функцию и 0 не является его корнем, то достаточно найти число положительных корней. Ясно, что корни уравнения $4 - x^2 = 1$ являются корнями данного уравнения — первый множитель этому не помешает, так как имеет смысл при любом x, и следовательно, уравнение уже имеет один положительный корень за счет второго множителя.

Первый множитель равен, по формуле косинуса двойного угла, $\cos x$, и требуется найти положительные корни уравнения $\cos x = 0$, учитывая, что $4 - x^2 > 0$, т.е. $x^2 < 4$, $0 < x < 2$. Когда угол x «движется» по тригонометрической окружности от 0 до 2, то он только один раз пробегает вертикальный диаметр, и таким образом, данное уравнение имеет 4 корня.

800. Ясно, что 0 и 1 являются корнями данного уравнения, и так как область определения уравнения есть отрезок [0, 1], то в этом промежутке и синус, и косинус положительны, и первый множитель на нем не обращается в 0.

801. Ясно, что 0 и 3 являются корнями данного уравнения, и поскольку область определения уравнения есть отрезок [0, 3], а в этом промежутке первый множитель обращается в 0 только в точке $\frac{\pi}{4}$, и значит, уравнение имеет 3 корня.

802. Подкоренное выражение обращается в 0 при $x = 0$ и $x = 3$ и положительно при $0 < x < 3$. Первый множитель в уравнении равен $\cos 2x$, и когда угол $2x$ «движется» по тригонометрической окружности от 0 до 6, то он пробегает вертикальные диаметры $\frac{\pi}{2}$ и $\frac{3\pi}{2}$, так что этот множитель обращается в 0 при $x = \frac{\pi}{4}$ и при $x = \frac{3\pi}{4}$, т.е. данное уравнение имеет 4 корня.

803. Подкоренное выражение обращается в 0 при $x = 0$ и $x = 5$ и положительно при $0 < x < 5$. Первый множитель в уравнении равен $\sin 2x$, и когда угол $2x$ «движется» по тригонометрической окружности от 0 до 10, то он «пробегает» три горизонтальных диаметра: $x = \pi$, $x = 2\pi$ и $x = 3\pi$, т.е. данное уравнение имеет $2 + 3 = 5$ корней.

804. Так как левая часть данного уравнения — четная функция и 0 является его корнем, то достаточно найти число положительных корней. Тогда второй множитель в левой части определен при $1 - x^2 > 0$, т.е. при $0 < x < 1$, а на этом промежутке синус и косинус больше 0, так что первый множитель равен 0 при $\sin x = \cos x$, а это уравнение на интервале $(-1, 1)$ имеет корень $\frac{\pi}{4}$ (ясно, что $\frac{\pi}{4} < 1$). Следовательно, данное уравнение имеет один положительный корень, а всего корней — 2.

805. Левая часть данного уравнения — произведение убывающих положительных функций, а в правой части стоит возрастающая функция, и поэтому имеет смысл попытаться подобрать корень. В выражение $360^{x+2} = \left(8 \cdot 9 \cdot 5\right)^{x+2}$ множитель 5 входит с показателем $x + 2$, а в левую часть — с показателем $9 - 3x$, и эти показатели равны, т.е. $x + 2 = 9 - 3x$, при $x = \frac{7}{4}$.

При этом значении x равны и показатели степеней у 2 и у 3:

$$13 - \frac{7}{4} = \frac{52 - 7}{4} = \frac{45}{4},\ 3\left(\frac{7}{4} + 2\right) = \frac{45}{4};$$

$$11 - 2 \cdot \frac{7}{4} = \frac{30}{4},\ 2\left(\frac{7}{4} + 2\right) = \frac{30}{4}.$$

806. Условие задачи имеет смысл только при $a > 0$, $a \neq 1$, и оно означает, что, уравнение $\log_a\left(2^x - 1\right) + \log_a\left(2^x - 7\right) = 1$ имеет ровно один корень. Функции $\log_a\left(2^x - 1\right)$ и $\log_a\left(2^x - 7\right)$ — обе возрастающие, а стало быть, их сумма также возрастающая, так что уравнение $\log_a\left(2^x - 1\right) + \log_a\left(2^x - 7\right) = 1$ не может иметь больше одного корня.

Заметим сразу же, что $a > 0$, $a \neq 1$. Сумма данных логарифмов равна 1, если произведение $\left(2^x - 1\right)\left(2^x - 7\right)$ равно a и оба сомножителя положительны. Если взять $b = 2^x - 1$, то следует выяснить, при каком a уравнение $b^2 - 6b = a$ имеет единственное положительное решение. Представив график функции $x^2 - 6x$ (она пересекает ось абсцисс в точках 0 и 6, видим, что при всяком $a > 0$ всякая горизонтальная прямая $y = a$ имеет с этим графиком единственную общую точку.

807. Так как

$$\sqrt{x^3 - 6y} = 3 - y \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 6y = y^2 - 6y + 9, \\ y \le 3, \end{cases}$$

откуда $x^3 = y^2 + 9$, и после подстановки во второе уравнение системы оно принимает вид $5\sqrt{x} = \sqrt{x^3}$, поскольку обе части этого уравнения неотрицательны, то его можно переписать в виде:

$$25x = x^3, \quad x^3 - 25x = 0,$$

откуда $x_1 = 0$, $x_2 = 5$, $x_3 = -5$. Корень -5 не входит в область определения системы, при $x = 0$ второе уравнение превращается в неверное равенство, так что остается только $x = 5$.

При $x = 5$ $y^2 + 9 = 125$, $y^2 = 116$, $y_{1,2} = \pm\sqrt{116} = \pm 2\sqrt{29}$. При этом $y_1 > 3$, так что y_1 не удовлетворяет первому уравнению исходной системы. А $y_2 < 3$, т.е. y_2 удовлетворяет вышенаписанной системе, а значит, и равносильному ей первому уравнению исходной системы, и поэтому пара $\left(5, -2\sqrt{29}\right)$ — решение этой системы.

808. Данная функция четная и рассмотрим $x > 0$. x^2 при этих x возрастает, $9 - x^2$ убывает, логарифм по основанию 0,3 возрастает при $x > 0$ (в своей области определения). Из четности данной функции следует, что она убывает при $x < 0$. Следовательно, наименьшее значение она принимает при $x = 0$, т.е. оно равно $g(0) = -2$.

812. Квадратный трехчлен $6x - x^2$ имеет вершину в точке с абсциссой $x = 3$ и отрицательный коэффициент при x^2, поэтому функция $y = 6x - x^2$ возрастает при $x \le 3$ и убывает при $x \ge 3$. Так как логарифм по основанию, меньшему 1, убывает, то он меняет характер монотонности функции, которая стоит под логарифмом, и значит, функция g, наоборот, убывает при $x \le 3$ и возрастает при $x \ge 3$, и поэтому свое наименьшее значение она принимает при $x = 3$, так что оно равно $g(3) = \log_{\frac{1}{3}} 9 = -2$.

814. Для убывания функции на всей числовой прямой достаточно, чтобы ее производная была отрицательна для всех $x \in \mathbf{R}$, а в нашем случае производная равна $f' = -3x^2 + mx - 5$, т.е. представляет собой квадратный трехчлен и удовлетворяет этому условию, если дискриминант $m^2 - 60 < 0$. Наибольшее целое решение этого неравенства есть 7.

815. Для возрастания функции на всей числовой прямой достаточно, чтобы ее производная была отрицательна для всех $x \in \mathbf{R}$. Так как производная равна $f' = 2e^{2x} \cdot x^2 + e^{2x} \cdot 2x + 2ae^{2x}$, то она удовлетворяет этому условию, если $x^2 + x + a < 0$ при всех $x \in \mathbf{R}$, т.е. этот квадратный трехчлен имеет отрицательный дискриминант $D = 1 - 4a$, или $a > \frac{1}{4}$. Наименьшее целое решение этого неравенства $a = 1$.

Можно рассуждать несколько иначе: слагаемое 3 на возрастание функции не влияет, мы его отбросим и рассмотрим функцию $g(x) = e^{2x}\left(x^2 + a\right)$. При любом $a < 0$ она обращается в 0 в точках $x_{1,2} = \pm\sqrt{a}$, а возрастающая функция не может принимать одно то же значение в двух точках, т.е. условию могут удовлетворять только $a \ge 0$.

Возьмем производную:

$$g'(x) = \left(e^{2x}\left(x^2 + a\right)\right)' = e^{2x} \cdot 2x + 2e^{2x}\left(x^2 + a\right) =$$
$$= 2e^{2x}\left(x^2 + x + a\right).$$

Следовательно, при $a > \frac{1}{4}$ производная положительна, функция возрастает, т.е. значения $a > \frac{1}{4}$ удовлетворяют условию и осталось рассмотреть только $a = 0$. Нетрудно видеть, что в этом случае производная дважды меняет знак и поэтому не является всюду возрастающей, так что решением задачи является число 1.

816. Для возрастания функции на всей числовой прямой достаточно, чтобы ее производная была всегда положительна. Так как производная равна $f' = e^x \cdot x^2 + e^x \cdot 2x + \frac{1}{4}a^2e^x$, то она удовлетворяет этому условию, если $x^2 + 2x + \frac{1}{4}a^2 < 0$ при всех $x \in \mathbf{R}$, т.е. этот квадратный трехчлен имеет отрицательный дискриминант $D = 4 - a^2$ или $a^2 > 4$. Наименьшее натуральное решение этого неравенства $a = 3$. Но этот ответ не является правильным — не забудем о том, что использованный нами признак является всего лишь достаточным условием, вспомнить хотя бы функцию $f = x^3$. Поэтому рассмотрим еще одно натуральное значение — $a = 2$. Так как $e^x \cdot x^2 + e^x \cdot 2x + e^x = e^{2x}\left(x^2 + 2x + 1\right)$ положительно везде, где не равно нулю, то при $a = 2$ данная функция возрастает на всей числовой прямой. Поэтому решением задачи является число 2.

817. Для убывания функции на всей числовой прямой достаточно, чтобы ее производная была отрицательна для всех $x \in \mathbf{R}$. Так как производная равна $f' = -e^x \cdot x^2 - e^x \cdot 2x - \frac{1}{9}b^2e^x$, то она удовлетворяет этому условию, если $-x^2 - 2x - \frac{1}{9}b^2 < 0$, т.е. $x^2 + 2x + \frac{1}{9}b^2 > 0$ при всех $x \in \mathbf{R}$. Поэтому дискриминант этого квадратного трехчлена должен быть отрицателен, $4 - \frac{4}{9}b^2 < 0$, $b^2 > 9$, а наименьшее натуральное решение этого неравенства $b = 4$. Однако проверка показывает, что при $b = 3$ значения производной $x^2 + 2x + 1$ неотрицательны, так что 3 — наименьшее натуральное значение b, при котором данная функция убывает на всей числовой прямой.

818. Для убывания функции на всей числовой прямой достаточно, чтобы ее производная была отрицательна для всех $x \in \mathbf{R}$. Так как производная равна $f' = -e^x \cdot x^2 - e^x \cdot 2x - 0{,}1m^2e^x$, то она удовлетворяет этому условию, если $-x^2 - 2x - 0{,}1m^2 < 0$, т.е. $x^2 + 2x + 0{,}1m^2 > 0$ при всех $x \in \mathbf{R}$. Поэтому дискриминант этого квадратного трехчлена должен быть отрицателен, $4 - 0{,}4m^2 < 0$, $m^2 > 10$, а наименьшее натуральное решение этого неравенства — число 4.

819. Для возрастания функции на всей числовой прямой достаточно, чтобы ее производная была всегда положительна. Так как производная равна $f' = 2axe^x + ax^2e^x + 5e^x$, то она удовлетворяет этому условию, если $ax^2 + 2ax + 5 > 0$ при всех $x \in \mathbf{R}$. Поэтому коэффициент a должен быть положительным, дискриминант этого квадратного трехчлена должен быть отрицателен, $4a^2 - 20a < 0$, а наименьшее натуральное решение этого неравенства — число 4. Но так как при $a = 5$ значение производной неотрицательно, что в этом случае функция также возрастает, так что наименьшим натуральным числом, удовлетворяющим условию задачи, является число 5.

820. Заметим прежде всего, что $a > 0$ и $a \neq 1$. Область определения $D(y)$ есть множество решений неравенства $\log_a\left(x - a - 2\right) \geq \log_a\left(ax + 1\right)$. Для решения этого неравенства рассмотрим два случая.

1. $a > 1$. Тогда это неравенство равносильно системе неравенств

$$x - a - 2 \geq ax + 1, \quad ax + 1 > 0;$$
$$\left(a - 1\right)x \leq -\left(a + 3\right), \quad ax + 1 > 0$$

и поскольку $a > 1$, то $D(y)$ определяется двойным неравенством:

$$-\frac{1}{a} < x \leq -\frac{a+3}{a-1}$$

Но правая часть этого неравенства отрицательна, так что $D(y)$ не содержит натуральных чисел, так что значения $a > 1$ не удовлетворяют условию задачи.

2. $0 < a < 1$. В этом случае неравенство $\log_a(x - a - 2) \geq$ $\geq \log_a(ax + 1)$ равносильно неравенству $0 < x - a - 2 \leq ax + 1$ или $a + 2 < x \leq \frac{a+3}{1-a}$, так что $D(y)$ есть промежуток $\left(a + 2, \frac{a+3}{1-a}\right]$. Заметим сразу же, что $a + 2 < 3$.

Выписав последовательность натуральных чисел, кратных 3 или 4: 3, 4, 6, 8, 9, 12; 15, 16, 18, 20, 21, 24; 27, 28, 30, 32, 33, 36; ... заметим, что промежуток $(a + 2, b]$, где $b = \frac{a+3}{1-a}$, содержит равное количество чисел, кратных 3 и кратных 4, только в двух случаях: когда $4 \leq b < 6$ (числа 3 и 4) и когда $8 \leq b < 9$ (числа 3, 4, 6 и 8), а при $b \geq 9$ он «приобретает» лишнее число, кратное 3, и в дальнейшем превышение кратных 3 над кратными 4 сохранится: по выписанной последовательности видно, что первое всегда появляется раньше второго.

Таким образом, число a удовлетворяет условию, если $4 \leq b < 6$ или $8 \leq b < 9$, и остается решить эти два неравенства:

$$4 \leq \frac{a+3}{1-a} < 6, \quad 4 - 4a \leq a + 3 < 6 - 6a,$$

$$5a \geq 1, \quad 7a < 2; \quad \frac{1}{5} \leq a < \frac{3}{7}.$$

$$8 \leq \frac{a+3}{1-a} < 9, \quad 8 - 8a \leq a + 3 < 9 - 9a,$$

$$9a \geq 5, \quad 10a < 6; \quad \frac{5}{9} \leq a < \frac{3}{5}.$$

821. Треугольник в основании пирамиды — прямоугольный, так как $6^2 + 8^2 = 10^2$. Равный наклон боковых ребер означает, что высота пирамиды проходит через центр окружности, описанной вокруг основания, а у прямоугольного треугольника этот центр лежит на середине гипотенузы. Так как углы наклона боковых ребер равны 45°, то высота

пирамиды равна половине гипотенузы, т.е. 5. Следовательно, утроенный объем пирамиды равен $24 \cdot 5 = 120$, а объем равен 40.

822. Высота пирамиды проходит через центр основания — это следует из равенства углов наклона боковых граней. Для нахождения площади боковой поверхности нужно найти апофему пирамиды, т.е. гипотенузу треугольника, составленного из этой апофемы, высоты пирамиды и отрезка, соединяющего их концы.

Иными словами, надо найти гипотенузу прямоугольного треугольника с катетом $\frac{3}{2}$ и прилежащим к нему углом, тангенс которого равен $\frac{4}{3}$. А $\frac{4}{3}$ — это тангенс большего острого угла «египетского» треугольника, так что этот треугольник подобен «египетскому», но его катет в 2 раза меньше, а значит, и гипотенуза в 2 раза меньше, т.е. равна 2,5.

Таким образом, искомая боковая поверхность имеет площадь $2 \cdot 3 \cdot 2{,}5 = 15$ — четыре удвоенных площади боковой грани.

823. Так как углы между боковыми ребрами и плоскостью основания равны, то и сами ребра равны. Каждое ребро вместе с высотой и своей проекцией на плоскость основания образует прямоугольный треугольник с углом, косинус которого равен $\frac{3}{5}$. Следовательно, этот треугольник подобен «египетскому», его меньший катет — половина диагонали основания, так что его длина равна 6. Тогда больший катет, т.е. высота пирамиды имеет длину 8, так что утроенный объем пирамиды равен $\left(6\sqrt{2}\right)^2 \cdot 8 = 72 \cdot 8$, а объем равен $24 \cdot 8 = 192$.

824. Высота грани, перпендикулярной основанию, является, как легко видеть, высотой данной пирамиды, и поэтому ее объем равен одной трети произведения площади основания на высоту, т.е. $\frac{1}{3} \cdot \frac{2^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 1$.

Раздел VI. КОМПЕНДИУМ

Общие замечания

Этот раздел предназначен для тех, кто хочет облегчить себе жизнь, приложив не слишком большие усилия для расширения своих знаний, относящихся к математической теории. Школьная программа по математике устроена таким образом, что очень многие вопросы в эту программу явным образом не входят — ведь она предназначена для всех, а не только для тех, кто собирается продолжить свое образование в вузе по специальностям, связанным с математикой.

Но таким учащимся нужно уметь решать значительно более сложные задачи, чем те, которые включены в так называемый стандарт школьного математического образования — совершенно примитивные, и для решения этих более сложных задач учащиеся вынуждены самостоятельно придумывать способы решения, формулы и приемы рассуждений, усваивать их на дополнительных занятиях — на подготовительных курсах или с репетитором.

При этом никто не может сказать, что, включая те или иные задачи в варианты вступительных экзаменов, вузы нарушают программу для поступающих — для решения этих задач вполне достаточно знаний теории в пределах этой программы, но трудность таких задач для вас может существенно уменьшиться, если вы знаете чуть больше, чем упомянуто в официальных материалах для поступающих в вузы.

Приведем два примера. Пусть требуется: *Найти наименьший период функции* $y = 4\cos^3 x - 3\cos x$. Ясно, что число 2π является периодом этой функции, но ниоткуда не следует, что этот период — наименьший. И совсем неясно, что делать дальше. Но если вы узнаете в этой функции косинус тройного угла $y = \cos 3x$, то ответ очевиден — ее наименьший период равен, как известно, $\frac{2\pi}{3}$.

В то же время формула косинуса тройного угла не входит ни в школьную программу, ни в программу для поступающих в вузы, однако нельзя сказать, что данная задача

выходит за их пределы, поскольку и в рамках этих программ она вполне доступна для активного, мыслящего ученика. В самом деле, можно провести, например, следующие несложные преобразования:

$$4\cos^3 x - 3\cos x = \cos x\left(4\cos^2 x - 3\right) = \cos x\left(2\cos 2x + 2 - 3\right) =$$
$$= 2\cos 2x \cdot \cos x - \cos x = \cos 3x + \cos x - \cos x = \cos 3x,$$

и задача решена.

Сколько времени потребуется вам для решения следующей задачи с выбором ответа?

Какая из функций имеет период $\frac{2\pi}{3}$?

1. $y = 4\cos^3 x - \cos x$;
2. $y = 4\cos^3 x - 3\cos x$;
3. $y = 4\cos^3 x - 5\cos x$;
4. $y = 4\cos^3 x - 7\cos x$?

Секунда, если вы знаете формулу косинуса тройного угла, и более, если вы ее не знаете.

Второй пример.

Как выяснить, *простым или составным является число вида 1000...01, в котором между единицами стоит четное число нулей?*

По своему содержанию эта задача относится к 5—6 классам, но тогда вы таких задач, конечно, не решали, однако и сейчас далеко не каждый из вас сможет хотя бы приступить к ее решению.

И если вы еще не совсем забыли элементарную математику — связь между представлением натуральных чисел в позиционной системе счисления и с помощью разрядных слагаемых и знаете, что число 100...000 с k нулями в конце равно 10^k, то заданное в условии задачи число можно записать в виде 1000...00 + 1, где после 1 стоит нечетное число нулей, и следовательно, данное число равно $10^{2n-1} + 1$, где n — некоторое натуральное число.

Теперь задача стала короче, но стала ли она для вас проще? Если вы знаете, что сумма двух степеней с одинаковым нечетным показателем делится на сумму оснований, то задача уже решена, но знать этот факт вы, конечно, не обязаны — он не входит в школьную программу.

Самое интересное состоит в том, что по содержанию, как ни странно, решение этой задачи вовсе не выходит за пределы школьной программы. Так, вы обязаны знать формулу суммы кубов $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ и уметь сделать из нее простейший вывод: сумма кубов двух натуральных чисел делится на сумму этих чисел.

Но если вы интересуетесь математикой, выбрали соответствующий вуз, то экзаменаторы могут надеяться, что вы видите структуру этой формулы, сумеете написать аналогичную формулу, например, для пятых степеней:

$$a^5 + b^5 = (a+b)(a^4 - a^3 b + a^2 b^2 - ab^3 + b^4),$$

обобщить этот факт и на произвольные нечетные степени:

$$a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a+b)(a^{2n} - a^{2n-1} b + a^{2n-2} b^2 - \ldots - a^2 b^{2n-2} - ab^{2n-1} + b^{2n}).$$

А из этой формулы при $a = 10$, $b = 1$ моментально следует, что $10^{2n-1} + 1$ делится на 11.

Но еще проще — в одну секунду — данная задача решается с помощью признака делимости на 11, действительно не входящего в программу, но столь простого, что не знать его может оказаться себе дороже — вы будете вынуждены искать более сложное решение — вспоминать или выводить, например, рассмотренную внепрограммную формулу.

Впрочем, эта формула применяется и для решения многих других задач, так что мы к ней еще вернемся. Отметим, что она входит в программу классов с углубленным изучением математики, так что простому учащемуся имеет смысл уравнять себя в этом отношении с «углубленщиками» — не так уж эта формула сложна. Нельзя не добавить при этом, что — несмотря ни на что — в вузе будут считать, что студенты эту формулу конечно же знают.

Перейдем к конкретным дополнительным вопросам теории, повторив еще раз, что их знание не обязательно, но может существенно облегчить вам решение многих задач. Их

лучше освоить в школе, поскольку лекторы в вузе могут даже и не подозревать, что студенты в школе их просто не слышали. Более того, терминология лектора может оказаться несколько иной, чем та, к которой вы привыкли в школе, а ваша школьная терминология — это то, что выбрали из математического языка авторы вашего учебника и ваш учитель математики.

Утверждение, что математический язык совершенно однозначен, что в математике все говорят абсолютно одинаково, — это не более чем миф, и если вы посещаете, скажем, подготовительные курсы и проявите к вопросам терминологии побольше внимания, то определенные расхождения в терминологии в ряде вопросов скорее всего обнаружите. Например, математики школ и вузов никак не могут договориться об области определения функции $y = x^x$ и о том, считать ли число -1 корнем уравнения $x^x = -1$.

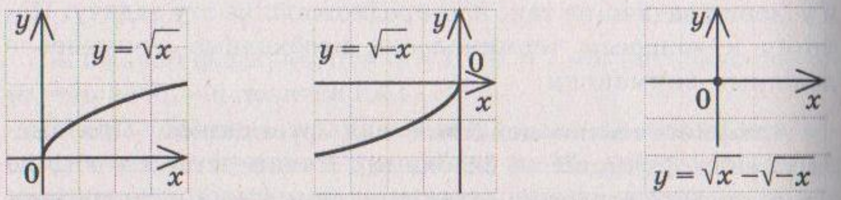
Между тем все это может принести большие неприятности — например, когда вы истолкуете какой-нибудь термин в условии задачи не так, как предложившие эту задачу. Поэтому к вопросам терминологии необходимо отнестись с должным вниманием.

Арифметические действия над функциями. При рассмотрении функций за скобками, в тени остается обычно много тонких вопросов, относящихся к самой сути математики — к логике рассуждений. Эти вопросы относятся к так называемым крайним случаям, где математическая, логическая ситуация становится парадоксальной, но неминуемо всплывают, если к доказательствам теорем и к решениям задач отнестись более внимательно, и именно с логической точки зрения.

Вы знаете, что сумма двух возрастающих функций является возрастающей функцией, и доказательство этого утверждения обычно проводят примерно следующим образом: «Если функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ возрастают, т.е. при любых $a < b$ выполняются неравенства $f(a) < f(b)$ и $g(a) < g(b)$, а эти два неравенства можно сложить: $f(a) + g(a) < f(b) + g(b)$, а это и означает, что функция $y = f(x) + g(x)$ — возрастающая».

Все ли в этом доказательстве логически чисто? Один пробел, можно сказать, бросается в глаза — конечно, о числах a и b надо было сказать, что оба они принадлежат областям определения обеих данных функций. А при этом добавлении в связи с этим доказательством вроде бы и не остается никаких проблем.

Но, задумавшись об области определения, следует задать себе вопрос, а что будет, если таких двух чисел a и b не существует, если их области определения не имеют общих точек или только одну общую точку? Например, функция $y = \sqrt{x}$ — возрастающая (см. рис. а) (напомним, что функцию называют просто возрастающей, если она возрастает на своей области определения), и точно так же возрастающей является функция $y = -\sqrt{-x}$ — (см. рис. б), но сумма этих функций $y = \sqrt{x} - \sqrt{-x}$ — определена только в точке $x = 0$ — (см. рис. в), и считать эту функцию возрастающей нельзя.



а) б) в)

Ситуация может быть еще хуже: сумма функций $y = \sqrt{x}$ и $y = \sqrt{-x-1}$, т.е. функция $y = \sqrt{x} + \sqrt{-x-1}$ вообще не определена ни в одной точке, но, согласно доказанному утверждению, является возрастающей. Возникает дилемма: или согласиться с этими выводами и признать доказательство утверждения о сумме возрастающих функций правильным, или, наоборот, «подправить» эту теорему, наложив на функции дополнительные ограничения — например, сформулировать ее так: «Если две функции возрастают на некотором промежутке, то и их сумма возрастает на этом промежутке».

С точки зрения логики второй вариант выхода из затруднений будет проще, но с точки зрения математики — сложнее, поскольку для применения этой теоремы прежде всего придется изучать области определения заданных функций, а это не совсем удобно, не всегда просто и, главное, не всегда возможно.

В то же время первый вариант, где приходится признать возрастающими «странные» функции, определенные только в одной и даже ни в одной точке, на самом деле вполне осмыслен, хотя и несколько парадоксален, так как противоречит интуитивным представлениям о возрастании функций. Однако в том и сущность крайних случаев — интуиции они, как правило, противоречат, но для математики разумное решение соответствующих проблем в крайних случаях, напротив, чрезвычайно удобно, и к ним нетрудно привыкнуть, как вы без труда смирились с одним из них: множество может не содержать ни одного элемента, так почему же его все же называют множеством — задайте этот вопрос любому человеку, далекому от математики.

Взаимно простые числа. Два натуральных числа называют ***взаимно простыми***, если единственным их общим делителем является 1, или, что то же самое, их наибольший общий делитель равен 1. Учитывая основную теорему арифметики, можно сказать, что два натуральных *числа взаимно просты тогда и только тогда, когда они не имеют общих простых делителей.*

Заметьте, например, что числа 4 и 9 взаимно просты, но по отдельности ни одно из них не является простым. А число 1 взаимно просто с любым числом, в том числе и с самим собой.

Для этого определения совершенно несущественно, что чисел только два — оно буквально переносится на любое количество натуральных чисел. Например, числа 4, 6, 9 взаимно просты, хотя никакие два из них взаимно простыми, очевидно, не являются.

Свойство взаимной простоты переносится и на множество целых чисел. При этом исходное определение — для натуральных чисел — естественным образом корректируется:

целое число всегда имеет два делителя — 1 и –1, так что два целых числа называются взаимно простыми, если их общими делителями являются только 1 и –1.

Зато второй вариант определения сохраняется буквально: *два целых числа взаимно просты тогда и только тогда, когда они не имеют общих простых делителей*.

Отметим также, что иногда встречается не совсем аккуратная формулировка типа «два числа — натуральных или целых — называются взаимно простыми, если они не имеют общих делителей». В этом случае как бы забывается о 1 и –1. Такая «забывчивость» оправдана тем, что 1 и –1 — *тривиальные* делители, они всегда есть, и эту мелочь можно для краткости лишь подразумевать.

Очень полезно для решения задач следующее достаточно очевидное утверждение: *всякое простое число p взаимно просто с любым числом, которое не делится на p*.

Напомним, что целое число называют простым, если простым числом является его модуль — натуральное число. Такое обобщение школьного понятия простого числа вполне естественно: ведь главное — это возможность разумного, *нетривиального* разложения числа на множители, а с этой точки зрения числа, скажем, 5 и –5 вполне равноправны: разложение $-5=(-1)\cdot 5$ неинтересно, неразумно, *тривиально*.

Для взаимно простых целых чисел чрезвычайно важным и полезным с точки зрения задач является следующий *критерий взаимной простоты* двух целых чисел: *целые числа a и b взаимно просты тогда и только тогда, когда существуют такие целые числа u и v, что $au + bv = 1$.*

Это свойство, однако, явно неверно, если говорить только о натуральных числах: очевидно, не существует таких натуральных чисел u и v, что $2u + 3v = 1$.

На основании именно этого свойства можно доказать — независимо от основной теоремы, *что если произведение двух целых чисел делится на простое число p, то хотя бы одно из этих чисел делится на p*. В самом деле, если a не делится на p, то a и p взаимно просты, а тогда для некоторых u и v выполняется равенство $au + pv = 1$, откуда $abu + bpv = b$, так что b делится на p.

Более того, это утверждение в действительности является главным для доказательства основной теоремы арифметики.

В то же время доказательство самого критерия взаимной простоты не то чтобы сложно, но довольно громоздко, и основывается на *алгоритме Евклида* для нахождения наибольшего общего делителя двух натуральных или целых чисел. Применение этого алгоритма вы уже в действительности видели в частных случаях, хотя сам термин и не произносился.

Малая теорема Ферма. Эта теорема чрезвычайно полезна для решения задач на остатки степеней, и хотя она является вполне серьезной теоремой из теории чисел и не входит в школьный курс, ее доказательство может быть проведено на нормальном школьном уровне. Оно может быть проведено различными способами, и одно из самых простых доказательств опирается на *формулу бинома, или бинома Ньютона,* которая в настоящее время в школьную программу не входит, но включена в новые стандарты для будущего *профильного курса* математики, который, по существу, будут изучать все, кто собирается получать высшее образование в вузах, требующих более глубокой математической подготовки по сравнению с другими учащимися.

Формулировка малой теоремы Ферма очень проста: *если p — простое число, то для любого натурального a разность $a^p - a$ делится на p.*

Можно ее и иначе сформулировать: *если p — простое число, то для любого натурального a, не делящегося на p, разность $a^{p-1} - 1$ делится на p.*

Иными словами, если p — простое, то остаток от деления степени a^{p-1} на p равен 1. Поэтому при вычислении остатка от деления степени 34^{745} на 13 мы можем не только сразу же уменьшить основание степени до 8 — остатка от деления 34 на 13, но заметив, что 8^{12} при делении на 13 дает остаток 1, записать далее: $8^{745} = 8^{12\cdot 62+1} = 8^{12\cdot 62}\cdot 8$, поэтому искомый остаток равен 8.

Очень удобно использовать эту теорему Ферма при решении задач с выбором ответа — правильный ответ вы всегда сможете быстро получить, а никаких доказательств при решении таких задач не требуется. Например, в задаче:

Какое из чисел при делении на 17 дает остаток 13?

1. 35^{641} **2.** 96^{514} **3.** 81^{332} **4.** 47^{173}

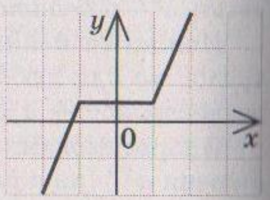
малая теорема Ферма позволяет заменить заданные степени степенями с маленькими показателями: 35^1, 96^3, 81^{12}, 47^{13} — вместо каждого остатка рассматривается его остаток от деления на 16.

Ясно, что задача существенно упростилась, а дальнейшее решение удобно провести с помощью **сравнений**, рассматривая сравнения по модулю 17. Первый вариант сразу же отпадает, и поскольку $96 \equiv 11 \equiv -6$, то

$$96^3 \equiv (-6) \equiv -6^3 \equiv -36 \cdot 6 \equiv -12 \equiv 5,$$

т.е. второй вариант также отпадает. Далее, $81 \equiv -4$, $(-4)^2 = 16 \equiv -1$, откуда $81^2 \equiv -1$, $81^{12} \equiv 1$, так что отпадает и третий вариант, стало быть, правильный вариант ответа — четвертый.

Монотонные функции. Как известно, функцию $y = f(x)$ в школе называют **возрастающей**, если для любых чисел a и b из ее области определения из неравенства $a < b$ следует неравенство $f(a) < f(b)$. С другой стороны, важным свойством функции является еще одно, более слабое условие: из неравенства $a < b$ следует неравенство $f(a) \le f(b)$ — примером такой функции является функция с графиком, изображенным на рисунке: он имеет горизонтальный участок. Этим свойством обладает и «экзотическая» функция $y = \operatorname{sgn} x$, равная 1 при положительных x, -1 при отрицательных x и 0 при $x = 0$.



Поэтому возрастающую, с точки зрения школьной программы, функцию часто называют **строго возрастающей**, подчеркивая, что при $a < b$ выполняется строгое неравенство $f(a) < f(b)$, а если от функции требуется, чтобы из неравенства $a < b$ следовало нестрогое неравенство, то ее называют или **нестрого возрастающей**, или **возрастающей в нестрогом смысле**, или **неубывающей**. Последний термин оправдан тем, что при $a < b$ не выполняется противоположное неравенство $f(a) > f(b)$, которое фигурирует в определении убывающей функции.

Ясно, что то же самое можно сказать и о свойствах, связанных с убыванием функций, а также для возрастающих и убывающих (в любом смысле) функций не только на всей области определения, но и на любом ее подмножестве — множестве, в ней содержащемся.

Отметим, что употребление термина *неубывающая* функция приводит к несколько неожиданному языковому эффекту: оказывается, что свойство функции *быть неубывающей* не совпадает со свойством не быть убывающей: например, функция $y = x^3$ — вовсе не убывающая (она, ясно, возрастающая), но она неубывающая: из $a < b$ следует, что $a^3 < b^3$. Впрочем, для обычного русского языка этот эффект даже весьма типичен: «не быть приятелем» — не значит «быть неприятелем», а связано это с тем, что в парах «приятель—неприятель» и «черное—белое» — так же, как и в паре «возрастающая—убывающая», — соответствующие слова являются *антонимами*, а не **отрицаниями** друг друга.

Очень распространен в математическом языке термин *монотонная* функция: так называют функцию, которая является либо возрастающей, либо убывающей — в любом из соответствующих смыслов. Употребляются также и термины *строго монотонная* и *нестрого монотонная* функция — вполне понятно, что они означают.

Нигде не определенная функция. В определении функции, в любой ее форме речь идет о том, что каждому элементу x из некоторого множества X ставится в соответствие некоторое число y. При этом каждый «нормальный» человек считает «внутри себя», что имеется в виду, конечно, непустое множество X — иначе какой смысл говорить о функции? Да и можно ли вообще говорить о каждом элементе, если никаких элементов просто нет?

Между тем в этом крайнем случае, как и во многих других, математики предпочитают свой выход, отличающийся от здравого смысла. И вы легко согласитесь с математическим вариантом — включением в рассмотрение такого «странного» объекта, как нигде не определенная функция, если почувствуете, какие осложнения возникают при отсутствии, запрещении этого объекта.

В самом деле, тот факт, что буквенное выражение при некоторых значениях переменной может не иметь смысла, никоим образом вас, конечно, не удивляет. Например, выражение $\frac{1}{x}$ не имеет смысла при $x = 0$, выражение $\sqrt{x} + \sqrt{-x}$ имеет смысл только при $x = 0$. А выражение $\sqrt{x-1} + \sqrt{-x}$ не имеет смысла ни при одном значении x: для первого слагаемого нужно чтобы x был не меньше 1, тогда во втором слагаемом под знаком радикала стоит отрицательное число.

С другой стороны, вы знаете аналитический способ задания функции, когда берется выражение с переменной и каждому ее значению ставится в соответствие значение этого выражения при этом значении переменной. А если это выражение не имеет смысла ни при одном значении x?

Конечно, можно усовершенствовать этот способ задания функции, потребовав сразу же, чтобы исходное выражение с переменной не было таким «плохим», но тогда каждый раз, прежде чем говорить о функции, заданной некоторым выражением, придется убеждаться, что оно определено хотя бы при одном значении переменной.

Но этот выход из положения все равно окажется «страусиным», и нигде не определенная функция «выскочит» в других местах. Например, вы, не задумываясь, складываете и перемножаете любые функции и при этом неявно и неосознанно пользуетесь именно существованием понятия нигде не определенной функции — а какая функция иначе является суммой функций $y = \sqrt{x}$ и $y = \sqrt{-x}$? Конечно, и в этом случае можно уточнять, какие функции можно складывать, потребовав, чтобы у складываемых функций области определения имели хотя бы одну общую точку.

В конкретных случаях таких уточнений понадобится очень много, и возможность избежать подобных перегрузок и дает понятие нигде не определенной функции, «ненормальное» для «нормальных» людей и вполне нормальное для математиков. Кстати, все подобного рода фокусы связаны с наличием пустого множества, также «ненормального» для «нормальных» людей, не без оснований считающих, что «множество — это прежде всего много». А против пустого множества вы вряд ли что-либо имеете, и дело в действительности только в привычке.

Основная теорема арифметики. Ее обычно формулируют так: *всякое натуральное число, отличное от 1, единственным образом представляется в виде произведения простых чисел или так: всякое натуральное число единственным образом представляется в виде произведения степеней разных простых чисел* — последнее разложение часто называют каноническим, хотя и не всегда, требуя при этом, чтобы простые множители входили в это разложение в порядке возрастания.

При этом всегда подразумевается, что порядок этих множителей является несущественным, так что два таких представления, отличающиеся только порядком множителей, считаются совпадающими: например, $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2 \cdot 3 \cdot 2 = 3 \cdot 2 \cdot 2$ — это одно и то же разложение числа 12, и именно такое понимание позволяет говорить о *единственности* разложения числа на простые множители. Еще одна тонкость в формулировке основной теоремы, быть может, не слишком заметная, но существенная для ее правильного понимания, рассматривается в статье **«Крайние случаи»**.

Основная теорема арифметики в школьном курсе не доказывается, т.е. принимается без доказательства, но ее можно неограниченно использовать. Более того, разрешается считать очевидными некоторые ее следствия, которые при этом также разрешается не доказывать. Так, очевидным можно считать часто используемое утверждение: «*Если произведение двух целых чисел делится на простое число p, то хотя бы одно из этих чисел делится на p*». Это утверждение — одношаговое следствие основной теоремы арифметики: если произведение ab делится на c, то в его каноническом разложении есть множитель p, а попал он в это произведение либо от a, либо от b, а стало быть, p содержится в разложении на простые одного из чисел a и b — оно и делится на p.

После этого рассуждения легко понять, почему для числа p, не являющегося простым, аналогичное утверждение неверно: если p составное, то у него по крайней мере есть два простых множителя, один из которых может входить только в разложение a, а другой — только в разложение b. Соответствующий простейший пример очевиден: $p = 6$, $a = 2$, $b = 3$.

А почему верно утверждение «*Если a^2 делится на b^2, то a делится на b*»? Сразу доказать его вряд ли возможно: совсем не ясно, как из равенства $a^2 = kb^2$ получить равенство вида $a = nb$. Сделать это позволяет именно основная теорема: все простые множители в канонические разложения чисел a^2 и b^2 входят с четными показателями, поэтому при $a^2 = kb^2$ все простые множители в каноническое разложение k также входят с четными показателями, и следовательно, k является **точным квадратом**: $k = n^2$, а из равенства $a^2 = n^2b^2$ сразу же получаем $a = nb$, т.е. a делится на b.

Из основной теоремы арифметики следует совершенно необходимое для решения задач утверждение: *если натуральное число a делится на натуральные числа b и c, и числа b и c взаимно просты, то a делится на произведение bc.*

В самом деле, в разложении числа a на простые множители имеются все простые множители, входящие в разложение числа b, причем с не меньшими, чем в b, показателями степени, и то же самое касается числа c. Но поскольку числа b и c взаимно просты, т.е. не имеют общих множителей, то в разложении числа a автоматически появляются все множители произведения bc в соответствующих степенях, так что a делится на bc, что и требовалось доказать.

Очень важно помнить, что это утверждение перестает быть истинным, если не предполагать, что b и c взаимно просты: например, 18 делится на 6 и на 9, но не делится на $6 \cdot 9 = 54$. Можно привести и еще более простой пример: 2 делится на 2, 2 действительно делится на 2, но 2 не делится на $2 \cdot 2 = 4$.

Из основной теоремы арифметики также следует *критерий делимости* одного числа на другое, основанный на знании *канонических разложений* этих чисел: *Число a делится на число b тогда и только тогда, когда все простые множители, входящие в разложение числа b, входят и в разложение числа a, причем с показателем степени, не меньшим чем в b.*

Например, $2^3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11^4$ делится на $2^3 \cdot 5 \cdot 11^4$, но не делится ни на $2^3 \cdot 5^2 \cdot 11^4 \cdot 13$, ни на $2^4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11^4$.

Из этого критерия или необходимого и достаточного условия делимости вытекает *формула для числа делителей натурального числа*. Именно, *если $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$, то число делителей a равно $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)\ldots(\alpha_k + 1)$.*

В самом деле, чтобы число b было делителем числа a, надо, чтобы оно имело те же простые множители, но с показателями, не большими чем в a. Но тогда первый показатель можно выбрать любым от 0 до α_1, т.е. числом способов $\alpha_1 + 1$, и точно так же второй показатель можно выбрать числом способов $\alpha_2 + 1$ и т.д., а всего для выбора делителя b имеется именно $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)\ldots(\alpha_k + 1)$ способов, что и требовалось доказать.

Оценка. В математическом контексте речь идет, конечно, не об оценках в смысле хорошо что-либо или плохо, но о так называемых *оценках сверху или снизу*, а также о соответствующих действиях — оценивании сверху или снизу.

Смысл этих терминов понятен из простейших примеров. Записав, скажем, неравенство $\sqrt{2} < 2$, мы оценили $\sqrt{2}$ сверху, а записав, что $x^2 \geq 0$, мы оценили это выражение снизу. Точно так же, записав двойное неравенство $-5 \leq 2\sin x + 3\cos 2x \leq 5$, мы оценили это выражение и сверху, и снизу.

Эти термины удобны для математической речи, для разъяснения своих планируемых действий — чтобы проверяющий вашу работу лучше понимал, что вы делаете. Например, если требуется выяснить, верно ли неравенство $\sqrt{17} - \sqrt{10} > 1$, то можно написать: «Для доказательства данного неравенства оценим $\sqrt{17}$ сверху, а $\sqrt{10}$ снизу...»

Периодические функции. Понятию периодической функции в разных учебниках даются различные определения, однако независимо от этих различий, периодическими являются или не являются одни и те же функции, и поэтому говорят, что эти определения *равносильны* или *эквивалентны*, т.е. описывают одно и то же свойство функций, означают одно и то же.

Наиболее просто, по нашему убеждению, дать определение периодической функции в два шага:

1. *Число $T \neq 0$ называется* **периодом** *функции f, если вместе со всяким числом $x \in D(f)$ числа $x + T$ и $x - T$ также принадлежат $D(f)$ и выполняется равенство $f(x+T) = f(x)$.*

2. *Функция называется* **периодической**, *если она имеет хотя бы один период.*

Естественно, функцию называют периодической с периодом T, если число T является ее периодом.

Сама форма определения периода подсказывает, что периодов у функции может быть много: в нем подразумевается, что *всякое* число T с указанным свойством является периодом функции f, а вы прекрасно знаете, что если T — период f, то любое его кратное, т.е. число вида nT, где n — любое целое число, является ее периодом.

В частности, поэтому некорректны, строго говоря, часто встречающиеся фразы типа «Периодом функции $y = \sin x$ является 2π» — периодов у синуса много, и лишь один из них равен 2π. В то же время не может вызвать никаких возражений фраза — из те же слов, но в другом порядке: «2π является периодом функции $y = \sin x$».

Отметим, что не всякая периодическая функция имеет *основной*, т.е. наименьший положительный период — например, периодом постоянной функции является любое число, отличное от 0, но, пожалуй, самая простая из таких функций, отличных от постоянной, — это «экзотическая» *функция Дирихле*.

Полезно — особенно для экономии времени при решении задач с выбором ответа — знать, что сумма двух периодических функций с одинаковым периодом является периодической функцией, и более того, для периодичности суммы достаточно, чтобы отношение каких-то двух их периодов T_1 и T_2 являлось рациональным числом (такие числа T_1 и T_2 часто называют *соизмеримыми*).

В самом деле, если $\frac{T_1}{T_2} = \frac{p}{q}$, то $qT_1 = pT_2$, и это число является, очевидно, общим периодом этих функций, а значит, и периодом их суммы. Аналогичные утверждения могут быть доказаны и для разности функций, а также для их произведения и частного — правда, с некоторыми осложнениями из-за нулевых значений.

Кроме того, если функция g имеет период T, то при любой функции f *сложная функция* $y = f(g(x))$ также имеет период T: если x входит в ее область определения, то $x + T$ и $x - T$ в нее также входят, и выполняется равенство $f(g(x+T)) = f(g(x))$. В этом утверждении ни в коем случае нельзя перепутать порядок функций f и g — периодическая функция должна стоять внутри, т.е. применяется к x первой, а в противном случае результат вполне может не оказаться периодической функцией: поэтому, например, функция $y = \sin^2 x$ — периодическая — она может быть представлена в виде $y = f(g(x))$, где $g(x) = \sin x$, а $f(x) = x^2$, так что $f(g(x)) = (g(x))^2 = \sin^2 x$. В то же время, скомбинировав функции f и g в обратном порядке, мы получим функцию: $y = f(g(x)) = g(x^2) = \sin x^2$, которая периодической не является, хотя установить это не так просто — при всей «очевидности» этого утверждения.

В обычных школьных задачах доказать периодичность той или иной функции обычно нетрудно: так, чтобы убедиться, что функция $y = \sin\frac{3}{4}x + \sin\frac{2}{7}x$ является периодической, достаточно просто отметить, что произведение $T = 4 \cdot 7 \cdot 2\pi$ является ее периодом: если мы прибавим к x число T, то это произведение «съест» оба знаменателя и под знаком синуса окажутся лишними только целые кратные числа 2π, которые «съест» сам синус.

Но доказательство непериодичности той или иной функции непосредственно по определению периодической функции может оказаться совсем не простым. Так, для доказательства непериодичности рассмотренной выше функции $y = \sin x^2$ можно выписать равенство $\sin\left(x+T\right)^2 = \sin x^2$, но не решать по привычке это тригонометрическое уравнение, а догадаться подставить в него $x = 0$, после чего дальнейшее получится почти автоматически: $\sin T^2 = 0$, $T^2 = k\pi$, где k — некоторое целое число, большее 0, т.е. $T = \sqrt{k\pi}$, а если теперь догадаться подставить в него $x = \sqrt{\pi}$, то получится, что $\sin\left(\sqrt{\pi}+\sqrt{k\pi}\right) = 0$, откуда

$$\sqrt{\pi}+\sqrt{k\pi} = n\pi,\ \ 1+\sqrt{k} = n\sqrt{\pi},\ \ 1+k+2\sqrt{k} = n^2\pi,$$

$$2\sqrt{k} = n^2\pi - 1 - k = n^2\pi + m,\ \ 4k = n^4\pi^2 + 2mn^2\pi + m^2,$$

и таким образом, число π является корнем уравнения $n^4x^2 + 2mn^2x + m^2 - 4k = 0$, т.е. является алгебраическим, что неверно: π является, как мы ранее говорили, трансцендентным, т.е. не является корнем никакого алгебраической уравнения с целыми коэффициентами. Впрочем, в будущем мы получим гораздо более простое доказательство этого утверждения — но уже с помощью средств математического анализа.

При доказательстве непериодичности функций часто помогает элементарный логический трюк: если все периодические функции обладают некоторым свойством, а данная функция им не обладает, то она, естественно, не является периодической. Так, периодическая функция всякое свое значение принимает бесконечно много раз, и поэтому, например, функция $y = \dfrac{3x^2 - 5x + 7}{4x^3 - x + 2}$ не является периодической, так как значение 7 она принимает только в двух точках. Часто для доказательства непериодичности удобно использовать особенности ее области определения, а для нахождения нужного свойства периодических функций иногда приходится проявлять определенную фантазию.

Заметим еще, что очень часто на вопрос, что же такое непериодическая функция, приходится слышать ответ в стиле, о котором мы говорили в связи с четными и нечетными функциями, — это когда $f(x+T) \neq f(x)$, что, конечно же, недопустимо.

А правильный ответ зависит от конкретного определения периодической функции, и, исходя из данного выше определения, можно, конечно, сказать, что функция является непериодической, если она не имеет ни одного периода, но это будет «плохое» определение, которое не дает направления доказательства непериодичности. А если его расшифровать далее, описав, что значит предложение «функция f не имеет ни одного периода», или, что то же самое, «никакое число $T \neq 0$ не является периодом функции f», то получим, что *функция f не является периодической в том и только в том случае, когда для всякого $T \neq 0$ существует число $x \in D(f)$ такое, что либо хотя бы одно из чисел $x + T$ и $x - T$ не принадлежат $D(f)$, либо $f(x + T) \neq f(x)$.*

Можно сказать и иначе: «*существует число $x \in D(f)$ такое, что равенство $f(x + T) = f(x)$ не выполняется*» — это равенство может не выполняться по двум причинам: или оно не имеет смысла, т.е. одна из его частей не определена, или — в противном случае, быть неверным. Для интереса добавим, что языковой эффект, о котором мы говорили выше, здесь проявляется тоже: для равенства «не быть верным» и «быть неверным» — не одно и то же — равенство еще может не иметь смысла.

Детальное выяснение причин и последствий этого языкового эффекта в действительности является предметом не математики, а теории языка, лингвистики, точнее, ее особого раздела: семантики — науки о смысле, где, впрочем, эти вопросы являются весьма сложными и не имеют однозначного решения. А математика, в том числе и школьная, вынуждена мириться с этими трудностями и преодолевать языковые «неурядицы» — пока и поскольку она использует, наряду с символическим, и естественный язык.

Признаки делимости на 4, 8, 11 и 25. «Детских» признаков делимости на 3 и на 9, как вы уже могли убедиться, маловато для решения задач, связанных с делимостью целых и натуральных чисел, но еще более «детскими» являются и признаки делимости на 4, 8 и 25, а несколько более сложный признак делимости на 11 очень прост и полезен в применении — вы это также видели.

Признак делимости на 4 состоит в том, что *натуральное число делится на 4 тогда и только тогда, когда число, состоящее из двух его последних цифр, делится на 4.*

Этот признак вполне очевиден — если отбросить от заданного числа его две последние цифры, т.е. разбить его на соответствующие два слагаемых, то первое слагаемое будет оканчиваться на два нуля, т.е. делиться на 100, а значит и на 4, и поэтому все зависит от второго, двузначного слагаемого.

Точно так же очевиден и аналогичный признак делимости на 8: *натуральное число делится на 8 тогда и только тогда, когда число, состоящее из трех его последних цифр, делится на 8,* а для его доказательства достаточно отбросить эти три цифры и заметить, что 1000 делится на 8.

Признак делимости на 11 можно сформулировать следующим образом: *натуральное число делится на 11 в том и только в том случае, когда на 11 делится разность между суммой его цифр, стоящих на четных местах, и суммой его цифр, стоящих на четных местах.*

Проще всего его можно доказать (и даже придумать, вывести) с помощью сравнений (естественно, по модулю 11). Правда, тут возникает одна трудность эвристического характера: надо догадаться, что степень числа 10 с нечетным показателем плюс единица делится на 11.

Догадавшись же, доказать это совсем просто даже на «детском» уровне:

$$10^n = 999\ldots99 + 1 = 999\ldots90 + 9 + 1 = 999\ldots90 + 10,$$

и при нечетном n в первом слагаемом правой части число девяток четно, т.е. это слагаемое делится на 11. Можно сослаться и на формулу суммы нечетных степеней, а еще проще заметить, что $10 \equiv -1 \pmod{11}$, так что 10 в нечетной степени тождества сравнимо с -1, т.е. 10^{2k-1} делится на 11.

Проведем доказательство: так как $10 \equiv -1 \pmod{11}$, то при четном n $10^n \equiv 1$, а при нечетном n $10^n \equiv -1$, и поэтому

$$c = a_0 \cdot 10^k + a_1 \cdot 10^{k-1} + a_2 \cdot 10^{k-2} + \ldots + a_{k-1} \cdot 10 + a_k \equiv$$

$$\equiv a_k - a_{k-1} + a_{k-2} - a_{k-3} + \ldots + a_1 \cdot (-1)^{k-1} + a_0 \cdot (-1)^k \text{ —}$$

множитель $(-1)^k$ обеспечивает здесь нужное чередование знаков и показатель степени подобран так, чтобы при четном k последнее слагаемое $a_0 \cdot (-1)^k$ совпадало с a_0. Выражение, стоящее в правой части этого равенства, и есть разность между суммой s цифр, стоящих в числе c на четных и на нечетных местах. Ее удобно называть s знакочередующейся суммой цифр числа c.

Мы доказали в результате, что $c - s \equiv 0$, т.е. число c и знакочередующаяся сумма его цифр при делении на 11 дают одинаковые остатки, и мы получили более сильное утверждение, чем требовалось.

Признак делимости на 11 можно доказать, конечно, и без использования метода сравнений — как с применением формулы суммы нечетных степеней, так и не опираясь на «тяжелую артиллерию» алгебры.

Но и «азбучные» признаки делимости на 3 и на 9 на самом деле нуждаются в уточнении, и их можно формулировать примерно так: *натуральное число делится на 3 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 3,* и то же самое касается признака делимости на 9. В такой формулировке подчеркивается, что если сумма цифр числа не делится на 3, то и само число не делится на 3.

С точки зрения решения задач еще более важно, что из этих признаков, строго говоря, можно узнать только делится или не делится данное число соответственно на 3 и на 9. Но для решения многих, в том числе и весьма несложных задач, совершенно необходимы их обобщения, аналогично тому, что мы имели при рассмотрении числа 11: как и в этом случае, равны соответствующие остатки, т.е. *остаток от деления числа на 3 совпадает с остатком от деления суммы его цифр на 3; остаток от деления числа на 9 совпадает с остатком от деления суммы его цифр на 9.*

Эти утверждения почти доказаны в 5 классе — достаточно повторить проведенные там рассуждения и добавить к ним, что разность между числом и суммой его цифр делится на 3 и на 9, т.е. соответствующие остатки совпадают.

Ясно, что аналогичные утверждения верны и для признаков для 4 и 8.

Признаки делимости на 7 и на 13. Выше мы рассмотрели несколько задач (573 — 575), по существу подготовительных к получению признака делимости на 7, который связан с разбиением десятичной записи числа на тройки. Мы сейчас получим этот признак, пользуясь при этом обозначением, введенным в комментарии к решению задачи и рассуждения — для краткости — будем вести на языке сравнений, а сравнения будем рассматривать по модулю 7.

Правда, мы не будем рассматривать вопрос в общем виде — иначе изложение получилось бы слишком громоздким, и на «большом» конкретном примере покажем лишь *механизм* доказательства, по модели которого может быть проведено и само общее доказательство.

Рассмотрим семнадцатизначное число

$$n = 18\ 876\ 009\ 138\ 763\ 423,$$

разобьем его на тройки справа налево и выделим соответствующие слагаемые в его десятичной записи (последней тройки не получается, но мы будем считать, что 18 = 018):

$$n = 10^{15} \cdot 18 + 10^{12} \cdot 876 + 10^{9} \cdot 009 + 10^{6} \cdot 138 + 10^{3} \cdot 763 + 423$$

и заметим, что 1001 делится на 7, т.е. $1001 \equiv$, и поэтому

$$10^3 \equiv -1,\ 10^6 \equiv 1,\ 10^9 \equiv -1,\ 10^{12} \equiv 1,\ 10^{15} \equiv -1,$$

так что $n \equiv -18 + 876 - 9 + 138 - 763 + 423$. Иными словами, число n сравнимо со знакочередующейся суммой s своих

троек, так что n и s дают одинаковые остатки при делении на 7, откуда и следует признак делимости на 7.

Что касается признака делимости на 13, то мы его фактически уже доказали. В самом деле, в доказательстве признака делимости на 7 мы использовали единственное свойство числа 7 — только то, что 7 — делитель числа 1001. Но $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$ и поэтому буквально то же доказательство — с заменой числа 7 на 11 или 13 — приводит к тому же признаку делимости на 11 и 13, так что с помощью знакочередующейся суммы s троек из десятичной записи числа n можно определить, делится ли n на 7, 11 или 13.

Отметим в то же время, что рассмотренный выше признак делимости на 11, разумеется, проще, а признаки делимости на 7 и 13 связаны с достаточно долгими вычислениями, зачастую вполне сравнимыми по трудности с делением «уголком».

Простые и составные числа. Вам хорошо известно, что натуральное число называется простым, если оно делится только на 1 и на самое себя. Но при решении задач удобнее применять какие-либо языковые переформулировки этого определения или другие свойства простых чисел, равносильных этому определению.

Например, число n является простым, если при любом его разложении на натуральные множители ровно один из этих множителей равен 1. При этом слово «ровно» мы вставили для того, чтобы избежать определенной языковой двойственности: без этого уточнения «одинокое» слово «одно» может восприниматься часто как «хотя бы одно». А тогда 1 оказалась бы простым числом. Об этих особенностях языка — и «обычного», и математического русского языка мы также далее будем говорить.

Естественно, число n не является простым, если оно может быть разложено на два множителя, каждый из которых отличен от 1, и именно этим утверждением пользуются при доказательстве того, что данное число является составным: его раскладывают на множители и обязательно доказывают, что оба эти множителя отличны от 1.

Можно сказать и иначе: число n не является простым, если оно может быть разложено на два множителя, каждый из которых отличен от n: если в разложении $n = ab$ один из множителей не равен 1, то второй не равен n.

Еще одно свойство чисел: число n просто **тогда и только тогда, когда** (это словосочетание далее рассмотрено в Компендиуме) оно не имеет простых делителей, отличных от n. Поэтому всякое составное число имеет такие делители, т.е. всякое составное число имеет хотя бы один простой делитель.

Понятие простого числа часто, в том числе и в школьном курсе, относят только к натуральным числам, что является далеко не всегда удобным при рассмотрении делимости в множестве целых чисел. Поэтому это понятие удобно распространить и на целые числа, считая, что целое число n является простым, если его модуль $|n|$ — простое натуральное число: например, простыми являются числа -5 и -17, а -4 простым не является.

Такое обобщение понятия простого числа связано с главным свойством — невозможностью разложить простое число на множители разумным образом, «по-настоящему»: ведь равенство $n = n \cdot 1$ — это, как говорят в математике, *тривиальное* разложение — оно выполняется для всех n, так что из него нельзя извлечь никакой информации о данном числе n.

Установить, простым или составным является конкретное натуральное число, как вы знаете, не так просто, и этой задачей математики занимаются уже две с половиной тысячи лет. Еще с времен Древней Греции известен один прием, *решето Эратосфена*, с которым вы могли познакомиться еще в 5 классе. Этот прием сильно усовершенствован в теории чисел, и на нем основаны некоторые алгоритмы построения простых чисел, использующиеся в современных компьютерах.

В то же время можно указать эффективный, всегда ведущий к цели прием решения этой задачи — если задано число n, то надо постепенно перебирать все меньшие его простые числа, которые могли бы быть его делителями, и если

таковых не окажется, то данное число само простое. Ясно, что выяснить простоту даже сравнительно небольшого числа этим приемом достаточно трудно.

Этот прием можно упростить, сократив вычисления более чем вдвое, причем из очень простых соображений. Именно, если $n = ab$ и $a \le b$, то $a^2 \le ab \le n$, т.е. достаточно проверять только такие числа a — «кандидаты» в делители, — которые удовлетворяют неравенству $a^2 \le n$, т.е. $a < \sqrt{n}$. Например, для установления, является ли число 2131 простым или составным достаточно испытать простые числа 2, 3, 5, 7, ... , 43 и можно не проверять 47, 53, 59 и т.д. Но даже если вы знаете не только «детские» признаки делимости, но и **признаки делимости на 7, 11 и 13**, то испытывать остальные простые от 17 до 43, делить n на эти числа — занятие довольно скучное.

Разные задачи, связанные с простыми числами, были и остаются до сих пор важными и интересными для математики, многие из них до сих пор не решены, и с их исследованием связаны любопытные факты из истории математики. Так, еще в XVI—XVII вв. математиками начали рассматриваться числа вида $2^n - 1$ и при исследовании их на простоту в истории было допущено много ошибок. Ясно, что если n — составное число, то это число также составное: если $n = km$, то $2^n - 1 = \left(2^k\right)^m - 1^m$ — как **разность степеней** делится на разность оснований, т.е. не является простым, и поэтому естественно рассматривать только простые числа n.

Но и при простых n это число может оказаться составным: например, $2^{11} - 1 = 2047 = 23 \cdot 89$, оно составное и при $n = 23$, и $n = 37$, что установлено Ферма, через 40 с лишним лет обнаружившим ошибку в работе другого исследователя, утверждавшего, что при n = 23, 29, 31, 37 число $2^n - 1$ просто, но не заметившего другой ошибки: при $n = 29$ оно также не является простым. А это обнаружил — еще примерно через 100 лет — Эйлер, что при $n = 31$ это число все же действительно является простым.

В XVII в. числами вида $2^n - 1$ занимался французский монах Марен Мерсенн, который привел полный список простых n от 2 до 257, для которых эти числа являются простыми, в котором он предвосхитил указанный выше результат Эйлера, но и этот список содержал ошибки, и одну из них нашел спустя два с половиной века, в 1883 г., русский сельский священник-учитель Иван Михеевич Первушин. Это событие отмечено мемориальной доской на его доме в Зауралье — в г. Шадринске Курганской области. А ошибочно указанные Мерсенном $n = 67$ и $n = 257$ были исключены из его списка лишь в XX веке.

Простые числа вида $2^n - 1$ получили название *чисел Мерсенна*, и до сих пор математики не знают, конечно или бесконечно множество таких чисел, а в 1996 г. найдено тридцать пятое число Мерсенна — при $n = 1\,398\,629$, и в нем примерно 400 тысяч цифр, 15 мая 2004 г. найдено тридцать шестое число, при этом компьютеру понадобилось на это несколько часов. Ясно, что найти такое громадное число без использования компьютеров немыслимо.

В истории математики есть и еще один казус, связанный с простыми числами, т.н. *числами Ферма* — числами вида $2^{2^n} + 1$. Опять понятно, почему показатель степени $k = 2^n$ имеет такой, казалось бы, частный вид, но 2^n — это общий вид числа, не имеющего нечетных простых делителей, а если этот показатель k имеет такой делитель p, то число $2^k + 1$ не является простым: если $k = pq$, то $2^k + 1 = \left(2^q\right)^p + 1^p$, а **сумма нечетных степеней** делится на сумму оснований. Сам Ферма считал, что эти числа все являются простыми, но Эйлер показал, что это утверждение ошибочно, нашел к нему **контрпример:** $2^{32} + 1 = 4\,294\,967\,297 = 641 \cdot 6\,700\,417$.

И самое удивительное открытие в связи с числами Ферма сделал великий математик Гаусс, имя которого вы наверняка слышали в связи с его моментальным вычислением суммы $1 + 2 + 3 + +...+ 100$: оказывается, что правильный n-угольник можно построить **тогда и только тогда, когда** все нечетные простые делители числа n являются числами Ферма. Поэтому, в частности, правильный 7-угольник циркулем и линейкой построить нельзя, а 17-угольник — можно: $17 = 2^{2^2} + 1$.

Симметрии графиков функций. Прямая $x = a$ является осью симметрии графика функции $y = f(x)$ тогда и только тогда, когда для любого $x \in D(f)$ выполняется равенство $f(x) = f(2a - x)$.

Прямая $x = a$ является осью симметрии графика функции f в том и только в том случае, когда для любого x из ее области определения выполняется равенство $f(a + x) = f(a - x)$.

Сравнения в множестве целых чисел. Сразу же укажем, что под термином *сравнение* здесь подразумевается вовсе не выяснение того, какое из двух чисел больше или меньше другого. Понятие сравнения на множестве целых чисел никаким образом не входит ни в школьную программу, ни в программу для поступающих в вузы, хотя оно исключительно удобно для решения именно школьных задач, связанных с делимостью натуральных и целых чисел, и прежде всего с делимостью с остатком — в комментарии к решению некоторых задач вы уже видели, насколько короче становится решение, если проводить его с помощью сравнений.

Между тем применение языка сравнений, основанного на единственном «лишнем» термине и единственном «лишнем» знаке $\equiv$, практически ничем не отличается от использования абсолютно привычного языка равенств со знаком $=$, и третья черточка в знаке ничему не мешает.

С другой стороны, представьте себе, что вам запретили использовать знак равенства, а вместо него писать слово «равно», соблюдая согласование с соответствующими существительными в роде, числе и падеже. Помимо всего прочего, при этом пришлось бы задумываться, какого рода не только x и y, но p и q, α и φ и т.п. Абсурдность этой ситуации более чем очевидна.

Как вы сейчас увидите, «теория сравнений», точнее ее фрагмент, нужный для решения школьных задач, вам на самом деле уже хорошо знаком, и вся эта теория является фактически переводом известных фактов на другой язык — язык сравнений, и сейчас в этом сможете убедиться.

Пусть $n > 1$ — произвольное натуральное число. Целые числа a и b называются *сравнимыми по модулю* n, если разность a и b, делится на n, или, что то же самое, a и b при делении на n дают одинаковые остатки. Уже из последнего разъяснения ясно, что в определении сравнимости, по существу, нет ничего нового: дан только новый термин, и его полезность объясняется дополнительным *знаком сравнения* $\equiv$: вместо того, чтобы говорить, что a и b *сравнимы по модулю* n, пишут $a \equiv b$ (Отметим, что слово «модуль» здесь, разумеется, ни имеет никакого отношения к понятию модуля действительного числа).

Например, верно сравнение $47 \equiv 32 \pmod 5$ — 15 делится на 5, но неверно сравнение $47 \equiv 32 \pmod 4$ — 15 не делится на 4. Иными словами, какое именно n рассматривается при сравнении двух чисел. Необходимость при пользовании сравнениями всегда писать слово $(\text{mod } n)$, естественно, утяжеляет запись, однако на практике при решении задач этого очень часто можно не делать — в большинстве конкретных задач число n, как правило, ясно из контекста.

И самое главное в том, что свойства сравнений абсолютно совпадают со свойствами равенств: для любого $n > 1$ и любых целых чисел a и b:

1. $a \equiv a$;
2. Если $a \equiv b$, то $b \equiv a$;
3. Если $a \equiv b$, $b \equiv c$, то $a \equiv c$;
4. Если $a \equiv b$, $c \equiv d$, то $a \pm c \equiv b \pm d$, $ac \equiv bd$.

Свойство 4 означает, что сравнение (естественно, по одному и тому же модулю n) можно складывать, вычитать и перемножать почленно. Ясно, что это свойство справедливо и для любого количества чисел, и в частности, перемножением k сравнений $a \equiv b$ можно получить сравнение $a^k \equiv b^k$, т.е. сравнения можно возводить в степень с любым

натуральным показателем. Можно также любые слагаемые из одной части сравнения переносить в другую — естественно, с изменением знака.

С помощью «языка сравнений» можно не только давать более короткие решения задач, но столь же кратко излагать теоретические факты и их доказательства.

Например, утверждение: «*Если p — простое число и произведение ab делится на p, то хотя бы одно из чисел ab делится на p*» записывается следующим образом: «*Если p — простое число и $ab \equiv 0$, то $a \equiv 0$ или $b \equiv 0$*» — ясно, что речь идет о сравнениях по модулю p. А утверждение: «Остаток от деления произведения чисел a и b на число c, равен остатку от деления на c, который дает произведение остатков от деления на c, которые дают сами числа a и b», как вы видели, совершенно необходимое при решении задач на делимость и остатки, записывается так: «Если при делении на c числа a и b дают остатки r и s, то $ab \equiv rs \pmod c$».

При решении задач мы часто использовали утверждение, что разность одинаковых степеней целых чисел делится на разность оснований, ссылаясь на «углубленную» формулу разности степеней, но с помощью сравнений без нее вполне можно обойтись: так как $a - b$ делится на $a - b$, т.е. $a \equiv b\ (\text{mod}(a-b))$, то $a^k \equiv b^k\ (\text{mod}(a-b))$, значит, $a^k - b^k$ делится на $a - b$.

Для иллюстрации краткости «языка сравнений» решим задачу: «Найти две последние цифры числа $876\,396^{37}$». Будем рассматривать сравнения по модулю 100. Так как $876\,396 \equiv 96 \equiv -4$, то $876\,396^{37} \equiv -4^{37}$. Но $4^5 = 1024 \equiv 24$, так что $4^{37} = 4^{35} \cdot 4^2 \equiv 24^7 \cdot 16$, а поскольку $24^2 = 576 \equiv -24$, то $24^3 \equiv -24^2$, $24^6 \equiv -24^2$, $24^7 \equiv -24^3 \equiv 24^2 \equiv 76$, так что последние две цифры заданного числа — 76. Попробуйте записать это решение без использования понятия сравнения.

Доказательство всех указанных выше свойств сравнений, за исключением перемножения сравнений, не представляет труда, а в оставшемся случае доказательство проводится с помощью простой, хотя и не очевидной группировки: если числа a и b при делении на k дают остатки r и s соответственно, то

$$(a+b)-(r+s)=(a-r)+(b-s),$$
$$ab-rs=(a-r)b+r(b-s),$$

а в правой части этих равенств $a-r$ делится на k, $b-s$ делится на k и поэтому обе написанных комбинации чисел делятся на k.

Сложная функция (композиция функций). Термин *сложная функция* в действительности в математическом языке является «чисто рабочим»: так называют функцию, если она задана в виде $y=f(g(x))$ с внешней функцией f и внутренней функцией g. Из самого задания этой функции ясно, что для вычисления значения y сложной функции к значению аргумента x сначала применяется функция g, а затем к полученному значению $g(x)$ применяется функция f — тогда и получается значение $f(g(x))$.

Владение этим термином, умение видеть сложную функцию для начал математического анализа исключительно — чтобы найти производную, функцию часто следует представить в виде сложной функции, причем функция может быть еще более «сложной», когда ее «история» более длинная, т.е., например, функция задается формулой $y=f(g(h(p(x))))$ — например, функция $y=\sqrt{\sin\left(\ln^2 \operatorname{tg} x\right)}$.

Для того чтобы подчеркнуть, что термин *сложная функция* относится не к самой функции, а к способу ее задания, приведем пример: функции $y=\sqrt[3]{x^3}$ и $y=x$ — это, очевидно, одна и та же функция, однако первую из них можно назвать сложной, а вторую — нет. Заметим также, что сложная функция может оказаться **нигде не определенной**, например, $y=\sqrt{-x^2-1}$ — под знаком радикала тут всегда стоит отрицательное выражение.

При желании заняться алгеброй функций, т.е. рассматривать операции, действия, которые можно осуществлять с функциями, изучать свойства этих операций, а иногда

лишь для терминологического удобства сложную функцию $y=f(g(x))$ называют *композицией* функций f и g и обозначают обычно символом $f\circ g$ или, в обратном порядке, $g\circ f$ — математики, как ни странно, не могут, да и не пытаются, прийти к общему соглашению относительно этого обозначения. Далее мы применяем первый порядок f и g, т.е. $(f\circ g)(x)=f(g(x))$.

А между тем композиция двух функций зависит от их порядка: если, например, $f(x)=x^2$, а $g(x)=\sqrt{x}$, то $f(g(x))=$ $=\left(\sqrt{x}\right)^2=x\ \ (x\geq 0)$, тогда как $g(f(x))=\sqrt{x^2}=|x|$, а значит, это две различные функции — они имеют даже разные области определения. Иными словами, равенство $f\circ g=g\circ f$ выполняется не для всех функций, так что в алгебре функций перестановочный (в математике, в отличие от школы, называют его *коммутативным*) закон для композиции не имеет места.

Интересно, что сочетательный (в математике говорят ассоциативный) закон остается в силе:

$$\left[(f\circ g)\circ h\right](x)=(f\circ g)(h(x))=f(g(h(x))),$$
$$\left[f\circ(g\circ h)\right](x)=f\left[(g\circ h)(x)\right]=f(g(h(x))),$$

(мы здесь не стали рассматривать детали, связанные с областью определения рассматриваемых функций), а распределительный закон (в математике говорят *дистрибутивный*) распадается на два — из-за отсутствия перестановочного закона:

$$f\circ(g+h)=f\circ g+f\circ h \quad \text{и} \quad (g+h)\circ f=g\circ f+g\circ h$$

и, что удивительно, один из них выполняется в алгебре функций, а второй — нет.

Интересующиеся этими вопросами легко могут узнать, какой из них именно выполняется, рассмотрев какой-нибудь простой пример, и почти со стопроцентной вероятностью вы найдете ответ с первой попытки, если, конечно, вам не повезет попасть как раз на те функции, для которых выполняются оба закона. А доказать верный закон тоже будет небесполезным — с точки зрения будущего изучения высшей алгебры в вузе: для студентов она вовсе не проще, чем математический анализ, однако с его идеями вы более или менее знакомитесь в школе, а основные идеи алгебры, связанные со свойствами операций, полностью остаются в стороне.

Точные квадраты и кубы. Из основной теоремы арифметики следует, что точный квадрат всегда имеет нечетное число делителей: если число $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$ есть точный квадрат, то показатели степеней $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ четны, а тогда число делителей числа a, равное $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)\ldots(\alpha_k + 1)$, нечетно.

Точно так же у точного куба число делителей имеет вид $3n + 1$, у четвертой степени — число вида $4n + 1$ и т.д.

При работе со степенями целых и натуральных чисел всегда следует иметь в виду, что степени с большим показателем также является и степенью с маленьким показателем: например, a^{100} — это одновременно и квадрат пятидесятой степени, и четвертая степень двадцать пятой степени, и пятая степень двадцатой степени, и т.п. Ясно, что показатель степени таким образом можно уменьшить для любого составного числа n, а для простого n это ничего не даст.

Формулы разности и суммы степеней. В программу углубленного изучения математики входят две формулы, обобщающие общеизвестные, хрестоматийные формулы разности квадратов и кубов, а также суммы кубов.

Для любого натурального числа n:

$$a^n - b^n = (a - b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1}\right),$$

$$a^{2k+1} + b^{2k+1} = (a + b)\left(a^{2k+1} - a^{2k}b + a^{2k-1}b^2 - \ldots - a^2b^{2k-1} - \right.$$
$$\left. - ab^{2k} + b^{2k+1}\right).$$

Они также входят и в программу профильного курса математики. И мы уже видели, насколько полезными являются эти формулы для решения задач на делимость и остатки для натуральных и целых чисел.

Доказательство этих формул несложно, хотя и связано с техническими, достаточно простыми выкладками. Для формулы разности степеней оно получается на основе обязательной для всех формулы суммы геометрической прогрессии: достаточно лишь *заметить*, что в формуле разности степеней второй множитель в правой части является суммой n членов геометрической прогрессии с первым членом $b_1 = a^{n-1}$ и знаменателем $q = \frac{b}{a}$. Поэтому он равен:

$$S = b_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} = a^{n-1} \frac{\frac{b^n}{a^n} - 1}{\frac{b}{a} - 1} = a^{n-1} \frac{\frac{b^n - a^n}{a^n}}{\frac{b - a}{a}} = \frac{b^n - a^n}{b - a},$$

так что $(b - a)S = b^n - a^n$, а это и есть доказываемая формула.

А для доказательства формулы суммы нечетных степеней можно в доказанную формулу подставить $-b$ вместо b и взять $n = 2k + 1$.

Применения этих формул к делимости целых и натуральных чисел основываются на их следствиях: *разность степеней двух натуральных или целых чисел с одинаковыми показателями делится на разность оснований; сумма степеней двух натуральных или целых чисел с одинаковыми нечетными показателями делится на сумму оснований.*

Помимо практических приложений, эти формулы полезны и для теории. С их помощью можно доказать в общем виде признаки делимости на 3 и на 9, которые в младших классах были «доказаны» на примерах, т.е., строго говоря, оставлены без доказательства.

В самом деле, натуральное число c с цифрами $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, a_k$, в виде суммы разрядных слагаемых представляется как

$$c = a_0 \cdot 10^k + a_1 \cdot 10^{k-1} + a_2 \cdot 10^{k-2} + \ldots + a_{k-1} \cdot 10 + a_k,$$

и вычитая из c сумму его цифр $s = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1} + a_k$, получаем число

$$c - s = a_0\left(10^k - 1\right) + a_1\left(10^{k-1} - 1\right) + a_2\left(10^{k-2} - 1\right) + \ldots +$$
$$+ a_{k-1}\left(10 - 1\right),$$

а поскольку всякое число вида $10^n - 1$ записывается с помощью одних девяток, то $c - s$ делится на 9, так что число и сумма его цифр при делении на 9 дают одинаковые остатки, и в частности, делятся или не делятся на 9 одновременно. То же самое рассуждение годится и для числа 3.

Заметим, что с использованием сравнений доказательство проводится в одну строчку: так как $10 \equiv 1 \pmod 9$, то

$$a_0 \cdot 10^k + a_1 \cdot 10^{k-1} + a_2 \cdot 10^{k-2} + \ldots + a_{k-1} \cdot 10 + a_k \equiv$$
$$\equiv a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_{k+1} + a_k$$

Функции равные и различные. Учащиеся редко задумываются над формальным вопросом: «Что именно означают выражения: «Эти две функции равны» и «Эти две функции различны?». Это и понятно, потому что на практике равенство функций достаточно очевидно, а для утверждения о различии функций, учащиеся чаще всего опираются на внешний вид этих функций, а это не только неверно логически, но может привести и к фактическим ошибкам — соответствующий пример приведен в статье Компендиума «Функции четные и нечетные».

Определение равных функций вполне естественно и очевидно: *две функции называются равными, если они имеют одинаковые области определения и при каждом значении аргумента из этой области определения принимают равные значения.*

Поэтому две функции не равны, т.е. различны, если они либо имеют различные области определения, либо при некотором значении аргумента принимают разные значения. Здесь сразу же видно главное: чтобы убедиться, что две функции f и g различны, нужно привести пример такого значения аргумента, т.е. число a, для которого $f(a) \neq g(a)$.

Функции четные и нечетные. Понятия четной и нечетной функции вам хорошо знакомы, и как правило, их определения даются с упоминанием области определения: например, *функция $y = f(x)$ называется* **четной**, *если ее область определения $D(f)$ симметрична относительно начала координат, и для всех x из этой области определения выполняется равенство $f(-x) = f(x)$.*

Между тем, если равенство $f(x) = f(-x)$ *выполняется*, то уж во всяком случае обе его части имеют смысл, так что если $x \in D(f)$, что прямо сказано в определении, то и $-x \in D(f)$, а это означает, что область определения $D(f)$ симметрична относительно начала координат. Иными словами, условие, наложенное на $D(f)$ в этом определении, — лишнее: его выполнение логически следует из главного условия $f(x) = f(-x)$.

Это не значит, конечно, что данное определение неправильное, оно лишь «неэкономное», и в учебниках определение четной функции дается в таком виде, для того чтобы лишний раз напомнить о симметричности области определения такой функции.

С терминами *четная* и *нечетная* также возникает языковой эффект, похожий на тот, о котором мы ранее уже говорили: свойства четности и нечетности для функций не являются **отрицаниями** друг друга, как можно подумать, исходя из четности и нечетности натуральных и целых чисел. Равенства $f(-x) = f(x)$ и $f(-x) = -f(x)$ не противоречат, как может показаться, друг другу, но могут выполняться одновременно — правда, только в случае, когда $f(x) = f(-x) = 0$ («особое» число 0, как вы уже многократно убеждались в разных ситуациях, нередко «отравляет жизнь»).

Поэтому функция может быть одновременно и четной, и нечетной, и простейшим примером такой функции является постоянная функция — *тождественный нуль*, т.е. равная 0 при всех значениях аргумента. Можно и описать все функции, одновременно четные и нечетные — это, очевидно, такие функции, имеющие в качестве области определения произвольное множество чисел, но принимающие на ней только нулевое значение.

При решении задач, где требуется выяснить, является ли заданная функция четной или нечетной, многие часто склонны и считают достаточным судить только по внешнему виду главного равенства, и считать, например, что функция $y = x^3 + 2x^2$ не является ни четной, ни нечетной, потому что, как обычно пишут,

$$(-x)^3 = x^3,\ 2(-x)^2 = 2x^2,\ (-x)^3 + 2(-x)^2 = -x^3 + 2x^2,$$
$$\text{а } -x^3 + 2x^2 \neq x^3 + 2x^2,\ -x^3 + 2x^2 \neq -\left(x^3 + 2x^2\right).$$

Поэтому ниже мы приводим, можно сказать, хрестоматийный пример функции, где опора только на внешний вид выражения приводит к неверному выводу: это функция $y = f(x) = \log_c\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$. Выражение $f(-x) = \log_c\left(-x + \sqrt{x^2+1}\right)$, судя по его внешнему виду, не совпадает ни с $f(x)$, ни с $-f(x)$, а на самом деле

$$f(x) + f(-x) = \log_c\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + \log_c\left(-x + \sqrt{x^2+1}\right) =$$
$$= \log_c\left(\left(x^2+1\right) - x^2\right) = \log_c 1 = 0,$$

т.е. $f(x) = -f(-x)$, так что функция $y = \log_c\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ — нечетная.

Поэтому для доказательства того, что заданная функция не является ни четной, ни нечетной, надо приводить подтверждающие этот факт примеры. Обычно это очень просто: например, для рассмотренной выше функции $y = x^3 + 2x^2$, взяв 1 и –1, получим, что $f(-1) = 1$, $f(1) = 3$, так что $f(-1)$ не равно ни $f(1)$, ни $-f(1)$. Это рассуждение есть *приведение контрпримера*, и далее мы его рассмотрим специально, в общем виде.

Целые остатки. Решения задач на остатки с вычислительной точки зрения можно несколько упростить, если вместо обычных остатков от деления на натуральное число

n — чисел от 0 до $n-1$ — рассматривать целые остатки — целые числа, меньшие или равные по модулю, чем $\frac{n}{2}$.

Например, всякое целое число можно единственным образом представить в одном из видов $7k$, $7k \pm 1$, $7k \pm 2$, $7k \pm 3$ или в одном из видов $8k$, $8k \pm 1$, $8k \pm 2$, $8k \pm 3$, $8k + 4$, так что числа 0, ± 1, ± 2, ± 3 также можно считать остатками от деления на 7, а числа 0, ± 1, ± 2, ± 3, 4 — остатками от деления на 8. (Заметим, что число -4 в «целые остатки» не включается: число вида $8n - 4$ можно записать и в виде $8(n-1) + 4$, т.е. одно и то же число может быть представлено в двух различных видах, а такая неоднозначность противоречит всей идеологии деления с остатком.)

Для целых остатков остаются в силе все свойства обычных остатков, но при использовании целых остатков решение задач упрощается. Например, число 34^{745} при делении на 7 дает тот же остаток, что и $(-1)^{745} = -1$, т.е. при переводе на язык обычных остатков — остаток 6.

Эффективно используются целые остатки при применении «языка сравнений»: ясно, что вычисления с ними проще, чем с обычными, потому что они меньше по модулю (в данном случае модуль — это абсолютная величина).

Остаток от деления суммы двух натуральных чисел на натуральное число k совпадает с остатком от деления на k, который при делении на k дает сумма их остатков.

Остаток от деления произведения двух натуральных чисел на натуральное число k совпадает с остатком от деления на k, который при делении на k дает произведение их остатков.

Эти свойства доказываются в одну строчку, но во втором случае используется та же группировка, что мы применяли для доказательства одного свойства **сравнений**. Это и не удивительно, поскольку свойства остатков и делимости **сравнений** остатков и свойства **сравнений** — это на самом деле одни и те же утверждения, только сформулированные на разных языках.

Ясно, что эти свойства обобщаются на любое число слагаемых и сомножителей, и поэтому отсюда можно получить утверждение, важное для степеней натуральных и целых чисел: *Если число a при делении на натуральное число k дает остаток r, то числа a^n и r^n при делении на k дают равные остатки.*

Поэтому, например, 34^{745} при делении на 7 дает тот же остаток, что и 6^{745}, что уже немного легче. А если заметить, что $6^2 = 36$ при делении на 7 дает остаток 1, то, пользуясь свойствами степеней, легко найти остаток, который дает вся степень 34^{745} при делении на 7:

$$6^{745} = 6^{744} \cdot 6 = 36^{372} \cdot 6$$

и поскольку первый множитель дает остаток 1, а второй — остаток 6, то искомый остаток равен 6.

Числа трансцендентные и алгебраические. Вы почти наверняка слышали, что число π не только иррационально, но и *трансцендентно* — это слово, очевидно, латинского происхождения означает, что π не является корнем никакого алгебраического уравнения с целыми коэффициентами. Например, $\pi^3 + \pi^2 \neq 41$ — иначе π было бы корнем уравнения $x^3 + x^2 - 41 = 0$. Кстати, $\pi^3 + \pi^2 = 41{,}00627...$, так что опровергнуть равенство $\pi^3 + \pi^2 = 41$ вручную, без электроники весьма непросто.

Заметим, что иррациональность числа также связана с уравнениями с целыми коэффициентами. Рациональные числа — это корни линейных уравнений с целыми коэффициентами: равенство $a = \frac{p}{q}$ можно записать в виде $qa = p$, т.е. a — корень уравнения $qx - p = 0$. Иными словами, понятие трансцендентного числа — это сильное обобщение понятия иррационального числа.

Более подробно об алгебраических числах мы будем говорить в выпуске, где будет раздел, посвященный действительным числам, а сейчас заметим только, что знание трансцендентности числа π, а стало быть, и понимание этого факта, как вы могли убедиться выше, может оказаться полезным, а может быть, и необходимым для решения конкретных школьных задач — например, в вопросе о периодичности функции $y = \sin x^2$.

«Экзотические» функции. Такого понятия в математическом языке конечно же нет, и этим словом мы называем здесь лишь функции $y = [x]$ — целую часть x, $y = \{x\}$ — дробную часть x, с которыми вы наверняка уже встречались, и совсем не знакомые вам *функцию* $y = \operatorname{sgn} x$ (сигнум x) и *функцию Дирихле*.

Целая часть, сигнум и функция Дирихле необычны в первую очередь тем, что они задаются *словесно*, а не с помощью выражения с переменной, как обычные школьные функции.

Так, $y = \operatorname{sgn} x$ определяется тем, что y равен 1 при $x > 0$, равен 0 при $x = 0$ и равен -1 при $x < 0$, а функция Дирихле равна 1 при рациональном значении аргумента и равна 0 при иррациональном его значении. Можно сказать, что эти функции *кусочно заданные*, хотя назвать множества рациональных и иррациональных «кусками» можно лишь с некоторой натяжкой. А $[x]$ определяется как наименьшее целое число, меньшее или равное x. Впрочем, ее можно задать и «кусочно», правда, для этого понадобится бесконечно много «кусков»: на каждом промежутке вида $[k, k + 1)$ функция равна k, но такое ее задание вряд ли понятнее, чем исходное — словесное.

Между тем в математике *доказано*, причем совсем не сложно, что эти функции и невозможно задать с помощью обычных: как бы вы ни пытались комбинировать всевозможные рациональные, тригонометрические, показательные и логарифмические функции, вам не удастся сконструировать ни одну из этих функций — эти функции не являются *элементарными* в точном математическом понимании этого слова.

В то же время эти «экзотические» функции чрезвычайно полезны для овладения свойствами функций, необходимыми при изучении начал математической анализа, и служат, в частности, для построения всевозможных контрпримеров. Кстати, в любом вузе, в курсе «Высшая математика», вы с ними непременно встретитесь.

Так, функция Дирихле является простым примером периодической функции, отличной от постоянной и не имеющей основного, т.е. наименьшего положительного периода: ее периодом является любое рациональное число этой функции, а наименьшего положительного рационального числа не существует.

Учебное издание

Дорофеев Георгий Владимирович
Седова Елена Александровна
Шестаков Сергей Алексеевич

ЕДИНЫЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН

2009

МАТЕМАТИКА

Суперрепетитор

Директор редакции *И. Федосова*
Ответственный редактор *А. Жилинская*
Художественный редактор *Е. Брынчик*
Технический редактор *О. Куликова*
Компьютерная верстка *С. Терентьева*
Корректор *Н. Семенова*

ООО «Издательство «Эксмо»
127299, Москва, ул. Клары Цеткин, д. 18/5. Тел. 411-68-86, 956-39-21.
Home page: **www.eksmo.ru** E-mail: **info@eksmo.ru**

Оптовая торговля книгами «Эксмо»:
ООО «ТД «Эксмо». 142702, Московская обл., Ленинский р-н, г. Видное, Белокаменное ш., д. 1, многоканальный тел. 411-50-74.
E-mail: **reception@eksmo-sale.ru**

По вопросам приобретения книг «Эксмо» зарубежными оптовыми покупателями *обращаться в ООО «Дип покет»* ***E-mail:*** **foreignseller@eksmo-sale.ru**

International Sales: *International wholesale customers should contact «Deep Pocket» Pvt. Ltd. for their orders.* **foreignseller@eksmo-sale.ru**

По вопросам заказа книг корпоративным клиентам, в том числе в специальном оформлении, *обращаться по тел. 411-68-59 доб. 2115, 2117, 2118.*
E-mail: **vipzakaz@eksmo.ru**

Оптовая торговля бумажно-беловыми и канцелярскими товарами для школы и офиса «Канц-Эксмо»: Компания «Канц-Эксмо»: 142700, Московская обл., Ленинский р-н, г. Видное-2, Белокаменное ш., д. 1, а/я 5. Тел./факс +7 (495) 745-28-87 (многоканальный). e-mail: **kanc@eksmo-sale.ru**, сайт: **www.kanc-eksmo.ru**

Полный ассортимент книг издательства «Эксмо» для оптовых покупателей:
В Санкт-Петербурге: ООО СЗКО, пр-т Обуховской Обороны, д. 84Е. Тел. (812) 365-46-03/04. **В Нижнем Новгороде:** ООО ТД «Эксмо НН», ул. Маршала Воронова, д. 3. Тел. (8312) 72-36-70. **В Казани:** ООО «НКП Казань», ул. Фрезерная, д. 5. Тел. (843) 570-40-45/46. **В Самаре:** ООО «РДЦ-Самара», пр-т Кирова, д. 75/1, литера «Е». Тел. (846) 269-66-70. **В Ростове-на-Дону:** ООО «РДЦ-Ростов», пр. Стачки, 243А. Тел. (863) 220-19-34. **В Екатеринбурге:** ООО «РДЦ-Екатеринбург», ул. Прибалтийская, д. 24а. Тел. (343) 378-49-45. **В Киеве:** ООО «РДЦ Эксмо-Украина», ул. Луговая, д. 9. Тел./факс (044) 501-91-19. **Во Львове:** ТП ООО «Эксмо-Запад», ул. Бузкова, д. 2. Тел./факс: (032) 245-00-19. **В Симферополе:** ООО «Эксмо-Крым», ул. Киевская, д. 153. Тел./факс (0652) 22-90-03, 54-32-99. **В Казахстане:** ТОО «РДЦ-Алматы», ул. Домбровского, д. 3а. Тел./факс (727) 251-59-90/91. gm.eksmo_almaty@arna.kz

Подписано в печать 10.02.2009.
Формат 60x90 1/16. Гарнитура «Школьная». Печать офсетная.
Бум. тип. Усл. печ. л. 28,0.
Доп. тираж 5000 экз. Заказ № 114.

Отпечатано в ГП ПО «Псковская областная типография».
180004, г. Псков, ул. Ротная, 34.

ИНТЕНСИВНАЯ ПОДГОТОВКА
ЕДИНЫЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН

ЕГЭ 2009

МАТЕМАТИКА

СУПЕРРЕПЕТИТОР

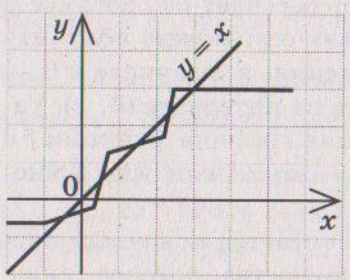
МОСКВА эксмо 2009

314. График функции f пересекает ось ординат — это то же самое, что функция определена в точке 0. Но если это так, то она принимает в этой точке единственное значение, так что второй точки пересечения графика с осью не может быть.

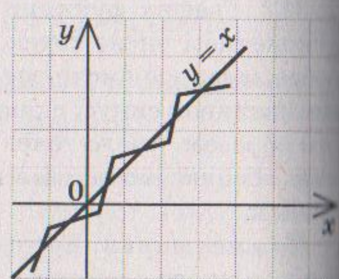
315. График функции f пересекает прямую $x = a$ — это то же самое, что функция определена в точке a. Но если это так, то она принимает в этой точке единственное значение, так что второй точки пересечения графика с прямой не может быть.

316. Если предположить, что график убывающей функции пересекает прямую $y = c$ более одного раза, это будет означать, что функция принимает одно и то же значение в двух различных точках, что противоречит ее убыванию.

317. Взяв прямую $y = x$, построим кривую линию, проходящую, например, через точку $(-1, 0)$ и для положительных значений x возрастающую и «навивающуюся» на эту прямую. Процесс «навивания» можно оборвать при получении нужного числа точек пересечения и от последней точки продолжить график горизонтально (рис. а). Ясно, что также не обрывая этот процесс, можно получить график функции, имеющий бесконечное число точек пересечения с прямой $y = x$ (рис. б).



а)



б)

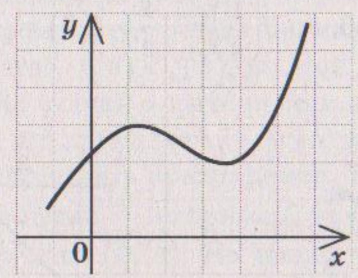
Комментарий. Разумеется, простейшим решением этой задачи является сама функция $y = x$: ее график имеет бесконечно много общих точек с самим собой. Правда, здесь

возникает тонкий терминологический момент — есть ли разница между понятиями «общая точка» и точка пересечения»: для теории множеств это одно и то же, но второе имеет геометрический оттенок и нельзя сказать, например, что прямая в пространстве пересекает любую плоскость, которой она принадлежит, в бесконечном числе точек.

Приведенный пример «освобождает» от необходимости учитывать эти терминологические тонкости. Если учащиеся уже знакомы с достаточным условием возрастания функции, основанным на производной, то решение этой задачи становится очевидным: нужным примером является функция $y = 2x + \sin x$, ее производная равна $2 + \cos x$, т.е. всегда положительна.

318. Функция $y = x$ является возрастающей и если предположить, что убывающая функция $y = f(x)$ пересекает прямую $y = x$ не менее чем в двух точках (x_1, y_1) и (x_2, y_2), где $x_1 < x_2$, то в силу возрастания функции $y = x$ должно выполняться неравенство $y_1 < y_2$, а в силу убывания функции $y = f(x)$ — неравенство $y_1 > y_2$, что невозможно.

319. Функция, график которой изображен на рисунке, не является ни возрастающей, ни убывающей. Самыми «ранними» примерами таких функций являются квадратичная функция и функция $y = \dfrac{1}{x}$.



320. Ясно, что у любой «обычной» функции такие интервалы найдутся — в этом легко убедиться и вспоминая графики знакомых функций, и рисуя произвольным образом

329. Пример функции, требуемой в условии задачи, можно сконструировать из любой немонотонной функции. Одной из самых простых немонотонных функций является $y = x^2$ и сумма ее с немонотонной функцией $y = -(x-1)^2$ есть монотонная функция $y = 2x - 1$.

330. Функция $y = \sin x$ имеет основной период 2π, функция $y = \sin \pi x$ — основной период $\frac{2\pi}{\pi} = 2$, а чтобы наименьшее и наибольшее значения стали соответственно -3 и 3, ее надо умножить на 3 — при таком умножении основной период функции не изменится.

331. Функция $y = \sin x$ имеет основной период 2π, функция $y = \sin \pi x$ — основной период $\frac{2\pi}{\pi} = 2$, ее наименьшее и наибольшее значения равны соответственно -1 и 1, функция $y = 3\sin \pi x$ имеет наименьшее и наибольшее значения -3 и 3, и поэтому для выполнения условия задачи ее нужно «сдвинуть вниз» на 1. От проделанных с функцией $y = \sin \pi x$ преобразований ее основной период 2 не изменится.

332. Рассуждая так же, как при решении задачи 331, получаем, что функция $y = \sin \pi x$ имеет основной период 2. Но ее наименьшее и наибольшее значения равны соответственно -1 и 1 и с помощью умножения ее на число и прибавления числа надо отрезок $[-1, 1]$ «превратить» в отрезок $[-5, 13]$. Заметим, что «размах» синуса, т.е. разность между двумя его крайними значениями равен 2, а нам нужен «размах» $13 - (-5) = 18$, поэтому перейдем к функции $y = 9\sin \pi x$. Крайние значения этой функции — это -9 и 9, так что $[-1, 1]$ «превратился» в $[-9, 9]$ и остается его «сдвинуть вверх» на 4, т.е. перейти к функции $y = 9\sin \pi x + 4$.

333. Так как $\sin x \cdot \cos x = \frac{\sin 2x}{2}$, то основной период функции y равен π.

334. Так как

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cdot \cos x} = \frac{2}{\sin 2x},$$

основной период функции $y = \sin 2x$ равен π, то основной период функции y равен также π (см. Компендиум).

Комментарий. Не более сложно и решение, связанное с подстановкой отдельных значений переменной: при $x = \frac{\pi}{4}$ и при $x = \frac{5\pi}{4}$ значение функции равно 2, а при промежуточных значениях оно не равно 2 — равенство $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 2$ верно только при $\operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} x = 1$ (в первой и третьей четвертях можно сослаться на неравенство Коши), а при $\frac{\pi}{4} < x < \frac{5\pi}{4}$ эти равенства неверны, так что число, меньшее π, не может быть периодом данной функции.

335. Основные периоды функций $y = \sin 3x$ и $y = 2\cos 5x$ равны соответственно $\frac{2\pi}{3}$ и $\frac{2\pi}{5}$, а отрезком наименьшей длины, в котором целое число раз «укладываются» как один, так и другой периоды, будет отрезок длиной 2π.

336. Функция является периодической — ее периодом, например, является 6π.

337. Достаточно взять число, являющееся общим периодом для синуса и косинуса, т.е. $2k\pi$, с таким k, которое «съело» бы знаменатели — например, $k = 7 \cdot 8$, так что $2 \cdot 7 \cdot 8\pi$ — период обоих сомножителей, а значит, и данной функции.

338. Периодическая функция каждое свое значение принимает бесконечно много раз, а квадратичная функция — не более двух раз.

339. Показательная функция — всегда возрастающая или убывающая, а такая функция не может быть периодической.

340. Если T — период данной функции, то при $x = 0$ она принимает значение 0, и следовательно, уравнение $x + \sin x = 0$ должно иметь бесконечно много корней вида kT. С другой стороны, равенство $x = -\sin x$ показывает, что всякий корень этого уравнения по модулю не больше 1. Полученное противоречие показывает, что функция y не имеет периода.

341. Заданная функция является возрастающей как сумма двух возрастающих, а возрастающая функция не может быть периодической, поскольку в противном случае она принимала бы каждое свое значение сколь угодно много раз. Из этого немедленно следует, что заданная функция не является периодической.

342. Если T — период данной функции, то значение $y(0) = -1$ она принимает во всех точках вида kT. Но если $3x^5 - \cos x = -1$, то $3x^5 = \cos x - 1$, откуда $-2 \le 3x^5 \le 0$, т.е. все корни данного уравнения лежат на некотором отрезке, так что множество его решений не может содержать множество точек вида kT.

343. Рассмотрим уравнение $\cos x + \cos\sqrt{2}x = 2$. Так как оба слагаемых не больше 1, то равенство выполняется только в случае, когда оба они равны 1, т.е. При $x = 2k\pi = \frac{2n\pi}{\sqrt{2}}$, где k и n — целые числа. Это равенство, однако, верно только при $k = n = 0$ — в противном случае число $\sqrt{2} = \frac{k}{n}$ было бы рациональным. Поэтому данная функция обращается в 0 только в одной точке, а для периодической функции это невозможно.

344. Пусть данная функция f имеет период T. Тогда $f(T) = f(0) = 1$, так что

$$\cos\sqrt{2}T \cdot \cos\pi T = 1, \quad \cos\sqrt{2}T + \cos\pi T = 2$$

и значит, $\cos\sqrt{2}T = \cos\pi T = 1$, поскольку основные периоды функций $y = \cos\sqrt{2}T$ и $y = \cos\pi T$ равны соответственно $\frac{2\pi}{\sqrt{2}}$ и $\frac{2\pi}{\pi} = 2$, то $T = \frac{2k\pi}{\sqrt{2}} = 2n$, $\frac{\pi}{\sqrt{2}} = \frac{n}{k} = n$, — рациональное число. Отсюда следует, что π^2 — также рациональное число, а это неверно: если $\pi^2 = \frac{p}{q}$, то $q\pi^2 - p = 0$, и π является корнем уравнения $qx^2 - p = 0$, т.е. не является трансцендентным.

Комментарий. Мы имеем право использовать утверждение, что π не является трансцендентным числом, в той же мере, что и факт, что оно не является иррациональным числом — и то, и другое в школьном курсе объявляется, но ни то, ни другое не доказывается.

345. Если число α — рациональное, $\alpha = \frac{p}{q}$, то функция $y = \cos\alpha x$ имеет период $2q\pi$, но это число является и периодом функции $y = \cos x$, а значит, и периодом заданной функции. С другой стороны, если эта функция имеет период T, то ее значения в точках T и 0 равны, так что $\cos T + \cos\alpha T = 2$, а так как оба слагаемых не больше 1, то равенство выполняется только в случае, когда оба они равны 1, т.е. при $x = 2k\pi = \frac{2n\pi}{\alpha}$, где k и n — целые числа. Отсюда $\alpha = \frac{n}{k}$, т.е. α — рациональное число.

346. Функция является периодической — ее периодом, например, является число 2.

347. Функция $y = \{3x\}$ имеет период 1: $\{3x + 3\} = \{3x\}$ — прибавление целого числа не меняет его дробной части и 1 является периодом функции $y = \sin 8\pi x$: $\sin 8\pi(x+1) = \sin(8\pi x + 8\pi) = \sin 8\pi x$.

348. Из равенства $(x + T) + \{x + T\} = x + \{x\}$ $(T \neq 0)$ при $x = 0$ получаем, что $T + \{T\} = 0$, откуда следует, что $T < 0$. Иными словами, любой период данной функции отрицателен, а этого не может быть: если T — период функции, то и $-T$ — ее период.

349. Из равенства $(x+T)\cdot\{x+T\} = x\cdot\{x\}$ $(T \neq 0)$ при $x = 0$ получаем, что $T\cdot\{T\} = 0$, $\{T\} = 0$, так что T — целое число. Поэтому $\{x+T\} = \{x\}$ и равенство $(x+T)\cdot\{x+T\} = x\cdot\{x\}$ принимает вид $(x+T)\cdot\{x\} = x\cdot\{x\}$. Положив здесь $x = \frac{1}{2}$, получим отсюда $\frac{1}{2} + T = \frac{1}{2}$, что противоречит условию $T \neq 0$. Таким образом, никакое число T не является периодом заданной функции.

350. Если T — период функции Дирихле, то $D(0+T) = D(0) = 1$, т.е. T — рациональное число. Обратно, если T — любое рациональное число, то при рациональном x число $x + T$ также рационально, а при иррациональном x — иррационально.

351. Пусть T — период функции y. Так как $y(0) = 0 + D(0) = 1$, то $y(T) = y(0) = 1$, т.е. T — рациональное число. Но тогда T — период функции $y = D(x)$, а следовательно, и разности $y = (x + D(x)) - D(x) = x$. Но функция $y = x$ не является периодической.

352. Если некоторая функция $y = f(x)$ имеет период T, то функция $y = f(kx)$ $(k \neq 0)$ имеет, как известно, период kT, поскольку периодом функции Дирихле является, например, 2 (см. Компендиум), то периодом заданной функции является $\frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.

353. Если число x рационально, то число $x\sqrt{2}$ иррационально, так что $D(x\sqrt{2}) = 0$, т.е. $y(x) = 0$. Если же число x иррационально, то $D(x) = 0$, т.е. $y(x) = 0$. Иными словами, функция y тождественно равна 0 и ее периодом является любое ненулевое число.

355. Примером периодической функции, не имеющей наибольшего значения, является функция $y = \operatorname{tg} x$.

356. Примером периодической функции, не имеющей наибольшего значения, является функция $y = \{x\}$.

Комментарий. Очевидно, что приведенная функция не имеет наибольшего значения, но и строгое доказательство этого утверждения не так уж сложно. Именно, если a есть ее наибольшее значение, то поскольку все ее значения меньше 1, то и $a < 1$, $0 < a < 1$ — данная функция отрицательных значений не принимает. Но взяв между a и 1, число $\frac{a+1}{2}$ получим, что $\left\{\frac{a+1}{2}\right\} = \frac{a+1}{2}$, так как $\frac{a+1}{2} > a > 0$, т.е. это число является значением функции, большим ее наибольшего значения — противоречие. В качестве примера можно рассмотреть и функцию, которая при всех $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ совпадает с функцией $y = \operatorname{tg} x$, а при всех x, для $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ принимает значение 0.

Пример всюду определенной периодической функции, не имеющей ни наибольшего, ни наименьшего значений, можно получить также, «подправив» хорошо известную неограниченную периодическую функцию — например, рассмотрев функцию, которая для $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, где k — любое целое число, совпадает с функцией $y = \operatorname{tg} x$, а при $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ равна нулю.

357. В решении задачи 354 приведена периодическая функция $y = \{x\}$, не имеющая наибольшего значения. При изменении знака функции ее периодичность и область определения не меняются, а наибольшее и наименьшее значения меняются местами с изменением знака: если $a \le f(x) \le b$, то $-a \ge -f(x) \ge -b$. Поэтому периодическая функция $y = -\{x\}$ не имеет наименьшего значения.

358. Примером периодической функции, не имеющей ни одной точки экстремума, является функция $y = \mathrm{tg}x$.

359. Положительный ответ на вопрос задачи дает функция Дирихле. Ее периодом является любое ненулевое рациональное число (см. задачу 350), а наименьшего положительного рационального числа не существует.

Комментарий. Такую функцию можно найти и «ближе» — условию удовлетворяет любая постоянная функция $y = a$, где a — число.

360. Если функция f имеет период $T > 0$, то $x < x + T$, но $f(x)$ равно, а не меньше или больше $f(x + T)$, так что f не является ни возрастающей, ни убывающей, т.е. не является монотонной.

361. Эта задача почти совпадает с задачей 357: если бы монотонная функция f была периодической, то периодическая функция f была бы монотонной.

362. Перебирая известные периодические функции, можно найти функцию с нужными свойствами: $y = \mathrm{tg}\, x$.

363. Искомый пример периодической функции можно получить, «подправив» периодическую функцию, принимающую сколь угодно большие значения: например, рассмотрев функцию, которая для $x \ne \frac{\pi}{2} + k\pi$, где k — любое целое число, совпадает с функцией $y = \mathrm{tg}\, x$, а при $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ равна нулю.

364. Если $g(x + T) = g(x)$ для некоторого T, то $f(g(x + T)) = f(g(x))$, так что функция $y = f(g(x))$ имеет период T.

365. Если T — период функции f, то как из равенства $f(x + T) = f(x)$ получить равенство $f(g(x + T)) = f(g(x))$, совершенно неясно — одновременно «превратить» $x + T_1$ в $g(x + T_1)$ — эта функция может иметь другой период, а x в $g(x)$. Поэтому положительный ответ к задаче представляется маловероятным.

Попробуем привести контрпример. Возьмем «внешнюю» функцию «хорошую» — например, $y = \sin x$, а «внутреннюю» — совсем «плохую» — скажем, $\frac{1}{x}$. В результате образовалась функция $y = \sin\frac{1}{x}$, которая не определена в единственной точке — при $x = 0$. Предположим, что она все-таки периодическая с периодом $T \ne 0$. Тогда из определения периодической функции следует, что ее значение в точке $x = T$ равно значениям во всех точках, отстоящих от нее на расстояние, равное длине периода, в частности, $\sin\frac{1}{T} = \sin\frac{1}{T - T}$. Ввиду абсурдности последнего равенства делаем вывод, что эта функция не является периодической.

366. Самый простой, по-видимому, пример — с точки зрения доказательства и по крайней мере с точки зрения вычислений — связан с «экзотической» функцией — функцией Дирихле. Рассмотрим функции $y = D(x)$ и $y = D\left(x\sqrt{2}\right)$ — число 1 является периодом первой из них, а периодом второй, например, является $\sqrt{2}$ (см. задачу 350). Предположим теперь, что сумма $y = D(x) + D\left(x\sqrt{2}\right)$ имеет период T, т.е. для любого x выполняется равенство $D(x + T) + D\left((x + T)\sqrt{2}\right) = D(x) + D\left(x\sqrt{2}\right)$. Из этого равенства при $x = 0$ получаем, что

$D(T) + D\left(T\sqrt{2}\right) = 2D(0) = 2$, а значит, $D(T) = D\left(T\sqrt{2}\right) = 1$, т.е. числа T и $T\sqrt{2}$ оба рациональные. Но тогда рационально и число $\sqrt{2}$, что неверно. Полученное противоречие показывает, что сумма периодических функций может не быть периодической.

Комментарий. Впрочем, нужным примером является функция $\cos x + \cos x\sqrt{2}$, рассмотренная в задаче 343.

367. Заменив в заданном равенстве x на $x + a$, получим $f(x + 2a) = -f(x + a) = f(x)$, так что $2a$ — период функции f.

368. Условие задачи показывает, что если $x \in A$, то $f(x) \neq 0$ и $x + a \in A$. Тогда $x + 2a \in A$ и $f(x + a) \neq 0$ и заменив в заданном равенстве x на $x + a$, получим: $1 = f(x + a) \cdot f(x + 2a) = \dfrac{1}{f(x)} \cdot f(x + 2a)$, $f(x) = f(x + 2a)$, так что $2a$ — период функции f.

Комментарий. Заметим, что условие выполняется для чуть искаженного тангенса — для функции $y = \operatorname{tg} x$ и числа $a = \dfrac{\pi}{2}$, если из области определения тангенса убрать точки $x = k\pi$: $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg}\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = 1$. А для «чистого» тангенса условие задачи не выполняется — последнее равенство неверно, например, для $x = 0$.

369. Условие задачи показывает, что если $x \in D(f)$, то $f(x) \neq 1$ и $x + a \in D(f)$. Тогда $x + a \in D(f)$, и $f(x + a) \neq 1$ и заменив в заданном равенстве x на $x + a$, получим:

$$f(x + 2a) = \frac{1 + f(x + a)}{1 - f(x + a)} = \frac{1 + \dfrac{1 + f(x)}{1 - f(x)}}{1 - \dfrac{1 + f(x)}{1 - f(x)}} = \frac{1}{f(x)},$$ а заменяя здесь x на $x + 2a$, точно так же получаем равенство $f(x + 4a) = f(x)$, т.е. $4a$ — период функции f.

370. Умножив числитель и знаменатель дроби $\dfrac{x-2}{2x-3}$ на 5 — знаменатель дроби $\dfrac{3}{5}$, получим $f(x) = \dfrac{5x - 10}{10x - 15}$, а поскольку при $x = \dfrac{3}{5}$ имеем $5x = 3$ и $10x = 6$, то $f\left(\dfrac{3}{5}\right) = \dfrac{3 - 10}{6 - 15} = \dfrac{7}{9}$.

371. Положим $t = x - 3$. Тогда $x = t + 3$ и подставив $t + 3$ вместо x в заданное равенство, получим: $f((t + 3) - 3) = 2(t + 3)$, $f(t) = 2t + 6$, и следовательно, $f(x) = 2x + 6$.

372. Положим $t = 2x + 3$ и перейдем к аргументу t: $x = \dfrac{t-3}{2}$, $3x + 2 = 3 \cdot \dfrac{t-3}{2} + 2 = \dfrac{3t - 5}{2}$ и так как $f(2x + 3) = 3x + 2$, то $f(t) = \dfrac{3t-5}{2}$. Подставив в это равенство $t = 2x - 3$, получим:

$$f(2x - 3) = \frac{3(2x - 3) - 5}{2} = 3x - 7.$$

373. Подставив вместо x выражение $\dfrac{1}{x-1}$ и умножив числитель и знаменатель дроби $f\left(\dfrac{1}{x-1}\right)$ на $x - 1$, в числителе получим $1 - 2(x - 1) = 3 - 2x$, в знаменателе $2 - 3(x - 1) = 5 - 3x$, так что $f\left(\dfrac{1}{x-1}\right) = \dfrac{3 - 12x}{5 - 3x} = \dfrac{2x - 3}{3x - 5}$.

374. Положим $t = 2x - 3$. Тогда

$$x = \frac{t+3}{2} \text{ и } f(t) = \sqrt[3]{\frac{t+3}{2}} - 1.$$

375. Положим $t = \sqrt[3]{x}$. Тогда $x = t^3$ и $f(t) = t^3 + 1$, и $f(x) = x^3 + 1$.

376. Положим $t = \sqrt{x}$. Тогда $t \geq 0$ и $x = t^2$, и $f(t) = t^2 + 1$, $(t \geq 0)$ и $f(x) = x^2 + 1 \quad (x \geq 0)$.

377. Так как $f(f(x)) = \dfrac{1 - \dfrac{1-x}{1+x}}{1 + \dfrac{1-x}{1+x}} = \dfrac{2x}{2} = x$, то заданное уравнение является тождеством на области определения функции f, т.е. при $x \neq -1$. Поэтому решением данного уравнения являются все значения x, кроме -1.

378. Так как $f(f(x)) = \dfrac{\dfrac{x+1}{x-1} + 1}{\dfrac{x+1}{x-1} - 1} = \dfrac{2x}{2} = x$, то заданное уравнение имеет вид $-x = x$, откуда $x = 0$. Однако задачу еще нельзя считать решенной: мы доказали лишь, что если x — корень заданного уравнения, то $x = 0$, но не доказали обратного утверждения: если $x = 0$, то x — корень заданного уравнения — а это обратное утверждение, в принципе может оказаться ложным. Поэтому значение $x = 0$ еще следует проверить: $f(f(0)) = f(-1) = 0$, т.е. 0 — все-таки корень данного уравнения.

379. Так как $f(f(x)) = \dfrac{\dfrac{x+1}{x-1} + 1}{\dfrac{x+1}{x-1} - 1} = \dfrac{2x}{2} = x$, то заданное уравнение имеет вид $x = x$, и следовательно, x — любое число, кроме 1, не входящей в область определения данной функции.

380. Сделаем первый шаг:

$$f(f(x)) = \frac{\dfrac{x+1}{x-1} + 1}{\dfrac{x+1}{x-1} - 1} = \frac{2x}{2} = x,$$

а так как число 2006 — четное, то данное уравнение представляет собой равенство $x = x$ и выполняется при любом x. Значит, его решением является любое число из его области определения, т.е. при $x \neq 1$.

381. Так как

$$f(f(x)) = \frac{\dfrac{x-1}{x+1} - 1}{\dfrac{x-1}{x+1} + 1} = -\frac{2}{2x} = -\frac{1}{x};$$

$$f(f(f(x))) = f\left(-\frac{1}{x}\right) = \frac{-\dfrac{1}{x} - 1}{-\dfrac{1}{x} + 1} = -\frac{x+1}{x-1} = \frac{x+1}{1-x};$$

$$f(f(f(f(x)))) = f\left(\frac{x+1}{1-x}\right) = \frac{\dfrac{x+1}{1-x} - 1}{\dfrac{x+1}{1-x} + 1} = \frac{2x}{2} = x,$$

так что при четырехкратном применении к x функции f мы получаем x, а 2008 делится на 4. Поэтому заданное уравнение имеет вид $x = x$ и выполняется при любом x, а его корнем является любое значение x из его области определения, т.е. при $x \neq -1$.

382. Сделаем первый шаг:

$$f(f(x)) = \frac{1 - \dfrac{1-x}{1+x}}{1 + \dfrac{1-x}{1+x}} = \frac{2x}{2} = x$$

и поскольку число 2006 четное, то данное уравнение представляет собой равенство $x = x$, т.е. выполняется при любом x. Следовательно, его решением является любое число из его области определения, т.е. при $x \neq -1$.

383. Так как $f(f(x)) = \dfrac{\dfrac{x+1}{x-1}+1}{\dfrac{x+1}{x-1}-1} = \dfrac{2x}{2} = x$, а число 2005 нечетное, то данное уравнение представляет собой равенство $f(x) = x$, т.е.

$$\frac{x+1}{x-1} = x,\quad x^2 - x = x + 1,\quad x^2 - 2x - 1 = 0,\quad x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}.$$

384. Так как $f(f(f(f(x)))) = x$ (см. решение задачи 381), т.е. при четырехкратном применении к x функции f мы получаем x, а 2005 при делении на 4 дает остаток 1, то данное уравнение имеет вид $f(x) = x$,

$$\frac{x-1}{x+1} = x,\quad x^2 + x = x - 1,\quad x^2 = -1,$$

и значит, не имеет корней.

385. Так как $f(f(f(f(x)))) = x$ (см. решение задачи 381), т.е. при четырехкратном применении к x функции f мы получаем x и поскольку 2006 при делении на 4 дает остаток 2, то данное уравнение имеет вид $f(f(x)) = x$, $-\dfrac{1}{x} = x$, $x^2 = -1$ и, следовательно, не имеет корней.

386. Так как $f(f(f(f(x)))) = x$ (см. решение задачи 381), т.е. при четырехкратном применении к x функции f мы получаем x, и поскольку 2007 при делении на 4 дает остаток 3, то заданное уравнение имеет вид $f(f(f(x))) = x$, $\dfrac{x+1}{1-x} = x$, $x + 1 = x - x^2$, $x^2 = -1$ и, следовательно, не имеет корней.

387. Заменив в данном тождестве x на $1 - x$, получим тождество $2f(1-x) + f(x) = (1-x)^2$ и, вычитая его из удвоен-

ного данного тождества, получаем $3f(x) = 3x^2 - (1-x)^2 = 2x^2 + 2x - 1$, откуда и находится единственное решение задачи.

388. Заменив в данном тождестве x на $\dfrac{1}{x}$, получим тождество $f\left(\dfrac{1}{x}\right) + 2f(x) = \dfrac{1}{x}$ и, вычитая из этого тождества, умноженного на 2, данное тождество, получаем $3f(x) = \dfrac{3}{x} - x$, откуда и находится единственное решение задачи $y = \dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{3}$.

389. Положив $\dfrac{4-2x}{x+2} = t$, будем иметь: $(x+2)t = 4 - 2x$, $x(t+2) = 4 - 2t$ и так как $t \neq -2$ (при $t = -2$ это равенство имеет вид $0 = 8$), то $x = \dfrac{4-2t}{t+2}$, а тогда заданное тождество принимает вид $f\left(\dfrac{4-2t}{t+2}\right) - 2f(t) = 1$, а поскольку обозначение переменной в тождестве не имеет значения, то меняя в нем букву t на x, получаем тождество $f\left(\dfrac{4-2x}{x+2}\right) - 2f(x) = 1$. Умножив обе части этого тождества на 2 и сложив его с данным, получим равенство $-3f(x) = 3$, т.е. $f(x) = -1$.

Комментарий. Заметим, что успех приведенного решения основан на том, что функция $y = \dfrac{4-2x}{x+2}$ совпадает со своей обратной — это видно из того, что при выражении x через t мы получили ту же самую — с точностью до обозначений формулу.

390. Не очень ясно, как получить нужное значение $f(100)$ с помощью подстановок в тождество конкретных значений x, и поэтому, как ни странно, оказывается проще найти сначала все функции, удовлетворяющие условию задачи, действуя так же, как в задачах 387, 388 и 389. Но для применения использованного при решении этих задач приема надо, чтобы дробь $\frac{2x+2}{3-x}$ превратилась в $1-t$, и поэтому положим $t = 1 - \frac{2x+2}{3-x} = \frac{1-3x}{3-x} = \frac{3x-1}{x-3}$, откуда, положив $\frac{2x+2}{3-x} = t$, будем иметь: $(3-x)t = 2x+2$, $x(t+2) = 3t-2$ и так как $t \neq -2$ (при $t=-2$ это равенство имеет вид $0 = 1$), то $x = \frac{3t-2}{t+2}$, а тогда $1 - x = 1 - \frac{3t-2}{t+2} = \frac{-2t+4}{t+2}$ и заданное тождество принимает вид $f\left(\frac{4-2t}{t+2}\right) - 2f(t) = 1$, а поскольку обозначение переменной в тождестве не имеет значения, то меняя в нем букву t на x, получаем тождество $f\left(\frac{4-2x}{x+2}\right) - 2f(x) = 1$. Умножив обе части этого тождества на 2 и сложив его с данным, получим равенство $-3f(x) = 3$, т.е. $f(x) = -1$.

391. Если f — постоянная функция, т.е. для любого $x \in \mathbf{R}$ имеем $f(x) = c$, где c — некоторое число, то $c = 1 - c$, откуда $c = \frac{1}{2}$, и полученная функция удовлетворяет условию.

392. Попробуем найти линейную функцию, удовлетворяющую условию задачи. Пусть $f(x) = ax + b$. Тогда равенство в условии означает, что при любом $x \in \mathbf{R}$ выполняется равенство $-ax + b = 1 - ax - b$, откуда $b = 1 - b$, т.е. $b = \frac{1}{2}$, а a — любое число. Поэтому условию задачи удовлетворяет, например, функция $y = x + \frac{1}{2}$.

Комментарий. В действительности условию задачи удовлетворяет любая функция, график которой симметричен относительно точки $\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$. Действительно, положив $t = x + \frac{1}{2}$,

$g(x) = f(x) - \frac{1}{2}$, подставим $x = t - \frac{1}{2}$ и $f(x) = g(x) - \frac{1}{2}$ вычислим сумму $g(t) + g(-t)$: $g(t) + g(-t) = g\left(x + \frac{1}{2}\right) + g\left(-x - \frac{1}{2}\right) = f\left(x + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} + f\left(-x - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} = 0$, т.е. функция g нечетная и ее график симметричен относительно начала координат. А график функции f получается сдвигом этого графика на $\frac{1}{2}$ вверх, так что симметричен относительно точки $\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$.

Можно было бы также воспользоваться критерием симметричности графика функции относительно точки: точка (a, b) является центром симметрии функции f тогда и только тогда, когда $f(2a - x) + f(x) = 2b$ (см. Компендиум), и при $a = 0$, $b = \frac{1}{2}$ имеем $f(-x) + f(x) = 1$.

393. Если функция f линейная, то при сложении $f(-x)$ и $f(x)$ коэффициент при x получается равным 0, а свободный член удваивается, и поэтому коэффициент при x может быть любым, а свободный член равен $\frac{1}{2}$.

394. При сложении квадратичных функций $f(-x)$ и $f(x)$ коэффициент при x^2 удваивается, т.е. получается квадратичная функция, не равная, естественно, 1.

395. Из данного тождества при $y = 1$ и любом x имеем равенство $f(x+1) = f(x) + f(1)$, т.е. разность $f(x+1) - f(x)$ постоянна, так что значения $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, ... образуют арифметическую прогрессию с разностью $f(1)$. Но подставляя в тождество $x = y = 1$, мы получаем, что $f(2) = 2f(1)$, откуда $f(1) = 3$ и по формуле общего члена арифметической прогрессии $f(x) = 3 + 3(x - 1) = 3x$.

396. Искомая функция определена и на множестве $\mathbf{N}$, а значит (см. задачу 395), $f(x) = 3x$ для любого натурального числа x. Эта функция, очевидно, удовлетворяет условию и этой задачи: тождество $f(x+y) = f(x) + f(y)$ для этой функции принимает вид $3(x+y) = 3x + 3y$.

Но задача еще не решена, так как, возможно, существуют и другие функции, удовлетворяющие условию, так что решение следует продолжить.

Из данного тождества при $x = y = 0$ следует равенство $f(0) = f(0) + f(0)$, откуда $f(0) = 0$, а при $y = -x$ получаем равенство $f(0) = f(x) + f(-x)$, так что $f(-x) = -f(x)$, т.е. функция f — нечетная, а тогда ее значения для отрицательных чисел полностью определяются значениями для натуральных чисел. И если $x < 0$ $-x \in N$, $f(-x) = 3(-x) = -3x = 3(-x)$, так что и для отрицательных функция f задается формулой $f(x) = 3x$. Осталось рассмотреть только $x = 0$, а для него эта формула также справедлива: $f(0) = 3 \cdot 0$, и следовательно, полученная функция является единственным решением.

397. Перебирая в памяти наиболее известные «школьные» функции, нельзя не «набрести» на функцию $y = \cos x$. Она удовлетворяет условию задачи, так как

$$\cos(x+y) + \cos(x-y) = 2\cos x \cdot \cos y.$$

398. Самая «экзотическая» функция в школьном курсе — это функция Дирихле $y = D(x)$. И она действительно удовлетворяет условию: если x — рациональное число, то число $2x$ — также рациональное, т.е. $D(x) = D(2x) = 1$, а если x иррационально, то $2x$ — также иррационально, т.е. $D(x) = D(2x) = 0$. Условию задачи удовлетворяет также и функция $y = \operatorname{sgn} x$, равная -1 при $x < 0$, 0 при $x = 0$ и 1 при $x > 0$.

399. Условию задачи удовлетворяет, например, функция $y = \operatorname{sgn} x$, равная -1 при $x < 0$, 0 при $x = 0$ и 1 при $x > 0$.

400. При $k = 1$ заданное тождество принимает вид $f(n+1) = f(n) \cdot f(1) = 2f(n)$, а это означает, что числа $f(1)$, $f(2)$, ..., $f(n)$, ... образуют геометрическую прогрессию со знаменателем 2, так что по формуле общего члена, $f(n) = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$.

401. Рассуждая так же, как в решении задачи 400, получаем, что для натуральных чисел n $f(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$, а тогда данное тождество принимает вид $\left(\frac{1}{2}\right)^{n+k} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k$ и выполняется для всех целых чисел — это известное свойство степени с целым показателем.

402. При $x = y = 0$ из заданного в условии тождества получаем, что $f(0) = f(0) \cdot f(0)$, и поскольку $f(0) \neq 0$, то $f(0) = 1$. А тогда при $y = -x$ получаем, что $f(0) = f(x) \cdot f(-x)$, откуда и следует утверждение, которое требуется доказать.

403. Подставив в данное тождество $y = x$, мы получим тождество с одной переменной x: $f(2x) = (f(x))^2$, а заменив в нем x на $\frac{x}{2}$, будем иметь тождество $f(x) = \left(f\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2$. Так как данная функция не принимает значения 0, то из этого тождества следует, что $f(x) > 0$ для любого x.

404. Искомая функция определена и на множестве **Z**, а значит (см. задачу 396), $f(x) = 3x$ для любого целого числа x. Эта функция, очевидно, удовлетворяет условию и этой задачи. Но остается неясным, нет ли других таких функций.

При $x = y = \frac{1}{2}$ из данного тождества получаем, что $f(1) = 2f\left(\frac{1}{2}\right)$, и поскольку $f(1) = 3$, то $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} = 3 \cdot \frac{1}{2}$, и таким же образом мы можем получить значения $f\left(\frac{1}{4}\right)$, $f\left(\frac{1}{8}\right)$, ... — по степеням двойки, но, например, значение $f\left(\frac{1}{3}\right)$ на этом пути найти не удастся — для этого нужна новая идея.

Как обычно, она берется «с потолка»: надо распространить данное тождество на 3 слагаемых, и сделать это нетрудно: $f(x+y+z) = f((x+y)+z) = f(x+y) + f(z) = f(x) + f(y) + f(z)$, и теперь при $x = y = z = \frac{1}{2}$ мы получаем, что $f\left(\frac{1}{3}\right) = f(1) = 3$, откуда $f\left(\frac{1}{3}\right) = 1 = 3 \cdot \frac{1}{3}$. Теперь мы можем вычислить значения f для степеней $\frac{1}{3}$, но как быть с $f\left(\frac{1}{5}\right)$ или, еще хуже, с $f\left(\frac{1}{357}\right)$?

Ясно, однако, что заданное тождество точно так же, как это сделано выше, можно обобщить и на 5, и на 357, и вообще, на любое число слагаемых, т.е. имеет место общее тождество $f(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)$ и положив в нем $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \frac{k}{n}$ (k, n — любые целые числа), получим, что $nf\left(\frac{k}{n}\right) = f(k) = 3k$, откуда $f\left(\frac{k}{n}\right) = 3 \cdot \frac{k}{n}$, и таким образом, на множестве $\mathbf{Q}$ функция f также задается формулой $f(x) = 3x$. Таким образом, эта функция является единственным решением задачи.

405. При $d \neq 0$ заданная функция не определена в точке $x = -\frac{d}{c}$, но определена в точке $x = \frac{d}{c}$, симметричной ей относительно начала координат. А область определения четной функции должна быть симметричной относительно начала координат, и значит, при $d \neq 0$ заданная функция не является четной.

Если же $d = 0$, то $f(1) = \frac{a+b}{c}$, $f(-1) = \frac{a-b}{c}$, и следовательно, $f(1) = f(-1)$ только при $b = 0$, а тогда $ad - bc = 0$, что противоречит условию задачи. Следовательно, заданная функция не является четной ни при каких значениях коэффициентов a, b, c, d.

Комментарий. При ограничениях $ad - bc \neq 0$, $c \neq 0$, наложенных на функцию y, заданная функция является **дробно-линейной** (см. Компендиум), и утверждение данной задачи означает, что дробно-линейная функция не может быть четной.

Геометрически это достаточно очевидно: график дробно-линейной функции получается из гиперболы $y = \frac{k}{x}$ двумя параллельными переносами вдоль осей координат, поэтому никак не может стать симметричным относительно оси ординат.

Можно провести и строгое рассуждение: если бы «новая» функция $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ оказалась четной, то ее график был бы симметричен относительно оси ординат, а график «старой» функции — гипербола $y = \frac{k}{x}$ — имел бы некоторую вертикальную ось симметрии $x = p$, т.е. выполнялось бы тождество $\frac{k}{2p-x} = \frac{k}{x}$ (см. Компендиум), что, конечно, невозможно.

406. При $d \neq 0$ заданная функция не определена в точке $x = -\frac{d}{c}$, но определена в точке $x = \frac{d}{c}$, симметричной ей относительно начала координат. А область определения четной функции должна быть симметричной относительно начала координат, и значит, при $d \neq 0$ заданная функция не является четной.

Если же $d = 0$, то $f(1) = \frac{a+b}{c}$, $f(-1) = \frac{a-b}{c}$, и следовательно, $f(1) = f(-1)$ только при $b = 0$, а при $b = 0$ $f(x) = \frac{a}{c}$ $(x \neq 0)$, т.е. график функции f — горизонтальная прямая с «выколотой» точкой, и значит, заданная функция — четная.

407. Так же, как в задаче **406**, доказывается, что при $d \neq 0$ область определения данной функции не является симметричной относительно начала координат, и следовательно при $d \neq 0$ функция не является нечетной.

Если же $d = 0$, то $f(1) = \frac{a+b}{c}$, $f(-1) = \frac{a-b}{c}$, и следовательно, $f(-1) = -f(1)$, т.е. $\frac{a+b}{c} = -\frac{a-b}{c}$, при $a = 0$ и любых b и c. Но тогда $f(x) = \frac{b}{cx}$ — функция, очевидно, нечетная.

408. Подставив в выражение, задающее данную функцию $-x$ вместо x, получим выражение $\log_2\left(-x+\sqrt{x^2+1}\right)$, не очень похожее на $\pm\log_2\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ и поэтому данная функция представляется ни четной, ни нечетной. Между тем

$$\log_2\left(-x+\sqrt{x^2+1}\right) = \log_2\frac{\left(x^2+1\right)-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} =$$

$$= \log_2\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = -\log_2\left(x+\sqrt{x^2+1}\right),$$

так что рассматриваемая функция нечетна.

409. Для начала «для себя» определимся, четной или нечетной является заданная функция, а для этого рассмотрим пример:

$$f(1) = 1 + 0 = 1, \quad f(-1) = -(0-1) = 1,$$

так что нечетной функцией f заведомо не является, а является ли она четной, разумеется, еще неизвестно.

Ясно, что точки 1 и –1 здесь являются «особыми», потому что в них может что-то происходить, поскольку функция сигнум меняет знак в точке, где она обращается в 0. Поэтому соответствующие интервалы рассмотрим отдельно. Если $x > 1$ $y = 2x$, а если $x < -1$, то $y = -2x$ и очень хочется думать, что функция y — нечетная, однако мы уже знаем, что это не так.

В чем же дело? Вспомним, что очень похожим образом задается четная функция модуль: при отрицательных x она равна $-x$, и именно поэтому оказывается четной. И на самом деле на лучах $x > 1$ и $x < -1$ наша функция y равна именно $2|x|$. Точно так же рассматриваются промежутки $0 \leq x \leq 1$ и $-1 \leq x \leq 0$ — на них функция y тождественно равна 0.

Таким образом, заданная функция является четной.

Комментарий. Трудности в решении задачи возникли, очевидно, вследствие того, что функция $y = \operatorname{sgn} x$ по существу является кусочно заданной — точно так же, как и модуль, а исследование таких функций, как мы видим, связано со специфическими, а точнее психологическими проблемами. В преодолении такого рода трудностей учащиеся не имеют никакого опыта, но кусочно заданные функции в современных учебниках теперь «вошли в моду», так что особенности «кусочности» надо учиться преодолевать.

Заметим, что если сразу же осознать «кусочность» рассмотренной функции, формально заданной аналитически, и перейти к такому ее заданию:

$$y = \begin{cases} 2x, & \text{если} \quad x > 1, \\ 0, & \text{если} \quad -1 < x < 1, \\ -2x, & \text{если} \quad x < -1, \end{cases}$$

то нечетность этой функции становитая практически очевидной, особенно если представить себе или изобразить ее график.

Наконец, если заметить, что $|x| = \operatorname{sgn} x$, т.е. при $x \neq 0$ $\operatorname{sgn} x = \frac{|x|}{x}$, то при $x \neq \pm 1$ заданную функцию можно представить в виде $y = f(x) = x\left(\frac{|x+1|}{x+1} + \frac{|x-1|}{x-1}\right)$, а тогда

$$f(-x) = -x\left(\frac{|x-1|}{1-x} - \frac{|x+1|}{x+1}\right) = f(x),$$

так что заданная функция — четная.

411. Для четных функций выполняется равенство $f(-x) = f(x)$, которое в точке 0 превращается в истинное высказывание $f(0) = f(0)$, из которого «ничего не следует», т.е. нельзя сделать никакого полезного вывода. Поэтому, скорее всего, четные функции в 0 могут принимать любые значения, и это действительно так: для всякого числа A найдется четная функция, у которой $f(0) = A$ — «простейшим» примером является постоянная функция $y = A$, а еще более простым — функция $y = x^2 + A$.

Для нечетных же функций при любом x выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$, в частности, $f(0) = -f(0) = 0$, откуда $f(0) = 0$.

412. Утверждение «Множество $D(f)$ симметрично относительно начала координат» означает, что из $x \in D(f)$ следует, что $-x \in D(f)$. Но если $a \in D(f)$, то равенство $f(a) = f(-a)$, по условию, верно, а значит, выражение $f(-a)$ имеет смысл, т.е. $-a \in D(f)$.

Комментарий. Это утверждение означает, что определение четной, равно как и нечетной функции можно упростить, выбросив ограничение симметричности на область определения функции (см. Компендиум).

413. Функция f не является четной, если существует $x \in D(f)$, для которого выражение $f(-x)$ или лишено смысла, или отлично от $f(x)$.

414. Область определения функции y состоит из значений x, при которых и x, и $-x$ входят в область определения функции f, а при таких x выполняется равенство $y(-x) = f(-x) + f(x) = f(x) + f(-x) = y(x)$, т.е. функция y — четная.

Комментарий. Согласно утверждению этой задачи, четной является, например, функция $y = \sqrt{x} + \sqrt{-x}$, хотя ее область определения состоит только из одной точки 0. Четность этой функции можно доказать непосредственно по определению четной функции: для *любого* x из $D(y)$ выполняется равенство $f(-x) = f(x)$.

415. Область определения функции y состоит из значений x, при которых и x, и $-x$ входят в область определения функции f, а при таких x выполняется равенство $y(-x) = f(-x) - f(x) = -(f(x) - f(-x)) = y(x)$, т.е. функция y — нечетная.

416. Если функция является одновременно и четной, и нечетной, то для любого x из ее области определения выполняются равенства $f(-x) = f(x)$ и $f(-x) = -f(x)$, т.е. $f(x) = 0$. Поэтому условию задачи удовлетворяет любая функция, все значения которой равны 0, и в частности, «тождественный нуль».

Комментарий. Заметим, что ответ можно «угадать» из геометрических соображений: график четной функции симметричен относительно оси ординат, нечетной — относительно начала координат. Поэтому функция, график которой обладает обеими этими симметриями, является и четной, и нечетной одновременно.

Таких функций, отличных от «тождественного нуля», можно «наштамповать» сколько угодно:

$$\frac{x^2 - 1}{(x+1)(x-1)} - 1, \quad \frac{\sin 2x}{\sin x \cos x} - 2, \quad \sqrt{x} + \sqrt{-x} \text{ и т.д.}$$

417. Если функция является одновременно и четной, и нечетной, то для любого x из ее области определения выполняются равенства $f(-x) = f(x)$ и $f(-x) = -f(x)$, откуда $f(x) = 0$. Но область определения функции f может быть любой, лишь бы она была симметричной относительно начала координат. В частности, она может быть объединением двух интервалов: (a, b) и $(-a, -b)$ $(a > 0)$. Поскольку функции, имеющие разные области определения, всегда различны, а интервалов на «положительной» части оси абсцисс бесконечно много, то функций, четных и нечетных одновременно, также бесконечно много.

418. Представим многочлен f в виде суммы многочленов $g + h$, где g и h состоят из одночленов соответственно четной и нечетной степени. Тогда $f(-x) = g(-x) + h(-x) = g(x) - h(x)$ и если f задает четную функцию, т.е. для любого x выполняется условие $f(-x) = f(x)$, или $g(x) - h(x) = g(-x) + h(-x)$, то отсюда сразу получаем, что $h(x) = 0$, т.е. в стандартном виде многочлен f содержит только одночлены четной степени.

Комментарий. При всей очевидности утверждения «Если $h(x) = 0$ при любом x, то многочлен h — нулевой, т.е. все его коэффициенты равны 0», оно подлежит строгому доказательству, которое дано в Компендиуме. В школе, однако, в подавляющем большинстве случаев на этот логический нюанс не обращают внимания.

419. Из выражений $f(x)$ и $f(-x)$ нужно «состряпать» четную и нечетную функцию, и не требуется большого воображения, чтобы заметить, что выражение $f(x) + f(-x)$ задает четную функцию, а — здесь уже, пожалуй, надо чуть больше фантазии — выражение $f(x) - f(-x)$ задает нечетную функцию. А полусумма этих двух выражений и есть $f(x)$.

420. Предположим, что заданная функция f представлена в нужном виде, т.е. $f(x) = g(x) + h(x)$, где функция g — четная, а h — нечетная, причем области определения равны $\mathbf{R}$. Тогда в для любого $x \in \mathbf{R}$ выполняются равенства $f(-x) = g(-x) + h(-x) = g(x) - h(x)$, $f(x) = g(x) + h(x)$ и сложив их, получим $f(x) + f(-x) = 2g(x)$, а вычтя второе равенство из первого, получаем $f(-x) - f(x) = -2h(x)$. Поэтому $g(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$, $h(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$ и равенство $f(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2} + \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$ есть искомое и, очевидно, единственное представление функции f в виде суммы четной и нечетной функций.

421. Область определения произвольной четной или нечетной функции симметрична относительно начала координат, и если функция f этим свойством не обладает, то она не может быть представлена в виде суммы четной и нечетной: из равенства $f(x) = g(x) + h(x)$ и равенств $g(-x) = g(x)$ и $h(-x) = h(x)$ мы бы получили, что из $x \in D(f)$ следует, что $-x \in D(f)$, т.е. область определения симметрична относительно начала координат. Поэтому в качестве контрпримера можно взять $y = \sqrt{x}$.

Комментарий. Можно было рассуждать и чуть иначе: область определения суммы двух функций есть пересечение (общая часть) областей определения слагаемых, а пересечение двух симметричных относительно 0 множеств само является симметричным относительно 0.

422. Так как множество точек на координатной плоскости, заданное некоторым равенством, симметрично относительно прямой $y = x$ в том и только в том случае, когда переменные x и y входят в это равенство равноправно, симметрично, т.е. если равенство не меняется при перемене их местами, то переписав равенство в виде $xy = 2$, получаем, что эта прямая является осью симметрии графика данной функции (см. Компендиум).

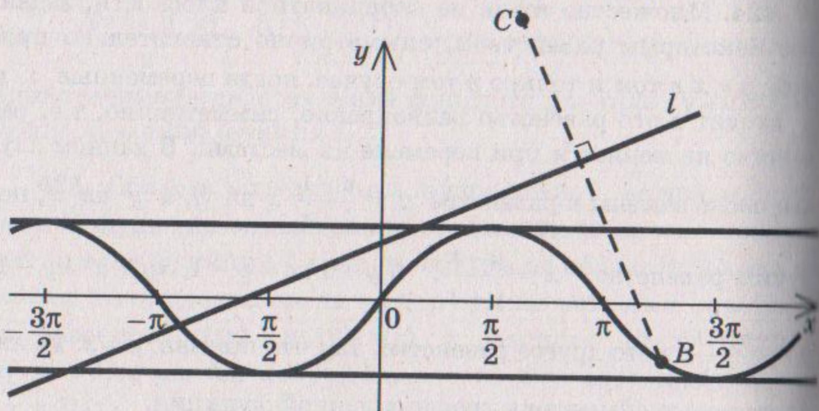
423. Поскольку симметричность множества точек на координатной плоскости, заданного равенством, определяется равноправием вхождения в это равенство переменных x и y, а здесь это, судя по внешнему виду равенства $y = \dfrac{2}{x+1}$, маловероятно, будем действовать экспериментально: скажем, при $x = 0$ получаем $y = 2$, т.е. точка $(0, 2)$ лежит на графике данной функции, а симметричная ей относительно прямой $y = x$ точка $(2, 0)$ ему не принадлежит.

424. Множество точек на координатной плоскости, заданное некоторым равенством, симметрично относительно прямой $y = x$ в том и только в том случае, когда переменные x и y входят в это равенство равноправно, симметрично, т.е. равенство не меняется при перемене их местами. В данном случае после замены в равенстве $y = \dfrac{x-1}{x+1}$ x на y, а y на x, получим равенство $x = \dfrac{y-1}{y+1}$, $(y+1)x = y - 1$, $xy + x = y - 1$, $y = \dfrac{-x-1}{x+1}$, а это другое равенство, так что прямая $y = x$ не является осью симметрии графика данной функции.

Комментарий. В проведенном решении имеется, однако логический пробел, который вполне можно считать существенным: утверждая, что получили *другое* равенство, мы опирались только на «внешний вид» этих двух равенств, и для логической полноты следовало привести соответствующий пример: первому равенству удовлетворяет, например, точка $x = 1$, $y = 0$, но при этих значениях x и y второе равенство неверно. В то же время наличие этого примера позволяет решить задачу моментально: точка $(1, 0)$ принадлежит графику данной функции, а симметричная ей относительно прямой $y = x$ точка $(0, 1)$ ему не принадлежит.

Кроме того, в этом примере мы весьма легковесно подошли к преобразованиям, не обратив внимания на изменение области определения. Этот недостаток, конечно, можно исправить, однако если его не допускать, мы не будем вообще иметь дело с областью определения.

425. Геометрически совершенно очевидно, что график данной функции наклонных осей симметрии не имеет. Однако этот факт можно обосновать: любая наклонная прямая l выходит за пределы полосы $|y| \le 1$ (рис.), а тогда точка C, симметричная относительно какой-либо достаточно удаленной точке B, лежит вне этой полосы и не лежит на графике синуса, который целиком лежит внутри полосы.



426. Преобразуем задающее функцию выражение, выделяя в нем «целую часть»: $\frac{1-2x}{1+2x} = -1 + \frac{2}{1+2x}$, и поэтому график заданной функции получается из гиперболы $y = \frac{1}{x}$ сжатием к оси ординат, сдвигом на 1 влево, умножением всех ординат на 2 и сдвигом полученного графика на 1 вниз. Но гипербола $y = \frac{1}{x}$, очевидно, имеет ось симметрии $y = x$, которая после этих преобразований перейдет в новую прямую, которая и является осью симметрии графика функции 4.

Комментарий. Можно выписать уравнение найденной оси симметрии: из уравнения прямой $y = x$ последовательно получатся уравнения: $y = 2x$, $y = 2(x-1)$, $y = 4(x-2)$, $y = 4x - 9$. После первого сдвига получится прямая $y = x - 1$, после второго — прямая $y = 2x - 2$, после третьего — прямая $y = 2x - 3$.

427. Пусть прямая $x = a$ — ось симметрии графика функции $y = \sin 2x + \cos x$, т.е. выполняется тождество $\sin 2x + \cos x = \sin 2(2a - x) + \cos(2a - x)$ (см. Компендиум). Тогда функция $y = g(x) = \cos x - \cos(2a - x) = \sin(4a - 2x) - \sin 2x$ имеет период π, так что $g(0) = g(\pi)$, т.е. $1 - \cos 2a = -1 + \cos 2a$, $\cos 2a = 1$, $a = k\pi$ $(k \in \mathbf{Z})$. Мы не можем, однако, сказать, что задача решена: мы установили лишь «одностороннее» утверждение: «Если $x = a$ — ось симметрии графика функции y, то $a = k\pi$», но это не значит, что верно и обратное утверждение: «Если $a = k\pi$, то $x = a$ — ось симметрии графика функции y» и его истинность мы должны еще проверить. При этих значениях a исходное тождество принимает вид $\sin 2x + \cos x = \sin 2(2k\pi - x) + \cos(2k\pi - x)$, и, очевидно, верно, так что значения $a = k\pi$ и являются решением задачи.

428. Если прямая $x = a$ является осью симметрии данной функции, то числа $\{x\}$ и $\{2a - x\}$ при любом x имеют одинаковую дробную часть, поэтому их разность $2x - 2a$ является целым числом — также при любом x. Но этого не может быть, если это верно при некотором $x = c$, то, например, при $x = c + \frac{1}{3}$ уже неверно: число $2\left(c + \frac{1}{3}\right) - 2a = 2c - 2a + \frac{2}{3}$ — дробное.

429. Пусть график функции $y = f(x)$ симметричен относительно оси абсцисс. Это значит, что вместе с каждой точкой (x, y) он содержит точку $(x, -y)$, но поскольку в каждой точке области определения функция принимает только одно значение, то для любого x имеет место равенство $y = -y$, откуда $y = 0$. Это означает, что описанные функции могут принимать только нулевые значения, а такие функции, конечно, неинтересны, хотя при рассмотрении четности и нечетности функций мы видели, что только такие функции (с областью определения, симметричной относительно начала координат) являются одновременно четными и нечетными.

430. Например, график параболы $y = (x-1)^2$ симметричен относительно прямой $x = 1$.

431. Самая простая из наклонных прямых — это прямая $y = x$. Гипербола — график функции $y = \frac{1}{x}$ — симметрична относительно прямой $y = x$.

432. Условие симметричности графика функции относительно оси ординат — это ее четность, а четной периодической является, например, функция $y = \cos x$.

433. Условие симметричности графика функции относительно начала координат — это ее нечетность, а нечетной периодической является, например, функция $y = \sin x$.

434. Указанным в задаче свойством обладает парабола с осью $x = 3$ — график квадратичной функции, например, $y = x^2 - 6x$. Годится также и любая прямая вида $y = a$, где a — любое число.

435. Свойством, указанным в задаче, обладают, например, функции $y = \frac{1}{x}$, $y = x$ и $y = a - x$.

436. Свойством, указанным в задаче, обладают, например, функции $y = -\frac{1}{x}$ и $y = -x$.

437. Каждая из прямых $y = x$ и $y = -x$ обладает свойством, указанным в задаче. Годится еще пара известных функций — $y = \frac{1}{x}$ и $y = -\frac{1}{x}$, и еще много можно нарисовать.

438. Достаточно взять функцию, график которой будет прямой, перпендикулярной данной. Чтобы написать уравнение такой прямой, вычислим ее угловой коэффициент. Угол наклона прямой $y = 2x - 1$ равен $\operatorname{arctg} 2$, поэтому угол наклона перпендикулярной прямой равен $\operatorname{arctg} 2 + \frac{\pi}{2}$, откуда тангенс угла наклона такой прямой равен $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg} 2 + \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} 2) = -\frac{1}{2}$, следовательно, для наших целей подойдет функция $y = -\frac{1}{2}x$.

Комментарий. К сожалению, в школьную программу не входит условие перпендикулярности прямых (см. Компендиум), позволяющие не проводить рассуждения с использованием арктангенса.

439. Если график функции f с периодом T имеет ось симметрии $x = a$, то, скорее из геометрических соображений, осью симметрии будет и прямая $x = a + T$. Но прямая $x = c$ является осью симметрии графика функции $y = f(x)$ тогда и только тогда, когда для любого $x \in D(f)$ выполняется равенство $f(x) = f(2c - x)$, то для прямой $x = a + T$ надо проверить выполнение равенства $f(a + T) = f(2a - a - T)$ или $f(a + T) = f(a - T)$, а это равенство верно.

Так как периодов у периодической функции бесконечно много, то и осей симметрии бесконечно много, если, конечно, есть хотя бы одна. Примером периодической функции, график которой не имеет вертикальных осей симметрии, может служить любая линейная функция $y = kx + b$ при $k \neq 0$ равенство $kx + b = k(2a - x) + b$, т.е. $kx = k(2a - x)$, $x = 2a - x$ не является тождеством ни при каком a.

440. График, например, синуса имеет бесконечно много симметрий — относительно прямых $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

441. Самым простым примером такой функции может служить функция вида $y = a$, где a — число. Пример посложнее можно привести, беря функции-**константы** с «нехорошей» областью определения, как то: $y = \frac{x}{x} + 1$.

442. Построим мысленно график функции $y = f(x)$ и отразим полученную фигуру относительно оси ординат. В результате получится график функции $y = f(-x)$, а вертикальная ось симметрии $x = a$ графика функции $y = f(x)$ перейдет в прямую $x = -a$, которая будет осью симметрии графика функции $y = f(-x)$. А точка (a, b), которая является центром симметрии графика функции $y = f(x)$, перейдет в точку $(-a, b)$, которая будет центром симметрии графика функции $y = f(-x)$, а значит, функция $y = f(-x)$ будет иметь также центр симметрии.

Комментарий. Рассуждать можно и формально — «без геометрии». Если прямая $x = a$ — ось симметрии графика функции $y = f(x)$, то для всякого x имеет место равенство $f(a + x) = f(a - x)$ (см. задачу 448), или

$$f(-(-a - x)) = f(-(-a + x)),$$

а это равенство, «прочитанное справа налево», и означает, что прямая $x = -a$ является осью симметрии графика функции $y = f(-x)$.

Если же точка (a, b) — центр симметрии графика функции $y = f(x)$, то из равенства $f(a + x) = f(a - x) = 2b$ (см. Компендиум) следует, что

$$f(-(-a - x)) + f(-(-a + x)) = 2b,$$

так что функция $y = f(-x)$ имеет центр симметрии в точке $(-a, b)$.

Заметим, что, с одной стороны, приведенное геометрическое решение может показаться недостаточно строгим на устном экзамене, хотя критерии, использованные в формальном решении, и не входят в школьную программу. Для решения же задач выбором ответа, где не требуется обоснования, они могут оказаться полезными, но геометрическое решение, основанное на развитых пространственных представлениях на наш взгляд является предпочтительным.

443. Если график функции $y = f(x)$ имеет вертикальную ось симметрии, то каждая точка графика лежит в верхней или в нижней полуплоскости вместе со своей симметричной, и если мы построим график функции $y = f(x)$ и зеркально отразим в оси абсцисс все его точки, оказавшиеся в нижней полуплоскости, то все эти точки перейдут в верхнюю полуплоскость вместе со своими симметричными, т.е. останутся симметричными относительно той же оси. Но при этом получим график функции $y = |f(x)|$, которой, таким образом, имеет ту же вертикальную ось симметрии.

А вот будет ли иметь центр симметрии график функции $y = |f(x)|$, если его имел график функции $y = f(x)$, непонятно — часть точек может остаться на месте, часть — отразиться, и куда перейдет центр, описать невозможно. Ввиду такой неопределенности, прибегнем к эксперименту.

«Первым попавшимся» примером, скорее всего, будет синус, и график функции $y = \sin|x|$ центра симметрии, очевидно, не имеет.

С другой стороны, для функции $y = x^2$, как, впрочем, для любой функции, все значения которой неотрицательны, графики функций $y = f(x)$ и $y = |f(x)|$ просто совпадают, и в этом случае оба графика имеют, естественно, один и тот же центр симметрии четно.

Комментарий. Еще более простым примером может служить постоянная функция, скажем $y = 0$: ясно, что график ее модуля есть ось абсцисс, а ее центром симметрии является любая ее точка. Вообще, постоянные функции довольно часто могут выступать в качестве примеров или контрпримеров в решении задач, так что к ним нужно привыкать. Заметим также, что очевидный факт отсутствия центра симметрии у графика функции $y = \sin|x|$ в решении остался недоказанным, а сделать это можно с помощью соответствующих критерий из Компендиума: равенство

$$\sin|a + x| + \sin|a - x| = 2b$$

не может быть тождеством ни при каких a и b.

В самом деле, при $a > 0$ можно взять x таким, чтобы выражения $a + x$ и $a - x$ были положительны, и тогда это равенство принимает вид $\sin(a + x) + \sin(a - x) = 2b$ или $\sin a \cdot \cos x = b$, а взяв $x = 0$ и $x = \frac{\pi}{2}$, получаем противоречие. Аналогично приводит к противоречию случай $a < 0$, а при $a = 0$ равенство принимает вид $\sin|x| + \sin|-x| = 2b$ и очевидно тождеством не является.

444. Так как функции $y = f(|x|)$ и $y = f(-|x|)$ — четные, то оба они имеют вертикальную ось симметрии — это ось ординат, и при этом, заметим, что этот факт не зависит от того, что график функции $y = f(x)$ сам имеет вертикальную ось симметрии, т.е. верен для любой функции f.

С центром симметрии дело обстоит сложнее, и мы прибегнем к эксперименту. Заметив прежде всего, что для постоянной функции f обе рассматриваемые функции с ней совпадают, получаем пример функции, скажем, $y = 0$, график которой имеет центр симметрии, а в задаче 443 мы уже видели, что функция $y = \sin|x|$ — центра симметрии не имеет, и поэтому функции $y = \sin(-|x|)$, т.е. $y = -\sin|x|$ также не имеет центра симметрии. Таким образом, графики рассматриваемых функций могут иметь центр симметрии, а могут и не иметь.

445. Если непустое множество на координатной плоскости симметрично относительно горизонтальной прямой, то вертикальная прямая, проходящая через любую точку этого множества, пересекает его по крайней мере в двух точках. Следовательно, это множество не может быть графиком функции.

Комментарий. Проведем и формальное доказательство. Если точка A с координатами (a, b) принадлежит графику функции f, т.е. $b = f(a)$ и этот график симметричен относительно горизонтальной прямой, то точка B, симметричная A относительно этой прямой, имеет ту же абсциссу, но другую ординату: $B = (a, d)$, т.е. $d = f(b)$, что противоречит различию ординат b и d.

Можно было рассуждать и иначе: если график функции $y = f(x)$ симметричен относительно прямой $x = a$, то сдвинув его на $|a|$ вверх или вниз — в зависимости от знака a, на полученном графике функции $y = f(x) - a$ мы будем иметь две точки, симметричные относительно оси абсцисс, чего не может быть.

Заметим также, что условие «функция определена хотя бы в одной точке» нельзя отбросить. Если функция не определена ни в одной точке, т.е. имеет пустую область определения, то ее график симметричен, например, относительно оси абсцисс, однако доказательство этого утверждения требует дополнительных логических знаний (см. Компендиум).

446. График функции $y = x$ симметричен относительно прямой $y = -x$: всякая прямая симметрична относительно прямой, ей перпендикулярной.

447. Так как график функции $y = f(x)$ имеет вертикальную ось симметрии, например, $x = a$, то для всякого x имеет место равенство $f(a + x) = f(a - x)$ (см. Компендиум), а тогда, очевидно, $2f(a + x) - 1 = 2f(a - x) - 1$, так что функция $y = 2f(x) - 1$ имеет ту же ось симметрии. Если же график функции $y = f(x)$ имеет центр симметрии, например, $Q = (a, b)$, то для всякого x имеет место равенство

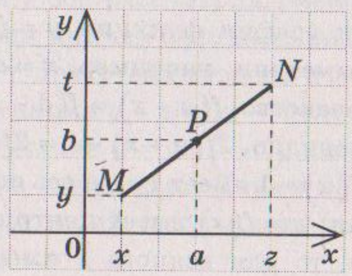
$f(a+x)+f(a-x)=2b$ и в этом случае $\left(2f(a+x)-1\right)+$ $+\left(2f(a-x)-1\right)=2b-2$, так что функция $y=2f(x)-1$ имеет центр симметрии в точке $(a,\ 2b-2)$.

Комментарий. При рассуждении можно употреблять термины «растяжение-сжатие» и «сдвиг». Можно также пользоваться утверждением «Прямая $x = a$ является осью симметрии графика функции $y=f(x)$ тогда и только тогда, когда для любого $x \in D(f)$ выполняется равенство $f(x)=f(2a-x)$» (см. решение задачи 449).

448. Точки оси абсцисс, симметричные относительно точки a, имеют координаты $a + x$ и $a - x$, и график симметричен относительно прямой $x = a$, если в этих точках функция принимает одинаковые значения, т.е. выполняется равенство, указанное в условии.

449. Точки оси абсцисс, симметричные относительно точки a, имеют координаты $a + x$ и $a - x$, и график симметричен относительно прямой $x = a$, если в этих точках функция принимает одинаковые значения, т.е. выполняется равенство $f(a+x)=f(a-x)$. Заменив в этом равенстве x на $x - a$, получим $f(x)=f(2a-x)$, что и требовалось доказать.

450. График функции f симметричен относительно точки плоскости $P(a,\ b)$, если точки, симметричные относительно этой точки (рис.), обе принадлежат или не принадлежат графику, т.е. $y=f(x) \Leftrightarrow t=f(z)$. Прежде всего следует выяснить связи между координатами точек $M(x,\ y)$ и $N(z,\ t)$, симметричных относительно точки P. На рисунке видно, что a — середина отрезка оси абсцисс между точками x и z, а b — середина отрезка оси ординат между точками y и t.



Значит, $a=\dfrac{x+z}{2}$, $b=\dfrac{y+t}{2}$, откуда $z=2a-x$, $t=2b-y$.

Тогда $t=f(z) \Leftrightarrow 2b-y=f(2a-x) \Leftrightarrow y=2b-f(2a-x)$, а равенства $y=2b-f(2a-x)$ и $y=f(x)$ равносильны, если выполняется (естественно, в области определения f) тождество $f(x)=2b-f(2a-x)$.

451. Перепишем уравнение в виде

$$\pi^2(x-1)^2+4a\cos\left(2\pi(x-1)\right)+4a^4=0$$

Функция, стоящая в левой части уравнения, не меняется при замене $x - 1$ на $1 - x$. Проще всего решать вопрос о единственности решения уравнения $f(x)=b$, если функция f — четная: оно может иметь единственное решение только в случае, когда $x = 0$ и $b=f(0)$, но в данном случае функция f, стоящая в левой части уравнения, очевидно, не является четной, так как $y=\pi(x-1)^2$ не является четной.

Но заменив $x - 1$ на $1 - x$, мы не изменим функции f, так как $\cos\left(2\pi(x-1)\right)=\cos 2\pi(1-x)$ и поэтому, положив $1-x=t$, получим уравнение $\pi^2t^2+4a\cos(2\pi t)+4a^4=0$ или $y^2+4a\cos 2y+4a^4=0$, где буквой y обозначено выражение πt. В левой части стоит теперь уже четная функция, так что уравнение в качестве единственного решения может иметь только $y = 0$, т.е. при выполнении равенства $4a+4a^4=0$, $a^3+a=0$, $a = 0$ или $a = -1$.

Итак, если данное уравнение имеет единственное решение, то a равно либо 0, либо -1, но утверждать, что задача решена, еще не имеем права, мы не знаем, верно ли, что при этих значениях a уравнение имеет единственное решение — это утверждение, *обратное* к доказанному. Поэтому мы должны еще специально рассмотреть полученные значения $a = 0$ и $a = -1$.

При $a = 0$ уравнение имеет вид $y^2=0$, имеет единственное решение, так что 0 является решением задачи. При $a = -1$ имеем уравнение $y^2-4\cos y+4=0$, $y^2+4\left(1-\cos y\right)=0$ и поскольку оба слагаемых в левой части неотрицательны, то сумма может быть равной 0 только в случае, когда они оба равны 0, т.е. $y = 0$, и $a = -1$ также является решением задачи.

452. Пусть g — обратная функция для функции f. Так как f — возрастающая функция, то функция g — возрастающая.

Предположим, что общая точка (a, b) графиков этих функций не лежит на прямой $y = x$, т.е. $a \neq b$. Если $a < b$, т.е. $a < f(a)$, $g(a) < g(f(a))$, но $g(a) = b$ — (a, b) лежит на графике функции g, а $g(f(a)) = a$ — по определению обратной функции. Поэтому последнее неравенство принимает вид $b < a$, что неверно, и получаем противоречие предположению, что $a < b$. Точно так же, очевидно, к противоречию приводит предположение $b < a$. Таким образом, $a = b$, т.е. точка (a, b) лежит на прямой $y = x$.

453. Всякая прямая, перпендикулярная прямой $y = x$, симметрична относительно этой прямой, и поэтому в качестве контрпримера можно взять функцию $y = -x$, совпадающую со своей обратной: действуя по обычной схеме нахождения обратной функции, т.е. выражая x из равенства $y = -x$ через y, получаем равенство $x = -y$ и, меняя буквы x и y местами, получаем исходную функцию.

Комментарий. При использовании в учебном процессе последних двух задач, целесообразно предложить их «в проблемном варианте», задав тот же вопрос, но не упоминая в нем о монотонности функции f. С большой вероятностью можно предположить, что учащиеся, зная, что график обратной функции симметричен с графиком «прямой» функции относительно прямой $y = x$, ответят на этот вопрос утвердительно, после чего вывести их на эти задачи.

454. В области определения уравнения $4 - x \geq 0$, $5 + x \geq 0$, т.е. $-5 \leq x \leq 4$. Простым перебором целых допустимых значений x можно найти корень $x = -5$. Но левая часть уравнения является убывающей функцией, и следовательно, других корней быть не может.

455. Функция $y = x^3$ — возрастающая, а функция $y = 2 - x$ — убывающая и поэтому (см. Компендиум) данное уравнение не может иметь больше одного корня, так что имеет смысл попытаться корень подобрать. Едва ли не с первой же попытки удается найти корень 1.

456. Функция $y = \sqrt{2x+1}$ — возрастающая, а функция $y = 29 - 2x$ — убывающая и поэтому (см. Компендиум) данное уравнение не может иметь больше одного корня, так что имеет смысл попытаться корень подобрать, стремясь к тому, чтобы подкоренное выражение $2x + 1$ было точным квадратом и, естественно, нечетного числа — в противном случае корень иррационален и подобрать его, конечно, не удастся. Квадраты нескольких первых нечетных натуральных чисел — числа 1, 9, 25, 49 — получаются при x, равном соответственно 0, 4, 12, 24, и число 0 оказывается корнем данного уравнения.

457. Функция $y = \sqrt{x}$ — возрастающая, а функция $y = \dfrac{2}{2x-1}$ в области определения уравнения убывает, и поэтому (см. Компендиум) данное уравнение не может иметь больше одного корня, так что имеет смысл попытаться корень подобрать, и с первой же попытки найдется корень $x = 1$.

458. Так как в области определения данного уравнения, задающейся неравенством $x \geq 0$, функция $y = x^2$ возрастает, то левая часть данного уравнения — возрастающая функция как произведение двух положительных возрастающих функций, так что двух корней уравнение иметь не может. А один корень легко подбирается: $x = 4$.

459. Функции в левой и правой частях являются соответственно убывающей и возрастающей, но попытка этим воспользоваться к решению не приведет. Но не так уж трудно заметить, что в области определения данного уравнения выполняется неравенство $x > \frac{5}{2}$, а на этом множестве значения x левая часть положительна, а правая отрицательна, и значит, уравнение не имеет решений.

460. Область определения данного уравнения задается неравенствами $8 - 2x^2 \geq 0$, $\quad x \geq 0$, откуда $0 \leq x \leq 2$. Но в этом множестве левая часть меньше $\sqrt{8}$, а правая меньше или равна $3 > \sqrt{8}$.

461. Функция $y = 2^x$ — возрастающая, а $y = 6 - x$ — убывающая, данное уравнение может иметь только один корень (см. Компендиум), и этот корень легко подбирается: $x = 2$.

462. Так как функция, стоящая в левой части, — убывающая, то корень уравнения будем искать подбором. «В районе» чисел 2714 и 2490 есть точный квадрат — 2500, и во втором радикале не хватает 10. Подставим $x = 10$ в первый радикал: $\sqrt{2704}$ немного больше 50, и если он извлекается, то скорее всего равен 52. И в самом деле, $52^2 = (50+2)^2 = 2500 + 200 + 4 = 2704$. Так как $52 - 50 = 2$, то 50 — корень данного уравнения.

463. Так как функции $y = 113^x$ и $y = 114^x$ возрастающие, а значит, и их сумма — возрастающая (см. Компендиум), то данное уравнение может иметь только один корень (см. там же), и этот корень очевиден: $x = 1$.

464. Так как функции $y = 5^x$ и $y = 9^x$ возрастающие, а значит, и их сумма — возрастающая (см. Компендиум), то данное уравнение имеет не более одного корня (см. Компендиум). В данном случае этот корень очевиден: $x = 1$.

465. Так как функции $y = 5^x$ и $y = 12^x$ возрастающие, а значит, и их сумма — возрастающая (см. Компендиум), то данное уравнение может иметь только один корень (см. там же), и этот корень легко подбирается: $x = 2$.

466. Очевидным корнем данного уравнения является 2, но функции, стоящие в обеих частях, — возрастающие, так что единственность этого корня не очевидна. Но разделив обе части на 5^x, получим уравнение $\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x = 1$, в котором левая часть уже является убывающей, так что данное уравнение все же имеет единственное решение.

467. Очевидным корнем данного уравнения является 2, но функции, стоящие в обеих частях, — возрастающие, так что единственность этого корня не очевидна. Но разделив обе части на 129^x, получим уравнение, в котором левая часть уже является убывающей, так что данное уравнение имеет единственное решение.

468. Функции, стоящие в обеих частях данного уравнения, — возрастающие, так что единственность этого корня ниоткуда не следует. Но разделив обе части на 129^x, получим уравнение

$$\frac{2^{3x-1}}{129^x} + \frac{5^{2x+1}}{129^x} = 1, \quad \frac{1}{2} \cdot \frac{8^x}{129^x} + 5 \cdot \frac{25^x}{129^x} = 1,$$

в котором левая часть уже является убывающей функцией, так что данное уравнение имеет единственное решение. Подбирать корень будем для исходного, более «красивого» уравнения, и найти его можно с первой же попытки: $x = 1$.

469. Данное уравнение имеет очевидный корень 2, но мы не можем утверждать, что его левая часть является монотонной: так как $2 + \sqrt{3} > 1$, а $2 - \sqrt{3} < 1$, то она является суммой возрастающей и убывающей функций, а такая функция может быть какой угодно. (Разумеется, мы не можем утверждать, что его левая часть не является монотонной.) Но если заметить, что $\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right) = 1$, а значит, $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x = 1$, то считая, что $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = y$, имеем уравнение $y + \frac{1}{y} = 4$ или $y^2 - 4y + 1 = 0$. Корни этого уравнения $y_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3}$ и из уравнений $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 2 \pm \sqrt{3}$ получаем $x_{1,2} = \pm 2$.

470. Очевидным корнем данного уравнения является 2, но функции, стоящие в обеих частях, — возрастающие, так что единственность этого корня не очевидна. Но разделив обе части на 4^x, получим уравнение, в котором левая часть уже является убывающей, так что данное уравнение имеет единственное решение.

471. Разделив обе части на 5^x, получим неравенство $\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x < 1$, в котором левая часть является убывающей функцией. Поскольку при $x = 2$ эта функция принимает значение 1, то меньше 1 она будет при $x > 2$.

472. См. решение задачи 470.

473. См. решение задачи 470.

474. Умножив и разделив y на сумму $\sqrt{3x^2+5} + \sqrt{3x^2}$, получим $y = \frac{5}{\sqrt{3x^2+5} + \sqrt{3x^2}}$. На отрезке $[0, 3]$ x^2 возрастает, так что знаменатель $\sqrt{3x^2+5} + \sqrt{3x^2}$ также возрастает и поскольку он положителен, то дробь y убывает. Таким образом, свое наименьшее значение функция y принимает в правом конце заданного отрезка — при $x = 3$, и это значение, следовательно, равно $\sqrt{32} - \sqrt{27} = 4\sqrt{2} - 3\sqrt{3}$.

475. Умножив и разделив y на сумму $\sqrt{8x^2+7} + \sqrt{8x^2}$, получим $y = \frac{7}{\sqrt{8x^2+7} + \sqrt{8x^2}}$. На отрезке $[1, 2]$ x^2 возрастает, так что знаменатель $\sqrt{8x^2+7} + \sqrt{8x^2}$ также возрастает, и поскольку он положителен, то y убывает, и таким об-

разом свое наименьшее значение функция y принимает в правом конце заданного отрезка, т.е. 2. Иными словами, искомое наименьшее значение равно

$$y(2) = \sqrt{39} - \sqrt{32} = \sqrt{39} - 4\sqrt{2}.$$

476. Первое уравнение системы означает, что функция $z = t^2 + \sqrt{t}$ при $t = x$ и $t = y$ принимает равные значения. Но эта функция $z = t^2 + \sqrt{t}$ является возрастающей как сумма двух возрастающих и не может принять одно и то же значение при двух разных значениях аргумента. Следовательно, $x = y$ и из второго уравнения системы получаем $x = y = 4$. Это и есть единственное решение данной системы.

477. Первое уравнение системы означает, что функция $z = \sqrt{t+1} - \sqrt{t}$ при $t = x$ и $t = y$ принимает равные значения. Но, хотя сразу это не очевидно, эта функция является убывающей: умножив и разделив выражение $\sqrt{t+1} - \sqrt{t}$ на сумму $\sqrt{t+1} + \sqrt{t}$, получим $z = \frac{1}{\sqrt{t+1} + \sqrt{t}}$ — дробь с постоянным положительным знаменателем и возрастающим положительным числителем, а такая дробь, очевидно, является убывающей функцией. А поскольку убывающая функция не может принять одно и то же значение при двух различных значениях аргумента, то $x = y$, и из второго уравнения системы имеем $x = y = 1$. Это и есть единственное решение данной системы.

478. Первое уравнение системы означает, что функция $z = t^3 + 3t$ при $t = x$ и $t = y$ принимает равные значения и поскольку она возрастающая (как сумма двух возрастающих функций), то $x = y$, тогда из второго уравнения системы получаем $x = y = 1$. Это и есть единственное решение данной системы.

Комментарий. Записать в решении задачи введенную функцию в «стандартном» виде $y = x^3 + 3x$ было бы, очевидно, весьма неудобно — в этом случае требуется очень внимательно различать буквы x и y как обозначения аргумента и функции и как обозначения переменных в системе.

479. Так как функция $y = x^3 + x$ — возрастающая, то первое уравнение системы означает, что $x = y$, а тогда из второго уравнения имеем, что $x = y = 1$.

480. Первое уравнение системы можно записать в виде $f(x) = f(2y)$, где f — функция $y = x^3 + x$. Так как эта функция возрастающая, то первое уравнение означает, что $x = 2y$, тогда из второго уравнения получаем, что $y = 2$, $x = 4$.

481. Так как функции $y = x^3 + x$ и $y = x^5 + 3x^3$ — возрастающие, то первое неравенство системы означает, что $x < y$, а второе — что $x \geq y$. Поэтому данная система не имеет решений.

482. Один корень данного уравнения очевиден: $x = 2$, а поскольку и синус и косинус меньше 1, то показательные функции $y = \sin^x 23°$ и $y = \cos^x 23°$ убывают, так что их сумма также убывает, и значит, других корней нет.

483. Так как левая часть данного уравнения задает возрастающую функцию, то имеет смысл попробовать подобрать корень. При подборе будем стремиться к тому, чтобы этот корень оказался «симметричным» — на эту мысль наводит симметричность уравнения относительно a, b, c (уравнение не меняется, если a, b, c каким-либо образом поменять местами. Легко проверить, что корнем уравнения является $x = a^2 + b^2 + c^2$, и этот корень единственный.

484. Так как $\sin^2 x \leq 1$, $\cos^2 \leq 1$ при любом x, то $\sin^4 x \leq \sin^2 x \leq 1$, $\cos^4 x \leq \cos^2 x \leq 1$, $1 = \sin^2 x + \cos^2 x \leq \sin^4 x + \cos^4 x$. Поэтому равенство $\sin^4 x + \cos^4 x = 1$ может быть верным только в случае, когда одновременно выполняются равенства $\sin^2 x = \sin^4 x$, и $\cos^2 x = \cos^4 x$, т.е. синус и косинус x равны 0 или ± 1. Следовательно, решениями данного уравнения являются числа, соответствующие концам горизонтального и вертикального диаметров тригонометрической окружности, т.е. кратные $\frac{\pi}{2}$: $x = k\frac{\pi}{2}$ $(k \in \mathrm{Z})$.

485. Если $\sin x < 0$, то x не является корнем данного уравнения — в этом случае $\cos^3 x = 1 - \sin^3 x > 1$. Точно так же и косинус x не может быть отрицательным. Если $\sin x > 0$ и $\cos x > 0$, то $\sin^3 x \geq \sin^2 x$, $\cos^3 x \geq \cos^2 x$ и значит, $\sin^3 x + \cos^3 x \geq \sin^2 x + \cos^2 x = 1$, и равенство достигается только в случае, когда одновременно выполняются равенства $\sin^3 x = \sin^2 x$ и $\cos^3 x = \cos^2 x$. Но, например, первое из них выполняется при $\sin x = 0$ и при $\sin x = 1$, а это противоречит неравенствам $\sin x > 0$ и $\cos x > 0$. Таким образом, синус и косинус x не могут быть ни отрицательными, ни одновременно положительными, и поэтому один из них равен 0, а другой — 1. Это верно для $x = 2k\pi$ и для $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ $(k \in \mathrm{Z})$.

486. См. решение задач 484 и 485.

487. См. решение задач 484 и 485.

488. См. решение задач 484 и 485.

489. Постараемся свести задачу к одной из предыдущих, заменив в левой части разность суммой с помощью формул приведения. Для этого заменим $\sin^{15} x$ на $\sin^{15}(\pi - x)$, а $\cos^{17} x$ на $\cos^{17}(\pi - x)$ и тогда получим уравнение $\sin^{15}(\pi - x) + \cos^{17}(\pi - x) = 1$, которое решается аналогично уравнениям 484 и 485.

490. Обычные тригонометрические преобразования здесь не приведут к цели, поэтому будем рассуждать поиному. Так как $-1 \leq \cos 2x \leq 1$ и $-1 \leq \cos\frac{x}{3} \leq 1$, то разность $\cos 2x - \cos\frac{x}{3}$ равна 2 только тогда, когда первая из функций принимает свое наибольшее значение 1, а вторая —

свое наименьшее значение -1. Таким образом, данное уравнение равносильно системе $\begin{cases}\cos 2x = 1, \\ \cos\frac{x}{3} = -1.\end{cases}$ Решая второе уравнение, получаем, что $x = 3(2k+1)\pi$, где k — любое целое число. Но при этих значениях x первое уравнение удовлетворяется: $\cos 2x = \cos 6(2k+1)\pi = 1$. Значит, решением системы и исходного уравнения будет $x = 3(2k+1)\pi$, где k — любое целое число.

491. $\cos^2\frac{x^2+x}{6} \le 1$, т.е. что левая часть не превосходит 2. С другой стороны, по неравенству между средним арифметическим и средним геометрическим имеем $\frac{2^x+2^{-x}}{2} \ge \sqrt{2^x 2^{-x}}$ т.е. $2^x + 2^{-x} \ge 2$. Следовательно, левая и правая части могут быть равны только в том случае, если они одновременно равны двум. Второе уравнение легко решается, оно имеет единственный корень $x = 0$. Этот корень удовлетворяет и первому уравнению. Значит, $x = 0$ — единственное решение системы и исходного уравнения.

492. Числитель и знаменатель дроби $\frac{1}{x^2+4\pi x+41}$ положительны, и поэтому соответствующая функция принимает наибольшее значение в точках, где знаменатель принимает наименьшее значение, и такая точка единственная — это $x = -2\pi$. В этой точке косинус равен 1, т.е. также принимает наибольшее значение, а поскольку оба слагаемых принимают наибольшее значение в одной и той же точке, то и сумма принимает в этой точке свое наибольшее значение. Это значение равно $\frac{1}{4\pi^2-4\pi^2+41}+1=\frac{42}{41}$.

493. В силу неравенства между средними арифметическим и геометрическим при $x > 0$ выполняется неравенство $4x+\frac{9\pi^2}{x} \ge 2\sqrt{x\cdot\frac{9\pi^2}{x}} = 6\pi$, причем равенство имеет место в случае, когда слагаемые равны, т.е. при $4x = \frac{9\pi^2}{x}$, откуда $x = \frac{3\pi}{2}$. При этом x данная функция принимает значение $4\cdot\frac{3\pi}{2}-1 = 6\pi-1$. Это и есть искомое наименьшее положительное значение функции y. В самом деле, при $x > 0$ это уже доказано, а при $x < 0$ значения функции отрицательны. Иными словами, при $x < 0$ имеем $y < 0$.

494. Данное уравнение имеет очевидный корень 0, а поскольку число $T = 15\cdot 25\cdot 33\cdot 2\pi$ является периодом для каждого входящего в него слагаемого, то все числа вида kT — его корни, так что уравнение имеет бесконечно много корней.

495. Данное уравнение имеет очевидный корень 0. Поскольку функция в левой части уравнения определена на $\mathbf{R}$ и не меняется при замене x на $-x$, получаем, что если ненулевое число x_0 — корень уравнения, то и число $-x_0$ также является его корнем. Поэтому сумма корней данного уравнения вне зависимости от их числа равна нулю.

496. Проще всего решать вопрос о единственности решения y уравнения $f(x) = b$, если функция f — четная: оно может иметь единственное решение только в случае, когда $x = 0$ и $b = f(0)$, но в данном случае функция f, стоящая в левой части уравнения, очевидно, не является четной, так как $y = \pi(x-1)^2$ не является четной. Но заменив x на $1-x$, мы не изменим функции f, так как $\cos(2\pi x) = \cos 2\pi(1-x)$, и поэтому, положив $1-x=t$, получим уравнение $\pi^2 t^2 + 4a\cos(2\pi t) + 4a^2 = 0$ или $y^2 + 4a\cos 2y +$ $+4a^4 = 0$, где буквой y обозначено, естественно, выражение πt. В левой части стоит теперь уже четная функция, так что уравнение в качестве единственного решения может иметь только $y = 0$, т.е. при выполнении равенства $4a + 4a^4 = 0$, $a^3 + a = 0$, $a = 0$ или $a = -1$. Итак, если данное уравнение имеет единственное решение, то a равно либо 0, либо -1, но утверждать, что задача решена, мы еще не имеем права, так как не знаем, верно ли, что при этих значениях a уравнение имеет единственное решение: это утверждение — *обратное* к доказанному. Поэтому мы должны еще специально рассмотреть полученные значения $a = 0$ и $a = -1$. Для $a = 0$ уравнение имеет вид $y^2 = 0$, имеет единственное решение, так что 0 — решение задачи. При $a = -1$ имеем уравнение $y^2 - 4\cos y + 4 = 0$, $y^2 + 4(1 - \cos y) = 0$ и поскольку оба слагаемых в левой части неотрицательны, то сумма может быть равной 0 только в случае, когда они оба равны 0, т.е. $y = 0$, и $a = -1$ также является решением задачи.

497. Ясно, что при $a = b = c = 0$ это равенство является тождеством, и, скорее всего, оно является тождеством только при этих значениях коэффициентов, однако это требуется строго доказать. Будем рассуждать от противного, т.е. считать, что равенство является тождеством, но не все числа a, b, c равны 0. Если $a \neq 0$, то разделив заданное равенство на a, мы представим функцию $\sin 4x$ как «линейную комбинацию» функций $\sin 2x$ и $\sin x$: $\sin 4x = p\sin 2x + q\sin x$. Левая часть этого тождества имеет период $\frac{\pi}{2}$, а тогда правая часть $f(x)$ имеет период $\frac{\pi}{2}$. Но $f(0) = 0$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = p \cdot \sin\pi +$ $+q \cdot \sin\frac{\pi}{2} = q$, т.е. $q = 0$ и поэтому мы имеем тождество $\sin 4x = p\sin 2x$, а его левая и правая части имеют разные основные (наименьшие положительные) периоды. Полученное противоречие показывает, что $a = 0$. При $b = 0$, постулая точно так же, из тождества $\sin 2x = p\sin 4x + q\sin x$ с помощью периодов также получим противоречие: обе части имеют период π, но правая часть при $x = \frac{\pi}{2}$ равна 0, а при $x = \frac{\pi}{2} + \pi = \frac{3\pi}{2}$ равна $-q$, т.е. $q = 0$, а тождество $\sin 2x = p\sin 4x$ не может выполняться. Таким образом, $a = b = 0$, а стало быть и $c = 0$.

498. Число 1785 оканчивается цифрой 5 и поэтому делится на 5, так что оно имеет больше двух натуральных делителей и, следовательно, является составным.

499. Число 3672 оканчивается четной цифрой и поэтому делится на 2, так что имеет больше двух натуральных делителей и, следовательно, не является простым.

500. Число 2686 оканчивается четной цифрой и поэтому делится на 2, так что имеет больше двух натуральных делителей и, следовательно, не является простым.

501. Число 5013 делится на 3, так как сумма его цифр делится на 3, и поэтому оно не является простым, по той же причине не является простым число 5019, а число 5015 делится на 5, так что остается первый вариант ответа.

502. Последнее число делится на 5, а два первых делятся на 3.

503. Число 347 743 делится на 11, число 4823 — на 3, второе число «красивое» — оно делится на 73, значит, оставшееся число простое, и правильный вариант ответа — четвертый.

504. Числа $1589^2 - 1$, $5447^4 - 1$ и $9349^3 - 1$ — четные и не равны 2, так что они составные. По формуле суммы кубов:

$$5398^3 + 1 = (5398 + 1)(5398^2 - 5398 + 1),$$

где оба множителя не равны 1, и следовательно, это число тоже составное.

505. Последнее из чисел выбивается из общего ряда. Однако прямая проверка, является ли оно простым, потребует слишком много времени, даже если вы знаете, что достаточно искать лишь такие простые делители, которые меньше $\sqrt{2113} < 46$, т.е. числа 2, 3, 5, 7, ..., 41, 43.

Поэтому посмотрим повнимательнее на первые три варианта ответов. Первое из заданных чисел является разностью кубов, второе число может быть представлено в виде разности квадратов, а третье — в виде разности пятых степеней. Но разность степеней натуральных чисел с одинаковыми показателями делится на разность оснований (см. Компендиум), поэтому все эти числа — составные и правильный вариант ответа — четвертый.

506. Так как 95 делится на 5, а $32 = 2^5$, то первое число является суммой пятых степеней, и значит, делится на сумму оснований (см. Компендиум), т.е. является составным числом. Аналогично второе и третье числа являются суммами кубов: 36 и 33 делятся на 3, $125 = 5^3$, $343 = 7^3$, поэтому оно делится на сумму оснований, т.е. является составным. А четвертое число оканчивается цифрой 5, таким образом, все заданные числа — составные.

507. Так как $100! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 99 \cdot 100$ делится на любое натуральное число, меньшее 100, то на 71, на 73, на 75 и на 77 оно делится, а следовательно, все заданные суммы являются составными числами.

508. Так как самое маленькое простое число — 2, то 3 тоже нельзя представить в требуемом виде. Числа 27 и 53 — нечетные, единственное четное простое число 2, но $27 - 2 = 25$ и $53 - 2 = 51$ — числа составные. Поэтому правильный вариант четвертый.

Комментарий. Пользуясь таблицей простых чисел, несложно подобрать «строгое» решение: $150 = 131 + 19$.

509. Если в записи чисел только тройки, то каждое слагаемое, а значит, и сумма, делятся на 3. Так как 3000 — единственное число среди указанных, которое делится на 3, то правильный ответ третий.

510. Сумма из восьми слагаемых, записанных с помощью одних только четверок, никогда не оканчивается нулем. По этой же причине число слагаемых не может быть равно 12 и 14. Проверим число 10: поскольку 444 + 44 это «почти пятьсот», сначала попробуем получить «точно пятьсот»: $444 + 44 + 4 + 4 + 4 = 500$, откуда

$$444 + 444 + 44 + 44 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 1000,$$

т.е. сумма из десяти слагаемых существует. Следовательно, верный ответ — второй.

511. Так как число 101 010 101 — нечетное, то слагаемые различной четности. Четное простое число — единственное, так что остается проверить, будет ли простым число $101\,010\,101 - 2 = 101\,010\,099$. По признаку делимости оно делится на 3, значит, будучи заведомо больше трех, составное, так что верный ответ — первый.

512. Найдем значение заданной суммы при $n = 2$: $1 + 8 = 9$ — составное число. Поэтому первый и третий варианты ответа неправильные. Четвертый вариант ответа тоже неправдоподобен, однако это нужно обосновать. Проще всего обратиться к четности-нечетности: поскольку кубы натуральных чисел имеют ту же четность, что сами числа, то очевидно, что суммы из трех, семи, *одиннадцати* и т.д. слагаемых будет содержать четное число нечетных слагаемых, и следовательно, будет четным числом. Четность суммы при $n = 11$ достаточна для того, чтобы исключить четвертый вариант ответа. Остается только второй вариант — он и является правильным.

Комментарий. Математическое решение задачи несложно, но требует знания формулы $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

513. Первое утверждение легко опровергнуть — для этого достаточно привести контрпример: $4 + 9 = 13$. Так же просто опровергнуть и второе утверждение: $2 + 5 = 7$, а 7 — простое число. Сумма $7 + 4 = 11$ показывает, что третье утверждение также неверно.

Четвертое утверждение верно и это легко доказать. Пусть число n — составное, p — простое, а их произведение — число m. По условию оба числа n и p отличны от единицы. Тогда $m = np$, где $n \neq 1$ и $p \neq 1$, т.е. число m — составное.

514. Самое большое из чисел нечетно, второе не делится на 3, следующее по величине число 984 делится на 4, так как $84 = 21 \cdot 4$ и на 3, так как 9 и $8 + 4$ делятся на 3. На последнее число уже не смотрим.

515. Первый вариант неправильный из-за того, что среди данных чисел есть нечетное. Проверку остальных вариантов можно сократить, начав с третьего: если оно делится на 6, то правильный ответ второй, если не делится, то придется проверить еще первое число — если оно делится, то правильный ответ четвертый, если нет — третий. Так как третье число 222 222 четное с суммой цифр 12, то, следовательно, оно делится на 6 и правильным является второй вариант ответа.

516. Так как среди указанных чисел третье — нечетное, то первый и второй варианты ответа неправильные. Из оставшихся вариантов ответа следует, что либо второе делится на 18, либо ни одно. Так как число 15 156 — четное с суммой цифр 18, то, значит, оно делится и на 2, и на 9, т.е. правильным является третий вариант ответа.

517. Проверку вариантов ответа можно сократить, если начать с первого числа: если его сумма с числом 111 не делится на 9, то первый и четвертый варианты неправильные, и тогда надо будет проверить третье число. Если же она делится на 9, то неправильные варианты — второй и третий, и тогда останется проверить второе или четвертое число.

Так как сумма цифр числа 112 233 равна 12, то его сумма с числом 111 не делится на 9, поэтому нам осталось проверить третье число: сумма цифр числа 36 300 тоже равна 12, и поэтому правильным является второй вариант ответа.

518. Следует твердо знать, что произведение двух последовательных натуральных чисел всегда четно. Несуразность остальных ответов легко подтвердить контрпримерами: $1 \cdot 2 = 2$ — простое и не делится на 3, $10 \cdot 11 > 72$.

519. Чтобы опровергнуть первые два ответа, достаточно взять числа с цифрами разной и одинаковой четности, например,

$$21 - 12 = 9 \quad \text{и} \quad 42 - 24 = 18,$$

тем самым опровергнут и третий ответ, и получается, что разность любого двузначного числа и числа, записанного теми же цифрами в обратном порядке, всегда делится на 9.

Однако такое «доказательство» годится только при выполнении теста и не должно удовлетворять «ученика разумного».

520. Предложения а) и в) не могут быть верными одновременно — они являются *отрицаниями* друг друга, но одно из них обязательно верно: это каждому хорошо известный — по сути, а не по названию — логический *закон исключенного третьего*. То же самое можно сказать и о предложениях б) и г) и, таким образом, из заданных предложений всегда верны ровно 2, и правильный вариант ответа — второй.

521. Если a делится на b, то a^2 делится на b^2. Верно и обратное: если a^2 делится на b^2, то a делится на b — это вполне очевидно и строго доказано в задаче 52. Следовательно, из предложений а) и в) верно ровно одно, точно так же верно ровно одно из предложений б) и г). Иными словами, среди данных предложений всегда верны ровно 2.

522. Предложения а) и в) равносильны, так же как и предложения б) и г), так что по крайней мере 2 из данных предложений верны. С другой стороны, предложения а) и б), хотя и кажутся противоречащими друг другу, в действительности могут быть одновременно верными — при $a = b = 1$, и при этих значениях верны все 4 данных предложения.

523. При $a = 1$, $b = -1$ верны все 4 предложения.

524. Из предложений а) и в) верно ровно одно, так же как из предложений б) и г). Поэтому верных предложений не больше двух и поскольку при $a = 1$, $b = -1$ предложения а) и б) верны, то правильный ответ — второй.

525. Если предложение а) верно, то верно и предложение г): если бы оно было неверно, то при условии «b не делится на a» число a делилось бы на b, а это противоречит предложению а). Верно и обратное: если верно предложение г), то верно и а): если бы при условии «a делится на b» число b не делилось бы на a, то это противоречило бы предложению г). Поэтому предложения а) и г) либо оба верны, либо оба неверны.

526. Начнем с примеров. Возьмем, например, числа 1, 1, 2 — их сумма 4 делится на 4, а сумма кубов 10 на 4 не делится и мы можем вариант 1 отвергнуть. А для чисел 1, 1, 3 сумма делится на 5, но сумма кубов 29 на 5 не делится, поэтому второй вариант ответа мы также отклоняем. Далее, 1 + 1 + 4 делится на 6, а $1^3 + 1^3 + 4^3 = 66$ тоже делится на 6 — этот пример ничего не опроверг, но отсюда, конечно, не следует что вариант 3 — правильный, отнесем его в разряд «подозрительных». Для $n = 7$ рассмотрим привычный пример: 1 + 1 + 5 делится на 7, $1^3 + 1^3 + 5^3 = 127$ не делится на 7, таким образом, правильный вариант ответа — третий.

Комментарий. В приведенном решении утверждение: «Если сумма трех натуральных чисел делится на 6, то и сумма их кубов также делится на 6» доказано путем исключения из числа приведенных к этой задаче ответов всех неверных вариантов — при решении задач с выбором ответа этот путь довольно часто является оптимальным, а иногди и единственно возможным (см., например, задачу «о числах

Мерсенна»). Тем не менее в простых случаях нужно уметь решать задачи и «по-честному». Приведем алгебраическое решение данной задачи.

Пусть $a + b + c$ делится на 6. Попробуем выразить $a^3 + b^3 + c^3$ из формулы куба суммы:

$$(a+b+c)^3 = ((a+b)+c)^3 = (a+b)^3 + 3(a+b)^2 c +$$
$$+3(a+b)c^2 + c^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3(a+b)^2 c +$$
$$+3(a+b)c^2 + c^3 = \left(a^3 + b^3 + c^3\right) + \left(3a^2b + 3ab^2\right) +$$
$$+\left(3a^2c + 3ac^2\right) + \left(3b^2c + 3bc^2\right),$$

откуда

$$a^3 + b^3 + c^3 = (a+b+c)^3 - \left(3a^2b + 3ab^2\right) - \left(3a^2c + 3ac^2\right) -$$
$$-\left(3b^3c + 3bc^2\right),$$

где в первой скобке число делится на 6 по условию, а в каждой из трех последних — сумма чисел одинаковой четности, делящихся на 3, т.е. тоже делятся на 6. Таким образом, сумма кубов данных чисел также делится на 6.

Другое рассуждение, основанное на свойствах деления с остатком, вы найдете в решении следующей задачи.

527. Если число k четно, то его куб также четный, а если k нечетно, то и его куб нечетный, и следовательно, остатки от деления на 2 любого числа и его куба равны. Точно так же равны остатки от деления на 3 числа и его куба: если k дает остаток 0, 1, 2, то k^3 дает те же остатки именно в тех же случаях. Но тогда заданное утверждение автоматически верно и для 6: если число делится на 2 и на 3, то оно делится на 6.

Но числа 2, 3 и 6 встречаются дважды — в третьем и четвертом вариантах ответа. Поэтому нам придется еще проверить число 5. При делении на k возможны остатки 0, 1, 2, 3, 4, а тогда остатки куба — это 0, 1, 4, 4, 1, т.е. в данном случае ситуация сложнее: надо доказать, что заданное утверждение действительно неверно, а для этого нужно привести контрпример. Самая естественная попытка — рассмотреть числа 1, 1 и 3: их сумма делится на 5, а сумма их кубов 29 на 5 не делится.

528. Число 439 делится на 3 с остатком 1, чтобы заданная разность делилась на 3 надо, чтобы с остатком 1 делилось и «уменьшаемое» число. Так как первое число удовлетворяет этому свойству, а третье нет, то правильным является четвертый вариант ответа.

529. Первое и третье отбрасываем как четные (число $16k + 9$ всегда нечетное), близко к третьему числу — 320, которое делится на 16, поэтому остаток от деления на 16 числа 311 равен 7. Оставшееся число можно смело указывать, оставляя грамотность подготовки теста на совести составителей и организаторов тестирования.

530. Так как число 5 при делении на 7 и 8 дает остатки 5, то третий вариант ответа не может быть неправильным, и значит, является правильным.

Комментарий. Приведенное решение требует, на наш взгляд, определенного умственного напряжения — в отличие от следующего, «честного» решения: если $m = 56n + r$ $(0 \le r < 56)$, то $m = 7 \cdot 8n + r$ и по условию задачи $r = 5$.

531. Найдем среди чисел вида $5k + 3$ натуральное число, которое при делении на 9 дает остаток 7: 8, 13, 18, 23, 28, 33, 38, 43 — стоп! При делении на 45 число 43 дает остаток 43, а следовательно, четвертый вариант ответа не может быть неправильным, он и является правильным.

532. Первые три числа делятся на 3, но, будучи меньше 12, при делении на 12 дают в остатке самих себя. Поэтому эти варианты не являются неверными. Остается вариант 4.

533. В данной ситуации вполне правомерно опровергнуть первые три утверждения, приведя контрпримеры: число 7 удовлетворяет условию, но при делении его на 15 в остатке мы будем иметь 7, т.е. не 1, не 2 и не 3.

Однако надо уметь давать и «настоящее» объяснение. Пусть k — любое из таких чисел. Первое высказывание означает, что $k = 5p + 2$, откуда заключаем, что, например, утроенное число делится на 15 с остатком 6, а число, в шесть раз большее данного — с остатком 12.

Точно так же, согласно второму высказыванию, $k = 3q + 1$, можно сделать вывод, что число, в пять раз большее данного, делится на 15 с остатком 5.

Остается «скомбинировать» эти «разы» так, чтобы разность давала само число — тогда мы и узнаем остаток. Такая комбинация на самом деле уже получена:

$$6k = 30p + 12, \quad 5k = 15q + 5, \text{ откуда}$$
$$k = 6k - 5k = 15\left(2p - q\right) + 7,$$

т.е. остаток равен 7.

538. Любое натуральное число можно представить в одном из трех видов: $3k$, $3k + 1$ и $3k - 1$. Возведя каждое из этих выражений в квадрат, получим, что остаток от деления точного квадрата на 3 может быть равен только одному из чисел 0 или 1. Поэтому правильный ответ указан под номером 2.

539. Квадрат четного числа делится на 4 без остатка, нечетного — с остатком 1. Поэтому правильный ответ указан под номером 3.

540. Если данная дробь является целым числом, т.е. $4n + 7$ делится на $n + 3$, то $4n + 7 - 4\left(n + 3\right) = -5$ также делится на $n + 3$, так что $n + 3 \in \{1, -1, 5, -5\}$ и $n \in \{-2, -4, 2, -7\}$.

541. Данная дробь прежде всего является целым числом при $n = -7$, а при остальных n должно выполняться неравенство,

$$\left|\frac{n+7}{4n+3}\right| \ge 1, \quad |n+7| \ge |4n+3|, \quad (n+7)^2 \ge (4n+3)^2,$$

$$(4n+3)^2 - (n+7)^2 \le 0, \quad (5n+10)(3n-4) \le 0, \quad -2 \le n \le \frac{4}{3};$$

$$n = -2, -1, 0, 1.$$

Непосредственная подстановка показывает, что данная дробь является целым числом при $n = -2$ и $n = -1$, так что правильный вариант ответа — третий.

542. Если данная дробь является натуральным числом, то ее числитель не меньше ее знаменателя, т.е. $n+3 \ge 2n+5$, $n \le 1$, $n = 1$. Но при $n = 1$ дробь равна $\frac{4}{7}$, так что она не является целым числом ни при каких натуральных n, и правильный вариант ответа — первый.

543. Так как $n \ge 2$ — иначе данная дробь отрицательна и неравенство $3n+20 \ge 8n-3$ или $5n \le 23$ выполняется при $n \le 4$, то достаточно проверить только $n = 2, 3, 4$. При этих значениях n числитель дроби равен 26, 29, 32, а знаменатель — 13, 21 и 29, так что дробь является целым числом при $n = 2$, и правильный вариант ответа — второй.

544. Так как $n \ge 3$ — иначе данная дробь отрицательна, и неравенство $11n+20 \ge 14n-9$ или $3n \le 29$ выполняется при $n \le 9$, то достаточно проверить только числа n от 3 до 13. Проверку этих n удобно делать с помощью таблицы:

n	3	4	5	6	7	8	9
$11n+20$	53	64	75	86	97	108	119
$14n-27$	15	29	43	57	71	85	99

Из этой таблицы видно, что данная дробь не может быть целым числом, так что правильный вариант ответа — первый.

Комментарий. При заполнении этой таблицы лучше пользоваться не столько умножением, сколько сложением: в обеих строках стоят арифметические прогрессии, так что вычислив значения при $n = 3$ их первые члены, далее проще прибавлять разность соответствующей прогрессии.

Сравнительно короткое решение этой задачи на основе соображений делимости идейно богаче и, пожалуй, не сложнее: если $11n + 20$ делится на $14n - 9$, то $14(11n+20) - -11(14n-9) = 379$ делится на $14n - 9$ и поскольку 379, как легко проверить, не делится на простые числа, меньшие $\sqrt{379} < 20$, т.е. на 3, 7, 11, 13, 17 и 19, то оно простое, и стало быть, данная дробь может быть целым числом только в случае, когда $14n - 9$ равно ± 1 или ± 379, т.е. $14n$ равно 10, 8, 388, -371. Но ни одно из этих чисел не делится на 14, так что данная дробь не может быть целым числом.

545. Так как $\frac{12n+46}{4n+3} = 3 + \frac{37}{4n+3}$, то данная дробь является целым числом, если 37 делится на $4n+3$, т.е. $4n+3$ равно ± 1 или ± 37. Перебрав эти 4 возможности, получим значения $n = -1$ и $n = -10$, так что правильный вариант ответа — третий.

546. Непосредственно проверяется, что правильный ответ 4.

547. Будем рассматривать сначала прогрессии из трех членов: a, aq, aq^2. Сумма такой прогрессии равна $a\left(1+q+q^2\right)$ и при выполнении условия задачи должна быть составным числом. Однако числа 131 и 137 — простые: достаточно проверить их «потенциальные» простые делители, меньшие или равные $\sqrt{137} < 12$ (см. Компендиум). Ясно, что ни на 3, ни на 11 они не делятся по соответствующим признакам делимости, и на 7 также не делятся: $137 = 14 - 3$, $131 = 140 - 9$.

Число 133 составное: $133 = 7 \cdot 19$ и поэтому a равно 7 или 19, а $1+q+q^2$ соответственно равно 19 или 7. При этом равенство $1+q+q^2 = 7$ выполняется при $q = 2$, так что прогрессия 19, 38, 76 имеет сумму 133, и правильный вариант ответа — второй.

Комментарий. Здесь, очевидно, воспользуемся «законом задач с выбором ответа», а для «честного» решения мы должны доказать, что уравнение $1+q+q^2 = 133$ действительно имеет решение в натуральных числах. Но это уравнение можно переписать в виде $q^2+q-132 = 0$ и его натуральный корень нетрудно найти по общей формуле корней, а еще проще — по теореме Виета: $q = 11$.

548. Если прогрессия 1, q, q^2 удовлетворяет условию, то ее сумма $1+q+q^2$ равна одному из заданных чисел, но соответствующие уравнения решать не хочется и поэтому мы рассмотрим остатки от деления q на маленькие простые числа.

Ясно, что при любом q — и четном, и нечетном — сумма $1+q+q^2$ нечетна, так что варианты ответов 2 и 4 отпадают. А если число q при делении на 3 дает остатки 0, 1 и 2 соответственно, то эта сумма дает остатки 1, 0 и 1. Сумма цифр числа 20 021 равна 5 и при делении на 3 дает 2, а значит, и само число дает остаток 2 и этот вариант ответа неверен, так что правильный вариант ответа — третий.

Комментарий. В отличие от предыдущей задачи, при «честном» решении возникает уравнение $1+q+q^2=20\,022$, а «лобовое» решение этого квадратного уравнения связано с очень неприятной «арифметикой», но мы попробуем подобрать его натуральный корень.

Так как это уравнение можно переписать в виде $q(q+1)=20\ 022$, то нам требуется разложить $20\ 022$ в произведение двух последовательных натуральных чисел. Ясно, что q находится в пределах $\sqrt{20022}$ или $\sqrt{20000}=100\sqrt{2}=$ $=100\cdot 1{,}41\ldots\approx 141$, и проверим соответствующие числа, и в первую очередь, само число 141. Эта первая попытка оказывается удачной: $141\cdot 142=20\,022$, таким образом, вариант ответа 3 правилен, не только логически, но и математически.

549. Пусть прогрессия $1+q+q^2$ удовлетворяет условию, т.е. $1+q+q^2$ равна одному из заданных чисел, т.е. $q^2+q=a-1$, и мы попытаемся подобрать число q так, чтобы оно оказалось корнем одного из этих уравнений, т.е. представить число $a-1$ в виде произведения двух последовательных натуральных чисел.

Так как $\sqrt{116993}\approx\sqrt{120000}=342\cdot 343=200\sqrt{3}\approx$ $\approx 200\cdot 1{,}71\approx 342$, то испытания начнем с числа 342. Так как $342\cdot 343$ оканчивается цифрой 6 и после прибавления 1 не получится ни одного из заданных чисел, а произведение $343\cdot 344$ равно 117 992, то правильный вариант ответа — второй.

Комментарий. Заметим сразу же, что приведенное решение практически является «честным» — для его логического доведения до конца в «полной» формулировке: «Доказать, что из чисел 116 993, 117 993, 118 993, 119 993 только 117 993 может быть суммой геометрической прогрессии с

первым членом 1 и знаменателем — натуральным числом», достаточно проверить, что остальные из заданных чисел не могут быть представлены в виде произведения двух последовательных натуральных чисел. Это нетрудно проверить: $341\cdot 342=116\,622<116\,993$, произведение $342\cdot 343$ оканчивается на 6, произведения $344\cdot 345$ и $345\cdot 346$ оканчиваются на 0, а $346\cdot 347=120\,062>119\,993$.

Можно вообще обойтись без арифметики, в особенности если простые преобразования делать в уме: соседние произведения $n(n+1)$ и $(n+1)(n+2)$ различаются на $2(n+1)$, а числа в первом и третьем равенствах отличаются от числа во втором — верном — равенстве на 1000, следовательно, соответствующие равенства неверны. Аналогично отвергается и последнее число.

Отметим еще, что отбор правильного варианта ответа по остаткам от деления на маленькие простые числа в этой задаче не приводит к успеху. Так, все заданные числа нечетны, т.е. рассмотрение остатков от деления на 2 не позволяет исключить ни одно из них. Возможные остатки от деления на 3, т.е. 0 и 1 сохраняют 2 варианта — второй и третий, а если «упорствовать», то можно убедиться, что этот путь, если и приведет к решению, то нескоро.

550. Так как $1+2+2^2+2^3+2^4=31$, то правильный вариант ответа — второй.

551. Пусть q — знаменатель геометрической прогрессии, удовлетворяющей условию задачи. Сумма этой прогрессии равна:

$$a\left(1+q+q^2+q^3\right)=a\left((1+q)+q^2(1+q)\right)=$$
$$=a(1+q)\left(1+q^2\right)=800$$

Заметим теперь, что число q^3 при возрастании q растет очень быстро, и это дает шанс на успех эксперимента. Составим таблицу:

q	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$q+1$	2	3	4	5	6	7	8	9	10
q^2+1	2	5	10	17	26	37	50	73	82